

Государственное образовательное учреждение «Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко»

Физико-математический факультет
Физико-технический институт
Кафедра высшей и прикладной математики и информатики

Приложение 8, 9

к ОПОП ВО 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль: «Системное программирование и компьютерные технологии»

УТВЕРЖДАЮ:

Директор физико-технического института



Д.И. Калошин

« 31 » 2025 г.

**ПРОГРАММА
ГОСУДАРСТВЕННОЙ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ**

по основной профессиональной образовательной программе бакалавриата

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль подготовки: «Системное программирование и компьютерные технологии»

Квалификация выпускника: бакалавр

Трудоемкость (в зачетных единицах): 9

Сроки проведения: с 28 мая по 6 июля 2029 года

Форма обучения: очная

Год набора: 2025

Тирасполь
2025

Программа государственной итоговой аттестации (ГИА) разработана в соответствии с ГОС ВО, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10.01.2018 г. № 9 и учебным планом по направлению подготовки бакалавриата 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (профиль «Системное программирование и компьютерные технологии»).

Программу составил:



А.В. Коровай

Программа государственной итоговой аттестации рассмотрена на заседании кафедры высшей и прикладной математики и информатики

Протокол от « 18 » декабря 2024 г. № 5

Зав. кафедрой ВПИИ



А.В. Коровай

Программа государственной итоговой аттестации рассмотрена на заседании учебно-методической комиссии физико-технического института

Протокол от « 23 » января 2025 г. № 5

Председатель УМК физико-технического института



С.В. Помян

СОГЛАСОВАНО:

/ Начальник УМУ



Е.Ф. Командарь

1. Общие положения

Целью государственной итоговой аттестации является определение соответствия результатов освоения обучающимся основной профессиональной образовательной программы соответствующим требованиям федерального государственного образовательного стандарта (ГОС ВО) по направлению подготовки бакалавриата 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (профиль «Системное программирование и компьютерные технологии»). Государственная итоговая аттестация проводится государственными экзаменационными комиссиями (ГЭК).

К государственной итоговой аттестации допускается обучающийся, не имеющий академической задолженности и в полном объеме выполнивший учебный план или индивидуальный план по своей образовательной программе.

Задачами государственной итоговой аттестации являются:

- оценка способности самостоятельно решать на современном уровне задачи из области своей профессиональной деятельности, профессионально излагать специальную информацию, правильно аргументировать и защищать свою точку зрения;
- решение вопроса о присвоении выпускнику квалификации «Бакалавр» по результатам ГИА и выдаче выпускнику документа (диплома) о высшем образовании;
- разработка рекомендаций по совершенствованию подготовки выпускников по данному направлению подготовки на основании результатов работы государственной экзаменационной комиссии.

Для выпускников из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья ГИА проводится с учетом особенностей их психофизического развития, их индивидуальных возможностей и состояния здоровья (далее - индивидуальные особенности).

При проведении ГИА обеспечивается соблюдение следующих общих требований:

- присутствие в аудитории ассистента (ассистентов), оказывающего выпускнику из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья необходимую техническую помощь с учетом его индивидуальных особенностей (занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, общаться с ГЭК);
- использование необходимых выпускнику из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья технических средств при прохождении ГИА с учетом их индивидуальных особенностей.

По письменному заявлению выпускника из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья продолжительность сдачи государственного аттестационного испытания может быть увеличена по отношению к установленной продолжительности его сдачи:

- продолжительность сдачи государственного экзамена, проводимого в письменной форме, но не более чем на 90 минут;
- продолжительность подготовки выпускника из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья к ответу на государственном экзамене, проводимом в устной форме, но не более чем на 20 минут;
- продолжительность выступления выпускника из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья при защите ВКР, но не более чем на 15 минут.

В зависимости от индивидуальных особенностей выпускника с ограниченными возможностями здоровья обеспечивается выполнение следующих требований при проведении государственного аттестационного испытания:

а) для слепых:

- задания и иные материалы для сдачи государственного аттестационного испытания оформляются рельефно-точечным шрифтом Брайля или в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением для незрячих, либо зачитываются ассистентом;

- письменные задания выполняются обучающимися на бумаге рельефно-точечным шрифтом Брайля или на компьютере со специализированным программным обеспечением для слепых, либо надиктовываются ассистенту;

- при необходимости обучающимся предоставляется комплект письменных принадлежностей и бумага для письма рельефно-точечным шрифтом Брайля, компьютер со специализированным программным обеспечением для слепых;

б) для слабовидящих:

- задания и иные материалы для сдачи государственного аттестационного испытания оформляются увеличенным шрифтом;

- обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс;

- при необходимости обучающимся предоставляется увеличивающее устройство, допускается использование увеличивающих устройств, имеющихся у обучающихся;

в) для глухих и слабослышащих, с тяжелыми нарушениями речи:

- обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости обучающимся предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

- по их желанию государственные аттестационные испытания проводятся в письменной форме;

г) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата (тяжелыми нарушениями двигательных функций верхних конечностей или отсутствием верхних конечностей):

1) письменные задания выполняются обучающимися на компьютере со специализированным программным обеспечением или надиктовываются ассистенту;

2) по их желанию государственные аттестационные испытания проводятся в устной форме.

Выпускники с ограниченными возможностями здоровья не позднее чем за три месяца до начала ГИА, подают письменное заявление о необходимости создания для них специальных условий при проведении ГИА с указанием его индивидуальных особенностей. К заявлению прилагаются документы, подтверждающие наличие у выпускника индивидуальных особенностей (при отсутствии указанных документов в Университете).

В заявлении выпускник должен указать на необходимость (отсутствие необходимости) присутствия ассистента на государственном аттестационном испытании, необходимость (отсутствие необходимости) увеличения продолжительности сдачи государственного аттестационного испытания по отношению к установленной продолжительности (для каждого государственного аттестационного испытания).

2. Условия подготовки и процедура проведения ГИА.

Государственная итоговая аттестация в полном объеме относится к базовой части (Блок 3) учебного плана основной образовательной программы бакалавриата по данному направлению подготовки.

ГИА проводится на русском языке.

Государственная итоговая аттестация проводится в форме государственного экзамена и защиты выпускной квалификационной работы (ВКР).

Общая трудоемкость ГИА составляет 9 зачетных единиц или 324 академических часа. Продолжительность ГИА составляет 6 недель.

Государственная итоговая аттестация включает:

- подготовку к сдаче и сдача государственного экзамена;

- выполнение и защиту выпускной квалификационной работы.

Целью государственного экзамена является выявление уровня профессиональной подготовки выпускника и его способностей к решению практических задач в области его профессиональной деятельности.

Государственный экзамен проводится до защиты выпускной квалификационной работы. Государственный экзамен включает наиболее значимые вопросы по обязательным

дисциплинам базовой и вариативной части учебного плана. Государственный экзамен проводится устно. Перед государственным экзаменом проводится консультирование обучающихся по вопросам, выносимым на государственный экзамен.

Государственный экзамен проводится на заседании государственной экзаменационной комиссии (ГЭК). При проведении устного экзамена экзаменуемому предоставляется 40 минут для подготовки ответа. На вопросы экзаменационного билета обучающийся отвечает публично. Члены ГЭК вправе задавать дополнительные вопросы с целью выявления глубины знаний обучающегося по рассматриваемым темам. Продолжительность устного ответа на вопросы экзаменационного билета не должна превышать 30 минут. В процессе подготовки к ответу экзаменуемому разрешается пользоваться данной программой ГИА и литературой, перечень которой указан в данной программе.

Выпускная квалификационная работа (ВКР) представляет собой работу, демонстрирующую уровень подготовленности выпускника к самостоятельной профессиональной деятельности.

Выпускная квалификационная работа выполняется в виде выпускной квалификационной работы бакалавра.

Тексты ВКР проверяются на объём заимствования в соответствии с утвержденными локальными нормативными актами Университета.

При защите ВКР выпускники должны, опираясь на полученные знания, умения и навыки, показать способность самостоятельно решать задачи профессиональной деятельности, излагать информацию, аргументировать и защищать свою точку зрения.

При проведении защиты ВКР обучающемуся предоставляется 10 минут для доклада. Члены ГЭК вправе задавать дополнительные вопросы с целью выявления глубины знаний обучающегося по рассматриваемым темам.

3. Порядок подачи и рассмотрения апелляции.

В соответствии с Положением «О порядке организации и проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам высшего профессионального образования (программам бакалавриата, специалитета, магистратуры) в государственном образовательном учреждении «Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко» выпускник имеет право подать в Апелляционную комиссию (АК) в письменное заявление о нарушении, по его мнению, установленной процедуры проведения государственного аттестационного испытания (далее – апелляция).

В состав АК входят председатель (ректор Университета или лицо, исполняющее его обязанности, или лицо, им уполномоченное) и не менее трех членов. Состав АК формируется из числа лиц, относящихся к профессорско-преподавательскому составу Университета и не входящих в состав ГЭК.

Апелляция подается лично выпускником или родителями (законными представителями) несовершеннолетнего выпускника в АК не позднее следующего рабочего дня после объявления результатов государственного аттестационного испытания.

Для рассмотрения апелляции секретарь ГЭК не позднее следующего рабочего дня с момента поступления апелляции направляет в АК протокол заседания ГЭК, заключение председателя ГЭК о соблюдении процедурных норм при проведении государственного аттестационного испытания, а также письменные ответы выпускника (при их наличии) для рассмотрения апелляции по проведению государственного экзамена), ВКР, отзыв руководителя ВКР и рецензию/рецензии (при наличии) для рассмотрения апелляции по проведению защиты ВКР.

Апелляция рассматривается в течение не более двух рабочих дней со дня подачи апелляции на заседании АК, на которое приглашаются председатель ГЭК и выпускник, подавший апелляцию.

Решение АК доводится до сведения выпускника в течение трех рабочих дней со дня заседания АК. Факт ознакомления выпускника, подавшего апелляцию, с решением АК удостоверяется его подписью.

АК на своем заседании принимает одно из следующих решений:

– об отклонении апелляции, если изложенные в ней сведения о нарушениях процедуры проведения ГИА обучающегося не подтвердились и/или не повлияли на результат ГИА;

– об удовлетворении апелляции, если изложенные в ней сведения о допущенных нарушениях процедуры проведения ГИА обучающегося подтвердились и повлияли на результат ГИА.

В последнем случае результат проведения ГИА подлежит аннулированию, в связи с чем протокол о рассмотрении апелляции не позднее следующего рабочего дня передается ГЭК для реализации решения АК.

Обучающемуся предоставляется возможность пройти ГИА в дополнительные сроки, установленные Физико-техническим институтом.

Решение АК является окончательным и пересмотру не подлежит. Рассмотрение апелляции не является передачей государственного аттестационного испытания.

Выпускник, подавший апелляцию, имеет право присутствовать при рассмотрении апелляции. С несовершеннолетним выпускником имеет право присутствовать один из родителей (законных представителей). Указанные лица должны иметь при себе документы, удостоверяющие личность.

Повторное проведение государственного аттестационного испытания осуществляется в присутствии одного представителя АК не позднее даты завершения обучения выпускника, подавшего апелляцию, в соответствии с ГОС. Заявления на апелляцию после повторного проведения государственного аттестационного испытания не принимаются.

4. Программа Государственного экзамена по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», профиль «Системное программирование и компьютерные технологии».

4.1. Требования к компетенциям выпускника.

В ходе ГИА обучающийся должен продемонстрировать сформированность следующих компетенций.

Универсальные компетенции (УК):

– способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1);

– способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений (УК-2);

– способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде (УК-3);

– способен осуществлять деловую коммуникацию в устной и письменной формах на государственном языке Российской Федерации и иностранном (ых) языке (ах) (УК-4);

– способен воспринимать межкультурное разнообразие общества в социально-историческом, этическом и философском контекстах (УК-5);

– способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни (УК-6);

– способен поддерживать должный уровень физической подготовленности для обеспечения полноценной социальной и профессиональной деятельности (УК-7);

– способен создавать и поддерживать в повседневной жизни и в профессиональной деятельности безопасные условия жизнедеятельности для сохранения природной среды, обеспечения устойчивого развития общества, в том числе при угрозе и возникновении чрезвычайных ситуаций и военных конфликтов (УК-8);

– способен принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности (УК-9);

способен формировать нетерпимое отношение к коррупционному поведению (УК-10);

Общепрофессиональные компетенции (ОПК):

– способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1);

– способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач (ОПК-2);

– способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности (ОПК-3);

– способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности (ОПК-4);

способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения (ОПК-5);

Профессиональные компетенции (ПК):

– Способен демонстрировать общенаучные базовые знания естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой (ПК-1);

– Способен использовать математический аппарат, методологии программирования и современные компьютерные технологии для эффективного решения прикладных задач и научно-исследовательской деятельности (ПК-2);

– Способен демонстрировать знания современных языков программирования, операционных систем, офисных приложений, информационно- телекоммуникационной сети "Интернет", способов и механизмов управления данными, принципов организации, состава и схемы работы операционных систем (ПК-3);

– Способен разрабатывать и применять алгоритмические и программные решения в области системного и прикладного программного обеспечения (ПК-4).

4.2. Структура Государственного экзамена

Экзамен носит комплексный характер. Билет включает два вопроса:

1 вопрос – по одному из разделов прикладной математики;

2 вопрос – по программированию и компьютерным технологиям.

Вопросы имеют практическую направленность и представляют собой задачи по базовым дисциплинам, составляющих основу будущей профессии выпускника («Математический анализ», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Численные методы», «Исследование операций», «Программирование на языке C#», «Технология разработки и защиты баз данных», «Паттерны проектирования», «Построение и анализ алгоритмов»).

