МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г. ШЕВЧЕНКО
БЕНДЕРСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ФИЛИАЛ

Кафедра общематематических и естественнонаучных дисциплин

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

Бендеры
2012

ББК 74.262
Л.13

Составитель:

Лаврова Л.С., старший преподаватель математики первой квалификационной категории кафедры «ОМиЕНД» БПФ ГОУ «ПГУ им. Т.Г.Шевченко»

Рецензенты:

НастаченкоЮ.В., зав кафедрой «ОМиЕНД», старший преподаватель БПФ ГОУ «ПГУ им. Т.Г.Шевченко»

Шинкаренко Е.Г., кандидат педагогических наук, доцент кафедры «М и МПМ» ГОУ «ПГУ им. Т.Г.Шевченко»

Л.13 Математика: учебно-методическое пособие./
Составитель Лаврова Л.С.

Учебно-методическое пособие по математике содержит контрольные задания написаные в соответствии с действующей программой по математике для средних профессиональных учебных заведений. Теоретический материал сопровождается подробными решениями примеров и задач. По каждой теме приведено достаточное количество задач для самостоятельного решения. Материал пособия предназначен для студентов II курса средних профессиональных учебных заведений.

ББК 74.262

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Содержание

Стр.

Программа……5

Методические указания к выполнению контрольной

работы ……7

Контрольная работа ……35

Программа

Т е м а 1. Неопределенный интеграл

Понятие неопределенного интеграла. Основные свойства неопределенного интеграла. Выделение интегральной кривой, проходящей через данную точку. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям.

Тема 2. Определенный интеграл и его приложения

Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Основные свойства определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла. Теорема о среднем. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона — Лейбница. Вычисление определенного интеграла методом подстановки. Формула интегрирования по частям.
Приближенные методы вычисления определенных интегралов. Формулы прямоугольников и трапеций для приближенных вычислений определенных интегралов.
Примеры «неберущихся» интегралов.
Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел по площадям сечений, объемов тел вращения. Формула для вычисления длины дуги кривой в прямоугольной системе координат. Дифференциал дуги. Формула для вычисления площади поверхности вращения. Решение физических и технических задач, связанных с понятием определенного интеграла.

Тема 3. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения. Основные понятия и определения. Задача Коши. Геометрическая интерпретация множества решений дифференциального уравнения. Решение простейших типов дифференциальных уравнений первого порядка: с разделяющимися переменными, линейных, однородных. Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение задач на составление дифференциальных уравнений.
Дифференциальные уравнения показательного роста и гармонических колебаний.

Тема 4. Ряды

Числовой ряд. Его члены. Частные суммы, сходимость и расходимость, сумма

ряда. Гармонический ряд. Необходимое условие сходимости ряда. Понятия абсолютной и условной сходимости. Достаточные признаки сходимости.

Сложение рядов и умножение ряда на число.
Функциональные ряды; область сходимости. Степенной ряд. Формулировка теоремы об области сходимости степенного ряда. Формулировка основных свойств степенного ряда (непрерывность суммы в области сходимости, почленное интегрирование и дифференцирование). Формула Тейлора (без вывода) и ее остаточный член. Ряд Тейлора; необходимое и достаточное условия его сходимости к порождающей функции. Единственность разложения.
Ряд Тейлора — Маклорена для функций: $y = e^x$; y = sin x; $y = cosx$; $y=(1+x)^n$; $y = ln(1+x)$.
Ряды Фурье для функций, заданных на конечном промежутке.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Тема 1.Неопределённый интеграл

Выучите основные свойства неопределенного интеграла и формулы интегрирования.

Пример *1*. ***В*** интеграле $\int \frac{3x^2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$ найти числовое значение С, при котором первообразная функция при x=9 принимает значение, равное 25.
Решение. В подинтегральном выражении числитель почленно разделим на знаменатель, тогда получим

$$\int\left(\frac{3}{2}x^{3/2}+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{5/2}}{5/2}+\frac{1}{2}x+C=\frac{3}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2}x+C$$

Из условия задачи известно, что первообразная функция
т.е. $\frac{3}{5}9^2\sqrt{9}+\frac{1}{2}\cdot 9+C=25,\quad \frac{9^3}{3}+\frac{9}{2}+C=25,$ откуда С=-125,3.

Пример 2. Найти уравнение кривой, проходящей через точку *А* (—2; 3), если касательная к кривой в каждой ее точке равна 3x.
Решение. С геометрической точки зрения, первая производная от заданной функции есть угловой коэффициент касательной, проведенной к графику этой функции при данном значении аргумента *x*,т.е. $\frac{dy}{dx}=3x$
Приведем к общему знаменателю и проинтегрируем обе части:
$dy = 3xdx, \int dy = 3\int xdx$
откуда $y = \frac{3}{2}x^2 + C$

По условию задачи кривая проходит через точку *A (*—2; 3). Подставив вместо *x* и y координаты этой точки, получим

$3=\frac{3}{2}(-2)^2+C, 3=6+C,$ откуда C=-3

Уравнение кривой примет вид $y=\frac{3}{2}x^2-3$

Пример 3. Найти $\int(5x^3-2)^{10}x^2dx$

Решение. Применим способ подстановки. Пусть $5x^3 — 2 = t$,

тогда $(5x^3-2)'dx=t'dt, 15x^2dx=dt, x^2dx=\frac{dt}{15}$,

Тогда $\int(5x^3-2)^{10}dx=\int t^{10}\frac{dt}{15}=\frac{1}{15}\int t^{10}dt=\frac{1}{15}\cdot\frac{t^{11}}{11}+C=\frac{1}{165}t^{11}+C$, но $t=5x^3-2$, следовательно,

$$\int(5x^3-2)^{10}x^2dx=\frac{1}{165}(5x^3-2)^{11}+C.$$

Полезно заметить, что если числитель подинтегрального выражения равен производной знаменателя, то интеграл такой функции равен натуральному логарифму знаменателя плюс произвольное постоянное *C,* т. е.

