

ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г. ШЕВЧЕНКО

Физико-математический факультет
Кафедра квантовой радиофизики и систем связи

ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

Учебно-методическое пособие

Тирасполь

2021

УДК 535.14 (075.8)

ББК В343.54я73

О75

Составители:

О.Ф. Васильева, к.ф.-м. н., доц.

А.П. Зинган, к.ф.-м. н., доц.

О.В. Коровай, к.ф.-м. н., доц.

В.В. Васильев, ст. преп. каф. прикладной математики и информатики

Рецензенты:

Е.И. Брусенская, к.ф.-м.н., доц., ученый секретарь ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Д.А. Марков, к.ф.-м.н., доц. каф. прикладной математики и информатики

Основы квантовой оптики: уч.-метод. пособие / ГОУ “Приднестр. гос. ун-т им. Т.Г. Шевченко”, физ.-мат. фак.; составители: О.Ф. Васильева, А.П. Зинган, О.В. Коровай, В.В. Васильев. – Тирасполь: Изд-во Приднестр. ун-та, 2021. – 78 с.

Учебно-методическое пособие содержит лекционный материал, практические задания, материал для самостоятельного изучения основ квантовой оптики. Предназначено для студентов физико-математического факультета направления подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи». Посвящено проф., д.ф.-м.н. П.И. Хаджи.

УДК 535.14 (075.8)

ББК В343.54я73

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

© Васильева О.Ф., Зинган А.П.,
Коровай О.В., Васильев В.В.,
составление, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

1.	Введение	4
2.	Параметрические процессы	6
3.	Нелинейное дифференциальное уравнение для трехчастного параметрического взаимодействия	8
4.	Трехволновой параметрический процесс в приближении заданного поля накачки	13
5.	Оптический параметрический осциллятор на поляритонах	18
6.	Когерентное взаимодействие	28
7.	Оптическая нутация в условии точного резонанса	33
8.	Оптическая нутация в нерезонансном случае	38
9.	Нутация при произвольной форме падающего импульса	43
10.	Учёт диссипативного затухания	47
11.	Фотонное эхо	50
12.	Самоиндуцированная прозрачность	61
13.	Модель дисперсионной оптической бистабильности. Оптическая мультистабильность	69
14.	Литература	77

ВВЕДЕНИЕ



Доктор физико-математических наук, профессор Петр Иванович Хаджи (1939–2018) – выдающийся физик, замечательный ученый, автор более 1000 научных работ по проблемам нелинейной и квантовой оптики. Под его руководством были защищены 19 кандидатских и 1 докторская диссертации.

Квантовой оптикой называют раздел оптики, занимающийся изучением явлений, в которых проявляются квантовые свойства света. Основная проблема, затрагиваемая квантовой оптикой – описание взаимодействия света с веществом с учётом квантовой природы объектов, а также описания распространения света в специфических условиях. Для того, чтобы точно решить эти задачи, требуется описывать и вещество (среду распространения, включая вакуум) и свет исключительно с квантовых позиций, однако часто прибегают к упрощениям: один из компонентов системы (свет или вещество) описывают как классический объект. Например, часто при расчётах, связанных с лазерными средами, квантуют только состояние активной среды, а резонатор считают классическим. Однако, если длина резонатора будет порядка длины волны, то его уже нельзя считать классическим и поведение атома в возбуждённом состоянии, помещённого в такой резонатор, будет гораздо более сложным.

В настоящее время квантовая оптика является динамично развивающейся областью физики, которая помимо теоретической системы знаний приобрела также существенную практическую составляющую, что позволило решить ряд важных прикладных и инженерных задач. В арсенале современной квантовой оптики, помимо уже традиционных преобразователей частоты и параметрических генераторов, системы нелинейной адаптивной оптики, эффективные компрессоры сверхкоротких световых импульсов, бистабильные и мультистабильные элементы быстродействующих оптических процессоров. Важной областью применения квантовых и нелинейных оптических явлений является также совершенствование и разработка перспективных устройств оптоволоконных систем передачи и обработки информации. Техники связи двадцать первого века считают широкополосные и помехоустойчивые опти-

ческие сети, в которых процессы передачи, коммутации и преобразования сигналов будут происходить в оптическом диапазоне длин волн. Это направление науки и техники быстро развивается и предъявляет серьезные требования к уровню подготовки специалистов, работающих в данной области.

Настоящее учебно-методическое пособие разработано для студентов физико-математического факультета, обучающихся по направлению 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи». Большая часть представленного теоретического материала основано на лекциях замечательного ученого, профессора, доктора физико-математических наук Петра Ивановича Хаджи.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

В теории лазерной генерации света возникает необходимость в плавной перестройке частоты генерации, некоторые лазеры не могут менять частоту излучаемого света. Существуют три наиболее простых типа генераторов с плавной перестройкой частоты. Первый тип – это лазеры, в которых энергетические уровни активной (генерирующей) среды меняют свое положение в зависимости от внешних воздействий (приложение электрических и магнитных полей, изменения давления, температуры и др.). Уровни энергии могут расщепляться либо смещаться и в соответствии с этим частоты излучения изменяются. Однако эти изменения не велики. Второй тип – это лазеры с широкой полосой усиления, в пределах которой существуют множество частот (мод) генерируемого излучения. Переходя от одной моды к другой можно менять частоту генерации на значительную величину. Однако и это было недостаточно, так как изменение частоты составляло 10^{-2} – 10^{-3} от частоты генерации. Молекулярные кристаллы давали возможность изменить частоту от 10^{-1} до 10^2 , но также кристаллы быстро деградировали. Существовал ещё тип лазера, в который вводился т.н. селективный элемент, который мог менять частоту лазера на большую величину.

Самым простым методом оказался метод параметрической генерации. Перестройка частоты осуществлялась на основе механизма нелинейного параметрического взаимодействия нескольких волн.

Из общего рассмотрения поляризации нелинейных кристаллов нам известно, что при распространении двух волн в среде с частотами ω_1, ω_2 в кристалле с квадратичной нелинейностью возникают другие электромагнитные волны, а именно волны на частотах $2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2, \omega_1, \omega_2$ [1]. В свою очередь эти частоты тоже могут приводить к другим комбинациям, т.е. имеет место процесс обогащения спектра распространяющихся волн.

Рассмотрим случай, когда имеются волны на частотах ω_1 и ω_2 . При этом в кристалле возбуждается поляризация на разностной частоте: $P \sim A_1 A_2^* e^{i(\omega_1 - \omega_2)t - i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\vec{r}} + \text{к.с.}$ В этом случае должны выполняться закон сохранения энергии и импульса. Таким образом, третья волна должна быть на разностной частоте $\omega_1 - \omega_2$, $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$ в силу того, что поляризация для этой волны быстро зависима от времени и генерирует электромагнитная волна на данной частоте.

Волну на основной частоте ω_1 часто называют волной накачки. Две другие волны называются сигнальной и холостой волной.

$$\vec{E}_H(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{e}_H \{ A_H(\vec{r}, t) e^{i(\omega_H t - \vec{k}_H \vec{r})} + \text{к.с.} \} \quad (1.1)$$

$$\vec{E}_{c,x}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{e}_{c,x} \{ A_{c,x}(\vec{r}, t) e^{i(\omega_{c,x}t - \kappa_{c,x}\vec{r})} + \text{к. с.} \} \quad (1.2)$$

В силу закона сохранения энергии и импульса выполняются следующие соотношения для частот и волновых векторов соответственно

$$\omega_H = \omega_c + \omega_x$$

$$\vec{\kappa}_H = \vec{\kappa}_c + \vec{\kappa}_x$$

Физически значимыми волнами является волна накачки и сигнальная волна. Холостая волна чаще всего является вспомогательной. Однако в некоторых случаях невозможно отличить сигнальную и холостую волны, они часто тождественны. В кристаллах всегда существуют очень слабые электромагнитные волны, обусловленные случайными изменениями структуры кристалла. Поэтому если подать на кристалл волну накачки, то она, взаимодействуя со случайными полями являющимися холостыми модами приводит к возникновению сигнальной волны, такой что $\omega_c = \omega_H - \omega_x$ и $\vec{\kappa}_c = \vec{\kappa}_H - \vec{\kappa}_x$.

Такой процесс называется процессом параметрическим рассеиванием света.

Если волна накачки имеет большую амплитуду $|A_H| \gg |A_{x,c}|$, то обычно говорят о параметрическом усилении в режиме заданного поля волны накачки. При этом происходит усиление сигнальной волны за счет энергии волны накачки. Этот процесс рассматривается в линейном приближении полагая, что амплитуда накачки является постоянной величиной $A_H = \text{const}$. Однако если амплитуда волны на основной частоте (накачки) изменяется в процессе распространения, то данный режим называется режимом нелинейного параметрического усиления, либо режим истощения волны накачки. В любом случае взаимодействие трех волн является нелинейными процессами, который может приводить к генерации полезного сигнального излучения. Далее рассмотрим процесс параметрической генерации более подробно.

НЕЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ТРЕХЧАСТНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Будем предполагать, что в кристалле имеются три взаимодействующих друг с другом волны: сигнальная, холостая и волна накачки. При этом полное поле электромагнитной волны \vec{E} запишем в виде:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \vec{e}_n \{ A_n(\vec{r}, t) e^{i(\omega_n t - \vec{k}_n \vec{r})} + \text{к. с.} \} \quad (2.1)$$

где $n = 1$ – сигнальная, $n = 2$ – холостая волны и $n = 3$ – волна накачки. Среда является квадратично-нелинейной. В этом случае как известно [1], волновое уравнение для сред с нелинейной поляризацией записывается в виде:

$$\text{rot rot } \vec{E} + \varepsilon: \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_{\text{нел.}}}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Найдем нелинейную поляризацию для квадратично-нелинейной среды, используя выражение $P_{\text{нел.}} = \mathcal{X} : \vec{E}\vec{E}$.

$$\vec{E}\vec{E} = \frac{1}{4} \{ \vec{e}_1 \vec{e}_1 A_1^2 e^{2i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r})} + \vec{e}_2 \vec{e}_2 A_2^2 e^{2i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r})} + \vec{e}_3 \vec{e}_3 A_3^2 e^{2i(\omega_3 t - \vec{k}_3 \vec{r})} + \text{к. с.} + 2\vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1 A_2 e^{i((\omega_1 + \omega_2)t - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \vec{r})} + \dots + \vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1 A_2^* e^{i((\omega_1 - \omega_2)t - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{r})} + \dots \} \quad (2.3)$$

Таким образом, в среде возникает распространяющаяся поляризация на двойных частотах всех трех волн, также на суммарных и разностных частотах. Каждая из этих поляризаций может возбуждать электромагнитные волны. Поскольку это трехволновые процессы, то здесь важен эффект стимулирования, т.е. если в начальный момент времени в кристалле были две волны, например волна накачки и волна холостой моды, то обязательно родится третья – сигнальная волна. Далее мы рассмотрим только три волны, предполагая, что волны суммарных и разностных частот быстро поглощаются в среде. При распространении волн выполняются законы сохранения энергии и импульса: $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$, $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3$.