4.3. Требования к ответу на государственном экзамене и критерии оценки

Реализуемые компетенции при ответе на вопросы государственного экзамена

№ п/п	Вопрос	Проверяемые компетенции	Примечание
1	Математический анализ Дифференциал функции одной переменной. Приближенное вычисление значений функции посредством дифференциала.	УК-1; УК-2; УК-3; УК-4; УК-5; УК-6; УК-7; УК-8; УК-9; УК-10; ОПК-1; ОПК-	

	<p>Неопределённый интеграл. Интегрирование по частям.</p> <p>Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты.</p> <p>Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условие экстремума для случая функции двух переменных.</p> <p>Определение ряда и его сходимости. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.</p>	<p>2; ОПК-3; ОПК-4; ОПК-5; ПК-1; ПК-2; ПК-3; ПК-4</p>	
2	<p>Линейная алгебра и аналитическая геометрия</p> <p>Системы линейных уравнений. Матрицы и определители.</p> <p>Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.</p>	<p>УК-1; УК-2; УК-3; УК-4; УК-5; УК-6; УК-7; УК-8; УК-9; УК-10; ОПК-1; ОПК-2; ОПК-3; ОПК-4; ОПК-5; ПК-1; ПК-2; ПК-3; ПК-4</p>	
3	<p>Дифференциальные уравнения</p> <p>Методы решения линейного дифференциального уравнения первого порядка. Возможный вид общего решения линейных однородных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами.</p> <p>Функции, однородные относительно x и y. Поиск общего решения (или общего интеграла) однородного дифференциального уравнения первого порядка.</p>	<p>УК-1; УК-2; УК-3; УК-4; УК-5; УК-6; УК-7; УК-8; УК-9; УК-10; ОПК-1; ОПК-2; ОПК-3; ОПК-4; ОПК-5; ПК-1; ПК-2; ПК-3; ПК-4</p>	
4	<p>Теория вероятностей и математическая статистика</p> <p>Случайные события и их вероятности. Одномерные случайные величины и их числовые характеристики.</p> <p>Элементы теории корреляции.</p>	<p>УК-1; УК-2; УК-3; УК-4; УК-5; УК-6; УК-7; УК-8; УК-9; УК-10; ОПК-1; ОПК-2; ОПК-3; ОПК-4; ОПК-5; ПК-1; ПК-2; ПК-3; ПК-4</p>	
5	<p>Численные методы</p> <p>Решение алгебраических и трансцендентных уравнений.</p> <p>Решение систем линейных алгебраических уравнений.</p> <p>Интерполяция.</p> <p>Приближённое вычисление определённых интегралов.</p> <p>Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.</p>	<p>УК-1; УК-2; УК-3; УК-4; УК-5; УК-6; УК-7; УК-8; УК-9; УК-10; ОПК-1; ОПК-2; ОПК-3; ОПК-4; ОПК-5; ПК-1; ПК-2; ПК-3; ПК-4</p>	
6	<p>Исследование операций</p> <p>Задача линейного программирования. Двойственность в линейном программировании. Симплекс-метод.</p>	<p>УК-1; УК-2; УК-3; УК-4; УК-5; УК-6; УК-7; УК-8; УК-9; УК-10; ОПК-1; ОПК-2; ОПК-3; ОПК-4; ОПК-5; ПК-1; ПК-2; ПК-3; ПК-4</p>	
7	<p>Программирование на языке C#</p> <p>Основы языка программирования C#. Управляющие конструкции. Обработка массивов. Классы и объекты. Инкапсуляция. Перегрузка методов и операторов. Организация иерархии</p>	<p>УК-1; УК-2; УК-3; УК-4; УК-5; УК-6; УК-7; УК-8; УК-9; УК-10; ОПК-1; ОПК-2; ОПК-3; ОПК-4; ОПК-5; ПК-1; ПК-2; ПК-3; ПК-4</p>	

	классов. Интерфейсы. Обработка исключений. Делегаты, лямбда-выражения. Обобщенные коллекции. Технология Linq.		
8	Технология разработки и защиты баз данных Реляционные базы данных. Язык SQL. Создание таблиц, вставка записей. Запросы на поиск: простые, с группировкой, агрегированием, объединением таблиц.	УК-1; УК-2; УК-3; УК-4; УК-5; УК-6; УК-7; УК-8; УК-9; УК-10; ОПК-1; ОПК-2; ОПК-3; ОПК-4; ОПК-5; ПК-1; ПК-2; ПК-3; ПК-4; ПК-5	
9	Паттерны проектирования Классы и интерфейсы. Шаблоны проектирования.	УК-1; УК-2; УК-3; УК-4; УК-5; УК-6; УК-7; УК-8; УК-9; УК-10; ОПК-1; ОПК-2; ОПК-3; ОПК-4; ОПК-5; ПК-1; ПК-2; ПК-3; ПК-4	
10	Построение и анализ алгоритмов Формализация понятия алгоритма. Машина Тьюринга. Формулы подстановки. Нормальные алгоритмы Маркова. Математические основы анализа алгоритмов (асимптотические обозначения). Алгоритмы поиска в одномерном массиве. Алгоритмы сортировки в одномерном массиве с оценкой сложности $O(n)$, $O(n \log n)$, $O(n^2)$. Алгоритмы динамического программирования. Жадные алгоритмы. Алгоритмы «разделяй и властвуй».	УК-1; УК-2; УК-3; УК-4; УК-5; УК-6; УК-7; УК-8; УК-9; УК-10; ОПК-1; ОПК-2; ОПК-3; ОПК-4; ОПК-5; ПК-1; ПК-2; ПК-3; ПК-4	

Критерии оценки ответов обучающихся на экзамене.

Ответ оценивается на «отлично», если обучающийся демонстрирует:

- правильное и полное решение поставленных задач;
- способность доказать корректность и эффективность выбранного метода решения;
- глубокое овладение материалом;
- осознанный и обобщенный уровень ответа;
- умение показать значение теоретических вопросов для практики и подтвердить теоретические положения практическими примерами;
- умение раскрыть имеющийся у него практический опыт;
- логичность, последовательность, точность, обоснованность, культуру изложения ответа.

Ответ оценивается на «хорошо», если обучающийся демонстрирует:

- в целом правильное решение поставленных задач с незначительными неточностями;
- способность обосновать корректность выбранного метода решения;
- владение программным материалом на достаточно высоком уровне, но в ответе допускает некоторые неточности, незначительные ошибки, которые исправляются самим обучающимся;
- осознанный и обобщенный уровень ответа;
- умение показать значение теоретических вопросов для практики и подтвердить теоретические положения практическими примерами;
- умение раскрыть имеющийся у него практический опыт;
- логичность, последовательность, точность, обоснованность, культуру изложения ответа.

Ответ оценивается на «удовлетворительно», если обучающийся демонстрирует:

- частичное, но частичное решение поставленных задач;
- владение программным материалом при недостаточно осознанном и обобщенном уровне овладения теорией, неумение связать ее с практикой;
- слабые знания специальной литературы и дисциплины в целом;
- недостаточно высокий уровень культуры речи, логичности, последовательности изложения материала.

Ответ оценивается на «неудовлетворительно», если обучающийся демонстрирует:

- отсутствие решения задач;
- отсутствие или недостаточное знание программного материала;
- в процессе изложения материала недопустимо искажает смысл понятий и определений.

4.4. Содержание государственного экзамена

4.4.1. Контрольные вопросы для государственного экзамена

Математический анализ

1. Вычислить приближенное значение $\lg 10,21$, заменяя приращение функции ее дифференциалом.

Решение. Предполагаем $y = \lg x$, возьмём $x_0 = 10, \Delta x = 0,21$

Используем формулу для приближенного вычисления

$$y \approx y_0 + dy(x_0),$$

находим $y_0 = y(x_0) = \lg 10 = 1$

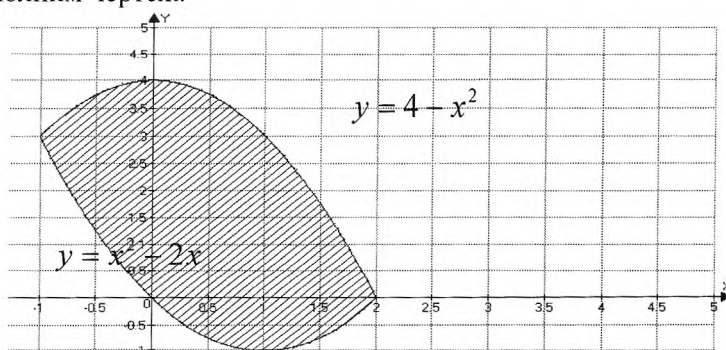
$$dy(x_0) = \frac{1}{10 \ln 10} 0,21 \approx \frac{1}{10 \cdot 2,3} 0,21 \approx \frac{0,21}{23} \approx 0,00913$$

$$y \approx 1 + 0,00913 \approx 1,00913.$$

Ответ: $\lg 10,21 \approx 1,00913$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.

Решение. Выполним чертеж.



Находим искомую площадь:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 [(4 - x^2) - (x^2 - 2x)] dx = \int_{-1}^2 (4 - 2x^2 + 2x) dx = \left(4x - \frac{2x^2}{3} + x^2 \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \left(8 - \frac{8}{3} + 4 \right) - \left(-4 - \frac{2}{3} + 1 \right) = 15. \end{aligned}$$

Ответ: 15.

3. Исследовать на экстремум функцию $u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.

Решение. Найдем частные производные 1-го порядка.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 36$$

Согласно необходимым условиям экстремума получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, найдем все стационарные точки

$$M_1(3;2); M_2(-3;-2); M_3(2;3); M_4(-2;-3).$$

Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x.$$

Проверим выполнение достаточных условий локального экстремума в каждой из точек.

$$M_1(3;2): A = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{M_1} = 18, \quad B = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{M_1} = 12, \quad C = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{M_1} = 18.$$

Т.к. $A = 18 > 0$, $AC - B^2 = 18^2 - 12^2 > 0$, то $M_1(3;2)$ – точка строгого локального минимума.

$$M_2(-3;-2): A = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{M_1} = -18, \quad B = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{M_1} = -12, \quad C = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{M_1} = -18.$$

Т.к. $A = -18 < 0$, $AC - B^2 = 18^2 - 12^2 > 0$, то $M_2(-3;-2)$ – точка строгого локального максимума.

$$M_3(2;3): A = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{M_1} = 12, \quad B = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{M_1} = 18, \quad C = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{M_1} = 12.$$

Т.к. $A = 12 > 0$, $AC - B^2 = 12^2 - 18^2 < 0$, то $M_3(2;3)$ не является точкой локального экстремума.

$$M_4(-2;-3): A = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{M_1} = -12, \quad B = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{M_1} = -18, \quad C = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{M_1} = -12.$$

Т.к. $A = -12 < 0$, $AC - B^2 = 12^2 - 18^2 < 0$, то $M_4(-2;-3)$ является седловой точкой.

Ответ: $M_1(3;2)$ – точка строгого локального минимума, $M_2(-3;-2)$ – точка строгого локального максимума, $M_4(-2;-3)$ – седловая точка.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 6x, \quad y = 0, \quad y - \sqrt{3}x = 0.$$

Решение. Рассмотрим кривые, ограничивающие фигуру:

$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ – уравнение окружности с центром $O_1(1;0)$ радиуса

1.

$x^2 + y^2 = 6x \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9$ – уравнение окружности с центром $O_2(3;0)$ радиуса

3.

$y - \sqrt{3}x = 0 \Rightarrow y = x\sqrt{3}$ – прямая, образующая с осью Ox угол $\frac{\pi}{3}$

Запишем, уравнения кривых в полярных координатах :

$$\rho = 2 \cos \varphi, \quad \rho = 6 \cos \varphi, \text{ учитывая уравнения прямых } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Площадь фигуры в полярных координатах вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\rho_2^2 - \rho_1^2) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (36 \cos^2 \varphi - 4 \cos^2 \varphi) d\varphi = 16 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \varphi d\varphi =$$

Применим формулу понижения степени и получим

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 8 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 8 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} \right) - 0 = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

Ответ: $\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$.

5. С помощью рядов вычислить с точностью до 0,0001 приближенное значение интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

Решение. Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд, полагая в нем $x = t^4$, $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = (1+t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^8 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^{12} + \dots$$

Этот ряд сходится к биному $(1+t^4)^{-\frac{1}{2}}$ при $|t| < 1$.

Интегрируя в пределах от 0 до $\frac{1}{2}$, найдем

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \left(t - \frac{1}{2} \frac{t^5}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{t^9}{9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{t^{13}}{13} + \dots \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2^9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 2^{13}} + \dots$$

Вычислим несколько последовательных первых членов полученного знакочередующегося сходящегося ряда (с одним лишним знаком): $a_1 = 0,50000$; $a_2 \approx -0,00313$; $a_3 \approx 0,00008$.

Согласно свойству знакочередующегося сходящегося ряда для вычисления с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму двух первых членов ряда.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \approx a_1 + a_2 \approx 0,4969.$$

Ошибка этого приближенного значения меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов ряда, т.е. меньше $a_3 \approx 0,00008$.

Ответ: 0,4969.

6. Найти неопределенный интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})}$$

Решение. Поскольку в подынтегральной функции содержатся радикалы 5 и 2 степеней, то в качестве замены возьмем $x = t^{10}$, $dx = 10t^9 dt$. Подставим в интеграл и получим:

$$\int \frac{10t^9 dt}{t^{10}(t^5 + t^4)} = \int \frac{10dt}{t^5(t+1)} \quad (1)$$

Разложим подынтегральную функцию на простые дроби с неопределенными коэффициентами.

$$\frac{10}{t^5(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \frac{D}{t^4} + \frac{E}{t^5} + \frac{F}{t+1}$$

Умножив левую и правую части на общий знаменатель дробей, получим равенство двух многочленов.

$$At^4(t+1) + Bt^3(t+1) + Ct^2(t+1) + Dt(t+1) + E(t+1) + Ft^5 = 10$$

Раскрыв скобки в левой части и учитывая равенство коэффициентов двух многочленов получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными.

$$\begin{cases} E=10 \\ E+D=0 \\ C+D=0 \\ B+C=0 \\ A+B=0 \\ A+F=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E=10 \\ D=-10 \\ C=10 \\ B=-10 \\ A=10 \\ F=-10 \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{t^5(t+1)} = \frac{10}{t} - \frac{10}{t^2} + \frac{10}{t^3} - \frac{10}{t^4} + \frac{10}{t^5} - \frac{10}{t+1}$$

Запишем в формулу (1)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{10dt}{t^5(t+1)} = \int \left(\frac{10}{t} - \frac{10}{t^2} + \frac{10}{t^3} - \frac{10}{t^4} + \frac{10}{t^5} - \frac{10}{t+1} \right) dt = \\ &= 10 \ln|t| + \frac{10}{t} - \frac{5}{t^2} + \frac{10}{3t^3} - \frac{10}{4t^4} - 10 \ln|t+1| + C \end{aligned}$$

Вернемся к исходному аргументу

$$I = 10 \ln \sqrt[10]{x} + \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt[10]{x^2}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{10}{4\sqrt[10]{x^4}} - 10 \ln|\sqrt[10]{x} + 1| + C$$

$$\text{Ответ: } I = \int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})} = \ln x + \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{10}{4\sqrt[5]{x^2}} - 10 \ln|\sqrt[10]{x} + 1| + C$$

7. Исследовать на монотонность, выпуклость, асимптоты и построить график функции

$$y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$$

Решение.

1) Находим интервалы монотонности функции, экстремумы. Для этого найдем первую производную и точки, в которых она равна нулю, либо не существует

$$y' = \frac{(\sqrt[3]{x-1})' \cdot x - \sqrt[3]{x-1} \cdot x'}{x^2} = \frac{x - 3x + 3}{3x^2 \sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{-2x + 3}{3x^2 \sqrt[3]{x-1}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}, y' \text{ не существует при } x=0 \text{ и } x=1$$

$y' > 0$ на промежутках $(-\infty; 0), (0, 1), \left(1, \frac{3}{2}\right)$. На этих промежутках функция возрастает.

$y' < 0$ на промежутке $\left(\frac{3}{2}; \infty\right)$. На этом промежутке функция убывает.

Найдем $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$. Итак, точка $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\right)$ является точкой максимума

2) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба. Для этого находим вторую производную функции и точки, в которых она равна нулю, либо не существует

$$y'' = \left(\frac{-2x+3}{3x^2\sqrt[3]{(x-1)^2}} \right)' = \frac{10x^2 - 30x + 18}{9x^3(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

Применяем метод логарифмического дифференцирования, обозначим

$$f = \frac{-2x+3}{3x^2\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

Тогда: $\ln f = \ln(-2x+3) - \ln 3 - 2 \ln x - \frac{2}{3} \ln(x-1)$

Дифференцируем обе части равенства, получим:

$$(\ln f)' = \frac{-2}{-2x+3} - \frac{2}{x} - \frac{2}{3(x-1)} = \frac{-6x^2 + 6x + 12x^2 - 30x + 18 + 4x^2 - 6x}{3x(x-1)(-2x+3)} = \frac{10x^2 - 30x + 18}{3x(x-1)(-2x+3)}$$

Следовательно,

$$f' = \frac{10x^2 - 30x + 18}{3x(x-1)(-2x+3)} \cdot \frac{-2x+3}{3x^2(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{10x^2 - 30x + 18}{9x^3(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

Теперь, приравнявая вторую производную функции к нулю, находим точки перегиба функции и точки, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 15x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15 + \sqrt{45}}{10} \approx 2,17 \\ x = \frac{15 - \sqrt{45}}{10} \approx 0,83 \end{cases}$$

y'' не существует при $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$, $y(0,83) \approx -0,66$, $y(2,17) \approx 0,48$,

Итак, точки $(1; 0)$, $(0,83; -0,66)$ и $(2,17; 0,48)$ – точки перегиба.