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C.$$

Тема 2. Определенный интеграл и его приложения

Непосредственное интегрирование

Пример 1. Вычислить $\int_0^{\pi/2}(2\cos x-3\sin x)dx$

Решение.

$$\int_0^{\pi/2}(2\cos x-3\sin x)dx=2\int_0^{\pi/2}\cos xdx-3\int_0^{\pi/2}\sin xdx=$$

$$=[2\sin x+3\cos x]_0^{\pi/2}=(2\sin\frac{\pi}{2}+3\cos\frac{\pi}{2})-(2\sin 0+3\cos 0)=2-3=-1$$

Метод подстановки

Пример 1. Вычислить $\int_{\pi/18}^{\pi/12}5\sin 6xdx$ методом подстановки.

Решение. Пусть 6x=t,тогда $(6x)'dx=dt, 6dx=dt, dx=\frac{dt}{6}$.

Вычислим новые пределы интегрирования:

$t_{в.п}=6x=6\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}, t_{н.п}=6x=6\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{3}.$

Таким образом, получим новый интеграл:

$$5\int_{\pi/18}^{\pi/12}\sin 6x dx = 5\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin t\frac{dt}{6} = -\frac{5}{6}[\cos t]_{\pi/3}^{\pi/2} = = -\frac{5}{6}(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{3}) = -\frac{5}{6}(0-\frac{1}{2}) = \frac{5}{12}$$

Из этого примера видно, что разница в применении метода подстановки к неопределенному и определенному интегралам состоит в том, что во втором случае не следует, т. е. не обязательно, возвращаться к старой переменной, так как при замене переменной изменяются также и пределы интегрирования.

Пример 2. Вычислить $\int_0^{\pi/3}\frac{\sin x dx}{3-\cos x}$

Решение. Пусть 3—cos x = t, (3 — cos x)'dx = $t'dt$, sin xdx =dt

Вычислим новые пределы интегрирования:

$$t_{в.п} = 3-\cos\frac{\pi}{3} = 3-\frac{1}{2} = \frac{5}{2};$$

$$t_{н.п} = 3-\cos 0° = 3-1 = 2;$$

Следовательно, получим новый интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\, dx}{3-\cos x} = \int_2^{\frac{5}{2}}\frac{dt}{t} = [\ln|2|]_2^{\frac{5}{2}} = \ln\frac{5}{2} - \ln 2 = \ln\frac{5}{2\cdot 2} = \ln\frac{5}{4} = 0{,}223$$

Необходимо избегать одной распространенной ошибки, которая встречается при вычислении определенных интегралов способом подстановки. Необходимо помнить, что в определенном интеграле пределы интегрирования a и b всегда относятся только к той переменной, которая входит в состав подынтегрального выражения. Поэтому при вычислении определенного интеграла пределы a и b следует подставлять только вместо данной переменной x, а не вместо новой переменной.

Метод интегрирования по частям

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид

$$\int_b^a udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

Пример 1.Найти $\int x\cos x dx$.

Решение**.** Пусть $u = x, dv = \cos x dx,$ тогда $du = dx, v = \int \cos x dx = \sin x$

Поэтому

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$

Вычисление площадей геометрических фигур

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{3}x^2 - 3$ и осью абсцисс.

Решение. Парабола лежит под осью *Ox,* следовательно, площадь искомой фигуры лежит под осью *Ox,* а потому будет со знаком минус (рис. 1)Приравнивая данную функцию к нулю, найдем пределы интегрирования. И затем интегрируем:

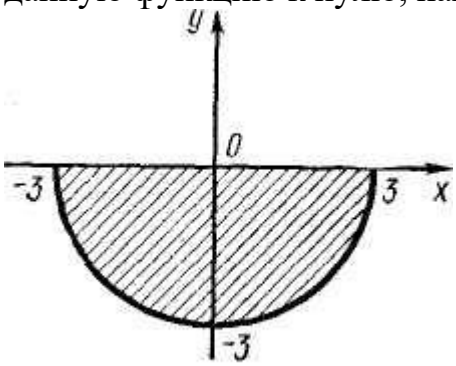


Рис. 1

$$S = \left|\int_{-3}^{3}\left(\frac{1}{3x^2-3}\right)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{3} - 3x\right]_{-3}^{3}\right| = \left|\left(\frac{1}{9}3^3 - 3\cdot 3\right) - \left[\frac{1}{9}(-3)^3(-3)\right]\right| =$$
$$|3 - 9 + 3 - 9| = 12(\text{кв.ед.})$$

.

Вычисление объемов тел вращения

Формулы для вычисления:

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx; V = \int_a^b x^2 dy$$

Задача 1. Определить объем тела, ограниченного поверхностью вращения параболы $y^2=4x$ вокруг оси *Ox* и плоскостью $x=h$ (рис. 2).

Решение. Применяя указанную формулу, получим

$$V = \pi\int_0^h y^2 dx = \pi\int_0^h 4x dx = \left[\pi\frac{4x^2}{2}\right]_0^h = 2\pi\left[x^2\right]_0^h = 2\pi h^2\left(\text{êóá.åä}\right).$$

Задача 2. Вычислить объем тела, образованного вращением оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{2}x+4, y=0, x=0, x=6$

Решение. На рис.2 дана фигура, объем которой нужно вычислить.
Из условия задачи $a=0, b=6, y=\frac{1}{2}x+4$. По формуле объема тела вращения.

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_0^6\left(\frac{1}{2}x+4\right)^2dx=\pi\left[\int_0^6\frac{1}{4}x^2dx+\int_0^6 4dx+\int_0^6 16dx\right]=$$
$$\pi\left[\frac{1}{12}6^3+2\,6^2+16\cdot 6\right]=186\pi$$

(куб.ед.)