Рассмотрим одномерное распространение волн вдоль выделенной оси z , при этом $\text{rot rot } \vec{E} = - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E}$. Кроме того, будем считать, что имеет место стационарное распространение волн, т.е. амплитуда распространяющихся волн есть функция только координаты $A(\vec{r}, t) = A_n(z)$. Будем также предполагать, что длительности огибающих распространения волн велики по сравнению с длиной волны и соответственно будем использовать приближение медленно меняющихся огибающих.

Согласно (2.1), уравнение волны распространяющейся на частоте ω_1 имеет вид

$$\frac{1}{2}(e_1 A_1 e^{i(\omega_1 t - \kappa_1 z)} + \text{к. с.}) \quad (2.4)$$

Найдем $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ от (2.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(A_1 e^{i(\omega_1 t - \kappa_1 z)}) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - i\kappa_1 A_1 \right) e^{i(\omega_1 t - \kappa_1 z)} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} - 2i\kappa_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} - \kappa_1^2 A_1 \right) e^{i(\omega_1 t - \kappa_1 z)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Запишем критерий медленно меняющихся огибающих

$$\left| \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \right| \ll \kappa_1 \left| \frac{\partial A_1}{\partial z} \right| \quad (2.6)$$

$$\left| \frac{\partial^2 A_n}{\partial z^2} \right| \ll \kappa_n \left| \frac{\partial A_n}{\partial z} \right| \quad (2.7)$$

С учетом (2.6) (2.5) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(A_1 e^{i(\omega_1 t - \kappa_1 z)}) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - i\kappa_1 A_1 \right) e^{i(\omega_1 t - \kappa_1 z)} = \\ &= \left(-2i\kappa_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} - \kappa_1^2 A_1 \right) e^{i(\omega_1 t - \kappa_1 z)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аналогичным образом получим выражения для сигнальной и холостой волн и подставим полученные выражения в волновое уравнение (2.2).

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left\{ \vec{e}_1 \left(2i\kappa_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + \kappa_1^2 A_1 \right) * e^{i(\omega_1 t - \kappa_1 z)} + \vec{e}_2 \left(2i\kappa_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} + \kappa_2^2 A_2 \right) e^{i(\omega_2 t - \kappa_2 z)} + \right. \\ &\vec{e}_3 \left(2i\kappa_3 \frac{\partial A_3}{\partial z} + \kappa_3^2 A_3 \right) e^{i(\omega_3 t - \kappa_3 z)} + \text{к. с.} - \frac{\omega_1^2}{c^2} \varepsilon_1 : \vec{e}_1 A_1 e^{i\varphi_1} - \frac{\omega_2^2}{c^2} \varepsilon_2 : \vec{e}_2 A_2 e^{i\varphi_2} - \\ &\frac{\omega_3^2}{c^2} \varepsilon_3 : \vec{e}_3 A_3 e^{i\varphi_3} - \text{к. с.} \left. \right\} = \frac{4\pi}{c^2} \mathcal{X} : \frac{2}{4} \left\{ \vec{e}_3 \vec{e}_2 A_3 A_2^* e^{i(\omega_3 t - \kappa_3 z)} e^{-i(\omega_2 t - \kappa_2 z)} \omega_1^2 + \right. \\ &\vec{e}_3 \vec{e}_1 A_3 A_1^* e^{i(\omega_3 t - \kappa_3 z)} e^{-i(\omega_1 t - \kappa_1 z)} \omega_2^2 + \vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1 A_2 e^{i(\omega_1 t - \kappa_1 z) + i(\omega_2 t - \kappa_2 z)} \omega_3^2 + \dots \left. \right\} = \\ &\frac{4\pi}{c^2} \mathcal{X} : \frac{1}{2} \left\{ \omega_1^2 \vec{e}_3 \vec{e}_2 A_3 A_2^* e^{i(\omega_1 t - (\kappa_3 - \kappa_2) z)} + \omega_2^2 \vec{e}_1 \vec{e}_3 A_3 A_1^* e^{i(\omega_2 t - (\kappa_3 - \kappa_1) z)} + \right. \\ &\left. \omega_3^2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1 A_2 e^{i(\omega_3 t - (\kappa_1 + \kappa_2) z)} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Полученное уравнение (2.9) должно выполняться для всех моментов времени t , в любых точках z . Следовательно, слагаемое при одинаковых экспонентах $e^{i\omega_n t}$ должны быть равными нулю.

$$\vec{e}_1 \left(2i\kappa_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + \kappa_1^2 A_1 \right) - \frac{\omega_1^2}{c^2} \varepsilon_1 : \vec{e}_1 A_1 = \frac{4\pi}{c^2} \mathcal{X} : \omega_1^2 \vec{e}_3 \vec{e}_2 A_3 A_2^* e^{-i(\kappa_3 - \kappa_2 - \kappa_1)z} \quad (2.10)$$

$$\vec{e}_2 \left(2i\kappa_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} + \kappa_2^2 A_2 \right) - \frac{\omega_2^2}{c^2} \varepsilon_2 : \vec{e}_2 A_2 = \frac{4\pi}{c^2} \mathcal{X} : \omega_2^2 \vec{e}_3 \vec{e}_1 A_3 A_1^* e^{-i(\kappa_3 - \kappa_1 - \kappa_2)z} \quad (2.11)$$

$$\vec{e}_3 \left(2i\kappa_3 \frac{\partial A_3}{\partial z} + \kappa_3^2 A_3 \right) - \frac{\omega_3^2}{c^2} \varepsilon_3 : \vec{e}_3 A_3 = \frac{4\pi}{c^2} \mathcal{X} : \omega_3^2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1 A_2 e^{-i(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3)z} \quad (2.12)$$

Получена система трех нелинейных уравнений (2.10) – (2.12), которая описывает пространственную эволюцию комплексных амплитуд трех распространяющихся волн, т.е. A_1, A_2, A_3 , причем амплитуды волн являются комплексными функциями.

Умножим слева уравнение (2.10) на \vec{e}_1 , уравнение (2.11) на \vec{e}_2 и уравнение (2.12) на \vec{e}_3 . Введём действительные и мнимые компоненты диэлектрической функции $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$:

$$\vec{e}_1 \varepsilon_1 : \vec{e}_1 = \vec{e}_1 (\varepsilon_1' : - i\varepsilon_1'') : \vec{e}_1 \quad (2.13)$$

$$\vec{e}_2 \varepsilon_2 : \vec{e}_2 = \vec{e}_2 (\varepsilon_2' : - i\varepsilon_2'') : \vec{e}_2 \quad (2.14)$$

$$\vec{e}_3 \varepsilon_3 : \vec{e}_3 = \vec{e}_3 (\varepsilon_3' : - i\varepsilon_3'') : \vec{e}_3 \quad (2.15)$$

Используя, что $\varepsilon' = n^2$, $\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = n^2$, получаем законы дисперсии для каждой из волн

$$\frac{c^2 \kappa_i^2}{\omega_i^2} = \vec{e}_i \varepsilon_i' : \vec{e}_i, \quad (2.16)$$

где $i = 1, 2, 3$.

С учетом (2.13) – (2.16), система уравнений (2.10) – (2.12) переписывается в виде

$$\vec{e}_1 \vec{e}_1 2i\kappa_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + i \frac{\omega_1^2}{c^2} \vec{e}_1 \varepsilon_1'' : \vec{e}_1 A_1 = \frac{4\pi}{c^2} \vec{e}_1 \mathcal{X} : \vec{e}_3 \vec{e}_2 \omega_1^2 A_3 A_2^* e^{-i(\kappa_3 - \kappa_2 - \kappa_1)z} \quad (2.17)$$

$$\vec{e}_2 \vec{e}_2 2i\kappa_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} + i \frac{\omega_2^2}{c^2} \vec{e}_2 \varepsilon_2'' : \vec{e}_2 A_2 = \frac{4\pi}{c^2} \vec{e}_2 \mathcal{X} : \vec{e}_3 \vec{e}_1 \omega_2^2 A_3 A_1^* e^{-i(\kappa_3 - \kappa_1 - \kappa_2)z} \quad (2.18)$$

$$\vec{e}_3 \vec{e}_3 2i\kappa_3 \frac{\partial A_3}{\partial z} + i \frac{\omega_3^2}{c^2} \vec{e}_3 \varepsilon_3'' : \vec{e}_3 A_3 = \frac{4\pi}{c^2} \vec{e}_3 \mathcal{X} : \omega_3^2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1 A_2 e^{-i(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3)z} \quad (2.19)$$

В соответствии с законом дисперсии

$$\omega_i^2 = \frac{c^2 \kappa_i^2}{n_i^2} \quad (2.20)$$

Поделим уравнение (2.17) на $2i\kappa_1$ и учтем (2.20), получим

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{c^2 \kappa_1^2}{n_1^2 c^2 2\kappa_1} \vec{e}_1 \varepsilon_1'' : \vec{e}_1 A_1 = -i \frac{4\pi}{c^2} \vec{e}_1 \mathcal{X} : \vec{e}_2 \vec{e}_3 \frac{c^2 \kappa_1^2}{n_1^2 2\kappa_1} A_3 A_2^* e^{-i(\kappa_3 - \kappa_2 - \kappa_1)z} \quad (2.21)$$

Введем фазовую расстройку $\Delta\kappa = \kappa_3 - \kappa_1 - \kappa_2$, коэффициент поглощения δ_1 и постоянную преобразования σ_1

$$\frac{\kappa_1 \vec{e}_1 \varepsilon_1'' : \vec{e}_1}{2n_1^2} = \delta_1, \quad (2.22)$$

$$\frac{2\pi \vec{e}_1 \mathcal{X} : \vec{e}_2 \vec{e}_3 \kappa_1}{n_1^2} = \sigma_1 \quad (2.23)$$

Тогда получим

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \delta_1 A_1 = -i\sigma_1 A_3 A_2^* e^{-i(\kappa_3 - \kappa_1 - \kappa_2)z} \quad (2.23)$$

Аналогичным образом получим выражения для амплитуд A_2 и A_3

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \delta_2 A_2 = -i\sigma_2 A_3 A_1^* e^{-i(\kappa_3 - \kappa_1 - \kappa_2)z}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + \delta_3 A_3 = -i\sigma_3 A_1 A_2 e^{-i(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3)z}, \quad (2.25)$$

где

$$\delta_{2,3} = \frac{\kappa_{2,3} \vec{e}_{2,3} \varepsilon_{2,3} : \vec{e}_{2,3}}{2n_{2,3}}, \quad \sigma_2 = \frac{2\pi \vec{e}_2 \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_3 \kappa_2}{n_2^2}, \quad \sigma_3 = \frac{2\pi \vec{e}_3 \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_2 \kappa_3}{n_3^2} \quad (2.26)$$

Предположим, что на торец кристалла в точке $z = 0$ накачиваются все три волны: $A_1(z) \Big|_{z=0} = A_{10}$, $A_2(z) \Big|_{z=0} = A_{20}$, $A_3(z) \Big|_{z=0} = A_{30}$. $A_i(z)$ являются комплексными функциями, поэтому выделим действительную и мнимую компоненты:

$$A_1(z) = a_1(z) e^{i\varphi_1(z)}, \quad A_2(z) = a_2(z) e^{i\varphi_2(z)}, \quad A_3(z) = a_3(z) e^{i\varphi_3(z)}, \quad (2.27)$$

где a_i и φ_i – действительные функции.