График функции выпуклый на промежутках $\left(0; \frac{15 - \sqrt{45}}{10}\right)$ и $\left(1; \frac{15 + \sqrt{45}}{10}\right)$

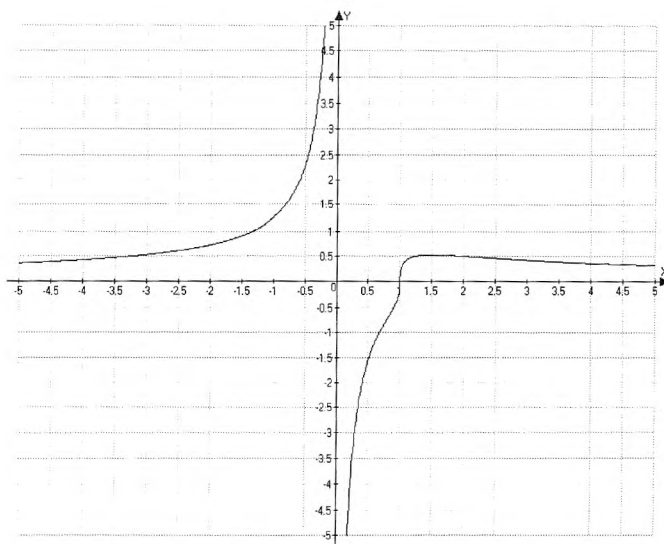
График функции вогнутый на промежутках $(-\infty; 0)$, $\left(\frac{15 - \sqrt{45}}{10}; 1\right)$ и $\left(\frac{15 + \sqrt{45}}{10}; \infty\right)$

3. Находим наклонную асимптоту $y = kx + b$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2} = 0 \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x} = 0$$

$y = 0$ – наклонная асимптота.

4. Строим график.

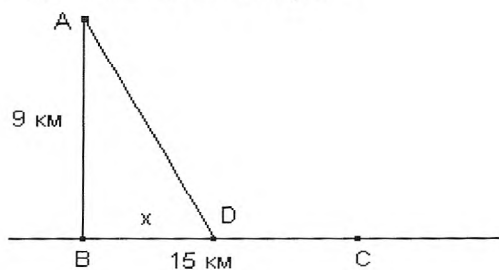


8. Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населенный пункт, расположенный по шоссе в 15 км от упомянутой точки по шоссе (считая шоссе прямой линией). Если курьер на велосипеде проезжал по полю $8 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а по шоссе $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то в какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населённого пункта?

Решение.

Запишем краткое условие задачи и выполним чертеж.

Дано:
 $AB = 9 \text{ км}$
 $BC = 15 \text{ км}$
 $V_n = 8 \text{ км/ч}$
 $V_m = 10 \text{ км/ч}$



Найти: BD

Пусть $BD = x$

$$\text{Из } \triangle ABC \quad AD^2 = \sqrt{9^2 + x^2}, \quad t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{1}{8} \sqrt{81 + x^2}, \quad DC = 15 - x, \quad t_2 = \frac{DC}{v_2} = \frac{15 - x}{10}$$

$$\text{Находим функцию времени } t = \frac{1}{8} \sqrt{81 + x^2} + \frac{15 - x}{10}$$

$$\text{Находим производную } t' = \frac{1}{8} \frac{2x}{\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{10}$$

$$\text{Находим критические точки функции } t' = 0 \Rightarrow x = 12.$$

Точка $x = 12$ является точкой минимума функции

$$\text{Ответ: } BD_{\min} = 12 \text{ км}$$



9. Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$$

Решение. Найдем частные производные 1-го порядка.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 36$$

Согласно необходимым условиям экстремума получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, найдем все стационарные точки

$$M_1(3;2); M_2(-3;-2); M_3(2;3); M_4(-2;-3).$$

Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x$$

Проверим выполнение достаточных условий локального экстремума в каждой из точек.

$$M_1(3;2): \quad A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{M_1} = 18, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{M_1} = 12, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{M_1} = 18$$

Т.к. $A = 18 > 0$, $AC - B^2 = 18^2 - 12^2 > 0$, то $M_1(3;2)$ – точка строгого локального минимума.

$$M_2(-3;-2): \quad A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{M_1} = -18, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{M_1} = -12, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{M_1} = -18$$

Т.к. $A = -18 < 0$, $AC - B^2 = 18^2 - 12^2 > 0$, то $M_2(-3;-2)$ – точка строгого локального максимума.

$$M_3(2;3): \quad A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{M_1} = 12, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{M_1} = 18, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{M_1} = 12$$

Т.к. $A = 12 > 0$, $AC - B^2 = 12^2 - 18^2 < 0$, то $M_3(2;3)$ не является точкой локального экстремума.

$$M_4(-2;-3): \quad A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{M_1} = -12, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{M_1} = -18, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{M_1} = -12$$

Т.к. $A = -12 < 0$, $AC - B^2 = 12^2 - 18^2 < 0$, то $M_4(-2;-3)$ является седловой точкой.

Ответ: $M_1(3;2)$ – точка строгого локального минимума, $M_2(-3;-2)$ – точка строгого локального максимума, $M_4(-2;-3)$ – седловая точка.

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 3, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 4x_5 = 3, \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 - 5x_5 = -3. \end{cases}$$

Решение.

Выписываем расширенную матрицу системы и проводим прямой ход схемы Гаусса (пояснения приведены ниже):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & -5 & -3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 15 & -33 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 14 & -26 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 11 & -41 & -9 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 41 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 49 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 56 & 16 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 41 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Чтобы получить единицу в верхнем левом углу матрицы, первую строку умножаем на 2 и вычитаем из нее третью. Полученную новую строку, умноженную на (-7) , (-5) и (-6) соответственно, прибавляем ко второй, третьей и четвертой строкам. Результатом этих операций является вторая из написанных матриц. Далее, четвертую строку умножаем на (-1) и переставляем ее со второй, и прибавляем эту новую вторую строку, умноженную на 2, к третьей и четвертой строкам; результат – третья матрица. Теперь третью строку умножаем на $(-1/7)$, полученную новую третью строку, умноженную на 8, прибавляем к четвертой. Прямой ход закончен.

Выписываем систему, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 6x_5 = 1 \\ x_2 - x_3 - 11x_4 + 41x_5 = 9 \\ x_4 - 7x_5 = -2 \end{cases}$$

Проведем обратный ход. Здесь главные неизвестные x_1, x_2, x_4 ; свободные – x_3, x_5 , придаем им произвольные значения: $x_3 = a, x_5 = b$. Двигаясь по последней системе снизу вверх, выражаем главные неизвестные через свободные.

$$x_1 = 1 - (-13 + a + 36b) - a + (-2 + 7b) - 6b = 12 - 2a - 35b$$

$$x_2 = 9 + a + 11(-2 + 7b) - 41b = -13 + a + 36b$$

$$x_3 = a$$

$$x_4 = -2 + 7b$$

$$x_5 = b$$

где a, b – любые действительные числа.

Ответ: $(12 - 2a - 35b, -13 + a + 36b, a, -2 + 7b, b)$

2. Вычислить матрицы обратные данным:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \quad \text{б) } B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

а) Решим матричное уравнение $AX=E$, как пакет систем линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

В любой из трех систем пакета третье уравнение противоречиво, т.е. матрица A не имеет обратной, а, значит, вырождена.

б) Решаем уравнение $BX=E$, как пакет систем линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -34 & -1 & 5 & -9 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 0 & \frac{37}{34} & \frac{-15}{34} & \frac{27}{34} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{34}{8} & \frac{-6}{4} & \frac{34}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{34} & \frac{-5}{34} & \frac{9}{34} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{-3}{34} & \frac{15}{34} & \frac{7}{34} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{34}{8} & \frac{-6}{4} & \frac{34}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{34} & \frac{-5}{34} & \frac{9}{34} \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 15 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{68}{68} & \frac{16}{68} & \frac{8}{68} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{68} & \frac{-10}{68} & \frac{18}{68} \end{array} \right) \quad \text{Тогда: } X = \frac{1}{68} \begin{pmatrix} -3 & 15 & 7 \\ 16 & -12 & 8 \\ 2 & -10 & 18 \end{pmatrix}$$

Проверка.

$$B \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 15 & 7 \\ 16 & -12 & 8 \\ 2 & -10 & 18 \end{pmatrix} \frac{1}{64} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Значит, $B^{-1} = X$.

Замечание. Если для матрицы B существует обратная (матрица B невырождена), то нахождения B^{-1} составляется комбинированная матрица (B/E) , которая при помощи элементарных преобразований строк приводится к виду (E/B^{-1}) , где справа от черты искомая матрица (*способ элементарных преобразований строк*).

$$\text{Ответ: а) для матрицы } A \text{ – обратной нет; б) } B^{-1} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} -3 & 15 & 7 \\ 16 & -12 & 8 \\ 2 & -10 & 18 \end{pmatrix}$$

3. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(-5,0,1), B(-4,-2,3), C(6,2,11), D(3,4,9)$.

а) Найти разложение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ в прямоугольной декартовой системе координат и найти модули этих векторов.

б) Найти угол между векторами \overline{AB} и \overline{AC} в градусах с точностью до двух знаков после запятой.

в) Найти величину проекции вектора \overline{AD} на вектор \overline{AB} .

г) Вычислить площадь грани ABC .

д) Найти объём пирамиды $ABCD$.

Решение.

а) Найдём координаты векторов, для этого воспользуемся формулой:

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad (1)$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Тогда разложение вектора $\overline{M_1M_2}$ по координатам ортам имеет вид:

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}, \quad (2)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты координатных осей прямоугольной декартовой системы координат.

Модули векторов найдём по формуле

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3)$$

Итак, по формуле (1):

$$\overline{AB} = (-4 - (-5), -2 - 0, 3 - 1) = (1, -2, 2),$$

$$\overline{AC} = (6 - (-5), 2 - 0, 11 - 1) = (11, 2, 10),$$

$$\overline{AD} = (3 - (-5), 4 - 0, 9 - 1) = (8, 4, 8),$$

тогда по формуле (2)

$$\overline{AB} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}; \overline{AC} = 11\bar{i} + 2\bar{j} + 10\bar{k}, \overline{AD} = 8\bar{i} + 4\bar{j} + 8\bar{k}$$

Модули векторов найдём по формуле (3)

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3,$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = \sqrt{121 + 4 + 100} = \sqrt{225} = 15,$$

$$|\overline{AD}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{64 + 16 + 64} = \sqrt{144} = 12.$$

б) Найдём косинус угла между векторами \overline{AB} и \overline{AC} по формуле:

$$\cos \angle(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{(\overline{AB}, \overline{AC})}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}$$

(4)

где $(\overline{AB}, \overline{AC})$ – скалярное произведение векторов \overline{AB} и \overline{AC} , которое в декартовой прямоугольной системе координат равно сумме произведений одноимённых координат векторов, т.е.

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = 1 \cdot 11 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 10 = 11 - 4 + 20 = 27.$$

Подставим найденные значения в (4):

$$\cos(\angle \overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{27}{3 \cdot 15} = \frac{3}{5},$$

откуда

$$\angle(\overline{AB}, \overline{AC}) = \arccos \frac{3}{5} \approx 53,13^\circ.$$

в) Величину проекции вектора \overline{AD} на вектор \overline{AB} найдём по формуле:

$$\text{пр}_{\overline{AB}} \overline{AD} = |\overline{AD}| \cos \angle(\overline{AD}, \overline{AB}).$$

Найдём

$$\cos \angle(\overline{AD}, \overline{AB}) = \frac{(\overline{AD}, \overline{AB})}{|\overline{AD}| \cdot |\overline{AB}|} = \frac{8 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 8 \cdot 2}{12 \cdot 3} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

Тогда

$$\text{пр}_{\overline{AB}} \overline{AD} = 12 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{3} = 5 \frac{1}{3}.$$

г) Для вычисления площади грани ABC вычислим площадь $\triangle ABC$, как площадь треугольника построенного на векторах \overline{AB} и \overline{AC} , по формуле:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]|$$

(5)

где $[\overline{AB}, \overline{AC}]$ – векторное произведение векторов \overline{AB} и \overline{AC} , $|[\overline{AB}, \overline{AC}]|$ – модуль векторного произведения.

Векторное произведение векторов найдём по правилу:

$$\text{если } \vec{a} = (a_1, a_2, a_3),$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

тогда

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

(6)

Для векторов

$$\overline{AB} = (1, -2, 2),$$

$$\overline{AC} = (11, 2, 10),$$

Получим

$$\begin{aligned} [\overline{AB}, \overline{AC}] &= \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= (-2 \cdot 10 - 2 \cdot 2, 2 \cdot 11 - 1 \cdot 10, 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 11) = \\ &= (-20 - 4, 22 - 10, 2 + 22) = (-24, 12, 24). \end{aligned}$$

$$|[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \sqrt{(-24)^2 + 12^2 + 24^2} = \sqrt{12^2(2^2 + 1^2 + 2^2)} = \sqrt{12^2 \cdot 9} = 12 \cdot 3 = 36.$$

По формуле (5) найдём площадь треугольника:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18 \text{ (кв. ед.)}$$

д) Объём пирамиды $ABCD$ найдём по формуле:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|$$

(7)

где $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$ – смешанное произведение векторов, а $|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|$ – модуль смешанного произведения.

Смешанное произведение векторов найдём по правилу:

$$\text{если } \vec{a} = (a_1, a_2, a_3),$$

$$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

$$\bar{c} = (c_1, c_2, c_3),$$

Тогда

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(8)

Для векторов

$$\overline{AB} = (1, -2, 2),$$

$$\overline{AC} = (11, 2, 10),$$

$$\overline{AD} = (8, 4, 8),$$

получим

$$\begin{aligned} (\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \\ 8 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 24 & -12 \\ 0 & 20 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24 & -12 \\ 20 & -8 \end{vmatrix} = 24 \cdot (-8) - (-12) \cdot 20 = \\ &= -192 + 240 = 48. \end{aligned}$$

По формуле (7) найдём объём пирамиды:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |48| = \frac{1}{6} \cdot 48 = 8 \text{ (куб. ед.)}$$

Дифференциальные уравнения

1. Найти общее решение уравнения

$$y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}.$$

Решение.

Метод Лагранжа. Решаем однородное уравнение

$$y' + 2xy = 0 :$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -2 \int x dx$$

$$\ln |y| = -x^2 + \ln C(x)$$

$$y = C(x) e^{-x^2} \quad (*)$$

Вычислим производную: $y' = C'(x) e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} C(x)$ и подставим совместно с $y = C(x) e^{-x^2}$ в исходное уравнение:

$$C'(x) e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} C(x) + 2x C(x) e^{-x^2} = 2x^2 e^{-x^2}$$

$$C'(x) = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dC(x)}{dx} = 2x^2.$$

Разделяем переменные и интегрируем: $\int dC(x) = 2 \int x^2 dx,$

$$C(x) = \frac{2x^3}{3} + C.$$

Тогда окончательно из (*) получим $y = \left(\frac{2}{3}x^3 + C\right) e^{-x^2}.$

Метод Бернулли. Представляем искомую функцию в виде произведения двух функций: $y = uv.$ Тогда $y' = u'v + v'u,$ и из заданного уравнения следует:

$$u'v + v'u + 2xuv = 2x^2 e^{-x^2},$$

$$v(u' + 2xu) + v'u = 2x^2 e^{-x^2}.$$

(+)

Выражение в скобках полагаем равным нулю. В результате получаем:

$$\frac{du}{dx} = -2xu \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -2x dx,$$

$$\ln|u| = -x^2 + C.$$

Принимаем $C=0$. Тогда

$$u = e^{-x^2}. \quad (++)$$

Возвращаемся к уравнению (+):

$$v'e^{-x^2} = 2x^2 e^{-x^2},$$

$$dv = 2x^2 dx,$$

$$\int dv = 2 \int x^2 dx$$

$$v = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

Тогда (поскольку $y = uv$) с учетом (++) можем записать:

$$y = \left(\frac{2}{3}x^3 + C\right)e^{-x^2}.$$

2. Решить уравнение

$$2x^2 dy = (x^2 + y^2) dx.$$

Решение.