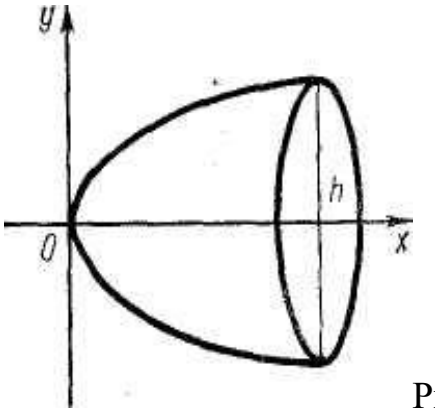


Рис2

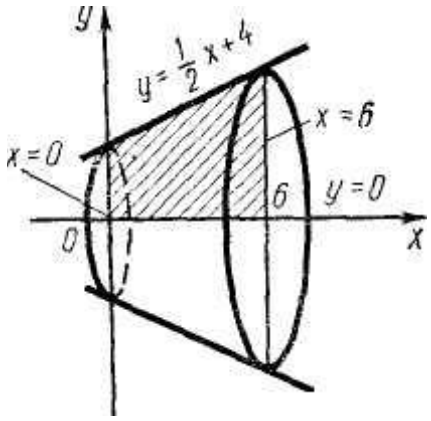


Рис3

Решение физических и технических задач

Задача 1. Сила в 20 кг растягивает пружину на 12 см. Какую-работу она производит?

Решение. Выразим данные величины в единицах СИ: F=20 кгс=20·9, 81 Н = 196,2 Н; x = 12см = 0,12м. По закону Гука сила пропорциональна растяжению или сжатию пружины, т. е. $F=kx$, где x—величина растяжения; k — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств пружины.

196,2=k 0,12; $k=\frac{196,2}{0,12}$.

Следовательно $F=\frac{196,2}{0,12}x$, ò .å.$F=f(x)$.

Получим:A=$\int_a^b f(x)dx$

Тема3.Дифференциальные уравнения

При решении многих задач математики, техники, физики и др. часто не удается установить зависимости между искомыми и данными переменными, но удается составить уравнение, связывающее независимую переменную,

искомую функцию и ее производные. Такое математическое уравнение называется дифференциальным уравнением. Решая его, находят зависимость уже между самими переменными.

Однако дифференциальное уравнение может и не содержать в явном виде независимую переменную и искомую функцию, но обязательно должно содержать одну или несколько производных искомой функции.

Задача 1. Требуется найти уравнение кривой, если известно, что угловой коэффициент касательной, проведенной в любой точке кривой, равен *2x*.

Решение. Из геометрического смысла производной $\frac{dy}{dx} = 2x$

Получили дифференциальное уравнение.

Решим его: $dy = 2xdx$, $\int dy = \int 2xdx$; $y = x^2 + C$

Так как *C* неизвестно, то геометрическое решение их даст семейство кривых. Допустим, что искомая кривая проходит через точку N(1; -3). Тогда подставив координаты этих точек в полученное уравнение, получим $-3 = 1^2 + C$, откуда $C = -4$, следовательно, искомое уравнение кривой имеет вид $y = x^2 - 4$.

Задача 2. Тело охладилось за 12 мин от 90 до 70°. Температура окружающего воздуха поддерживается постоянной и равной 12°. Определить, через сколько минут температура тела станет равна 50°.

Решение. Из условия задачи следует, что за 12 мин тело охладилось на 20° и так как температура окружающего воздуха поддерживается постоянной, то охлаждение тела еще на 20° должно как бы совершиться за следующие 12 мин. Но такое рассуждение ошибочно. Из физики известно, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой, до которой, нагрето тело, и температурой окружающей среды. Пусть температура тела в некоторый момент *t* равна *T (t),* тогда скорость изменения температуры по времени равна производной $\frac{dT}{dt}$.Так как скорость охлаждения пропорциональна разности между температурой нагрева тела и температурой окружающей среды, то получим

уравнение $\frac{dT}{dt} = k(T-12)$, где *k* — коэффициент пропорциональности, который и нужно определить.

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Уравнение вида $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$ называется уравнением с разделенными переменными.

Решение такого уравнения выполняется непосредственным

интегрированием: $\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C$

Пример 1. Решить уравнение $3xdx + ydy = C$.

Решение. Переменные здесь разделены. Поэтому интегрируя, получим

$$\int 3xdx + \int ydy = C, \frac{3x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C, 3x^2 + y^2 = 2C,$$

Так как произвольно, то можно обозначить $2C$ через C^2,принимая во внимание, что левая часть полученного равенства больше нуля.
Таким образом, искомое уравнение примет вид $3x^2 + y^2 = c^2$
Это и есть общее решение, т. е. общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $(x+1)dy = (y+1)dx$, где $x \neq -1; y \neq -1$

Решение. Произведем разделение переменных, для чего обе части уравнения разделим на $(x+1)(y+1) \neq 0$: $\frac{(x+1)dy}{(x+1)(y+1)} = \frac{(y+1)dx}{(x+1)(y+1)}, \frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x+1}$.

Проинтегрировав, получим

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x+1}, \ln(y+1) = \ln(x+1) + C.$$

Произвольную постоянную C можно принять за In C, тогда ln (y + 1) = In $(x + 1)$ + In C. В правой части сумму натуральных .логарифмов представим в виде логарифма произведения: $\ln(y+1) = -\ln C(x+1),$, откуда y+1=C(x+1).

Это и есть общий интеграл данного дифференциального уравнения. С геометрической точки зрения это есть уравнение пучка прямых, центром которого служит точка N (-1; -1) с угловым коэффициентом C.

Дифференциальные уравнения с отделяемыми переменными

Уравнение вида f(x)F(y)dx+φ(x)Q(y)dy = 0 называется уравнением с отделяемыми переменными. Это уравнение можно привести к предыдущему виду, разделив все члены уравнения на произведение φ (x)F(y).

Пример 1. Решить уравнение $x(y^2+1)dx + y(x^2-1)dy = 0$

Решение. Разделим все члены уравнения на произведение $(x^2-1)(y^2+1)$

$$\frac{xdx}{x^2-1} + \frac{ydy}{y^2+1} = 0$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{xdx}{x^2-1} \int \frac{ydy}{y^2+1} = C, \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\ln C$$

В этом примере произвольную постоянную C заменили на 1/2 lnC

Сократим все члены уравнения на 1/2:
$\ln(x^2-1)(y^2+1)=\ln C$ откуда $(x^2-1)(y^2+1)=C$
Это общее решение данного интегрального уравнения.