Подставим (2.27) в (2.23)–(2.25)

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial z} + ia_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) e^{i\varphi_1(z)} + \delta_1 a_1 e^{i\varphi_1(z)} = -i\sigma_1 a_2 a_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_2) - i\Delta\kappa z}$$

$$\frac{da_1}{dz} + ia_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \delta_1 a_1 = -i\sigma_1 a_2 a_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1) - i\Delta\kappa z}$$

Обозначим $\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2 - \Delta\kappa z = \psi$ и получим

$$\frac{da_1}{dz} + ia_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \delta_1 a_1 = -i\sigma_1 a_2 a_3 e^{i\psi} = -i\sigma_1 a_2 a_3 (\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dz} + \delta_1 a_1 = \sigma_1 a_2 a_3 \sin \psi \\ a_1 \frac{d\varphi_1}{dz} = -\sigma_1 a_2 a_3 \cos \psi \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial a_2}{\partial z} + ia_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) e^{i\varphi_2(z)} + \delta_2 a_2 e^{i\varphi_2(z)} &= -i\sigma_2 a_1 a_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_1) - i\Delta k z} \\ \frac{\partial a_2}{\partial z} + ia_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \delta_2 a_2 &= -i\sigma_2 a_1 a_3 (\cos \psi + i \sin \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{da_2}{dz} + \delta_2 a_2 = \sigma_2 a_1 a_3 \sin \psi \\ a_2 \frac{d\varphi_2}{dz} = -\sigma_2 a_1 a_3 \cos \psi \end{cases} \quad (2.29)$$

Аналогичным образом получаем выражения для a_3 и в результате получаем следующие системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{da_1}{dz} + \delta_1 a_1 = \sigma_1 a_2 a_3 \sin \psi \\ \frac{da_2}{dz} + \delta_2 a_2 = \sigma_2 a_1 a_3 \sin \psi \\ \frac{da_3}{dz} + \delta_3 a_3 = -\sigma_3 a_1 a_2 \sin \psi \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} a_1 \frac{d\varphi_1}{dz} = -\sigma_1 a_2 a_3 \cos \psi \\ a_2 \frac{d\varphi_2}{dz} = -\sigma_2 a_1 a_3 \cos \psi \\ a_3 \frac{d\varphi_3}{dz} = -\sigma_3 a_1 a_2 \cos \psi \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{d}{dz} (\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2) - \Delta k \quad (2.32)$$

Из (2.31) получим, что $\frac{d\varphi_1}{dz} = -\sigma_1 \frac{a_2 a_3}{a_1} \cos \psi$, $\frac{d\varphi_2}{dz} = -\sigma_2 \frac{a_1 a_3}{a_2} \cos \psi$ и $\frac{d\varphi_3}{dz} = -\sigma_3 \frac{a_1 a_2}{a_3} \cos \psi$, тогда (2.32) перепишется в виде:

$$\frac{d\psi}{dz} = -\Delta k - \left(\frac{\sigma_3 a_1 a_2}{a_3} - \frac{\sigma_1 a_2 a_3}{a_1} - \frac{\sigma_2 a_1 a_3}{a_2} \right) \cos \psi \quad (2.33)$$

Начальные условия для системы уравнений (2.30), (2.31) и (2.33) запишем в виде: $a_1(z) \Big|_{z=0} = a_{10}$, $a_2(z) \Big|_{z=0} = a_{20}$, $a_3(z) \Big|_{z=0} = a_{30}$, $\psi \Big|_{z=0} = \psi_0$

Далее рассмотрим простейший случай взаимодействия трех волн в приближении заданного поля накачки.

ТРЕХВОЛНОВОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС В ПРИБЛИЖЕНИИ ЗАДАННОГО ПОЛЯ НАКАЧКИ

Предположим, что начальная амплитуда поля накачки $a_{30} \gg a_1(z), a_2(z)$, в любой точке пространства. Будем рассматривать распространение волн в условии точного фазового синхронизма $\Delta k = 0$ и предположим также, что коэффициенты поглощения волн равны друг другу $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \equiv \delta$.

Рассмотрим третье уравнение в системе уравнений (2.30), так как $a_1 a_2 \ll a_3$, то мы отбрасываем в левой стороне неоднородность и соответствие получаем:

$$\begin{aligned} \frac{da_3}{dz} + \delta a_3 &= 0 \\ \frac{da_3}{a_3} &= -\delta dz \\ \ln a_3 &= -\delta z + \ln c \\ a_3 &= ce^{-\delta z} \end{aligned}$$

Используя начальные условия, получаем, что постоянная интегрирования равна $c = a_{30}$, тогда

$$a_3 = a_{30} e^{-\delta z} \quad (3.1)$$

Из (3.1) видно, что поле накачки экспоненциально убывает с расстоянием.

Подставим найденное решение (3.1) в первые два уравнения системы уравнений (2.30) и (2.33), получим

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dz} + \delta a_1 &= \sigma_1 a_{30} a_2 e^{-\delta z} \sin \psi \\ \frac{da_2}{dz} + \delta a_2 &= \sigma_2 a_{30} a_1 e^{-\delta z} \sin \psi \\ \frac{d\psi}{dz} &= a_{30} e^{-\delta z} \left(\frac{\sigma_1 a_2^2 + \sigma_2 a_1^2}{a_1 a_2} \right) \cos \psi \end{aligned}$$

Предположим, что в точке $z = 0$ имеется сигнальная волна $a_{10} \neq 0$, а холостая отсутствует $a_{20} = 0$.

Найдем решение для ψ . Для этого перейдем к новой координате $\zeta = \frac{1-e^{-\delta z}}{\delta}$ и введём новые функции $a_{1,2} = u_{1,2} e^{-\delta z}$.

$$\left(\frac{du_1}{dz} - \delta u_1\right) e^{-\delta z} + \delta u_1 e^{-\delta z} = \sigma_1 a_{30} u_2 e^{-2\delta z} \sin \psi$$

$$\frac{du_1}{dz} = \sigma_1 a_{30} u_2 e^{-\delta z} \sin \psi$$

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{d}{d\zeta} e^{-\delta z}$$

$$\frac{du_1}{d\zeta} e^{-\delta z} = \sigma_1 a_{30} u_2 e^{-\delta z} \sin \psi$$

$$\frac{du_1}{d\zeta} = \sigma_1 a_{30} u_2 \sin \psi \quad (3.2)$$

$$\frac{du_2}{d\zeta} = \sigma_2 a_{30} u_1 \sin \psi \quad (3.3)$$

$$\frac{d\psi}{d\zeta} e^{-\delta z} = a_{30} e^{-\delta z} \frac{\sigma_1 u_2^2 + \sigma_2 u_1^2}{u_1 u_2} \cos \psi \quad (3.4)$$

Разделим (3.4) на (3.2), получим

$$\frac{d\psi}{du_1} = \frac{\sigma_1 u_2^2 + \sigma_2 u_1^2}{\sigma_1 u_1 u_2^2} \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \quad (3.5)$$

Обозначим $\cos \varphi = y$, тогда $dy = -\sin \varphi d\psi$, следовательно, получим

$$-\frac{dy}{du_1} = \frac{\sigma_1 u_2^2 + \sigma_2 u_1^2}{\sigma_1 u_1 u_2^2} y \quad (3.6)$$

Легко проверить, что $y = \frac{\pi}{2} = \text{const}$ удовлетворяет решению

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{\sigma_1 u_2}{\sigma_2 u_1}$$

$$\frac{u_1^2}{\sigma_1} = \frac{u_2^2}{\sigma_2} + \text{const}$$

$$\frac{u_1^2}{\sigma_1} = \frac{u_2^2}{\sigma_2} + \frac{a_{10}^2}{\sigma_1} \quad (3.7)$$

Если подставить найденное решение для $\psi\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, получим следующее

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{d\zeta} &= \sigma_1 a_{30} u_2 \\ \frac{du_2}{d\zeta} &= \sigma_2 a_{30} u_1 \\ \frac{d^2 u_1}{d\zeta^2} &= \sigma_1 a_{30} \sigma_2 a_{30} u_1\end{aligned}\tag{3.8}$$

Вводя некую постоянную $q^2 = \sigma_1 \sigma_2 a_{30}^2$

$$\frac{d^2 u_1}{d\zeta^2} = q^2 u_1\tag{3.9}$$

Уравнение (3.9) имеет следующее решение

$$u_1 = Ach(q\zeta) + Bch(q\zeta)\tag{3.10}$$

Коэффициенты A и B найдем из начальных условий

$$u_1 \Big|_{z=0} = u_{10}, \text{ следовательно } a_{10} = A.$$

Система уравнений для $u_{1,2}$ справедливо в любых точках z включая начальную $z = 0$. Возьмем производную от (3.10) и, используя начальные условия, получим $Bq = 0$ следовательно $B = 0$. Тогда окончательное решение имеет вид:

$$u_1 = a_{10} ch(q\zeta)\tag{3.11}$$

Найдем теперь u_2 . Для этого подставим полученное решение (3.11) в (3.8).

$$\begin{aligned}a_{10} q sh(q\zeta) &= \sigma_1 a_{30} u_2 \\ a_{10} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30} sh(q\zeta) &= \sigma_1 a_{30} u_2\end{aligned}\tag{3.12}$$

Из (3.12) легко найти u_2 . Запишем полученные решения для всех искомых функций и получим решения трехволнового параметрического процесса в приближении заданного поля накачки (3.13).

$$\begin{cases} u_2 = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} a_{10} sh(q\zeta) \\ u_1 = a_{10} ch(q\zeta) \\ a_3(z) = a_{30} e^{-\delta z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1(z) = a_{10} e^{-\delta z} ch\left(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30} \frac{1-e^{-\delta z}}{\delta}\right) \\ a_2(z) = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} a_{10} e^{-\delta z} sh\left(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30} \frac{1-e^{-\delta z}}{\delta}\right) \\ a_3(z) = a_{30} e^{-\delta z} \end{cases} \quad (3.13)$$

Интересно найти значение производной a_1, a_2 на торце кристалла. $\frac{da_1}{dz} \Big|_{z=0} + \delta_1 a_{10} = 0$, следовательно $\frac{da_1}{dz} \Big|_{z=0} < 0$. Таким образом, амплитуда сигнальной волны вначале координат убывает. А амплитуда холостой волны у торца кристалла растет $\frac{da_2}{dz} \Big|_{z=0} > 0$. Амплитуда волны накачки $a_3(z)$ слабо меняется в пространстве и его величина всегда больше, чем величина a_1, a_2 .