Данное уравнение можно представить в виде:

$$2 \frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Правая часть содержит только отношение вида y/x , следовательно, уравнение является однородным. Найдем общее решение.

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = xu' + u$$

Подставляем в заданное уравнение:

$$2xu' + 2u = 1 + u^2,$$

$$2x \frac{dy}{dx} = u^2 - 2u + 1$$

$$2x \frac{dy}{dx} = (u - 1)^2 \quad (*)$$

$$\frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow 2 \int \frac{du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{2}{u-1} = \ln|x| + \ln|C|.$$

Возвращаемся к исходным переменным:

$$\frac{2}{1 - \frac{y}{x}} = \ln|Cx|,$$

$$y = x \left(1 - \frac{2}{\ln|Cx|} \right).$$

3. Решить уравнение $y''' - 5y'' + 6y' = 0$.

Решение. Это линейное однородное уравнение 3-го порядка с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение

$$k^3 - 5k^2 + 6k = 0 \Rightarrow k(k^2 - 5k + 6) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = 3 \Rightarrow$$

$$y_1 = e^{0x} = 1, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$$

Общее решение имеет вид $y = C_1 \cdot 1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

4. Решить уравнение $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Решение. Это линейное однородное уравнение 3-го порядка с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0 \Rightarrow (k + 1)^3 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = -1.$$

Фундаментальная система решений $y_1 = e^{-x}, y_2 = xe^{-x}, y_3 = x^2e^{-x}$.

Общее решение $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x} = e^{-x}(C_1 + C_2x + C_3x^2)$.

5. Решить уравнение $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Это линейное однородное уравнение 3-го порядка с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение

$$k^3 - 2k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k^2(k - 2) + (k - 2) = 0 \Rightarrow (k - 2)(k^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$k_1 = 2, k_2 = i, k_3 = -i$$

Фундаментальная система решений $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{0x} \cos x, y_3 = \sin x$.

Общее решение $y = C_1e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

6. Решить уравнение $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0 \Rightarrow (k^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -i, k_3 = k_4 = i.$$

Фундаментальная система решений

$$y_1 = \cos x, y_2 = x \cos x, y_3 = \sin x, y_4 = x \sin x.$$

Общее решение $y = (C_1 + C_2x) \cos x + (C_3 + C_4x) \sin x$.

7. Решить уравнение $y^{(4)} - 6y'' + 9y = 0$.

Решение.

Записываем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$k^4 - 6k^2 + 9 = 0 \Rightarrow (k^2 - 3)^2 = 0;$$

$$k_1 = \sqrt{3} \text{ — действительный корень кратности 2;}$$

$$k_2 = -\sqrt{3} \text{ — действительный корень кратности 2.}$$

Записываем общее решение:

$$y = C_1e^{\sqrt{3}x} + C_2xe^{\sqrt{3}x} + C_3e^{-\sqrt{3}x} + C_4xe^{-\sqrt{3}x}.$$

Теория вероятностей и математическая статистика

1. Охотник выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0.8 а после каждого выстрела уменьшается на 0.1. Найдите вероятность того, что он промахнется хотя бы один раз.

Решение:

Пусть событие $A = \{\text{хотя бы один раз охотник промахнется}\}$.

Так как известны вероятности попадания и непадения охотником при каждом выстреле, то пусть события

$A_i = \{\text{попадание при } i\text{-ом выстреле}\}, i=1,2,3$, тогда

$$P(A_1) = 0,8; \quad P(A_2) = 0,7; \quad P(A_3) = 0,6;$$

и пусть события $\bar{A}_i = \{\text{непопадание при } i\text{-ом выстреле}\}, i=1,2,3$, тогда

$$P(\bar{A}_1) = 0,2; \quad P(\bar{A}_2) = 0,3; \quad P(\bar{A}_3) = 0,4.$$

Введем событие $\bar{A} = \{\text{охотник все три раза попадет}\}$, тогда $\bar{A} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ и так как события $A_i (i=1,2,3)$ независимы, то $P(\bar{A}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,336$.

Из того, что $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, имеем

$$P(A) = 1 - 0,336 = 0,664 \text{ или } 66,4\%.$$

Ответ: вероятность того, что охотник промахнется хотя бы один раз, равна 66,4%.

2. Из 16 собранных велосипедов 4 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что два выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

Решение. Пусть A – событие, при котором 2 выбранных велосипеда окажутся без дефектов. Любой выбор 2 велосипедов из 16, является равновозможным исходом. Значит, общее число равновозможных исходов равно числу сочетаний из 16 по 2, т.е. C_{16}^2 .

Исходом благоприятным, для события A , является выбор 2 исправленных велосипедов их имеющих 12 исправных ($16-4=12$). Значит, число благоприятных для события A исходов равно C_{12}^2 . Отсюда получаем, что

$$P(A) = \frac{C_{12}^2}{C_{16}^2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} : \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = \frac{11}{20} = 0,55.$$

Ответ: вероятность того, что два выбранных наугад велосипеда будут без дефектов равна 55%.

3. Детали, изготавливаемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0.6, а ко второму — 0.4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0.94, а вторым — 0.98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найдите вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза B_1);

2) деталь проверил второй контролер (гипотеза B_2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Байеса

$$P(B_1 / A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A / B_1)}{P(B_1) \cdot P(A / B_1) + P(B_2) \cdot P(A / B_2)}.$$

По условию задачи имеем:

$P(B_1) = 0,6$ - вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру;

$P(B_2) = 0,4$ - вероятность того, что деталь попадает ко второму контролеру;

$P(A / B_1) = 0,94$ - вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной;

$P(A / B_2) = 0,94$ - вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной.

Искомая вероятность

$$P(B_1 / A) = \frac{0,6 \cdot 0,94}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98} \approx 0,59.$$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы B_1 равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59. Таким образом, использование формулы Байеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

4. Производится 10 независимых выстрелов по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле равна 0,2. Найдите вероятность того, что будет от 3 до 7 попаданий.

Решение:

Пусть событие $A = \{\text{стрелок попадет от 3 до 7 раз}\}$

Так как вероятности попадания в цель при каждом выстреле одинаковы и равны 0,2, то имеем повторные независимые попадания и так как число выстрелов 10 мало, то для нахождения вероятности события А применим формулу Бернулли: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где $p=0.2$ – вероятность попадания при одном выстреле,

$q=1-p=0.8$ - вероятность не попадания при одном выстреле.

Так как m изменяется от 3 до 7, то вероятность события А найдем по формуле:

$$P_n(m_1:m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1+1) + \dots + P_n(m_2).$$

Имеем,

$$\begin{aligned} P(A) &= P_{10}(3;7) = P_{10}(3) + P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) + P_{10}(7) = \\ &= C_{10}^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^7 + C_{10}^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^6 + C_{10}^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^5 + C_{10}^6 \cdot 0,2^6 \cdot 0,8^4 \\ &+ C_{10}^7 \cdot 0,2^7 \cdot 0,8^3 = 120 \cdot 0,008 \cdot 0,2097 + 210 \cdot 0,0016 \cdot 0,2621 + \\ &\quad + 252 \cdot 0,00032 \cdot 0,32768 + 210 \cdot 0,000064 \cdot 0,4096 \\ &+ 120 \cdot 0,0000128 \cdot 0,512 = 0,2013 + 0,0881 + 0,0264 + 0,0055 + 0,0008 = 0,3221 \end{aligned}$$

или 32,21%.

Ответ: вероятность того, что будет от 3 до 7 попаданий, равна 32,21%.

5. Случайная величина X задана законом распределения:

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,1	0,5	0,1

Требуется:

- найти и построить функцию распределения случайной величины X;
- найти числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;
- найти вероятность того, что случайная величина X примет значение из промежутка (0;2] двумя способами.

Решение.

а) Функцию распределения случайной величины найдем по формуле: $F_X(x) = P(X < x)$.

Вычислим значение функции в каждом значении случайной величины и перенесем на числовую ось.

$$F_X(-1) = P(X < -1) = 0, \quad x \leq -1$$

$$F_X(0) = P(X < 0) = P(x = -1) = 0,1, \quad -1 < x \leq 0$$

$$F_X(1) = P(X < 1) = P(x = -1) + P(x = 0) = 0,3, \quad 0 < x \leq 1$$

$$F_X(2) = P(X < 2) = P(x = -1) + P(x = 0) + P(x = 1) = 0,4, \quad 1 < x \leq 2$$

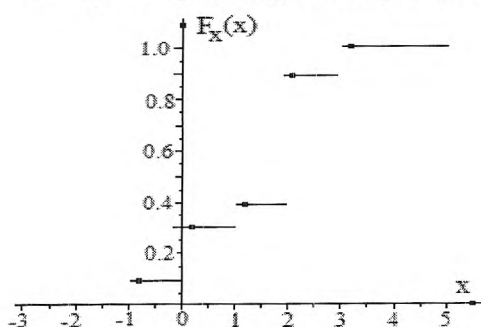
$$F_X(3) = P(X < 3) = P(x = -1) + P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = 0,9, \quad 2 < x \leq 3$$

$$F_X(4) = P(X < 4) = 1, \quad x > 3$$

Таким образом, функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 0,1, & -1 < x \leq 0 \\ 0,3, & 0 < x \leq 1 \\ 0,4, & 1 < x \leq 2 \\ 0,9, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Построим график функции распределения:



Найдем числовые характеристики случайной величины X.

$$M(X) = \sum x_i p_i = -1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,1 = 1,3$$

$$D(X) = \sum x_i^2 p_i - [M(X)]^2 = 0,1 + 0 + 0,1 + 2 + 0,9 = 3,1 - 1,69 = 1,41$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1,41} \approx 1,18$$

Найдем вероятность события.

Так как X - дискретная случайная величина, то для того чтобы найти вероятность события $\{0 < X \leq 2\}$, необходимо выяснить какие значения случайной величины X попали в интервал $(0; 2]$. Замечаем, что в этот интервал попали $\{X = 1\}$ и $\{X = 2\}$, тогда $P(0 < X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,6$.

6. Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2, \\ -\frac{3}{4}(x^2 - 6x + 8), & \text{если } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Требуется:

- найти функцию распределения случайной величины X ;
- найти числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ -\frac{3}{4} \int_2^x (x^2 - 6x + 8) dx = -\frac{3}{4} \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right) + 5, & 2 \leq x \leq 4 \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$$M(X) = -\frac{3}{4} \int_2^4 x(x^2 - 6x + 8) dx = -\frac{3}{4} \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right) \Big|_2^4 = 3;$$

$$D(X) = -\frac{3}{4} \int_2^4 x^2(x^2 - 6x + 8) dx - 9 = -\frac{3}{4} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + \frac{8x^3}{3} \right) \Big|_2^4 - 9 = 9,2 - 9 = 0,2; \quad \sigma = \sqrt{0,2} \approx 0,447$$

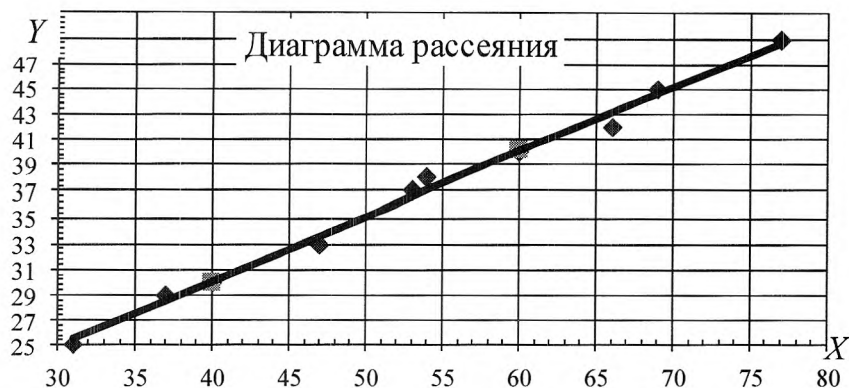
7. Экономист, изучая зависимость производительности труда Y (т/ч) от уровня механизации работ X (%), обследовал 10 однотипных предприятий и получил следующие данные.

x_i	53	31	77	60	37	69	47	54	66	40
y_i	37	25	49	40	29	45	33	38	42	30

Полагая, что между признаками X и Y имеет место линейная корреляционная связь, определите выборочное уравнение линейной регрессии и выборочный коэффициент линейной корреляции. Постройте диаграмму рассеяния и линию регрессии. Сделайте вывод о направлении и тесноте связи между X и Y .

Решение.

Построим диаграмму рассеяния. Для этого на плоскости xOy отметим точки с координатами $(x_i; y_i)$.



По диаграмме рассеяния видно, что точки $(x_i; y_i)$ группируются около некоторой прямой. Поэтому выборочное уравнение линейной регрессии будем искать в виде $y = ax + b$. Параметры a и b найдем методом наименьших квадратов. Составим систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = \sum_{i=1}^{10} x_i \cdot y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i + b \cdot 10 = \sum_{i=1}^{10} y_i \end{cases}$$

Вспомогательные вычисления проведем в таблице:

Итак, система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 30510 \cdot a + 534 \cdot b = 20662 \\ 534 \cdot a + 10 \cdot b = 368 \end{cases}$$

Таблица

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	53	37	2809	1961	1369
2	31	25	961	775	625
3	77	49	5929	3773	2401
4	60	40	3600	2400	1600
5	37	29	1369	1073	841
6	69	45	4761	3105	2025
7	47	33	2209	1551	1089
8	54	38	2916	2052	1444
9	66	42	4356	2772	1764
10	40	30	1600	1200	900
Сумма	534	368	30510	20662	14058

Решим её методом Крамера. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30510 & 534 \\ 534 & 10 \end{vmatrix} = 30510 \cdot 10 - 534 \cdot 534 = 19944.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20662 & 534 \\ 368 & 10 \end{vmatrix} = 20662 \cdot 10 - 534 \cdot 368 = 10108.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 30510 & 20662 \\ 534 & 368 \end{vmatrix} = 30510 \cdot 368 - 20662 \cdot 534 = 194172.$$

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10108}{19944} = 0,506819, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{194172}{19944} = 9,73586.$$

Выборочное уравнение линейной регрессии имеет вид $y = 0,506819 \cdot x + 9,73586$.

Чтобы построить линию регрессии найдем координаты двух точек, принадлежащих прямой $y = 0,506819 \cdot x + 9,73586$.