Однородные дифференциальные уравнения

Однородными дифференциальными уравнениями называются уравнения, которые могут быть приведены к виду $y' = f(y/x)$. Производная y' выражена в виде функции от отношения y/x.

Интегрирование таких уравнений производят способом замены переменных, полагая $y/x = t$, т. е. $y = xt$. Такая подстановка приводит к дифференциальному уравнению относительно x и t, в котором переменные отделяются, после чего их можно интегрировать. Для получения окончательного ответа надо вернуться к переменным $y\backslash x$.

Пример 1. **Решить уравнение** $x^2dy + y^2dx + xydy.=0$

Решение. Это однородное дифференциальное уравнение, поэтому его решение выполняется при помощи подстановки: $y = xt$. Дифференцируем

$$y'_x=(xt)'=x't+t'x, \text{èëè}\ \frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx}$$

Приведя данное уравнение к виду $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}$,заменим в нем $\frac{dy}{dx}$ и y их значениями:

$$t+x\frac{dt}{dx}=\frac{x^2t^2}{x^2(t-1)},\frac{xdt}{dx}=\frac{t^2}{t-1}-t,\frac{xdt}{dx}=\frac{t}{t-1}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{(t-1)dt}{t}=\frac{dx}{x},dt-\frac{dt}{t}=\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int dt-\int\frac{dt}{t}=\int\frac{dx}{x},t=\ln t+\ln x+\ln C,t=\ln(Cxt)$$

Но $t=\frac{y}{x}$,поэтому

$$\frac{y}{x}=\ln(Cy),Cy=e^{y/x},y=\frac{1}{C}e^{y/x}\ .$$

Допустим, что произвольное постоянное $\frac{1}{c}=c$ тогда $y=Ce^{y/x}$.

Линейные дифференциальные уравнения

Уравнения, которые содержат неизвестную функцию и ее производную только в

первой степени, называются линейными дифференциальными уравнениями. Такие уравнения имеют следующий вид:

$\frac{dy}{dx} yf(x) = F(x)$ или $y' + yf(x) = F(x)$.

Если правая часть, т. е. F(x)=0. то уравнение $\frac{dy}{dx} + yf(x) = 0$

называется линейным уравнением без правой части. Линейные уравнения решаются способом подстановки. Допустим, что *y=uv*, где u и v — функции от *x,* т. е. *y* разлагают на два сомножителя. Операция разложения может быть выполнена различными способами. Так, если *y = xsinx,* то данную функцию можно разложить на множители бесчисленным множеством

способов: $y = x^2 \frac{\sin x}{x} = e^x \frac{x\cos x}{e^x}$ и т.д.

При этом заметим, что один из сомножителей можно выбрать произвольно.

Пример 1.Решить уравнение $y' + y\frac{2}{x} = x^2$,

Запишем это уравнение так: $y' + y\frac{2}{x} = x^2$, тогда $f(x) = \frac{2}{x}, F(x) = x^2$ -линейное уравнение.

Предположим, что $y = uv$,тогда $y' = (uv)' = u'v + v'u;$ заменяя y' и y их значениями, получим $u'v + v'u + \frac{2}{x}uv = x^2$. В левой частdи вынесем u за скобки:

$u'v + u(v' + \frac{2}{x}v) = x^2$. (1)

Так как один из сомножителей в равенстве *y=uv* берется произвольно, например *v*, то, чтобы упростить решение, выберем *v таким* образом, чтобы выражение в скобках $v' + \frac{2}{x}v$ обратилось бы в нуль, т.е. $v' + \frac{2}{x}v = 0.$ или

$\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = 0$ (2)

Произведем разделение переменных, умножив (2) на $\frac{dx}{v}$, тогда

получим(3) $\frac{dv}{v} = -\frac{2}{x}dx$

Интегрируем обе части:

$\int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dx}{x}, \ln v = -2\ln x.$

Произвольную постоянную С не пишем, считая С=0: $\ln v = \ln x^{-2}$ Если натуральные логарифмы равны, то и сами числа равны, т.е.

$v = x^{-2}, v = \frac{1}{x^2}.$

Таким образом уравнение(1) примет вид

$u' \cdot \frac{1}{x^2} = x^2$ откуда $u' = x^4$, или $\frac{du}{dx} = x^4$,

$$du = x^4 dx, \int du = \int x^4 dx, u = \frac{x^5}{5} + C.$$

В этом случае необходимо писать С, иначе решение получится не в общем виде, а частное.

Затем найдем искомую функцию:

$$y = vu = \frac{1}{x^2} u, y = (\frac{x^5}{5} + C)\frac{1}{x^2}, y = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}.$$

***Замечание.* Подстановка *y = uv* не всегда приводит к простейшему способу решения.**

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$ называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Найдем неизвестную функцию в виде $y = e^{kx}$.Тогда $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$. Подставляя в заданное уравнение выражения для *y, y'*и y", получим $k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0, e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$ Но $e^{kx} \neq 0,$, следовательно, второй сомножитель равен нулю, т. е. $k^2 + pk + q = 0$

Это уравнение называется *характеристическим.* Решим его относительно *k,* при которых функция $y = e^{kx}$ является решением заданного дифференциального уравнения. При этом рассматриваются только такие дифференциальные уравнения, для которых *k* имеет действительные значения.

Так как характеристическое уравнение имеет два корня k_1 и k_2, то получим два частных решения: $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y^2 = e^{k_2 x}$ которые линейно независимы, т.е. $y_1 \neq Cy_2$,при каком угодно значении *C.*

Общее решение дифференциального уравнения составляется в виде линейной комбинации найденных частных решений, т. е.

$y = C_1 y + C_2 y_2$ где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Тема 4.Ряды

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.Сходится ли ряд?

Решение. Общий член данного ряда

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n},$$

Так как с увеличением знаменателя дробь уменьшается; но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}$ гармонический, расходящийся, а потому данный ряд расходится.