Рассмотрим случай малого поглощения $\delta z \ll 1$. Для этого разложим в ряд экспоненту в аргументе косинуса гиперболического в первом уравнении (3.13):

$$\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30} \frac{1-1+\delta z}{\delta} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30} z \quad (3.14)$$

Таким образом, получаем, что в случае малого поглощения амплитуда a_1 будут определяться выражением

$$a_1(z) = a_{10} e^{-\delta z} ch(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30} z) \quad (3.15)$$

Из (3.15) видно, что косинус гиперболический всегда растет, в то время как экспоненциально – убывает, т.е. имеет место конкуренция двух функций: растущей и убывающей. Следственно ожидается, что функция (3.15) имеет минимум. Найдем минимум функции (3.15).

$$\frac{da_1}{dz} = a_{10} \left(-\delta ch(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30} z) + \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30} sh(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30} z) \right) e^{-\delta z} = 0$$

$$th(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30} z) = \frac{\delta}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30}}$$

$$z_{min} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30}} arth \frac{\delta}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30}} \quad (3.16)$$

Из (3.16) видно, что z_{min} быстро убывает с ростом a_{30} . Для того, чтобы существовала функция $a_1(z)$, необходимо чтобы выполнялось условие $\frac{\delta}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{30}} < 1$.

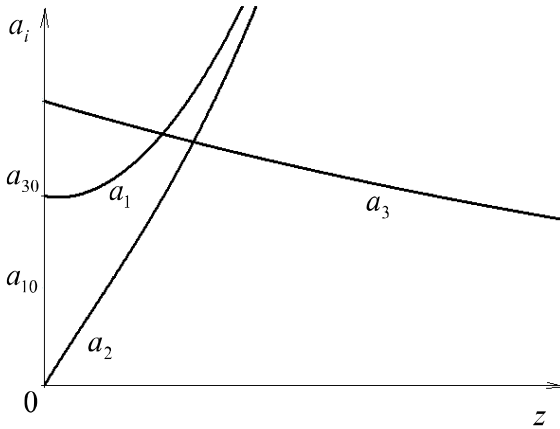


Рис. 3.1. Эволюция волн накачки сигнальной и холостой мод по мере распространения в кристалле

Из представленных решений и рисунка 3.1 следует, что амплитуда волны накачки $a_3(z)$ монотонно убывает из-за поглощения. Сигнальная волна на начальном этапе вблизи переднего торца кристалла сначала убывает и достигает своего минимума в точке z_{min} , потом экспоненциально растет. Убывание сигнальной волны на начальном этапе эволюции связано только с поглощением. Однако, в дальнейшем при распространении волны в кристалле имеет место превращение волны накачки как в сигнальную, так и в холостую волны. В точке $z = z_{min}$ скорость убывания амплитуды волны из-за поглощения равна скорости возрастания $a_1(z)$ (благодаря наличию в кристалле волны накачки), что приводит к минимуму функции $a_1(z)$. Далее $a_1(z)$ только растет благодаря тому, что волна накачки отдает свою энергию сигнальной волне. Что касается холостой волны, то в торце кристалла она отсутствовала. Далее амплитуда холостой моды возрастает из-за того, что волна накачки передает свою энергию как сигнальной, так и холостой волнам.

ОПТИЧЕСКИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР НА ПОЛЯРИТОНАХ

Смешанные экситон-фотонные состояния в плоских полупроводниковых микрорезонаторах с квантовыми ямами в активном слое представляют собой новый класс квазидвумерных квазичастиц с уникальными свойствами. Такие состояния называют микрорезонаторными экситон-поляритонами. Они возникают благодаря сильной связи экситонов с собственными модами электромагнитного излучения микрорезонатора. В режиме сильной связи экситонная и фотонная моды расталкиваются и возникают верхняя и нижняя микрорезонаторные поляритонные моды (рис. 4.1.). Фотонная компонента поляритона обуславливает его малую эффективную массу, тогда как экситонная компонента отвечает за эффективное поляритон-поляритонное взаимодействие, благодаря чему они могут рассеиваться друг на друге. Непараболичность нижней поляритонной ветви допускает возникновение параметрического процесса, в результате которого два поляритона накачки рассеиваются в сигнальную и холостую моды с сохранением энергии и импульса. Малая эффективная масса и сильные нелинейные взаимодействия – характеристики, которые сделали их успешными строительными блоками для множества фотонных устройств, таких как лазеры, интерферометры, голографические устройства, терагерцевые излучатели, оптические маршрутизаторы, транзисторы и интегрированные фотонные схемы.

Используя метод pump-probe, в [2, 3] впервые наблюдали параметрическое усиление в микрорезонаторе при возбуждении нижней поляритонной ветви пикосекундным импульсом накачки под углом падения 16.5° (рис. 4.2).

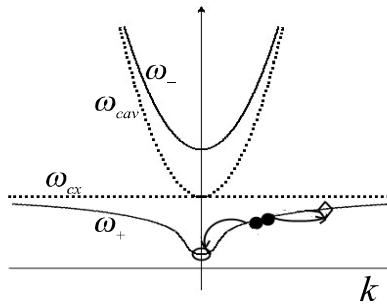


Рис. 4.1. Энергии поляритонов верхней и нижней ветвей (ω_{\pm}).

Дисперсия микрорезонатора ω_{cav} и экситона ω_{ex} .

Два поляритона накачки рассеиваются в сигнальную и холостую моды

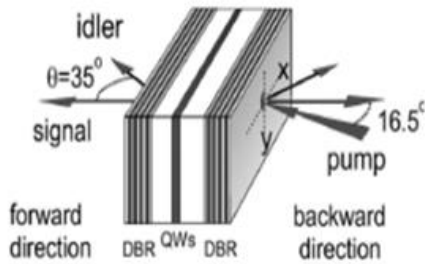


Рис. 4.2. Экспериментальное наблюдение параметрического усиления экситон-поляритонов в полупроводниковом микрорезонаторе

После возбуждения (с небольшой задержкой) нижней поляритонной ветви дополнительно слабым пробным импульсом, падавшим нормально, обнаружилось, что этот импульс в отражении усиливался более чем в 70 раз. При этом появлялась также холостая мода под углом в 35° . Именно для этих углов выполнялись резонансные условия. Аналогичные процессы наблюдались в [4] при использовании двух пучков накачки под углами в $\pm 45^\circ$ и пробного пучка под углом 0° . Режим параметрического осциллятора наблюдался в [5] при непрерывном возбуждении нижней поляритонной ветви излучением накачки под „магическим“ углом в 16° без пробного импульса. Выше пороговой интенсивности наблюдались сильные пучки сигнальной и холостой мод под углами 0 и 35° соответственно.

Рассмотрим и изучим изменение во времени плотности поляритонов при накачке нижней ветви в двух близких по энергии точках закона дисперсии (рис. 4.3). Будем считать, что оба пучка накачки различаются по амплитуде (интенсивности), однако энергии фотонов различаются слабо. Рассмотрим ситуацию на временах порядка либо меньших времени релаксации возбуждений среды (экситон-поляритонов). В этом случае процессы релаксации не успевают срабатывать, а эволюция системы представляет собой предел оптической нутации экситон-поляритонов под действием ультракоротких импульсов лазерного излучения, ответственных за создание начального условия системы. Рассмотрим поведение системы поляритонов в нестационарном режиме, когда накачка осуществляется фемто- и пикосекундными импульсами лазерного излучения. В этом случае можно считать, что ультракороткие импульсы возбуждения служат лишь для создания начальных плотностей поляритонов, т.е. начальных условий системы. Затем система предоставляется самой себе и она эволюционирует во времени. С помощью ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения в микрорезонаторе создается система когерентных экситон-поляритонов.

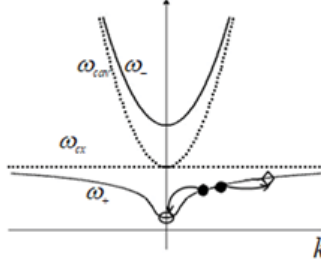


Рис. 4.3. Энергетическая схема экситон-поляритонов, при накачке в двух близких по энергии точках закона дисперсии

Микрорезонатор обеспечивает пространственное ограничение области существования поляритонов, которые взаимно превращаются друг в друга. Квантовая яма, в которой возникают поляритоны, вставляется в брэгговскую структуру, которая характеризуется определенным пропусканием, отражением и потерями. Особенности эволюции системы будут проявляться в генерации вторичных субимпульсов либо периодического излучения на частотах экситон-поляритонов.

Пусть поляритоны возбуждаются на нижней ветви закона дисперсии под «магическим» углом. В [6, 7] показано, что процесс параметрического рассеяния двух поляритонов накачки в сигнальную и холостую моды описывается гамильтонианом вида:

$$\frac{1}{\hbar} H = \omega_{p_1} \hat{a}_{p_1}^+ \hat{a}_{p_1} + \omega_{p_2} \hat{a}_{p_2}^+ \hat{a}_{p_2} + \omega_s \hat{a}_s^+ \hat{a}_s + \omega_i \hat{a}_i^+ \hat{a}_i + \mu (\hat{a}_s^+ \hat{a}_i^+ \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} + \hat{a}_{p_1}^+ \hat{a}_{p_2}^+ \hat{a}_s \hat{a}_i), \quad (4.1)$$

где $\omega_{p_1}, \omega_{p_2}, \omega_s$ и ω_i - собственные частоты поляритонов накачки первого и второго импульса, сигнальной и холостой мод соответственно, $\hat{a}_{p_1}, \hat{a}_{p_2}, \hat{a}_s, \hat{a}_i$ - операторы уничтожения поляритонов, μ - константа параметрической поляритон-поляритонной конверсии. Используя (4.1), легко получить систему гайзенберговских уравнений для операторов $\hat{a}_{p_1}, \hat{a}_{p_2}, \hat{a}_s, \hat{a}_i$. Получим их.