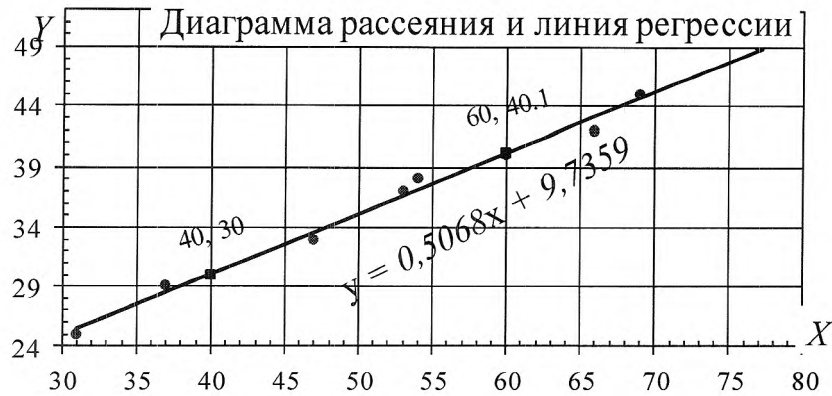
При $x=35$

$$y = 0,506819 \cdot 35 + 9,73586 = 27,474529 \approx 27,5.$$

При $x=75$

$$y=0,506819 \cdot 75 + 9,73586 = 47,747292 \approx 47,7.$$

Линия регрессии – прямая, проходящая через точки (35; 27,5) и (75; 47,7).



Выборочный коэффициент линейной корреляции найдем по формуле

$$r_g = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{n \cdot \tilde{\sigma}_x \cdot \tilde{\sigma}_y}, \text{ где } x_i, y_i \text{ – наблюдавшиеся значения признаков } X \text{ и } Y; n \text{ – объем выборки;}$$

\bar{x}, \bar{y} – выборочные средние; $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y$ – выборочные среднеквадратические отклонения.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{534}{10} = 53,4. \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = \frac{368}{10} = 36,8.$$

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{30510}{10} - (53,4)^2} = \sqrt{199,44} \approx 14,122323.$$

$$\tilde{\sigma}_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{14058}{10} - (36,8)^2} = \sqrt{51,56} \approx 7,180529.$$

$$r_g = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{10 \cdot \tilde{\sigma}_x \cdot \tilde{\sigma}_y} = \frac{20662 - 10 \cdot 53,4 \cdot 36,8}{10 \cdot 14,122323 \cdot 7,180529} = 0,996788.$$

Так как выборочный коэффициент линейной корреляции $r_g = 0,996788 > 0$, то корреляция положительная, т. е. с возрастанием X возрастает и Y . Так как $r_g = 0,996788$ очень близко к единице, то связь между признаками X и Y тесная.

Ответ: уравнение регрессии $y=0,506819 \cdot x + 9,73586$; связь между признаками X и Y тесная, положительная.

8. Из новорожденных детей, родившихся в Тираспольском роддоме в течение месяца, случайным образом отобраны 20 детей, рост которых составлял соответственно 50, 51, 48, 52, 50, 49, 50, 47, 50, 51, 49, 50, 52, 48, 49, 51, 52, 48, 47, 51 сантиметр. Требуется:

- определить выборочную среднюю \bar{x}_B , выборочную D_B и исправленную S^2 дисперсии;
- полагая, что распределение признака X описывается нормальным законом распределения, найти доверительный интервал для среднего роста обследуемых детей на уровне заданной надежности, равном $\gamma = 0,999$.

Решение.

1) Определим выборочную среднюю \bar{x}_B , выборочную D_B и исправленную S^2 дисперсии. Вспомогательные расчеты проведем в таблице.

i	x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$x_i - x_{\bar{e}}$	$(x_i - x_{\bar{e}})^2$	$(x_i - x_{\bar{e}})^2 \cdot n_i$
1	47	2	94	-2,75	7,5625	15,125
2	48	3	144	-1,75	3,0625	9,1875
3	49	3	147	-0,75	0,5625	1,6875
4	50	5	250	0,25	0,0625	0,3125
5	51	4	204	1,25	1,5625	6,25
6	52	3	156	2,25	5,0625	15,1875
Сумма	297	20	995		17,5	49

$$\text{Выборочная средняя } \bar{x}_{\bar{e}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i \cdot x_i = \frac{1}{20} \cdot 995 = 49,75.$$

$$\text{Выборочная дисперсия } D_{\bar{v}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{\bar{e}})^2 \cdot n_i = \frac{1}{20} \cdot 49 = 2,45.$$

$$\text{Исправленная дисперсия } s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\bar{v}} = \frac{20}{20-1} \cdot 2,45 = 2,579$$

2) Полагая, что распределение признака X описывается нормальным законом распределения, найдём доверительный интервал для среднего роста α у обследуемых детей на уровне заданной надёжности $\gamma = 0,999$. Доверительный интервал найдём по формуле:

$$l_{\gamma} = \left(\bar{x}_{\bar{e}} - \frac{t_{\gamma} \cdot s}{\sqrt{n}}, \bar{x}_{\bar{e}} + \frac{t_{\gamma} \cdot s}{\sqrt{n}} \right)$$
, где $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2,579} = 1,606$. По таблице по заданным $n=20$ $\gamma = 0,999$ находим $t_{\gamma} = 3,85$.

Итак, $\frac{t_{\gamma} \cdot s}{\sqrt{n}} = \frac{3,85 \cdot 1,606}{\sqrt{20}} = 1,383$ и доверительный интервал

$$\begin{aligned} l_{\gamma} &= \left(\bar{x}_{\bar{e}} - \frac{t_{\gamma} \cdot s}{\sqrt{n}}, \bar{x}_{\bar{e}} + \frac{t_{\gamma} \cdot s}{\sqrt{n}} \right) = (49,75 - 1,383; 49,75 + 1,383) = \\ &= (48,367; 51,133) \approx (48,37; 51,13) \end{aligned}$$

Ответ: Выборочная средняя $\bar{x}_{\bar{e}} = 49,75$; выборочная дисперсия $D_{\bar{v}} = 2,45$; исправленная дисперсия $s^2 = 2,579$. С надёжностью $0,999$ средний рост у обследуемых детей заключен в доверительном интервале $48,37 < \alpha < 51,13$.

Численные методы

1. Определить положение корней в интервале от $[-5, 5]$ уравнения $\sin x = 0$. С помощью метода Ньютона уточнить все корни.

2. Определить положение корней на отрезке $[-1, 1]$ уравнения $\cos x = x$. С помощью метода Ньютона уточнить все корни.

3. Найти решение системы уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 0x + 6y - 9z + 2v - 7w = 90, \\ 3x - 4y + 5z - 3v + 4w = 12, \\ 0x + y + 3z - 2v + 18w = 51, \\ 7x + 2y - 8z + v + 10w = 32, \\ 6x + 5y - 4z + 3v - 2w = 87. \end{cases}$$

4. Задана таблица значений.

x	6,5	4,5	8,5	9,5	10,5	11,5
y	3,423	4,041	5,451	4,353	6,353	3,353

С помощью многочлена Ньютона найти промежуточные значения функции в интервале $[4, 12]$ с шагом $0,2$ ограничившись разделенной разностью 3-го порядка.

Исследование операций

1. Цех выпускает три вида продукции, использует три типа сырья. Известны удельные расходы сырья, их запасы и прибыль, получаемая от реализации единицы продукции. Требуется:

- а) Построить математические модели прямой и двойственной задач.
- б) Найти оптимальные решения задач, решив исходную задачу симплексным методом.
- в) Провести анализ решений пары двойственных задач.

Наименование ресурсов	Единица измерения	Удельные расходы ресурсов на единицу продукции			Запасы ресурсов
		I вида	II вида	III вида	
Сырье I типа	кг.	2	2	1	700
Сырье II типа	кг.	2	3	4	1500
Сырье III типа	кг.	2	1	0	600
Прибыль	тыс. руб.	3	4	3	

Решение:

Пусть предприятие выпускает x_1 единиц продукции I вида, x_2 единиц продукции II вида, x_3 единиц продукции III вида. Количество изделий не может выражаться отрицательным числом, поэтому $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1,3}$). На изготовление одной единицы продукции первого вида будет затрачено 2 кг. сырья I типа, а на изготовление x_1 единиц продукции I вида – $2x_1$ кг. сырья I типа. На изготовление одной единицы продукции II вида будет затрачено 2 кг. сырья I типа, а на изготовление x_2 единиц продукции – $2x_2$ кг. сырья I типа. На изготовление одной единицы продукции III вида будет израсходован 1 кг. сырья I типа, а на изготовление x_3 единиц продукции – x_3 кг. сырья I типа. Расход первого ресурса составит $(2x_1 + 2x_2 + x_3)$ кг, при этом расход ресурсов не может превысить величину его запасов: $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 700$.

Аналогично, ограничение по расходу сырья II типа можно выразить неравенством: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1500$ (и по расходу сырья третьего типа: $2x_1 + x_2 \leq 600$).

Прибыль от реализации одной единицы продукции I вида составляет 3 тыс. руб., от реализации x_1 единиц продукции I вида – $3x_1$. Прибыль от реализации одной единицы продукции II вида составляет 4 тыс. руб., от реализации x_2 единиц продукции II вида – $4x_2$. Прибыль от реализации одной единицы продукции III вида составляет 3 тыс. руб., от реализации x_3 единиц продукции III вида – $3x_3$ тыс. руб. Таким образом, суммарная прибыль составит $Z = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3$ и по условию задачи она должна быть максимальной.

Получаем математическую модель задачи:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 700 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1500 \\ 2x_1 + x_2 \leq 600 \end{cases}$$

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \longrightarrow \max$$

Приводим задачу к стандартному виду:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 700 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 1500 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 600 \end{cases}$$

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \longrightarrow \max$$

x_4, x_5, x_6 – неиспользованное сырьё 1-го, 2-го и 3-го типов соответственно.

Построим двойственную задачу.

Обозначим через y_1, y_2, y_3 – цену (или оценку) 1 кг сырья 1-го, 2-го и 3-го типов соответственно.

Цены неотрицательны: $y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}$.

Стоимость сырья всех трех типов, затраченного на изготовление 1-ой единицы продукции 1-го вида, равна: $2y_1 + 2y_2 + 2y_3$ и она должна быть не менее прибыли от 1-ой единицы продукции, т.е. не менее 3. Получаем неравенство: $2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3$. Аналогично получим неравенства: $2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 4$ и $y_1 + 4y_2 \geq 3$.

Стоимость всего имеющегося в наличии сырья равна:

$$U = 700 y_1 + 1500 y_2 + 600 y_3 \text{ и её надо минимизировать.}$$

Математическая модель двойственной задачи имеет вид:

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,3}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 4 \\ y_1 + 4y_2 \geq 3 \end{cases}$$

$$U = 700 y_1 + 1500 y_2 + 600 y_3 \longrightarrow \min$$

Приведем двойственную задачу к стандартному виду:

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,6}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_4 = 3 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 - y_5 = 4 \\ y_1 + 4y_2 - y_6 = 3 \end{cases}$$

$$U = 700 y_1 + 1500 y_2 + 600 y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6 \longrightarrow \min$$

Значения y_4, y_5, y_6 показывают, насколько стоимость сырья всех трёх типов, затраченного на изготовление одной единицы продукции I-го, II-го и III-го видов соответственно больше, чем прибыль от соответствующей единицы продукции.

Решаем задачу 1 и задачу 2 в симплексной таблице 1.

Оптимальный план исходной задачи: $\bar{X}^* = (0; 260; 180; 0; 0; 340)$; $Z_{\max} = Z(\bar{X}^*) = 1580$.

Оптимальный план двойственной задачи:

$$\bar{Y}^* = \left(\frac{7}{5}; \frac{2}{5}; 0; \frac{3}{5}; 0; 0 \right); \quad U_{\min} = U(\bar{Y}^*) = 1580. \quad Z_{\max} = U_{\min} = 1580$$

Таблица 1.

c_i	c_j	3	4	3	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{is}}, a_{is} > 0$
	x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_4	2	②	1	1	0	0	700	700:2=350 – min
0	x_5	2	3	4	0	1	0	1500	1500:3=500
0	x_6	2	1	0	0	0	1	600	600:1=600
	Z	-3	-4	-3	0	0	0	0	
4	x_2	1	1	1/2	1/2	0	0	350	350:1/2=700
0	x_5	-1	0	⑤/2	-3/2	1	0	450	450:5/2=180 – min
0	x_6	1	0	-1/2	-1/2	0	1	250	—
	Z	1	0	-1	2	0	0	1400	
4	x_2	6/5	1	0	4/5	-1/5	0	260	
3	x_3	-2/5	0	1	-3/5	2/5	0	180	
0	x_6	4/5	0	0	-4/5	1/5	1	340	
	Z	3/5	0	0	7/5	2/5	0	1580	
		y_4^*	y_5^*	y_6^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*		

$x_1^* = 0$ – изделия I вида выпускать не следует;

$x_2^* = 260$
 $x_3^* = 180$ } следует выпускать 260 изделий II вида и 180 – III вида;

$x_4^* = 0$
 $x_5^* = 0$ } сырье первого и второго типа будет использовано полностью;

$x_6^* = 340$ – остаются неиспользованными 340 кг. сырья III типа.

$y_1^* = \frac{7}{5}$
 $y_2^* = \frac{2}{5}$ } оценки 1 кг. сырья I и II типа положительны, так как ресурсы используются полностью, эти

ресурсы дефицитные.

$y_3^* = 0$ – сырье III типа имеется в избытке и 340 кг. неиспользованного сырья III типа вклада в прибыль не вносят; поэтому оценка 1 кг этого сырья равна нулю;

$y_4^* = \frac{3}{5}$ – стоимость сырья всех 3-х типов, затраченных на изготовление единицы продукции I вида больше прибыли от реализации 1 единицы продукции на $\frac{3}{5}$, поэтому продукцию I вида выпускать невыгодно.

$y_5^* = 0$
 $y_6^* = 0$ } стоимость сырья всех 3-х типов, затраченного на производство 1 единицы продукции II-го

и III-го видов, в точности равна прибыли от реализации единицы этой продукции, поэтому продукцию II-го и III-го видов выпускать выгодно.

$Z_{\max} = U_{\min} = 1580$ тыс. руб.

Суммарная прибыль от реализации всех выпущенных изделий в точности равна минимальной стоимости всего имеющегося сырья и составляет 1580 тыс. руб.

Программирование на языке C#

1. Описать класс *Point* (Точка), описывающий точку на плоскости. Определить в нем:

- конструктор с параметрами, принимающий координаты точки;
- метод LengthToO, возвращающий расстояние от точки до начала координат;
- метод Length, возвращающий расстояние от данной точки до другой точки;
- метод ChangeX, сдвигающий точку по оси *Ox* на заданную величину;
- метод ChangeY, сдвигающий точку по оси *Oy* на заданную величину;
- метод для вывода координат точки.

```
using System;
```

```
class Point
{
    // объявление закрытых полей
    private double x, y;      // координаты точки

    // конструктор с параметрами
    public Point(double x, double y)
    {
        this.x = x;
        this.y = y;
    }

    // метод вычисления расстояния от точки до начала координат
    public double LengthToO()
    {
        return Math.Sqrt(x * x + y * y);
    }

    // метод вычисления расстояния от данной точки до другой точки
    public double Length(Point p)
    {
        return Math.Sqrt(Math.Pow(x - p.x, 2) + Math.Pow(y - p.y, 2));
    }

    // метод, сдвигающий точку по оси Ox на заданную величину
    public void ChangeX(double dx)
```

```

    {
        x += dx;
    }

    // метод, сдвигающий точку по оси Oy на заданную величину
    public void ChangeY(double dy)
    {
        y += dy;
    }

    // метод для вывода координат точки
    public void Show()
    {
        Console.WriteLine("{0}, {1}", x, y);
    }
}

class Program
{
    static void Main(string[] args)
    {
        Console.Write("Введите абсциссу первой точки: ");
        double x1 = double.Parse(Console.ReadLine());
        Console.Write("Введите ординату первой точки: ");
        double y1 = double.Parse(Console.ReadLine());
        Console.Write("Введите абсциссу второй точки: ");
        double x2 = double.Parse(Console.ReadLine());
        Console.Write("Введите ординату второй точки: ");
        double y2 = double.Parse(Console.ReadLine());
        Point p1 = new Point(x1, y1);
        Point p2 = new Point(x2, y2);
        Console.Write("Координаты первой точки: ");
        p1.Show();
        Console.Write("Координаты второй точки: ");
        p2.Show();
        Console.WriteLine("Расстояние от первой точки до начала координат {0}",
p1.LengthToO());
        Console.WriteLine("Расстояние от второй точки до начала координат {0}",
p2.LengthToO());
        Console.WriteLine("Расстояние от первой точки до второй равно {0}", p1.Length(p2));
        p1.ChangeY(3);
        Console.WriteLine("Сдвинули первую точку на 3 единицы вверх.");
        Console.Write("Её новые координаты: ");
        p1.Show();
        p2.ChangeX(-2);
        Console.WriteLine("Сдвинули вторую точку на 2 единицы влево.");
        Console.Write("Её новые координаты: ");
        p2.Show();
        Console.ReadLine();
    }
}

```

2. Описать класс комплексное число Complex. Комплексные числа имеют вид $a + bi$, где $i^2 = -1$, $a, b \in R$. Определить в нем:

- конструктор, принимающий действительную и мнимую часть;
- методы Re и Im, возвращающие действительную и мнимую части;
- методы Abs и Arg, возвращающие модуль и аргумент числа;
- операции сложения, вычитания, умножения и деления (аргументы могут быть как комплексными, так и комплексным и действительным числами);
- метод для вывода комплексного числа.