Пример 2. Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходность ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

Решение

$$u_n=\frac{3^n n!}{n^n}, u_{n+1}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)}:\frac{3^n n!}{n^n}=\frac{3^n n!}{n^n}=\frac{3^n n}{(n+1)^n}=\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1,$$

Так как e=2,71…, поэтому ряд расходится.

Степенной ряд

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots$$

и выяснить вопрос о его сходимости на концах промежутка сходимости.

Решение. Здесь

$$a_0=0, a_n x^n=\frac{x^n}{n^2}, a_{n+1}x^{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{|x^{n+1}|\cdot n^2}{(n+1)^2|x^n|}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^2|x|\right]=\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}|x|\right]=|x|$$

Следовательно, этот ряд сходится при $|x|<1$,т.е. в промежутке $-1<x<1$.

Формула Тейлора, ряд Тейлора. Единственность разложения.

Ряд Тейлора—Маклорена

Если функция *f(x)* дифференцируема *n* раз в интервале *]a, x[,* то получим формулу Тейлора

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\ldots+f^{n-1}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+R_n,$$

Где $R_n=f^n(c)\frac{(x-a)^n}{n!}(a<c<x)$ -остаточный член, а число с можно записать в виде $c=a+\theta(x-a)$, где $0<\theta<1$

Если при неограниченном возрастании n, т.е. при $n\to\infty$,

$$\lim_{x\to\infty} R_n = 0,$$

То из формулы Тейлора получается разложение функции $f(x)$ в ряд по степеням $(x-a)$,называемый рядом Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

Отсюда положив а=0,получим разложение функции в так называемый ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Пример 1. Найти решение уравнений y'=y при начальном условии y(0)= 1.

Р е ш е н и е . Запишем искомое решение в виде

$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots, c_0 = y(0) = 1,$ тогда $y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^3 + \ldots$

Подстановка в данное уравнение даёт

$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x,* получим вместе с начальным условием рекуррентную систему уравнений, из которой последовательно определяем коэффициенты c_n:

$$x^0: c_1 = c_0, c_0 = 1, c_1 = 1,$$
$$x^1: 2c_2 = c_1, c_2 = \frac{1}{1\cdot 2},$$
$$x^3: 3c_3 = c_2, c^3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3},$$

Таким образом, $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x.$

В этом примере решение получилось в виде степенного ряда, изображающего e^x. В большинстве случаев решение будет получаться в виде степенного ряда, сумма которого не является элементарной функцией.

Приближенные вычисления

Для приближенного вычисления логарифмов удобна следующая формула:

$\ln(N+1) = \ln N + \frac{2}{2N+1} + \frac{2}{3(2n+1)^3} + \frac{2}{5(2N+1)^5} + \ldots$,где N натуральное число.

Периодические процессы и периодические функции

Многие процессы, происходящие в природе и технике, обладают свойством периодичности, т. е. свойством повторяться через-определенные промежутки

времени. Примерами периодических процессов могут служить движения поршня в различных двигателях, явления, связанные с распространением электромагнитных колебаний и др. Изучение периодических процессов математически описывается периодическими функциями. Нужно четко знать о том, что функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое $T \neq 0$,что $f(x \pm T) = f(x)$в области определения функции.

Простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции sin$x$ и cos$x$ с периодом, равным 2π

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \cos(x \pm 2\pi) = \cos x.$$

Периодическими являются функции $\sin \omega x, \cos \omega x$ с периодом, равным $T = 2\pi / \omega$:

$$\sin\left[\omega(x \pm \frac{2\pi}{\omega})\right] = \sin(\omega x \pm 2\pi) = \sin \omega x$$

Сумма двух периодических функций, как, например, функция вида $a \sin \omega_1 x + b \cos \omega_2 x$, вообще говоря, не будет периодической. Но если отношение $\omega_1 : \omega_2$ является рациональным числом, то сумма двух периодических функций будет периодической.

Простейшим периодическим процессом является гармоническое колебание, которое описывается периодическими функциями $\sin \omega x$ и $\cos \omega x$.Более сложные периодические процессы описываются функциями, составленными либо из конечного, либо из бесконечного числа слагаемых вида $\sin \omega x$ и $\cos \omega x$.

Простые гармонические колебания

Пусть: $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ (1)

где А — амплитуда, которая является наибольшей величиной функции y; $(\omega t + \varphi_0)$ — фаза колебания; ω — частота колебания.

Функция (1) является периодической с наименьшим периодом $2\pi / \omega$

$$y = A\sin[\omega(t + \frac{2\pi}{\omega}) + \varphi_0] = A\sin(\omega t + 2\pi + \varphi_0) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Если величина $2\pi / \varphi$ будет равна времени одного колебания, то ее называют периодом колебания. Пусть $T = 2\pi / \omega$, откуда $\omega = 2\pi / T$, где T — время одного колебания, тогда $2\pi / T$ — число колебаний за время 2π ,т.е. ω является частотой колебания. Применив формулу синуса суммы двух углов, из (1) равенства получим

$$A\sin(\omega t + \varphi_0) = A(\sin \omega t \cos \varphi_0 + \cos \omega t \sin \varphi_0) =$$

$$= A\cos \varphi_0 \sin \omega t + A\sin \varphi_0 \sin \omega t.$$

Пусть $A\cos \varphi_0 = a, A\sin \varphi_0 = b,$ тогда $y = a\sin \omega t + b\cos \omega t.$

Колебательные движения, которые совершаются по (1) или по (2) закону, называются простым гармоническим колебанием, а график его— простой гармоникой.

Пример. Под действием силы, пропорциональной расстоянию s от неподвижного центра 0, материальная точка массы *m* совершает движение. Найти закон движения материальной точки.

Решение. Движение точки совершается по прямой линии, соединяющей начальное положение с центром 0. Примем 0 за начало отсчета пути s. По условию задачи $F = ks$, где k — коэффициент пропорциональности, а сила равна произведению массы -точки на ускорение. В данном случае сила имеет направление, противоположное отсчету пути s,а потому

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -ns, \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{n}{m}s = 0.$$

Пусть $n/m = b^2$, тогда $\frac{d^2s}{dt^2} + b^2 s = 0$

В результате получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$k^2 + b^2 = 0$, откуда $k_1 = bi$ и $k_2 = -bi.$.