Для этого будем использовать следующее соотношение $i\hbar \frac{da}{dt} = [\hat{H}, \hat{a}] = \hat{H}\hat{a} - \hat{a}\hat{H}$. Тогда

$$i\hbar \dot{\hat{a}}_{p_1} = \hbar \omega_{p_1} \hat{a}_{p_1}^* \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_1} - \hbar \hat{a}_{p_1} \omega_{p_1} \hat{a}_{p_1}^* \hat{a}_{p_1} = \hbar \omega_{p_1} \hat{a}_{p_1} (\hat{a}_{p_1}^* \hat{a}_{p_1} - \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_1}^*) = \hbar \omega_{p_1} \hat{a}_{p_1},$$

$$i\hbar \dot{\hat{a}}_{p_1} = \hbar \mu (\hat{a}_s^* \hat{a}_i^* \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1} - \hat{a}_{p_1} \hat{a}_s^* \hat{a}_i^* \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2}) = \hbar \mu \hat{a}_s^* \hat{a}_i^* \hat{a}_{p_2} (\hat{a}_{p_1} - \hat{a}_{p_1}) = 0,$$

$$i\hbar\dot{a}_{p_1} = \hbar\mu(\hat{a}_{p_1}^* \hat{a}_{p_2} \hat{a}_s \hat{a}_i \hat{a}_{p_1} - \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_1}^* \hat{a}_{p_2}^* \hat{a}_s \hat{a}_i) =$$

$$= \hbar\mu \hat{a}_s \hat{a}_i (\hat{a}_{p_1}^* \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1} - \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_1}^* \hat{a}_{p_2}^*) = \hbar\mu \hat{a}_s \hat{a}_i \hat{a}_{p_2}^*.$$

$$i\hbar\dot{a}_{p_2} = \hbar\omega_{p_2} \hat{a}_{p_2}^* \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_2} - \hat{a}_{p_2} \hbar\omega_{p_2} \hat{a}_{p_2}^* \hat{a}_{p_2}^* =$$

$$= \hbar\omega_{p_2} \hat{a}_{p_2} (\hat{a}_{p_2}^* \hat{a}_{p_2} - \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_2}^*) = \hbar\omega_{p_2} \hat{a}_{p_2},$$

$$i\hbar\dot{a}_{p_2} = \hbar\mu(\hat{a}_s^* \hat{a}_i^* \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_2} - \hat{a}_{p_2} \hat{a}_s^* \hat{a}_i^* \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2}) = \hbar\mu \hat{a}_s^* \hat{a}_i^* \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} (\hat{a}_{p_2} - \hat{a}_{p_2}) = 0,$$

$$i\hbar\dot{a}_{p_2} = \hbar\mu(\hat{a}_{p_1}^* \hat{a}_{p_2}^* \hat{a}_s \hat{a}_i \hat{a}_{p_2} + \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2}^* \hat{a}_s \hat{a}_i) =$$

$$= \hbar\mu \hat{a}_{p_1}^* \hat{a}_s \hat{a}_i (\hat{a}_{p_2}^* \hat{a}_{p_2} - \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_2}^*) = \hbar\mu \hat{a}_{p_1}^* \hat{a}_s \hat{a}_i.$$

$$i\hbar\dot{a}_s = \hbar\omega_s \hat{a}_s^* \hat{a}_s - \hbar\hat{a}_s \omega_s \hat{a}_s^* \hat{a}_s = \hbar\omega_s (\hat{a}_s^* \hat{a}_s \hat{a}_s - \hat{a}_s \hat{a}_s^* \hat{a}_s) = \hbar\omega_s \hat{a}_s,$$

$$i\hbar\dot{a}_s = \hbar\mu \hat{a}_s^* \hat{a}_i^* \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} \hat{a}_s - \hat{a}_s \hbar\mu \hat{a}_s^* \hat{a}_i^* \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} =$$

$$= \hbar\mu \hat{a}_i^* \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} (\hat{a}_s^* \hat{a}_s - \hat{a}_s \hat{a}_s^*) = \hbar\mu \hat{a}_i^* \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2}.$$

Таким образом, получаем следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд поляритонов накачек, сигнальной и холостой волн.

$$\begin{cases} i\dot{a}_{p_1} = \omega_{p_1} \hat{a}_{p_1} + \mu \hat{a}_s \hat{a}_i \hat{a}_{p_2}^\dagger \\ i\dot{a}_{p_2} = \omega_{p_2} \hat{a}_{p_2} + \mu \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_s \hat{a}_i \\ i\hbar\dot{a}_s = \omega_s \hat{a}_s + \mu \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} \\ \hbar\dot{a}_i = \omega_i \hat{a}_i + \mu \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$i\hbar\dot{a}_{p_1}^\dagger = \hbar\omega_{p_1} \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1}^\dagger - \hat{a}_{p_1}^\dagger \hbar\omega_{p_1} \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2} =$$

$$= \hbar\omega_{p_1} \hat{a}_{p_1}^\dagger (\hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1}^\dagger - \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}) = -\hbar\omega_{p_1} \hat{a}_{p_1}^\dagger,$$

$$i\hbar\dot{a}_{p_1}^\dagger = \hbar\mu \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1}^\dagger - \hat{a}_{p_1}^\dagger \hbar\mu \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_2} =$$

$$= \hbar\mu \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{p_2} (\hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1}^\dagger - \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}) = -\hbar\mu \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{p_2}.$$

$$i\hbar\dot{a}_{p_2}^\dagger = \hbar\omega_{p_2} \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_2}^\dagger - \hat{a}_{p_2}^\dagger \hbar\omega_{p_2} \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_2} = -\hbar\omega_{p_2} \hat{a}_{p_2}^\dagger,$$

$$i\hbar\dot{a}_{p_2}^\dagger = \hbar\mu \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_2}^\dagger - \hat{a}_{p_2}^\dagger \hbar\mu \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \hbar\mu\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_{p_1}(\hat{a}_{p_2}\hat{a}_{p_2}^\dagger - \hat{a}_{p_2}^\dagger\hat{a}_{p_2}) = -\hbar\mu\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_{p_1}. \\
i\hbar\hat{a}_s^\dagger &= \hbar\mu\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_{p_1}\hat{a}_{p_2}\hat{a}_s^\dagger - \hat{a}_s^\dagger\hbar\mu\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_{p_1}\hat{a}_{p_2} = 0, \\
i\hbar\hat{a}_s^\dagger &= \hbar\omega_s\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_s\hat{a}_s^\dagger - \hat{a}_s^\dagger\hbar\omega_s\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_s = \hbar\omega_s\hat{a}_s^\dagger(\hat{a}_s\hat{a}_s^\dagger - \hat{a}_s^\dagger\hat{a}_s) = -\hbar\omega_s\hat{a}_s^\dagger, \\
i\hbar\hat{a}_s^\dagger &= \hbar\mu(\hat{a}_{p_1}^\dagger\hat{a}_{p_2}^\dagger\hat{a}_s\hat{a}_i\hat{a}_s^\dagger - \hat{a}_s^\dagger\hat{a}_{p_1}^\dagger\hat{a}_{p_2}^\dagger\hat{a}_s\hat{a}_i) = \\
&= \hbar\mu\hat{a}_{p_1}^\dagger\hat{a}_{p_2}^\dagger\hat{a}_i(\hat{a}_s\hat{a}_s^\dagger - \hat{a}_s^\dagger\hat{a}_s) = -\hbar\mu\hat{a}_{p_1}^\dagger\hat{a}_{p_2}^\dagger\hat{a}_i. \\
\begin{cases} i\hat{a}_{p_1}^\dagger = -\omega_{p_1}\hat{a}_{p_1}^\dagger - \mu\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_{p_2} \\ i\hat{a}_{p_2}^\dagger = -\omega_{p_2}\hat{a}_{p_2}^\dagger - \mu\hat{a}_{p_1}\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger \\ i\hbar\hat{a}_s^\dagger = -\omega_s\hat{a}_s^\dagger - \mu\hat{a}_i\hat{a}_{p_1}^\dagger\hat{a}_{p_2}^\dagger \\ \hbar\hat{a}_i^\dagger = -\omega_i\hat{a}_i^\dagger - \mu\hat{a}_s\hat{a}_{p_1}^\dagger\hat{a}_{p_2}^\dagger \end{cases} & \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Усредняя (4.2) – (4.3) и используя приближение среднего поля, для комплексных амплитуд поляритонов $a_{p_1} = \langle \hat{a}_{p_1} \rangle$, $a_{p_2} = \langle \hat{a}_{p_2} \rangle$, $a_s = \langle \hat{a}_s \rangle$ и $a_i = \langle \hat{a}_i \rangle$ можно получить систему нелинейных эволюционных уравнений.

$$\begin{cases} i\dot{a}_{p_1} = \omega_{p_1}a_{p_1} + \mu a_s a_i a_{p_2}^* \\ i\dot{a}_{p_2} = \omega_{p_2}a_{p_2} + \mu a_{p_1}^* a_s a_i \\ i\dot{a}_s = \omega_s a_s + \mu a_i^* a_{p_1} a_{p_2} \\ i\dot{a}_i = \omega_i a_i + \mu a_s^* a_{p_1} a_{p_2} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} i\dot{a}_{p_1}^* = -\omega_{p_1}a_{p_1}^* - \mu a_s^* a_i^* a_{p_2} \\ i\dot{a}_{p_2}^* = -\omega_{p_2}a_{p_2}^* - \mu a_{p_1} a_s^* a_i^* \\ i\dot{a}_s^* = -\omega_s a_s^* - \mu a_i a_{p_1}^* a_{p_2}^* \\ i\dot{a}_i^* = -\omega_i a_i^* - \mu a_s a_{p_1}^* a_{p_2}^* \end{cases} \quad (4.5)$$

Системы уравнений (4.4) и (4.5) дополним начальными условиями, которые запишем в виде:

$$a_{p_1|t=0} = a_{p_1 0} \exp(i\phi_{p_1 0}), \quad a_{p_2|t=0} = a_{p_2 0} \exp(i\phi_{p_2 0}),$$

$$a_{s|t=0} = a_{s 0} \exp(i\phi_{s 0}), \quad a_{i|t=0} = a_{i 0} \exp(i\phi_{i 0}), \quad (4.6)$$

где $a_{p_1 0}$, $a_{p_2 0}$, $a_{s 0}$, $a_{i 0}$ и $\phi_{p_1 0}$, $\phi_{p_2 0}$, $\phi_{s 0}$, $\phi_{i 0}$ – действительные амплитуды и фазы поляритонов в начальный момент времени.

Введем в рассмотрение плотности поляритонов $n_{p_1} = a_{p_1}^* a_{p_1}$, $n_{p_2} = a_{p_2}^* a_{p_2}$, $n_s = a_s^* a_s$, $n_i = a_i^* a_i$ и две компоненты «поляризации» $Q = i(a_{p_1} a_{p_2} a_s^* a_i^* - a_s a_i a_{p_1}^* a_{p_2}^*)$ и $R = a_{p_1} a_{p_2} a_s^* a_i^* + a_s a_i a_{p_1}^* a_{p_2}^*$.