Решение

```

using System;

class Complex

```

```

{
    // поля
    private double a;
    private double b;
    // конструктор с параметрами
    public Complex(double re, double im)
    {
        a = re;
        b = im;
    }
    // метод, возвращающий действительную часть числа
    public double Re()
    {
        return a;
    }
    // метод, возвращающий мнимую часть числа
    public double Im()
    {
        return b;
    }
    // метод, возвращающий модуль числа
    public double Abs()
    {
        return Math.Sqrt(a * a + b * b);
    }
    // метод, возвращающий аргумент числа
    public double Arg()
    {
        return Math.Atan(b / a);
    }

    // сложение двух комплексных чисел, перегрузка оператора +
    public static Complex operator +(Complex z1, Complex z2)
    {
        return new Complex(z1.a + z2.a, z1.b + z2.b);
    }
    // сложение комплексного и действительного чисел, перегрузка оператора +
    public static Complex operator +(Complex z, double x)
    {
        return new Complex(z.a + x, z.b);
    }
    // вычитание двух комплексных чисел, перегрузка оператора -
    public static Complex operator -(Complex z1, Complex z2)
    {
        return new Complex(z1.a - z2.a, z1.b - z2.b);
    }
    // вычитание действительного числа из комплексного, перегрузка оператора -
    public static Complex operator -(Complex z, double x)
    {
        return new Complex(z.a - x, z.b);
    }
    // умножение двух комплексных чисел, перегрузка оператора *
    public static Complex operator *(Complex z1, Complex z2)
    {
        return new Complex(z1.a * z2.a - z1.b * z2.b, z1.a * z2.b + z1.b * z2.a);
    }
    // умножение комплексного и действительного числа, перегрузка оператора *
    public static Complex operator *(Complex z, double x)
    {
        return new Complex(z.a * x, z.b * x);
    }
    // деление двух комплексных чисел, перегрузка оператора /
    public static Complex operator /(Complex z1, Complex z2)
    {
        double re = (z1.a * z2.a + z1.b * z2.b) / (z2.a * z2.a + z2.b * z2.b);
    }
}

```

```

        double im = (z1.b * z2.a - z1.a * z2.b) / (z2.a * z2.a + z2.b * z2.b);
        return new Complex(re, im);
    }
    // деление комплексного числа на действительное, перегрузка оператора /
    public static Complex operator /(Complex z, double x)
    {
        return new Complex(z.a / x, z.b / x);
    }
    // метод для вывода комплексного числа
    public void PrintComplex()
    {
        if (b >= 0)
            if (b != 1)
                Console.WriteLine("{0}+{1}i", a, b);
            else
                Console.WriteLine("{0}+i", a);
        else
            if (b != -1)
                Console.WriteLine("{0}{1}i", a, b);
            else
                Console.WriteLine("{0}-i", a);
    }
}

class Program
{
    static void Main(string[] args)
    {
        // создание экземпляров класса Complex
        Complex z1 = new Complex(7, -4);
        Complex z2 = new Complex(3, 2);
        // вывод комплексных чисел (использование метода PrintComplex)
        Console.Write("z1 = ");
        z1.PrintComplex();
        Console.Write("z2 = ");
        z2.PrintComplex();

        // вывод модуля и аргумента комплексного числа
        Console.WriteLine("модуль числа z1 = {0}", z1.Abs());
        Console.WriteLine("аргумент числа z1 = {0} радиан", z1.Arg());

        // сложение двух комплексных чисел
        Complex z3 = z1 + z2;
        Console.Write("z3 = z1 + z2 = ");
        z3.PrintComplex();

        // сложение комплексного и действительного чисел
        Complex z4 = z2 + 4;
        Console.Write("z4 = z2 + 4 = ");
        z4.PrintComplex();

        // вычитание двух комплексных чисел
        Complex z5 = z1 - z2;
        Console.Write("z5 = z1 - z2 = ");
        z5.PrintComplex();

        // вычитание действительного числа из комплексного
        Complex z6 = z1 - 3;
        Console.Write("z6 = z1 - 3 = ");
        z6.PrintComplex();

        // умножение двух комплексных чисел
        Complex z7 = z1 * z2;
        Console.Write("z7 = z1 * z2 = ");
        z7.PrintComplex();
    }
}

```

```

// умножение комплексного числа на действительное
Complex z8 = z1 * 3;
Console.Write("z8 = z1 * 3 = ");
z8.PrintComplex();

// деление двух комплексных чисел
Complex z9 = z1 / z2;
Console.Write("z9 = z1 / z2 = ");
z9.PrintComplex();

// деление комплексного числа на действительное
Complex z10 = z1 / 2;
Console.Write("z10 = z1 / 2 = ");
z10.PrintComplex();
Console.ReadLine();
}
}

```

3. Описать интерфейс `IShape` для геометрических фигур. Интерфейс должен содержать методы `Perimeter` и `Area`, возвращающие периметр и площадь соответственно. Описать классы `Triangle` (треугольник) и `Rectangle` (прямоугольник), реализующие этот интерфейс. Параметры фигур должны задаваться при создании экземпляра. В классах `Triangle` и `Rectangle` переопределить метод `ToString`, возвращающий строковое название фигуры и ее параметры.

Написать метод, принимающий фигуру и выводящий на экран её название, параметры, периметр и площадь.

Написать программу, использующую этот метод.

Решение

```

using System;

// интерфейс "фигура"
interface IShape
{
    // метод, возвращающий периметр
    double Perimeter();

    // метод, возвращающий площадь
    double Area();
}

// класс Треугольник реализует интерфейс IShape
class Triangle : IShape
{
    // поля класса
    double a;
    double b;
    double c;

    // конструктор
    public Triangle(double a, double b, double c)
    {
        this.a = a;
        this.b = b;
        this.c = c;
    }

    // реализация метода Perimeter интерфейса
    public double Perimeter()
    {
        return a + b + c;
    }

    // реализация метода Area интерфейса

```

```

public double Area()
{
    double p = Perimeter() / 2;
    return Math.Sqrt(p * (p - a) * (p - b) * (p - c));
}

// переопределенный метод ToString
public override string ToString()
{
    return string.Format("Треугольник со сторонами {0}, {1}, {2}", a, b, c);
}
}

// данный класс реализует интерфейс IShape
class Rectangle : IShape
{
    // поля класса
    double width;
    double height;

    // конструктор
    public Rectangle(double width, double height)
    {
        this.width = width;
        this.height = height;
    }

    // реализация метода Perimeter интерфейса
    public double Perimeter()
    {
        return 2 * (width + height);
    }

    // реализация метода Area интерфейса
    public double Area()
    {
        return width * height;
    }

    // переопределенный метод ToString
    public override string ToString()
    {
        return string.Format("Прямоугольник со сторонами {0}, {1}", width, height);
    }
}

class Program
{
    static void Main(string[] args)
    {
        Triangle tr = new Triangle(3, 4, 5);
        Rectangle re = new Rectangle(6, 7);
        PrintInfo(tr);
        PrintInfo(re);
        Console.ReadLine();
    }

    // метод, принимающий фигуру (объект интерфейса IShape)
    static void PrintInfo(IShape shape)
    {
        Console.WriteLine("{0}; P = {1}, S = {2}", shape, shape.Perimeter(),
shape.Area());
    }
}

```

4. Дано натуральное число. Определить, сколько раз встречается каждая цифра в числе.

Решение

```
using System;
using System.Collections.Generic;

class Program
{
    static void Main(string[] args)
    {
        int n, p;
        Dictionary<int, int> numbers = new Dictionary<int, int>();
        Console.WriteLine("Введите натуральное число");
        n = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
        while (n != 0)
        {
            p = n % 10;
            if (!(numbers.ContainsKey(p)))
                numbers.Add(p, 1);
            else
                numbers[p]++;
            n = n / 10;
        }
        foreach (var pair in numbers)
            Console.WriteLine("Цифра {0} - {1} раз(a)", pair.Key, pair.Value);
        Console.ReadLine();
    }
}
```

Вывод результата можно организовать и таким образом:

```
for (int i = 0; i <= 9; i++)
{
    if (numbers.ContainsKey(i))
        Console.WriteLine("Цифра {0} - {1} раз(a)", i, numbers[i]);
    else
        Console.WriteLine("Цифра {0} - отсутствует", i);
}
```

5. Даны два целых числа. Определить цифры, входящие в запись как первого, так и второго числа.

Решение

```
using System;
using System.Collections.Generic;

class Program
{
    static void Main(string[] args)
    {
        Console.WriteLine("Введите два целых числа");
        int n1 = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
        int n2 = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
        SortedSet<int> digits1 = Digits(n1);
        SortedSet<int> digits2 = Digits(n2);
        Console.WriteLine("Цифры, входящие в запись 1-го числа:");
        Console.WriteLine(string.Join(" ", digits1));
        Console.WriteLine("Цифры, входящие в запись 2-го числа:");
        Console.WriteLine(string.Join(" ", digits2));
        digits1.IntersectWith(digits2);
        Console.WriteLine("Цифры, входящие в запись как 1-го, так и 2-го числа:");
        Console.WriteLine(string.Join(" ", digits1));
        Console.ReadLine();
    }
}
```

```

static SortedSet<int> Digits(int n)
{
    SortedSet<int> num = new SortedSet<int>();
    while (n != 0)
    {
        num.Add(n % 10);
        n /= 10;
    }
    return num;
}
}

```

6. Создайте список целых чисел. Заполните его n случайными числами из диапазона $[a, b]$. Используя технологию LINQ, выполните следующие действия:

1. Создать список из четных элементов и отсортировать его по возрастанию.
 2. Найти сумму нечетных элементов.
 3. Найти среднее арифметическое отрицательных элементов.
 4. Найти максимальный отрицательный элемент.
 5. Определить, есть ли элементы, значения которых больше 15.
 6. Найти первый отрицательный элемент, делящийся на 3; в случае его отсутствия вывести соответствующее сообщение.
- Предусмотреть обработку исключительных ситуаций.

Решение

```

using System;

class Program
{
    static void Main(string[] args)
    {
        try
        {
            Random rand = new Random();
            List<int> numbers = new List<int>();
            Console.WriteLine("Введите количество элементов списка: ");
            int n = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
            if (n < 0)
                throw new ArgumentException("Недопустимое значение количества");
            Console.WriteLine("Введите границы диапазона [a; b]: ");
            int a = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
            int b = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
            if (a >= b)
                throw new ArgumentException("Значение a должно быть меньше b");
            for (int i = 0; i < n; i++)
            {
                numbers.Add(rand.Next(a, b + 1));
            }
            Console.WriteLine("Заполненный список: {0}", string.Join(" ", numbers));
            var numbersSort = numbers.Where(x => x % 2 == 0).OrderBy(x => x);
            Console.WriteLine("Отсортированный по возрастанию список четных элементов:
{0}",
                string.Join(" ", numbersSort));
            Console.WriteLine("Сумма нечетных элементов: {0}",
                numbers.Where(x => x % 2 != 0).Sum());
            if (numbers.Count(x => x < 0) == 0)
            {
                Console.WriteLine("Отрицательные элементы отсутствуют");
            }
            else
            {
                Console.WriteLine("Среднее арифметическое отрицательных элементов: {0}",
                    numbers.Where(x => x < 0).Average());
                Console.WriteLine("Максимальный отрицательный элемент: {0}",
                    numbers.Where(x => x < 0).Max());
            }
        }
    }
}

```

```

    }
    if (numbers.Any(x => x > 15))
    {
        Console.WriteLine("В списке есть элементы, значения которых больше 15");
    }
    else
    {
        Console.WriteLine("В списке отсутствуют элементы, значения которых больше
15");
    }
    if (!numbers.Any(x => x < 0 && x%3==0))
    {
        Console.WriteLine("В списке отсутствуют отрицательные элементы, делящиеся
на 3");
    }
    else
    {
        Console.WriteLine("Первый отрицательные элементы, делящийся на 3: {0}",
numbers.First(x => x < 0 && x % 3 == 0));
    }
}

catch (FormatException)
{
    Console.WriteLine("Ошибка. Неверный формат данных");
}

catch (ArgumentException ex)
{
    Console.WriteLine("Ошибка. {0}", ex.Message);
}

catch (OverflowException ex)
{
    Console.WriteLine("Ошибка. {0}", ex.Message);
}

Console.ReadLine();
}
}

```

Технология разработки и защиты баз данных

1. Спроектировать схему базы данных, хранящую информацию об оценках студентов. Схема должна содержать 4 таблицы: Students (студенты: фамилия, имя, отчество), Groups (группы: курс, название), Courses (дисциплины: название), Grades (оценки: значение оценки от 2 до 5 для пары предмет - студент).

Создать таблицы в СУБД и заполнить их произвольными данными (не менее 5 строк на таблицу).

Выполнить SQL-запросы, отвечающие на вопросы:

- Сколько студентов в каждой из групп?
- Какова средняя оценка каждого студента?
- Сколько студентов имеют средний балл выше 4,5?

В какой группе минимальный средний балл студентов наибольший?

2. Спроектировать схему базы данных «Записная книжка». Приложение ориентировано на администратора, руководителя.

Объекты приложения:

Поручение

- Идентификатор поручения
- Краткая формулировка поручения
- Подробное описание работы

- Идентификатор исполнителя поручения
- Дата исполнения
- Отметка о выполнении

Исполнители

- Идентификатор исполнителя
- Ф.И.О.
- Идентификатор отдела

Отделы

- Идентификатор отдела
- Название отдела
- Ф.И.О руководителя отдела
- Телефон

Выполнить SQL-запросы, отвечающие на вопросы:

1. Вывод на экран невыполненных на текущую дату дел и фамилий исполнителей
2. Вывод на экран всех дел из заданного промежутка времени от ... и до ...
3. Вывод на экран названий отделов и фамилий начальников, сотрудники которых просрочили выполнение поручений.
4. Вывод на экран названий отделов и фамилий начальников и количество сотрудников отдела.

Паттерны проектирования

1. Построить UML-диаграмму паттерна «Стратегия» и реализовать задачу.