По формуле $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$ при $a = 0$ получим общее решение уравнения (3):

$$s = C_1 \cos bt + C_2 \sin bt \quad (4)$$

Положим, что $C_1 = A\sin\varphi, C_2 = A\cos\varphi,$ где А и φ — какие-то другие произвольные постоянные величины, тогда решение (4) можно написать так:

$$s = A\sin\varphi\cos bt + A\cos\varphi\sin bt = A(\sin\varphi\cos bt + \cos\varphi\sin bt) = A\sin(bt + \varphi).$$

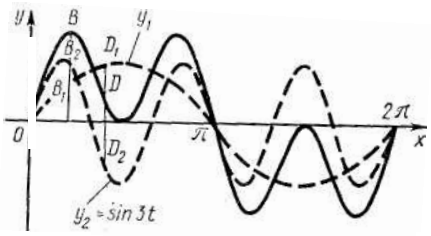
Сложные гармонические колебания

В результате сложения нескольких гармоник получается сложная гармоника, т. е. график сложного гармонического колебания.

Пример1. Найти гармонику функции y=sin$t$+ sin3t.

Решение. Данная функция состоит из суммы двух простых периодических функций. На графике пунктирными линиями изобразим графики простых гармонических колебаний y_x = sin t и y_2 = = sin $3t$. Любая точка сложной гармоники имеет ординату, равную сумме ординат простых гармоник, имеющих одну и ту же абсциссу. Из рис. видно, что результирующая гармоника имеет период, равный 2π, но по форме это не синусоида, так как частота колебаний sin t и $sin3t$ разная. При сложении же гармоник с одинаковыми частотами получим гармонику того

же вида.



Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье

Чтобы разложить периодическую функцию *f(x)* с периодом 2π в тригонометрический ряд, необходимо найти коэффициенты этого ряда. Эти коэффициенты определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin xdx, \quad (1)$$

Где n=1,2,3…

По формулам(1) вычисляются коэффициенты Фурье, а тригонометрический ряд с этими коэффициентами называется рядом Фурье функции *f(x)*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

Где n=1,2,3...

В том случае, когда ряд Фурье сходится к функции то можно записать:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (2)$$

Необходимо помнить о том, что величина интегралов в формулах (1) не изменится, если пределами интегрирования их взять 0 и 2π. При этом условие формулы для определения коэффициентов Фурье имеют следующий вид:

$$a_0 \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nxdx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nxdx, \quad (3)$$

Где n=1,2,3...

Запомните, что иногда формулы (3) дают большие возможности, чем формулы (1). Поэтому необходимо анализировать условие примера, чтобы выяснить, какой из этих двух формул лучше воспользоваться.

Ряды Фурье для четных и нечетных функций

В некоторых случаях формулы для вычисления коэффициентов Фурье могут быть упрощены. Это возможно для четных и нечетных функций.

Напомним свойства четных и нечетных функций.

1. Произведение четной функции на четную или нечетной на нечетную есть функция четная.
2. Произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.
3. Если $y=f(x)$— четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$
4. Если $y = f(x)$ — нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Допустим, что нужно разложить в ряд Фурье четную функцию $f(x)$. Так как $\cos x$ — функция четная, а $\sin x$—функция нечетная, то произведение $f(x)\cos x$ будет четная функция, а $f(x)\sin x$ — нечетная функция. На основании свойств 3 и 4 получим

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Для этого ряда Фурье при четной функции имеем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Если требуется разложить в ряд Фурье нечетную функцию, то вследствие свойств 1 и 2 произведение $f(x)\cos nx$ будет функцией нечетной, а $f(x)\sin nx$ — функцией четной. Поэтому

$$a_0 = a_n = 0, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Ряд Фурье для нечетной функции будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Итак, четная функция разлагается в ряд только по косинусам, а нечетная функция — только по синусам кратных дуг.

Пример1. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π, заданную на интервале $-\pi < x \le \pi$ формулой $f(x) = |x|$.

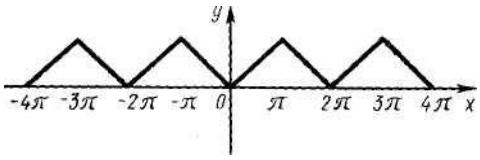
Решение. Графическое изображение этой функции дано на рис. Эта функция четная, поэтому коэффициенты ряда определяются по формуле (1):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

$a_n =$
$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x cos nx = \frac{2}{\pi}\left\{\left|\frac{x \sin nx}{n}\right|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin nx dx\right\} = \frac{2}{\pi n^2}[\cos nx]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1],$
$b_n = 0.$

итак, $a_0 = \pi, a_1 = -\frac{4}{\pi \cdot 1^2}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{4}{\pi \cdot 3^2}, a_4 = 0.\ a_5 = -\frac{4}{\pi \cdot 5^2}, \ldots$

функция $f(x)=|x|$ разлагает в ряд $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{2}\left[\frac{cos}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots + \frac{cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \cdots\right]$



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Неопределенный интеграл

1-25. Найти интегралы.

1. а) $\int \left(4x^3 - 3x^2 + 3\sin x - \frac{1}{x} + 9\right) dx$

   б) $\int \sqrt[3]{(3x^2-2)^2}\, x dx$ в) $\int 7\sin 6x dx$

2. а) $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx$

   б) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(5x+1)^3}}$ в) $\int \sqrt[3]{3\sin x - 2}\cos x\, dx$.