Используя (4.4) и (4.5), для введенных функций получим систему нелинейных дифференциальных уравнений для плотностей поляритонов и компонент «поляризации».

$$\begin{aligned} \dot{n}_{p_1} &= \dot{a}_{p_1} a_{p_1}^* + a_{p_1} \dot{a}_{p_1}^*, \\ \dot{n}_{p_2} &= \dot{a}_{p_2} a_{p_2}^* + a_{p_2} \dot{a}_{p_2}^*, \\ \dot{n}_{p_1} &= \omega_{p_1} a_{p_1} a_{p_1}^* + \mu a_{p_1}^* a_{p_2}^* a_s a_i - \mu a_s^* a_i^* a_{p_2} a_{p_1} - a_{p_1}^* \omega_{p_1} a_{p_1} = \\ &= \mu(a_{p_1}^* a_{p_2}^* a_s a_i - a_s^* a_i^* a_{p_1} a_{p_2}), \\ \dot{n}_{p_1} &= -i\mu(a_{p_1}^* a_{p_2}^* a_s a_i - a_s^* a_i^* a_{p_1} a_{p_2}) = \mu Q. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Аналогичным образом получаем для \dot{n}_{p_2} , \dot{n}_s и \dot{n}_i :

$$\dot{n}_{p_2} = \mu Q, \quad \dot{n}_s = \dot{n}_i = -\mu Q. \quad (4.8)$$

Теперь найдем \dot{Q} :

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= i\dot{a}_{p_1} a_{p_2} a_s^* a_i^* + i\dot{a}_{p_2} a_{p_1} a_s^* a_i^* + i a_{p_1} a_{p_2} \dot{a}_s^* a_i^* + i a_{p_1} a_{p_2} a_s^* \dot{a}_i^* - \\ &- i\dot{a}_s a_i a_{p_1}^* a_{p_2}^* - i a_s \dot{a}_i a_{p_1}^* a_{p_2}^* - i a_s a_i \dot{a}_{p_1}^* a_{p_2}^* - i a_s a_i a_{p_1}^* \dot{a}_{p_2}^* = \omega_{p_1} a_{p_1} a_{p_2} a_s^* a_i^* + \\ &+ \mu a_{p_2} a_{p_2}^* a_s a_s^* a_i a_i^* + \omega_{p_2} a_{p_1} a_{p_2} a_s^* a_i^* + \mu a_{p_1} a_{p_1}^* a_s a_s^* a_i a_i^* - \omega_s a_{p_1} a_{p_2} a_s^* a_i^* - \\ &- \mu a_{p_1} a_{p_1}^* a_{p_2} a_{p_2}^* a_i a_i^* - \omega_i a_{p_1} a_{p_2} a_s^* a_i^* - \mu a_{p_1} a_{p_1}^* a_{p_2} a_{p_2}^* a_s a_s^* - \omega_s a_i a_s a_{p_1}^* a_{p_2}^* - \\ &- \mu a_{p_1} a_{p_1}^* a_{p_2} a_{p_2}^* a_i a_i^* - \omega_i a_i a_s a_{p_1}^* a_{p_2}^* - \mu a_{p_1} a_{p_1}^* a_{p_2} a_{p_2}^* a_s a_s^* + \omega_{p_1} a_i a_s a_{p_1}^* a_{p_2}^* + \\ &+ \mu a_{p_2} a_{p_2}^* a_s a_s^* a_i a_i^* + \omega_{p_2} a_i a_s a_{p_1}^* a_{p_2}^* + \mu a_{p_1} a_{p_1}^* a_s a_s^* a_i a_i^* = (\omega_{p_1} + \omega_{p_2} - \omega_s - \\ &- \omega_i)R + 2\mu(n_{p_2} n_s n_i + n_{p_1} n_s n_i - n_{p_2} n_{p_1} n_i - n_{p_2} n_s n_{p_1}). \end{aligned}$$

Далее введем расстройку резонанса $\Delta = \omega_{p_1} + \omega_{p_2} - \omega_s - \omega_i$, тогда выражение для \dot{Q} примет вид:

$$\dot{Q} = \Delta R + 2\mu(n_s n_i(n_{p_2} + n_{p_1}) - n_{p_2} n_{p_1}(n_i - n_s)). \quad (4.9)$$

Аналогичным образом получим \dot{R} :

$$\dot{R} = -\Delta Q. \quad (4.10)$$

Таким образом, мы получили следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений, с помощью которой можно описать всю динамику системы.

$$\begin{aligned}
\dot{n}_{p_1} &= \dot{n}_{p_2} = \mu Q, \\
\dot{n}_s &= \dot{n}_i = -\mu Q, \\
\dot{Q} &= \Delta R + 2\mu \left(n_s n_i (n_{p_2} + n_{p_1}) - n_{p_2} n_{p_1} (n_i - n_s) \right), \\
\dot{R} &= -\Delta Q.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Используя (4.6), начальные условия для (4.11) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
n_{p_1}|_{t=0} &\equiv n_{p_{10}} = |a_{p_{10}}|^2, \\
n_{p_2}|_{t=0} &\equiv n_{p_{20}} = |a_{p_{20}}|^2, \\
n_s|_{t=0} &\equiv n_{s0} = |a_{s0}|^2, \\
n_i|_{t=0} &\equiv n_{i0} = |a_{i0}|^2, \\
Q|_{t=0} &\equiv Q_0 = 2\sqrt{n_{p_{10}} n_{p_{20}} n_{i0} n_{s0}} \sin\theta_0, \\
R|_{t=0} &\equiv R_0 = 2\sqrt{n_{p_{10}} n_{p_{20}} n_{i0} n_{s0}} \cos\theta_0,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

где $\theta_0 = \varphi_{s0} + \varphi_{i0} - \varphi_{p_{10}} - \varphi_{p_{20}}$ — начальная разность фаз.

Из (4.11) нетрудно получить интегралы движения. Найдем один из интегралов движения. Разделим четвертое уравнение в (4.11) на первое, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dn_{p_1}} &= -\frac{\Delta}{\mu}, \\
dR &= -\frac{\Delta}{\mu} dn_{p_1}, \\
R &= -\int \frac{\Delta}{\mu} dn_{p_1} = -\frac{\Delta}{\mu} n_{p_1} + C.
\end{aligned}$$

Постоянную C найдем из начальных условий: $C = R_0 + \frac{\Delta}{\mu} n_{p_{10}}$, тогда

$$R = -\frac{\Delta}{\mu} n_{p_1} + R_0 + \frac{\Delta}{\mu} n_{p_{10}} = R_0 + \frac{\Delta}{\mu} (n_{p_{10}} - n_{p_1}). \tag{4.13}$$

Аналогичным образом получаем остальные интегралы движения, в результате получаем:

$$n_{p_1} - n_{p_2} = n_{p_{10}} - n_{p_{20}}, \quad n_s - n_i = n_{s0} - n_{i0},$$

$$n_{p_1} + n_s = n_{p_1 0} + n_{s 0}, \quad n_{p_2} + n_i = n_{p_2 0} + n_{i 0}$$

$$Q^2 + R^2 = 4n_{p_1} n_{p_2} n_i n_s, \quad R = R_0 + \frac{\Delta}{\mu} (n_{p_1 0} - n_{p_1}). \quad (4.14)$$

Дальнейшее рассмотрение удобнее провести для нормированных величин $y = n_{p_1} / n_{p_1 0}$, $\bar{n}_{p_2 0} = n_{p_2 0} / n_{p_1 0}$, $\bar{n}_{s 0} = n_{s 0} / n_{p_1 0}$, $\bar{n}_{i 0} = n_{i 0} / n_{p_1 0}$,

$$\alpha = \frac{\Delta}{2\mu n_{p_1 0}}, \quad \tau = t\mu n_{p_1 0}. \quad \text{Тогда систему уравнений (4.11) можно привести к}$$

одному нелинейному дифференциальному уравнению для нормированной плотности поляритонов накачки первого импульса y

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 + W(y) = 0, \quad (4.15)$$

где

$$W(y) = - \left(2y(y-1+\bar{n}_{p_2 0})(1+\bar{n}_{s 0}-y)(1+\bar{n}_{i 0}-y) - \left(\sqrt{\bar{n}_{p_2 0}\bar{n}_{s 0}\bar{n}_{i 0}} \cos \theta_0 + \alpha(1-y) \right)^2 \right)$$

Уравнение (4.15) описывает колебания нелинейного осциллятора, где $W(y)$ играет роль потенциальной энергии осциллятора, а $\frac{1}{2} (dy/d\tau)^2$ – кинетической. Качественно поведение функции $y(\tau)$ можно установить, изучая зависимость потенциальной энергии W от y при различных значениях параметров. Вид решения $y(\tau)$ уравнения (4.15) определяется корнями алгебраического уравнения $W(y) = 0$, которые зависят от параметров $\bar{n}_{p_2 0}$, $\bar{n}_{s 0}$, $\bar{n}_{i 0}$, α и θ_0 .

Рассмотрим случай, когда начальная разность фаз равна $\pi/2$. Уравнение $W(y) = 0$ имеет четыре действительных корня, которые мы располагаем в порядке убывания их значений и обозначим соответственно $y_1 > y_M > y_m > y_4$. Здесь корни y_M и y_m имеют смысл максимальной и минимальной плотности поляритонов накачки первого импульса, которые они принимают в процессе эволюции. Далее, определенности ради, будем считать $\bar{n}_{s 0} > \bar{n}_{i 0}$. На рисунке 4.4 представлена эволюция корней в зависимости от нормированной расстройки резонанса α . Видно, что с ростом α корни y_1 и y_m растут, а y_M и y_4 убывают. Тогда решение уравнения (4.15) можно представить в виде:

$$y = \frac{y_M - \frac{y_1(y_M - y_m)}{y_1 - y_m} \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{(y_1 - y_m)(y_M - y_4)} \tau \pm f(\phi_0, k) \right)}{1 - \frac{y_M - y_m}{y_1 - y_m} \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{(y_1 - y_m)(y_M - y_4)} \tau \pm f(\phi_0, k) \right)}, \quad (4.16)$$

где $\operatorname{sn}(x)$ - эллиптическая функция Якоби, $f(\phi_0, k) = F(\phi_0, k) - K(k)$, $F(\phi_0, k)$ - неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем k и параметром ϕ_0 , $K(k)$ - полный эллиптический интеграл [8, 9]. Алгоритм решения уравнения типа (4.15) был приведен в [1].

Величины k и ϕ_0 определяются соотношениями:

$$k^2 = \frac{(y_1 - y_4)(y_M - y_m)}{(y_1 - y_m)(y_M - y_4)}, \quad \phi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(y_M - y_4)(1 - y_m)}{(y_M - y_m)(1 - y_4)}}. \quad (4.17)$$

Периодическая эволюция плотности поляритонов накачки первого импульса представлена на рисунке 4.5. Плотность поляритонов периодически изменяется в пределах от y_m до y_M . Следовательно, отсутствует полное превращение поляритонов накачки обоих импульсов в поляритоны сигнальной и холостой мод, т.е. процесс колебаний происходит без истощения плотности поляритонов накачки.

$$\bar{n}_{p_2 0} = 0.5, \quad \bar{n}_{s 0} = 0.3, \quad \bar{n}_{i 0} = 0.1, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Если нормированная расстройка резонанса α равна нулю [10], то в зависимости от соотношения между начальными плотностями поляритонов накачки, сигнальной и холостой мод могут возникнуть как периодический, так и аperiodический режимы эволюции.