Имеется абстрактный класс Duck, на базе него реализовать 2 конкретных класса уток (WildDuck, ToyDuck). Утка может издавать звуки, плавать и летать. Сделать возможность динамической смены поведения конкретной утки (используя Interface для задания поведения).

2. Построить UML-диаграмму паттерна «Наблюдатель» и на его основе реализовать задачу.

Построить класс WeatherData, генерирующий случайные данные погоды, реализовать для него несколько наблюдателей.

3. Построить UML-диаграмму паттерна «Наблюдатель» и на его основе реализовать задачу.

Построить класс VacancyData, генерирующий новые случайные вакансии, подключить к нему несколько наблюдателей, получающих оповещения при появлении новых вакансий.

4. Построить UML-диаграмму паттерна «Синглтон» и на его основе реализовать задачу.

Построить класс Person, сделать его синглтоном и реализовать в классе возможность получать урон и лечение.

5. Реализовать перебор любой коллекции, используя паттерн «Итератор», сделать его круговым (закольцевать коллекцию) и добавить возможность перебирать в обе стороны.

6. Построить UML-диаграмму паттерна «Адаптер» и на его основе реализовать задачу.

Имеются два класса - Duck и Turkey, реализующие соответствующие интерфейсы IDuck и ITurkey. В IDuck описывается метод Quack(), а в ITurkey – Gobble(). В классе Duck метод Quack выводит в консоль «Quack-quack», а в Turkey метод Gobble выводит «Gobble». Реализовать класс-адаптер для Duck, приводимый к интерфейсу ITurkey.

7. Построить UML-диаграмму паттерна «Фабрика» и на его основе реализовать задачу.

Имеется абстрактный класс Pizza и два его потомка - CheesePizza и VeggiePizza. Реализовать фабричный класс, задача которого - создавать экземпляры классов CheesePizza и VeggiePizza. Тип создаваемого экземпляра передаётся через параметры метода.

Построение и анализ алгоритмов

1. Алфавит машины Тьюринга включает следующие буквы $A = \{a, b, c\}$. На ленте машины записано не пустое слово P , состоящее из букв этого алфавита. Перенести первый символ слова P в его конец.

Решение.

Для решения этой задачи предлагается выполнить следующие действия:

1. Запомнить первый символ слова P , а затем стереть этот символ.

2. Перегнуть автомат вправо под первую пустую клетку за P и записать в неё запомненный символ.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
a	$_ \rightarrow Q_2$	$a \rightarrow Q_2$	$a \rightarrow Q_3$	$a \rightarrow Q_4$
b	$_ \rightarrow Q_3$	$b \rightarrow Q_2$	$b \rightarrow Q_3$	$b \rightarrow Q_4$
c	$_ \rightarrow Q_4$	$c \rightarrow Q_2$	$c \rightarrow Q_3$	$c \rightarrow Q_4$
$_$	$_ \rightarrow Q_1$	$a \rightarrow \ominus$	$b \rightarrow \ominus$	$c \rightarrow \ominus$

Тесты

Входные данные	Выходные данные
сbaа	baас
bcсаа	ссaab
aacba	асbaа
ab	ba
с	с

2. Алфавит машины Тьюринга включает следующие буквы $A = \{a, b, 0, 1\}$. На ленте машины записано не пустое слово P , состоящее из букв этого алфавита. Определить, является ли слово P записью числа в двоичной системе счисления (непустым словом, состоящем только из цифр 0 и 1). Ответ: слово 1 (да) или слово 0 (нет).

Решение.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
0	$0 \rightarrow Q_1$	$0 \rightarrow Q_2$	$_ \leftarrow Q_3$	$_ \leftarrow Q_4$
1	$1 \rightarrow Q_1$	$1 \rightarrow Q_2$	$_ \leftarrow Q_3$	$_ \leftarrow Q_4$
a	$a \rightarrow Q_2$	$a \rightarrow Q_2$	$_ \leftarrow Q_3$	$_ \leftarrow Q_4$
b	$b \rightarrow Q_2$	$b \rightarrow Q_2$	$_ \leftarrow Q_3$	$_ \leftarrow Q_4$
$_$	$1 \leftarrow Q_3$	$0 \leftarrow Q_4$	$_ \rightarrow \ominus$	$_ \rightarrow \ominus$

Тесты

Входные данные	Выходные данные
10011	1
00101	1
abaab	0
1ab01	0
1	1
a	0
b1a01	0

3. Дан алфавит $A = \{a, b, c\}$ и не пустое слово P , состоящее из букв этого алфавита. Написать нормальный алгоритм Маркова перемещающий первый символ слова P в его конец.

Решение

Рабочая строка		bba		
Система подстановок:				
		Образец		Замена
→	1	*a	→	A
→	2	*b	→	B
→	3	Aa	→	aA
↑	4	Ab	→	bA
↓	5	Ba	→	aB
	6	Bb	→	bB
	7	A	→	a.
	8	B	→	b.
	9		→	*

Тесты

Входные данные	Выходные данные
aabb	abba
bbaba	babab
a	a
ba	ab
abb	bba

4. Программно реализовать следующие алгоритмы сортировки: сортировка «вставками», сортировка выбором. Произвести пооператорный анализ этих алгоритмов. Определить для них O и Ω .

5. Решить следующую задачу, основываясь на идее жадных алгоритмов:

Системный администратор вспомнил, что давно не делал архива пользовательских файлов. Однако, объем диска, куда он может поместить архив, может быть меньше чем суммарный объем архивируемых файлов. Известно, какой объем занимают файлы каждого пользователя.

Напишите программу, которая по заданной информации о пользователях и свободному объему на архивном диске определит максимальное число пользователей, чьи данные можно поместить в архив, при этом используя свободное место как можно более полно.

Входные данные: сначала вводится число S – размер свободного места на диске, затем следует число N – количество пользователей, после этого идет N чисел – объем данных каждого пользователя.

Выходные данные: выведите наибольшее количество пользователей, чьи данные могут быть помещены в архив.

входные данные	выходные данные
100 2 200 50	1
100 3 50 30 50	2

Примеры:

4.4.2. Литература

Математический анализ

Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. – М.: Высшая школа, 1973. – Т. 1, 2.

Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979.

Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. – М.: Высшая школа, 1973. – Т. 1, 2.

Зорич В. А. Математический анализ. – М.: Наука, т.1 – 1981, т.2 – 1984.

- Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1969. Т. 1-3.
- Запорожец Г.Н. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966.
- Алгебра и аналитическая геометрия**
- Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2006.
- Кострикин А., Манин Ю. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Лань, 2008.
- Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 1999.
- Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М., Наука, 1968.
- Дифференциальные уравнения**
- Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1959.
- Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1969.
- Виленкин Н.Я., Доброхотова М.А., Сафонов А.Н. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1984.
- Теория вероятностей и математическая статистика**
- Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1972.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, т. 1 – 1964, т. 2 – 1967.
- Венцтель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969.
- Боровков А.А. Математическая статистика. – СПб.: Лань, 2010.
- Численные методы**
- Калиткин Н. Численные методы. – СПб.: БХВ, 2011.
- Самарский А. А. Введение в численные методы. – М. Лань, 2009.
- Рыжиков Ю. Вычислительные методы. – СПб.: БХВ, 2012.
- Исследование операций**
- Малыхин В.И. Математика в экономике, Москва, изд-во ИНФРА, 2002, 352с.
- Шикин Е.В. Исследование операций, Москва, изд-во «Проспект», 2006, 275с.
- Программирование на языке С#**
- Орлов С.А. Теория и практика языков программирования: Учебник для вузов. Стандарт 3-го поколения. – СПб.: Питер, 2013. – 688 с.
- Павловская Т.А. С#. Программирование на языке высокого уровня: Учебник для вузов. СПб.: Питер, 2014. – 432 с.
- Подбельский В.В. Язык С#. Базовый курс: учеб. пособие / В.В. Подбельский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2015. – 408 с.
- Шилдт Г. С# 4.0: полное руководство.: Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2011. – 1056 с.
- Албахари Дж., Албахари Б. С# 5.0. Справочник. Полное описание языка. – М.: Вильямс, 2013.
- Паттерны проектирования**
- Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений. – М.: Вильямс, 2010.
- Гамма, Э. Хелм, Р. Джонсон, Р. Влиссидес, Дж. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования. / пер. с англ. – СПб.: Питер, 2007. – 366 с.
- Фримен Э. и др. Паттерны проектирования. – СПб.: Питер, 2016.
- Проектирование и защита баз данных**
- Ицик Бен-Ган. Microsoft SQL Server 2008. Основы T-SQL: СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 432 с.: ил.
- Харрингтон, Джен Л. Проектирование реляционных баз данных. Издательство Лори, 2006. – 241 с.
- Петкович Д. Microsoft SQL Server 2008. Руководство для начинающих: СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 792 с.: ил.
- Фленов М.Е. Transact-SQL. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 576 с.: ил.
- Построение и анализ алгоритмов**
- Пильщиков В.Н. Машина Тьюринга и алгоритмы Маркова. Решение задач. – М.: Изд.МГУ, 2006.
- Курносоев М.Г., Введение в структуры и алгоритмы обработки данных: Новосибирск 2015. – 179 с.
- Роберт Лафоре, Структуры данных и алгоритмы, 2-е изд.: Питер, 2013. – 704 с.
- Кормен Т., Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1296 с.

Красиков И., Красикова И., Алгоритмы. Просто как дважды два, – М.: Эксмо, 2007. – 256 с.

4.4.3 Перечень технических средств, наглядных пособий, необходимых для проведения ГИА

Для проведения ГИА необходима аудитория, оснащённая компьютерной техникой и программным обеспечением для выполнения заданий по программированию и компьютерным технологиям.

5. Требования к выпускной квалификационной работе и критерии ее оценки

5.1. Общие положения

Выпускная квалификационная работа (ВКР) является завершающим этапом обучения и должна демонстрировать степень освоения обучающимся теоретических знаний, практических навыков, а также умение самостоятельно проводить исследования, решать практические задачи и формулировать выводы на основе полученных данных. Тема ВКР должна быть актуальной и соответствовать профилю подготовки студентов по выбранному направлению. Обучающийся должен представить ВКР на защите в установленный срок и быть готовым к ответам на вопросы членов государственной экзаменационной комиссии, которые будут касаться как содержательной части работы, так и методологических(практических) аспектов.

Примерная тематика выпускных квалификационных работ

1. Математическое моделирование и методы расчета квантовых физических процессов.
2. Приближенное решение интегральных уравнений с помощью метода наискорейшего спуска
3. Приближенное решение краевых задач с помощью метода Галеркина
4. Моделирование финансовой деятельности компании
5. Сравнительный анализ алгоритмов
6. поиска ассоциативных правил в транзакционных данных.
7. Сравнительный анализ ансамблевых методов машинного обучения в задаче обнаружения мошеннических транзакций
8. Финансовое моделирование инвестиционных проектов
9. Использование самоорганизующихся карт (SOM) для кластерного анализа многомерных данных
10. Оптимизация системы управления гальванометрическим сканером на основе методов предиктивного управления.
11. Разработка мобильного приложения программного комплекса «Процедурный кабинет»
12. Моделирование и реализация системы управления документами с собственным модулем версионирования
13. Моделирование финансовой деятельности банка
14. Автоматизация расчета себестоимости и учета в кондитерском цехе.
15. Автоматизация развертывания веб-приложений: сравнительный анализ ручных и автоматизированных подходов с учетом отказоустойчивости и масштабируемости.
16. Разработка игры с использованием процедурной генерации графических эффектов и адаптивных игровых систем.
17. Создание приложения для управления проектами с использованием Канбан-доски и диаграмм Ганта
18. Разработка алгоритмов машинного обучения для автоматического контроля качества лазерного сверления на основе анализа временных характеристик рассеянного лазерного излучения.
19. Моделирование необратимого однофотонного конвертера

20. Внедрение адаптивного интерфейса для образовательного сайта
21. Разработка и исследование быстродействующих алгоритмов управления для захвата динамических целей на беспилотных летательных аппаратах.
22. Моделирование кредитных рисков
23. Разработка десктопного приложения программного комплекса «Процедурный кабинет»

5.2. Перечень компетенций, проверяемых на защите выпускной квалификационной работы

Универсальные компетенции (УК):

- способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1);
- способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений (УК-2);
- способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде (УК-3);
- способен осуществлять деловую коммуникацию в устной и письменной формах на государственном языке Российской Федерации и иностранном (ых) языке (ах) (УК-4);
- способен воспринимать межкультурное разнообразие общества в социально-историческом, этическом и философском контекстах (УК-5);
- способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни (УК-6);
- способен поддерживать должный уровень физической подготовленности для обеспечения полноценной социальной и профессиональной деятельности (УК-7);
- способен создавать и поддерживать в повседневной жизни и в профессиональной деятельности безопасные условия жизнедеятельности для сохранения природной среды, обеспечения устойчивого развития общества, в том числе при угрозе и возникновении чрезвычайных ситуаций и военных конфликтов (УК-8);
- способен принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности (УК-9);
- способен формировать нетерпимое отношение к коррупционному поведению (УК-10);

Общепрофессиональные компетенции (ОПК):

- способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности (ОПК-1);
- способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач (ОПК-2);
- способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности (ОПК-3);
- способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности (ОПК-4);
- способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения (ОПК-5);

Профессиональные компетенции (ПК):

- Способен демонстрировать общенаучные базовые знания естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой (ПК-1);

– Способен использовать математический аппарат, методологии программирования и современные компьютерные технологии для эффективного решения прикладных задач и научно-исследовательской деятельности (ПК-2);

– Способен демонстрировать знания современных языков программирования, операционных систем, офисных приложений, информационно- телекоммуникационной сети "Интернет", способов и механизмов управления данными, принципов организации, состава и схемы работы операционных систем (ПК-3);

– Способен разрабатывать и применять алгоритмические и программные решения в области системного и прикладного программного обеспечения (ПК-4).

5.3 Требования к содержанию, объему и структуре выпускной квалификационной работы

К выпускной квалификационной работе предъявляются следующие требования:

- аргументация актуальности темы, теоретическая и практическая значимость, новизна исследования;
- самостоятельность и системность подхода выпускника в исследовании проблемы;
- отражение знаний литературы по теме;
- рассмотрение различных точек зрения и обязательная формулировка аргументированной позиции выпускника по затронутым в работе дискуссионным вопросам;
- полнота раскрытия темы;
- аргументированное, конструктивное и грамотное научное обоснование выводов и предложений, представляющих теоретическую и практическую ценность (с использованием практического материала);
- применение различных методов исследования проблемы;
- логичное изложение результатов исследования;
- орфографическая и стилистическая грамотность, правильное оформление выпускной квалификационной работы.

Требования к ВКР определяются приказом №685-ОД от 02.07.2025г. «О порядке проведения и организации государственной итоговой аттестации по образовательным программам высшего образования (программам бакалавриата, специалитета и магистратуры)».

Количество страниц выпускной квалификационной работы должно быть не менее 25, количество ссылок на используемые литературные источники – не менее 10.

Оформление ВКР должно соответствовать принятым стандартам оформления результатов научных исследований.

5.4. Порядок подготовки и сроки представления выпускной квалификационной работы

Для подготовки выпускной квалификационной работы выпускнику назначается руководитель и консультанты по отдельным частям ВКР.

К руководству ВКР привлекаются высококвалифицированные специалисты из числа педагогических работников ФМФ, имеющих высшее профессиональное образование, соответствующее профилю специальности. К каждому руководителю может быть одновременно прикреплено не более шести выпускников.