3. а) $\int (5x^4 - 3x^2 + 7\cos x - 9) dx$

   б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3x+2)^3}}$ в) $\int \sqrt[4]{5 - \cos x}\sin x\, dx.$

4. а) $\int (5x^{-3} + 4x^2 - 5\sin x + 2\cos x - 10) dx$

   б) $\int \frac{z^3 dz}{\sqrt[4]{(5z^4-3)^3}}$ в) $\int \sqrt[5]{(7 - \sin x)^3}\cos x\, dx$

5. а) $\int (3x^2 - 2x - 9 + 5\sin x - 3\cos x)\, dx$

   б) $\int \frac{x^2 dx}{4x^3 - 3}$ в) $\int 5\sin 7x dx$

6. а) $\int (x^4 - 3x^2 + 7\sin x - 3\cos x + 10)\, dx$

   б) $\int \frac{x dx}{nx^2 + p}$ в) $\int 6\cos 5x dx$

7. а) $\int(5x^4-3x^2-2n-4\cos x)dx$

б) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{(3x^4-3)^3}}$ в) $\int\frac{\cos z dz}{\sqrt[3]{1-\sin z}}$

8. а) $\int\left(5x^4-4x^3+7\cos x-3\sin x-\frac{1}{x}+9\right)dx$

б) $\int\frac{x^4dx}{\sqrt[7]{(5x^4-9)^4}}$ в) $\int\frac{5\sin x\,dx}{(2-\cos x)^3}$

9. а) $\int(4x^3-3x^2-9\cos x+10\sin x-25)dx$

б) $\int(7x^3-9)^{10}x^2dx$ в) $\int\frac{5\cos x\,dx}{(2\sin x-9)^5}$

10. а) $\int(3x^2-9+5\cos x-9\sin x)dx$

б) $\int(6x^5-5)^{12}x^4dx$ в) $\int\frac{\cos x\,dx}{(5\sin x-3)^{-3}}$

11. а) $\int(4e^x-5\cos x-3\sin x+9)dx$

б) $\sqrt[5]{(4z^3-3)^3}z^2dz$ в) $\int\frac{\cos x dx}{(5\sin x-9)^5}$

12. а) $\int\left(5e^x-\frac{1}{x}+3x^2-5\cos x-12\right)dx$

б) $\int\frac{z^3dz}{(z^4-9)^2}$ в) $\int\frac{x^2dx}{6x^3-5}$

13. а) $\int\left(3e^x-\frac{1}{x}+5\cos x-3\sin x+17\right)dx$

б) $\int\sqrt[7]{(5x^3-9)^5}\,x^2dx$ в) $\int 6\cos x^4x^3dx$

14. а) $\int\left(4x^3-2x+\frac{4}{x}-9\cos x+25\right)dx$

б) $\int\frac{5\cos x dx}{\sqrt[4]{(2\sin x-3)^3}}$ в) $\int(5x^3-9)^{10}x^2\,dx_4$

15. а) $\int\left(4e^x-\frac{5}{x}+9\cos x-10+5\sin x\right)dx$

б) $\int\frac{5x^2dx}{5x^5-2}$ в) $\int 9\sin x\,8xdx$

16. а) $\int\left(\cos x-9\sin x+\frac{3}{x}+5e^x-9\right)dx$

б) $\int\sqrt[7]{(3x^2+2)^5}\,xdx$ в) $\int 3\sin(t^2-1)tdt$

17. а) $\int\left(\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}+1\right)dx$

б) $\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{(7-x^2)^3}}$ в) $\int\frac{4\sin x dx}{(2-3\cos x)^3}$

18. а) $\int e^x\sqrt{3+e^x}dx$

б) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{5+x^3}}$ в) $\int\sqrt[4]{(3+\sin x)^3}$

19. а) $\int \frac{7\sqrt{x}+3x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

б) $\int (x^2+1)e^{x+3x+7}\,dx$ в) $\int \frac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}\,dx$

20. а) $\int \left(x^4 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt{x}} + 5\right)dx$

б) $\int \frac{dx}{1+3x^2}$ в) $\int 3\cos 5x dx$

21. а) $\int \left(x^4 - 3\sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt{x^3}} + 17\right)dx$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$ в) $\int \left(\cos\frac{x}{4} + 2\sin 4x\right)dx$

22. а) $\int \frac{2x^3+3\sqrt{x}+8}{x^2}\,dx$

б) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$ в) $\int \frac{\mathrm{tg}x dx}{4\sin 2x}$

23. а) $\int \left(4x^3 + 5e^x - \frac{3}{x} + \cos x\right)dx$

б) $\int \left(4\sin 3x + 3\sqrt{x} + 5\right)dx$ в) $\int 7\cos 9x dx$

24. а) $\int \left(3x^4 - 2\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt{x}} + 7\sqrt{a}\right)dx$

б) $\int (x+4)e^{x^2+8x+1}dx$ в) $\int \frac{\arcsin 3x dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

25. а) $\int \left(3e^x - \frac{5}{x} + \sqrt[3]{x^2} + 5\sin x\right)dx$

б) $\int \frac{5\sin x dx}{\sqrt[4]{(\cos x-9)^3}}$ в) $\int (4x^2+1)^5 x dx$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

26-50 Вычислить определенный интеграл

26. $\int_0^1 3e^x\,dx$ 27. $\int_0^1 \frac{dz}{z+3}$

28. $\int_2^3 \frac{2dx}{3x-1}$ 29. $\int_1^3 e^{2^x}\,dx$

30. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} 3\cos x\,dx$ 31. $\int_0^{\pi/3} 2\sin x\,dx$

32. $\int_0^{\pi/6} \cos 3x dx$ 33. $\int_0^{\pi/4} 3\sin 4x dx$

34. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$ 35. $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 3)dx$

36. $\int_0^{\pi/2} 2\sin\frac{x}{2}dx$ 37. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{4\sin x+1}$

38. $\int_0^{\pi/4} \frac{5dx}{\cos^2 x}$

39. $\int_0^{\pi/2} 3\sin 3x dx$

40. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{3}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 x}\right) dx$

41. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (2\cos x - 3\sin x) dx$

42. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(3\cos x - \frac{2}{\sin^2 x}\right) dx$

43. $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 5)\, dx$

44. $\int_0^{\pi/8} \cos 4x dx$

45. $\int_{-1}^{1} e^x\, dx$

46. $\int_1^2 \frac{3x^3+2}{x^2} dx$

47. $\int_{-1}^{2} \frac{2\sqrt{x}+3x}{x} dx$

48. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2\cos x + 3\sin x)\, dx$

49. $\int_1^3 (3x^2 + 2x + 3) dx$

50. $\int_{-2}^{4} (4x^3 - 2x)\, dx$

Дифференциальные уравнения

1.Проверить, является ли решением дифференциального уравнения $y'ctgx + y = 2$ функция $y = cosx + 2$.