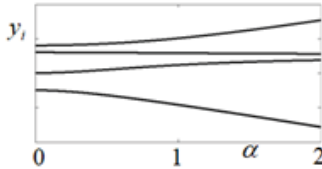


Рис. 4.4. Зависимость корней уравнения $W(y) = 0$ от нормированной расстройки резонанса α при фиксированных начальных плотностях поляритонов накачки второго импульса и поляритонов холостой моды и начальной разности фаз

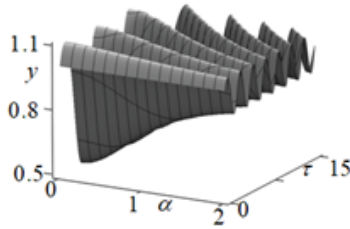


Рис. 4.5. Временная эволюция плотности поляритонов накачки первого импульса y в зависимости от нормированной расстройки резонанса α при фиксированных начальных плотностях поляритонов накачки второго импульса $\bar{n}_{p_2,0} = 0.5$, начальной плотности поляритонов сиг-

нальной моды $\bar{n}_{s,0} = 0.3$ и поляритонов холостой моды $\bar{n}_{i,0} = 0.1$ и $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

Практическая часть

1. Используя работы [10 – 15] рассмотреть параметрические процессы конверсии экситон-поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод. С помощью представленных гамильтонианов взаимодействия получить систему нелинейных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд квазичастиц. Затем ввести плотности квазичастиц и две компоненты поляризации и получить систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих временную эволюцию системы. Получить все возможные интегралы движения и привести систему нелинейных дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению нелинейного параметрического осциллятора.

2. На основе работы [16] разобрать применение экситон-поляритонов в полупроводниковом микрорезонаторе в оптических вентилях в интегральных фотонных схемах.

КОГЕРЕНТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Рассмотрим когерентное взаимодействие света с веществом. Будем считать, что электромагнитная волна описывается выражением

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t, \quad (5.1)$$

где ε_0 – огибающая волны.

Взаимодействие света с веществом в дипольном приближении описывается потенциалом вида

$$V(t) = -\mu\varepsilon \quad (5.2)$$

где $\mu = er$ – дипольный момент перехода, e – заряд электрона, r – радиус-вектор.

Будем рассматривать взаимодействие света с двухуровневым атомом. На самом деле атомы являются многоуровневыми, однако для света с частотой ω резонансными являются определенные два уровня.

Будем считать, что атомные системы обладают собственной частотой перехода ω_{21} . Согласно постулатам Бора $\hbar\omega_{21} = E_2 - E_1$. Опишем атомную систему взаимодействия со светом с помощью гамильтониана H :

$$H = H_0 + V(t), \quad (5.3)$$

где H – гамильтониан взаимодействия атома с полем, $V(t)$ – потенциал взаимодействия, H_0 – описывает состояние атома без поля.

Из квантовой механики известно

$$H_0\varphi_n(\vec{r}) = E_n\varphi_n(\vec{r}), \quad (5.4)$$

где E_n – собственные значения энергии, а φ_n – собственные функции атома.

Так как мы рассматриваем два энергетических уровня, то $n = 1, 2$. Тогда (5.4) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} H_0\varphi_1(\vec{r}) &= E_1\varphi_1(\vec{r}), \\ H_0\varphi_2(\vec{r}) &= E_2\varphi_2(\vec{r}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Волновые функции φ_1, φ_2 являются ортонормированными, следовательно должно выполняться соотношение

$$\int \varphi_i^*(\vec{r})\varphi_j(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_{ij}, \quad (5.6)$$

где δ_{ij} – дельта символ Кронекера.

Матричные элементы гамильтониана H_0 можно легко получить из стационарных уравнений Шредингера, для этого умножим (5.5) слева на φ_1^* и φ_2^* соответственно и проинтегрируем по $d\vec{r}$. Тогда с учетом (5.6) получим:

$$\int \varphi_1^*H_0\varphi_1 d\vec{r} = H_{0,11} = E_1 \int \varphi_1\varphi_1^* d\vec{r} = E_1,$$

$$\int \varphi_2^* H_0 \varphi_1 d\vec{r} = H_{0,21} = \int \varphi_2^* E_1 \varphi_1 dr = E_1 \int \varphi_2^* \varphi_1 dr = 0,$$

$$\int \varphi_1^* H_0 \varphi_2 dr = H_{0,12} = \int \varphi_1^* E_2 \varphi_2 = 0,$$

$$H_{0,22} = E_2. \quad (5.7)$$

Из (5.7) видно, что диагональные матричные элементы от оператора H_0 дают E_1, E_2 , а не диагональные равны нулю. Таким образом, без воздействия внешнего поля атом находится либо в состоянии 1 (нижний энергетический уровень), либо в состоянии 2 (верхний энергетический уровень).

Однако, если приложить внешнее поле с потенциалом $V(t) = -\mu\epsilon$, то атом может находиться как на уровне 1, так и на уровне 2. Поэтому волновая функция атома под действием поля может быть представлена в виде суперпозиции по состояниям 1 и 2:

$$\psi(t) = a_1(t)\varphi_1(t) + a_2(t)\varphi_2(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t) \quad (5.8)$$

$$\varphi_1 = \varphi_1(\vec{r})e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t},$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(\vec{r})e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \quad (5.9)$$

Запишем уравнение Шредингера для атома взаимодействующего с полем электромагнитной волны.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H\psi(t) = (H_0 + V(t))\psi(t) \quad (5.10)$$

Коэффициент разложения a_1, a_2 в (5.8) имеют смысл вероятности нахождения частицы в состоянии 1 и 2. Подставим (5.8) и (5.9) в (5.10).

$$i\hbar \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial t} \varphi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} - i\frac{E_1}{\hbar} a_1 \varphi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \frac{\partial a_2}{\partial t} \varphi_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} - i\frac{E_2}{\hbar} a_2 \varphi_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \right\} = H_0 a_1 \varphi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + H_0 a_2 \varphi_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} + V a_1 \varphi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + V a_2 \varphi_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) должно выполняться для любого момента времени t . С учетом (5.7) уравнение (5.11) переписется в виде:

$$i\hbar \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial t} \varphi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} - i\frac{E_1}{\hbar} a_1 \varphi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \frac{\partial a_2}{\partial t} \varphi_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} - i\frac{E_2}{\hbar} a_2 \varphi_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \right\} = E_1 a_1 \varphi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + E_2 a_2 \varphi_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} + V a_1 \varphi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + V a_2 \varphi_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \quad (5.12)$$

Умножим уравнение (5.12) слева на $\varphi_1^*(\vec{r})$ и проинтегрируем по всему пространству $\int d\vec{r}$.

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} = \int \varphi_1^* V \varphi_2 dr a_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \int \varphi_1^* V \varphi_2 dr a_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \quad (5.13)$$

Умножим (5.12) слева на $\varphi_2^*(\vec{r})$ и проинтегрируем по $d\vec{r}$.

$$i\hbar \frac{da_2}{dt} e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} = \int \varphi_2^* V \varphi_2 dr a_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \int \varphi_2^* V \varphi_2 dr a_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \quad (5.14)$$

Уравнения (5.13) и (5.14) описывают временную эволюцию неизвестных коэффициентов разложения a_1 и a_2 в (5.8).

Рассмотрим следующие интегралы

$$\int \varphi_1^* V \varphi_2 d\vec{r} = -\varepsilon(t) \int \varphi_1^* \mu(\vec{r}) \varphi_2 dr = -\varepsilon \mu_{21} \quad (5.15)$$

Интеграл (5.15) описывает вероятность перехода атома под действием поля в дипольном приближении со второго энергетического уровня на первый в двухуровневой системе.

$$\int \varphi_1^* V \varphi_1 d\vec{r} = -\varepsilon(t) \int \varphi_1^* \mu \varphi_1 d\vec{r} = 0 \quad (5.16)$$

Интеграл (5.16) равен нулю в силу закона сохранения энергии (невозможного перехода с первого уровня на первый). Аналогичным образом получим

$$\int \varphi_2^* V \varphi_1 d\vec{r} = -\varepsilon \mu_{12} \quad (5.17)$$

$$\int \varphi_2^* V \varphi_2 d\vec{r} = 0 \quad (5.18)$$

С учетом (5.15) – (5.18) уравнения (5.13) и (5.14) переписутся в виде

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} = -\mu_{21} \varepsilon a_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t},$$

$$i\hbar \frac{da_2}{dt} e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} = -\mu_{12} \varepsilon a_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}.$$

Далее используя один из постулатов Бора $\hbar\omega_{21} = E_2 - E_1$, получаем

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} = -\mu_{21} \varepsilon a_2 e^{-i\omega_{21}t},$$

$$i\hbar \frac{da_2}{dt} = -\mu_{12} \varepsilon a_1 e^{i\omega_{21}t} \quad (5.19)$$

Положим $\mu_{21} = \mu_{12}^* = \mu_{12} \equiv \mu$ и $\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$, получим

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu a_2 e^{-i\omega_{21}t} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}),$$

$$i\hbar \frac{da_2}{dt} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu a_1 e^{i\omega_{21}t} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (5.20)$$

Введём расстройку резонанса $\Delta = \omega_{21} - \omega$. При этом резонансным приближением будем считать приближение, при котором выполняется неравенство $|\Delta| \ll \omega_{21}, \omega$. Тогда

$$e^{-i\omega_{21}t}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = e^{-i(\omega_{21}-\omega)t} + e^{-i(\omega_{21}+\omega)t} = e^{-i\Delta t} + e^{-2i\omega t - i\Delta t} \quad (5.21)$$

Второе слагаемое в (5.21) является быстро осциллирующим по времени с периодом $T = \frac{\pi}{\omega}$. Т.е. в течении одного периода электромагнитной волны происходят два колебания данной функции. Поэтому мы проведём усреднение дифференциальных уравнений по времени, равному периоду колебаний. Тогда (5.19) с учетом (5.21) примет вид:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{da_1}{dt} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_0\mu a_2 e^{-i\Delta t}, \\ i\hbar \frac{da_2}{dt} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_0\mu a_1 e^{i\Delta t} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Представим коэффициенты a_1 и a_2 в виде

$$\begin{aligned} a_1 &= \psi_1 e^{-i\frac{\Delta}{2}t}, \\ a_2 &= \psi_2 e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Теперь (5.23) подставляем в (5.22).

$$\begin{aligned} i\hbar \left(\frac{d\psi_1}{dt} - i\frac{\Delta}{2}\psi_1 \right) e^{-i\frac{\Delta}{2}t} &= -\frac{1}{2}\mu\varepsilon_0\psi_2 e^{-i\frac{\Delta}{2}t}, \\ i\hbar \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\hbar\Delta}{2}\psi_1 - \frac{1}{2}\mu\varepsilon_0\psi_2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \left(\frac{d\psi_2}{dt} + i\frac{\Delta}{2}\psi_2 \right) e^{i\frac{\Delta}{2}t} &= -\frac{1}{2}\mu\varepsilon_0\psi_1 e^{i\frac{\Delta}{2}t}, \\ i\hbar \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\hbar\Delta}{2}\psi_2 - \frac{1}{2}\mu\varepsilon_0\psi_1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Мы получили замкнутую систему уравнений для волновых функций ψ_1, ψ_2 (5.24) и (5.25). Определим физический смысл данных волновых функций.