Руководитель выпускной квалификационной работы:

- разрабатывает индивидуальные задания по выполнению ВКР;
- оказывает помощь выпускнику в разработке плана ВКР;
- совместно с выпускником разрабатывает индивидуальный график выполнения ВКР;
- консультирует закрепленных за ним выпускников по вопросам содержания и последовательности выполнения ВКР;
- оказывает выпускнику помощь в подборе необходимой литературы;

- оказывает помощь выпускнику в подготовке презентации и выступления на защите ВКР;
- подготавливает отзыв на ВКР.

По завершении выпускником написания ВКР руководитель подписывает ее и вместе с заданием и своим письменным отзывом передает на кафедру не позднее, чем за 10 дней до защиты.

5.5. Рецензирование выпускной квалификационной работы

Рецензирование выпускных квалификационных работ бакалавров не предусмотрено.

5.6. Порядок защиты выпускной квалификационной работы

Защита выпускной квалификационной работы проходит на открытом, в присутствии всех желающих, заседании Государственной экзаменационной комиссии, в которую входят представители выпускающей кафедры, а также приглашенные специалисты из образовательных учреждений и других университетов, осуществляющих подготовку специалистов по информатике.

Дата, время и место заседаний Государственной экзаменационной комиссии по защите выпускных квалификационных работ устанавливаются деканатом факультета и доводятся до сведения защищающихся не менее, чем за месяц до защиты.

Процедура защиты строго регламентирована: защищающийся представляет краткое сообщение по теме работы, в котором излагаются актуальность, цель и задачи исследования, использованные методы, полученные результаты, их обоснование и выводы. На выступление отводится около 10 минут.

После выступления защищающегося предоставляется слово научному руководителю с отзывом о научно-исследовательских качествах защищающегося и его отношении к работе.

Если кто-то из них не может присутствовать на защите, то отзыв зачитывает председатель Государственной экзаменационной комиссии. Далее защищающийся отвечает на замечания, содержащиеся в рецензии, и на вопросы по работе, которые могут быть заданы любым из присутствующих на защите. После чего возможен обмен мнениями по поводу работы в виде отдельных выступлений желающих. В заключении защищающемуся предоставляется возможность в краткой форме ответить на критические замечания, высказанные в ходе обсуждения, поблагодарить присутствующих за внимание

5.7. Оценка выпускной квалификационной работы

Основными качественными показателями оценивания ВКР являются:

- актуальность и обоснование выбора темы ВКР;
- логика работы, соответствия содержания ВКР и её темы;
- степень самостоятельности;
- достоверность и обоснованность выводов;
- качество оформления ВКР, четкость и грамотность изложения материала;
- качество доклада, наглядных материалов (презентации), умение вести полемику по теоретическим и практическим вопросам, глубина и правильность ответов на вопросы членов ГЭК и замечания рецензентов;
- список использованных источников, достаточность использования отечественной и зарубежной литературы;
- возможность внедрения.

Результаты защиты ВКР определяются оценками "отлично", "хорошо", "удовлетворительно", "неудовлетворительно". Оценки "отлично", "хорошо", "удовлетворительно" означают успешную защиту ВКР.

Показатель оценивания ВКР	Критерий			
	Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
Актуальность и обоснование выбора темы	Работа выполнена на актуальную тему и решает практическую задачу, соответствующую профилю направления подготовки	Работа выполнена на актуальную тему и решает практическую задачу	В работе не определены решаемые практические задачи	Тема работы неактуальна и не соответствует профилю направления подготовки
Логика работы, соответствие содержания и темы	Все разделы работы соответствуют теме, логически выстроена последовательность решения проблемы, решены все поставленные задачи	Все разделы работы соответствуют теме, определены задачи решения исследуемой проблематики, решены основные поставленные задачи	Разделы работы соответствуют теме работы, поставленные задачи не позволяют решить исследуемую проблему	Последовательность разделов работы выстроена нелогично, содержание не соответствует теме работы
Степень самостоятельности	Все поставленные руководителем ВКР задачи решены самостоятельно в полном объеме	Поставленные руководителем ВКР задачи решены самостоятельно с частичным его участием	Поставленные руководителем ВКР задачи решены самостоятельно со значительным его участием	Не решены поставленные руководителем задачи
Достоверность и обоснованность выводов	Выводы достоверны и обоснованы, подтверждены необходимыми расчетами, решены все поставленные задачи	Выводы достоверны и обоснованы, подтверждены необходимыми расчетами	Не все выводы подтверждены необходимыми расчетами	Выводы не обоснованы, не подтверждены расчетами
Качество оформления ВКР	Оформление ВКР (текстовой части и графической части) полностью соответствует требованиям нормативных документов	Оформление ВКР (текстовой части и графической части) имеет незначительные отклонения от требований нормативных документов	Оформление ВКР (текстовой части и графической части) имеет значительные отклонения от требований нормативных документов	Оформление ВКР (текстовой части и графической части) не соответствует требованиям нормативных документов
Качество доклада, наглядных материалов (презентации)	Качество доклада высокое, в докладе представлены все результаты, доклад выполнен с использованием	Качество доклада хорошее, в докладе представлены все результаты, доклад выполнен с использованием	Качество доклада удовлетворительное, в докладе представлены не все результаты, доклад	Качество доклада неудовлетворительное, в докладе не представлены результаты, доклад выполнен с использованием

	компьютерных технологий в виде презентации	зованием компьютерных технологий в виде презентации	выполнен с использованием компьютерных технологий в виде презентации	зованием компьютерных технологий в виде презентации низкого качества
Список использованных источников	Использованные источники актуальны и соответствуют тематике работы, все источники использованы в работе	Использованные источники актуальны и соответствуют тематике работы, не все источники использованы в работе	Не все использованные источники актуальны и соответствуют тематике работы, не все источники использованы в работе	Использованные источники не актуальны и не все соответствуют тематике работы, не все источники использованы в работе
Возможность внедрения	Результаты ВКР представляют практическую значимость и ценность, могут быть использованы на предприятии и в учебном процессе	Результаты ВКР могут быть использованы на предприятии, в учебном процессе	Результаты ВКР соответствуют требованиям, предъявляемым к работам бакалавров и достаточны для защиты ВКР	Результаты ВКР не представляют значимость и ценность, не имеют возможность внедрения

Оценочные средства представлены в прилагаемом к программе ГИА Фонде оценочных средств для ГИА.

5.8. Литература:

Багачук А.В., Шашкина М.Б. Введение в научную деятельность студентов: учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. [Электронный ресурс]. URL: <http://elib.kspu.ru/document/8055> (дата обращения 23.04.2015).

Багачук А.В., Шашкина М.Б. Организация проектной деятельности студентов в процессе предметной подготовки в педагогическом вузе: монография. [Электронный ресурс]. URL: <http://elib.kspu.ru/document/10277> (дата обращения 23.04.2015).

Краевский В.В. Методологические характеристики научного исследования // Образование и наука. 2010. № 5. С. 135–143.

Полонский В.М. Методологические требования к описанию результатов научно-педагогических исследований // Наука – образованию. 2012. № 1. С. 101–109.

6.3. Содержание оценочных средств государственной итоговой аттестации

Государственная итоговая аттестация проводится в форме государственного экзамена и защиты выпускной квалификационной работы (ВКР).

Государственный экзамен

Государственный экзамен является одним из оценочных средств для государственной итоговой аттестации.

Перечень вопросов, выносимых на государственный экзамен

№ п/п	Вопрос
1	Математический анализ Дифференциал функции одной переменной. Приближенное вычисление значений функции посредством дифференциала. Неопределённый интеграл. Интегрирование по частям. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условие экстремума для случая функции двух переменных. Определение ряда и его сходимости. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.
2	Линейная алгебра и аналитическая геометрия Системы линейных уравнений. Матрицы и определители. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.
3	Дифференциальные уравнения Методы решения линейного дифференциального уравнения первого порядка. Возможный вид общего решения линейных однородных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами. Функции, однородные относительно x и y . Поиск общего решения (или общего интеграла) однородного дифференциального уравнения первого порядка.
4	Теория вероятностей и математическая статистика Случайные события и их вероятности. Одномерные случайные величины и их числовые характеристики. Элементы теории корреляции.
5	Численные методы Решение алгебраических и трансцендентных уравнений. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Интерполяция. Приближённое вычисление определённых интегралов. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.
6	Исследование операций Задача линейного программирования. Двойственность в линейном программировании. Симплекс-метод.
7	Программирование на языке C# Основы языка программирования C#. Управляющие конструкции. Обработка массивов. Классы и объекты. Инкапсуляция. Перегрузка методов и операторов. Организация иерархии классов. Интерфейсы. Обработка исключений. Делегаты, лямбда-выражения. Обобщённые коллекции. Технология Linq.
8	Технология разработки и защиты баз данных Реляционные базы данных. Язык SQL. Создание таблиц, вставка записей. Запросы на поиск: простые, с группировкой, агрегированием, объединением таблиц.

9	Паттерны проектирования Классы и интерфейсы. Шаблоны проектирования.
10	Построение и анализ алгоритмов Формализация понятия алгоритма. Машина Тьюринга. Формулы подстановки. Нормальные алгоритмы Маркова. Математические основы анализа алгоритмов (асимптотические обозначения). Алгоритмы поиска в одномерном массиве. Алгоритмы сортировки в одномерном массиве с оценкой сложности $O(n)$, $O(n \log n)$, $O(n^2)$. Алгоритмы динамического программирования. Жадные алгоритмы. Алгоритмы «разделяй и властвуй».

Критерии оценивания результатов сдачи государственного экзамена

Результаты сдачи государственного экзамена определяются оценками "отлично", "хорошо", "удовлетворительно", "неудовлетворительно". Оценки "отлично", "хорошо", "удовлетворительно" означают успешную сдачу государственного экзамена.

Оценка *«отлично»* выставляется обучающемуся, если он отвечает на поставленные вопросы в экзаменационном билете логично, последовательно, при этом не требуются дополнительные пояснения. Делает обоснованные выводы. Соблюдает нормы литературной речи. Ответ обучающегося развернутый, уверенный, содержит четкие формулировки. Обучающийся демонстрирует всестороннее систематическое и глубокое знание программного материала; владеет понятийным аппаратом; демонстрирует способность к анализу и сопоставлению различных подходов к решению заявленной в вопросе проблематики; подтверждает теоретические постулаты примерами из практики.

Оценка *«хорошо»* выставляется обучающемуся, если он отвечает на поставленные вопросы систематизировано, последовательно и уверенно. Демонстрирует умение анализировать материал, однако не все его выводы носят аргументированный и доказательный характер. Соблюдает нормы литературной речи. Обучающийся обнаруживает твердое знание программного материала; знание основных закономерностей и взаимосвязей между явлениями и процессами, способен применять знание теории к решению задач профессионального характера, однако допускает отдельные погрешности и неточности при ответе

Оценка *«удовлетворительно»* выставляется обучающемуся, если он при ответе в основном знает программный материал в объеме, необходимом для предстоящей работы по профессии. При этом допускает погрешности в ответе на вопросы. Приводимые им формулировки являются недостаточно четкими, в ответах допускаются неточности. Демонстрирует поверхностное знание вопроса, имеет затруднения с выводами, но очевидно понимание обучающимся сущности основных категорий по рассматриваемым вопросам. Нарушений норм литературной речи практически не наблюдается.

Оценка *«неудовлетворительно»* выставляется обучающемуся, если он при ответе обнаруживают значительные пробелы в знаниях основного программного материала; допускает принципиальные ошибки в ответе на вопросы экзаменационного билета. Материал излагает непоследовательно, не демонстрирует наличие системы знаний. Имеет заметные нарушения норм литературной речи.

6.4. Выпускная квалификационная работа

При защите ВКР выпускники должны, опираясь на полученные знания, умения и навыки, показать способность самостоятельно решать задачи профессиональной деятельности, излагать информацию, аргументировать и защищать свою точку зрения.

Критерии оценивания показателя и выпускной квалификационной работы в целом

Основными качественными показателями оценивания ВКР являются:

- актуальность и обоснование выбора темы ВКР,
- логика работы, соответствия содержания ВКР и её темы;
- степень самостоятельности;
- достоверность и обоснованность выводов;
- качество оформления ВКР, четкость и грамотность изложения материала;
- качество доклада, наглядных материалов (презентации), умение вести полемику по теоретическим и практическим вопросам, глубина и правильность ответов на вопросы членов ГЭК и замечания рецензентов;
- список использованных источников, достаточность использования отечественной и зарубежной литературы;
- возможность внедрения.

Результаты защиты ВКР определяются оценками "отлично", "хорошо", "удовлетворительно", "неудовлетворительно". Оценки "отлично", "хорошо", "удовлетворительно" означают успешную защиту ВКР.

Показатель оценивания ВКР	Критерий			
	Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
Актуальность и обоснование выбора темы	Работа выполнена на актуальную тему и решает практическую задачу, соответствующую профилю направления подготовки	Работа выполнена на актуальную тему и решает практическую задачу	В работе не определены решаемые практические задачи	Тема работы неактуальна и не соответствует профилю направления подготовки
Логика работы, соответствие содержания и темы	Все разделы работы соответствуют теме, логически выстроена последовательность решения проблемы, решены все поставленные задачи	Все разделы работы соответствуют теме, определены задачи решения исследуемой проблематики, решены основные поставленные задачи	Разделы работы соответствуют теме работы, поставленные задачи не позволяют решить исследуемую проблему	Последовательность разделов работы выстроена нелогично, содержание не соответствует теме работы
Степень самостоятельности	Все поставленные руководителем ВКР задачи решены самостоятельно в полном объеме	Поставленные руководителем ВКР задачи решены самостоятельно с частичным его участием	Поставленные руководителем ВКР задачи решены самостоятельно со значительным его участием	Не решены поставленные руководителем задачи

Достоверность и обоснованность выводов	Выводы достоверны и обоснованы, подтверждены необходимыми расчетами, решены все поставленные задачи	Выводы достоверны и обоснованы, подтверждены необходимыми расчетами	Не все выводы подтверждены необходимыми расчетами	Выводы не обоснованы, не подтверждены расчетами
Качество оформления ВКР	Оформление ВКР (текстовой части и графической части) полностью соответствует требованиям нормативных документов	Оформление ВКР (текстовой части и графической части) имеет незначительные отклонения от требований нормативных документов	Оформление ВКР (текстовой части и графической части) имеет значительные отклонения от требований нормативных документов	Оформление ВКР (текстовой части и графической части) не соответствует требованиям нормативных документов
Качество доклада, наглядных материалов (презентации)	Качество доклада высокое, в докладе представлены все результаты, доклад выполнен с использованием компьютерных технологий в виде презентации	Качество доклада хорошее, в докладе представлены все результаты, доклад выполнен с использованием компьютерных технологий в виде презентации	Качество доклада удовлетворительное, в докладе представлены не все результаты, доклад выполнен с использованием компьютерных технологий в виде презентации	Качество доклада неудовлетворительное, в докладе не представлены результаты, доклад выполнен с использованием компьютерных технологий в виде презентации низкого качества
Список использованных источников	Использованные источники актуальны и соответствуют тематике работы, все источники использованы в работе	Использованные источники актуальны и соответствуют тематике работы, не все источники использованы в работе	Не все использованные источники актуальны и соответствуют тематике работы, не все источники использованы в работе	Использованные источники не актуальны и не все соответствуют тематике работы, не все источники использованы в работе
Возможность внедрения	Результаты ВКР представляют практическую значимость и ценность, могут быть использованы на предприятии и в учебном процессе	Результаты ВКР могут быть использованы на предприятии, в учебном процессе	Результаты ВКР соответствуют требованиям, предъявляемым к работам бакалавров и достаточны для защиты ВКР	Результаты ВКР не представляют значимость и ценность, не имеют возможность внедрения