2.Проверить, является ли решением дифференциального уравнения $y'' - y = 0$ функция вида $y = e^x + e^{-x}$.

3.Решить дифференциальное уравнение $y' - xy = 0$.

4.Найти общее решение дифференциального уравнения $(1 + y^2)dx - xydy = 0$.

5.Проверить, является ли функция $y = 2x + 4$ решением дифференциального уравнения $y = xy + (y')^2$.

6.Найти решение дифференциального уравнения $y' - cosx = 0$ с начальным условием $y_{x=\Pi/2} = 2$.

7.Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $y' - y = e^{2x}$.

8.Найти решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' + 2y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y_{x=0} = 1$, $y'_{x=0} = 0$.

9.Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 9 = 0$.

10. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = 0$.

11. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Найти решения дифференциальных уравнений первого порядка с начальным условиями.

12.$y'' - y' - 2y = 0$, $y_{x=0} = 1$, $y'_{x=0} = 1$.

13.$y'' - 2y' + y = 0$, $y_{x=1} = 1$, $y'_{x=1} = 2$.

14.$y'' - 4y' + 5y = 0$, $y_{x=0} = 2$, $y'_{x=0} = 1$.

15.$y'' - 4y' - 3y = 0$, $y_{x=0} = 2$, $y'_{x=0} = 1$.

16.$y'' - 2y' - 10y = 0$, $y_{x=0} = 1$, $y'_{x=0} = 0$.

17.$y'' + 9 = 0$, $y_{x=\Pi/2} = 1$, $y'_{x=\Pi/3} = 1$.

18.$4y'' + 4y' = 0$, $y_{x=-2} = 1$, $y'_{x=-2} = 2$.

19.$xy'' = 1 + x^2$, $y_{x=1} = 1$, $y'_{x=1} = 1$.

20.$(1 + x)y'' + y' = 0$,$y_{x=0} = 1$, $y'_{x=0} = 1$.

21.$yy'' = y^2y' + (y')^2$,$y_{x=0} = 1$, $y'_{x=0} = 0$.

22.$y'' = 2yy'$,$y_{x=0} = 1$, $y'_{x=0} = 1$.

23.$(y')^2 + 2yy'' = 0$,$y_{x=0} = 1$, $y'_{x=0} = 1$.

24$y'' = x^2$,$y_{x=3} = 9$, $y'_{x=3} = 9$.

25.$y' + x^2y = x^2$,$y_{x=2} = 1$.

Ряды

1. Дан общий член ряда $\frac{n^3+2n+1}{2^{n+1}(n^2+1)}$. Написать ряд в развернутом виде.
2. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$ удовлетворяет необходимому признаку сходимости, но является расходящимся.
3. Написать простейшую формулу n-го члена следующих рядов:
   1) $\frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{3}{15} + \frac{4}{31} + .$
   2)$1 + \frac{1\cdot3}{1\cdot2} + \frac{2\cdot4}{1\cdot2\cdot3} + \frac{3\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + .$
4. Исследовать сходимость ряда $1 - \frac{1}{34} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2}$.
5. Выяснить, абсолютно или не абсолютно сходится ряд $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + .$
6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n1}$.
7. Дан общий член ряда $\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$. Написать ряд в развернутом виде.
8. Исследовать сходимость ряда $1 + x + \frac{x^2}{21} + \frac{x3}{31} + .$
9. Найти интервал сходимости степенного ряда $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$, x>0.
10. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{29} + \dots$
11. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n(1 + \frac{1}{n})$.
12. Исследовать сходимость ряда $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} - \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} + \dots$

13. Доказать расходимость гармонического ряда, сравнивая его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+\frac{1}{n})$.

14. Исследовать сходимость ряда $1+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ \ldots$

15. Доказать расходимость ряда $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{3^n}+\ldots$
Почему к этому ряду е применим признак Лейбница?

16. Разложить в степенной ряд Маклорена $f(x) = e^x$

17. Разложить в степенной ряд интеграл $\int_0^x \frac{n\sin x}{x}dx$.

18. Написать три первых члена ряда Маклорена для функции $f(x) = \ln(e^x + x)$.

19. Пользуясь признаком Даламбера, исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$.

20. Разложить в ряд Фурье функцию f(x) = x/2 при $-\prod<x<\prod$.

21. Разложить в степенной ряд Маклорена функцию $\frac{1}{1-x}$.

22. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^3}{1+n^4}$.

23. Разложить в ряд Фурье функцию f(x)=x при $0<x<2\prod$.

24. Найти интервал сходимости степенного ряда $\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ \ldots$

25. Дан общий член ряда $\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.Написать ряд в развернутом виде.

26. Исследовать сходимость ряда $1+x+\frac{x^2}{21}+\frac{x^3}{31}+\ldots$

27. Найти интервал сходимости степенного ряда $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$, x>0.

28. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{29}+\ldots$

29. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n^x}$ при x>1 .

30. Исследовать сходимость ряда
$1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}-\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2}+\ldots$

31. Доказать расходимость гармонического ряда, сравнивая его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

32. Исследовать сходимость ряда $1+2*\frac{1}{3}+3*\left(\frac{1}{3}\right)^2+4*\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots$

33. Доказать расходимость ряда $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{3^n}+\ldots$

34. Разложить в степенной ряд Маклорена $f(x) = e^x$.

35. Разложить в степенной ряд интеграл $\int_0^x \frac{n\sin x}{x}dx$.

36. Написать три первых члена Маклорена для функции $f(x) = \ln(e^x+x)$.