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 = a_1\varphi_1(r)e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + a_2\varphi_2(r)e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} = \\ &= \psi_1(t)\varphi_1(r)e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t - i\frac{\Delta}{2}t} + \psi_2(t)\varphi_2(r)e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t + i\frac{\Delta}{2}t} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Рассмотрим выражения

$$|\psi_1|^2 = \psi_1^* \psi_1 = \psi_1^* \varphi_1^* \psi_1 \varphi_1 ,$$

$$|\psi_2|^2 = \psi_2^* \varphi_2^* \psi_2 \varphi_2 \quad (5.27)$$

Проинтегрируем выражения (5.27) по всему пространству, получим

$$\int |\psi_1|^2 d\vec{r} = |\psi_1|^2 \int |\varphi_1(r)|^2 dr = |\psi_1|^2 = \rho_{11} , \quad (5.28)$$

где ρ_{11} представляет собой плотность вероятности найти частицу в данный момент времени на уровне 1 (или в состоянии 1).

$$\int |\psi_2|^2 d\vec{r} = |\psi_2|^2 \int |\varphi_2(r)|^2 dr = (\psi_2)^2 = \rho_{22} , \quad (5.29)$$

где ρ_{22} – это плотность вероятности найти частицу в данный момент времени на уровне 2.

Таким образом, волновые функции ψ_1, ψ_2 – определяют вероятность заселения уровня 1 или уровня 2 соответственно.

Найдём теперь средний дипольный момент перехода частицы под действием внешнего поля.

$$\begin{aligned} \mu_{cp} &= \int \psi^* \mu \psi d\vec{r} = \int \left(\psi_1^* \varphi_1^* e^{i\frac{E_1}{\hbar}t + i\frac{\Delta}{2}t} + \psi_2^* \varphi_2^* e^{i\frac{E_2}{\hbar}t - i\frac{\Delta}{2}t} \right) \mu \left(\psi_1 \varphi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t - i\frac{\Delta}{2}t} \right. \\ &\quad \left. + \psi_2 \varphi_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t + i\frac{\Delta}{2}t} \right) d\vec{r} = \\ &= \psi_1^* \psi_2 e^{-i\omega_{21}t + i(\omega_{21} - \omega)t} \int \varphi_1^* \mu \varphi_2 d\vec{r} + \\ &+ \psi_2^* \psi_1 e^{i\omega_{21}t - i(\omega_{21} - \omega)t} \int \varphi_2^* \mu \varphi_1 d\vec{r} = \\ &\quad \mu (\psi_1^* \psi_2 e^{-i\omega t} + \psi_2^* \psi_1 e^{i\omega t}). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Обозначим $\rho_{21} = \psi_1^* \psi_2$ и $\rho_{12} = \psi_2^* \psi_1$.

Таким образом, недиагональные элементы матрицы ρ определяют эволюцию во времени среднего дипольного момента перехода системы. А диагональные элементы матрицы ρ определяют временную эволюцию населённости уровней.

ОПТИЧЕСКАЯ МУТАЦИЯ В УСЛОВИИ ТОЧНОГО РЕЗОНАНСА

В условии точного резонанса $\Delta = 0$ исходная система уравнений (5.24) и (5.25) принимает вид

$$i \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\mu \varepsilon_0}{\hbar} \psi_2, \quad (6.1)$$

$$i \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\mu \varepsilon_0}{\hbar} \psi_1 \quad (6.2)$$

Введём далее величину $\Omega_0 = \frac{\mu \varepsilon_0}{\hbar}$, которая называется частотой оптической мутации. При этом будем предполагать что, огибающая поля есть постоянная величина $\varepsilon_0 = const$, т.е. предполагаем, что на систему действует ступенчатый импульс. Данный импульс является коротким, т.е. его длительность τ_p намного меньше времени релаксации атомной системы.

Изучим временную эволюцию волновых функций ψ_1 и ψ_2 . Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ атомы находятся на нижнем энергетическом уровне, т.е. $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 0$.

$$i\dot{\psi}_1 = -\frac{1}{2} \Omega_0 \psi_2, \quad (6.3)$$

$$i\dot{\psi}_2 = -\frac{1}{2} \Omega_0 \psi_1. \quad (6.4)$$

Умножим уравнение (6.3) на i и продифференцируем по времени t , получим

$$i\ddot{\psi}_1 = \frac{\Omega_0^2}{2^2} \psi_1, \\ \ddot{\psi}_1 + \frac{\Omega_0^2}{4} \psi_1 = 0. \quad (6.5)$$

Решение уравнения (6.5) представляется в виде

$$\psi_1 = A \cos \frac{\Omega_0}{2} t + B \sin \frac{\Omega_0}{2} t \quad (6.6)$$

Коэффициенты A, B определим из начальных условий. Получим

$$1 = A \quad (6.7)$$

$$i\psi_1 \Big|_{t=0} = -\frac{\Omega_0}{2} \psi_2 \Big|_{t=0} = 0, \\ \psi_1 \Big|_{t=0} = 0, \\ 0 = B \frac{\Omega_0}{2}, \text{ следовательно } B = 0.$$

Тогда (6.6) примет вид

$$\psi_1 = \cos \frac{\Omega_0}{2} t \quad (6.8)$$

Теперь получим решение для ψ_2 . Для этого подставим (6.8) в (6.3).

$$-i \frac{\Omega_0}{2} \sin \frac{\Omega_0}{2} t = -\frac{\Omega_0}{2} \psi_2,$$

$$\psi_2 = i \sin \frac{\Omega_0}{2} t \quad (6.9)$$

Найдём населенности уровней

$$\rho_{11} = |\psi_1|^2 = \cos^2 \frac{\Omega_0}{2} t = \frac{1}{2}(1 + \cos \Omega_0 t),$$

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}(1 + \cos \Omega_0 t) \quad (6.10)$$

$$\rho_{22} = |\psi_2|^2 = \sin^2 \frac{\Omega_0}{2} t = \frac{1}{2}(1 - \cos \Omega_0 t),$$

$$\rho_{22} = \frac{1}{2}(1 - \cos \Omega_0 t) \quad (6.11)$$

Найдем поляризацию

$$P = N\mu_{cp.} = N\mu(\psi_1^* \psi_2 e^{-i\omega t} + \psi_1 \psi_2^* e^{i\omega t}) = N\mu i \cos \frac{\Omega_0}{2} t \sin \frac{\Omega_0}{2} t (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) = \frac{i}{2} N\mu \sin \Omega_0 t (-1) 2i \sin \omega t = N\mu \sin \Omega_0 t \sin \omega t,$$

$$P = N\mu \sin \Omega_0 t \sin \omega t \quad (6.12)$$

Внешнее поле определяется выражением $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$.

Населённости уровней и поляризация среды являются периодическими функциями (6.10 – 6.12) от времени с частотой Ω_0 (с частотой оптической нутации). Известно, что частота нутации на три (четыре) порядка меньше частоты электромагнитного излучения ω , и пропорциональна амплитуде поля ε_0 ($\Omega_0 = \frac{\mu\varepsilon_0}{\hbar}$), т.е. Ω_0 линейно растет с ростом поля (рис. 6.1).

Как видно из (6.12) поляризация имеет только антифазную компоненту по отношению к полю, следовательно, амплитуда поляризации будет определяться выражением $P_0 = N\mu \sin \Omega_0 t$, а амплитуда поля $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Изобразим графики зависимости населенностей уровней ρ_{11}, ρ_{22} и амплитуды поляризации P_0 от $\Omega_0 t$.

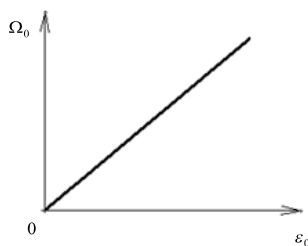


Рис. 6.1. Зависимость частоты оптической нутации от амплитуды падающего поля

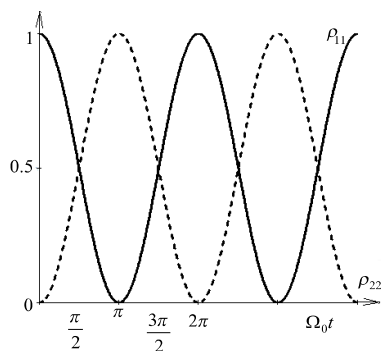


Рис. 6.2. Зависимость населенностей первого и второго уровня от $\Omega_0 t$.

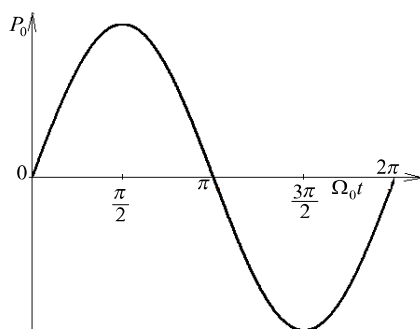


Рис. 6.3. Зависимость амплитуды поляризации от $\Omega_0 t$.

Из полученных решений (6.10) и (6.11) легко видеть, что $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$. Таким образом, вероятность нахождения атома на нижнем либо на верхнем энергетическом уровне равна единице. Также из полученных решений и рисунков 6.2 и 6.3 следует, что населенности уровней ρ_{11} и ρ_{22} , и поляризация среды P_0 периодически изменяются со временем с частотой Ω_0 и периодом $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$.

Рассмотрим отдельные этапы эволюции системы. Из начальных условий, нам известно, что при $t = 0$ все атомы находились в основном состоянии: $\rho_{11} = 1$, $\rho_{22} = 0$. При этом поляризация $P = 0$. С течением времени населённость первого уровня начинает убывать, а второго уровня возрастать, а поляризация P монотонно увеличивается. Все это продолжается в течение промежутка времени $0 \leq \Omega_0 t \leq \frac{\pi}{2}$. В момент времени $\Omega_0 t = \frac{\pi}{2}$ населенности уровней $\rho_{11} = \rho_{12} = \frac{1}{2}$, при этом $P_0 = P_{max} = N\mu$ (рис. 6.2, 6.3). Таким образом, если действует постоянный импульс света с амплитудой ε_0 , то населённости уровней системы оказываются одинаковыми, а поляризация максимально возможной. Такой импульс называется $\frac{\pi}{2}$ -импульс. Его действие приводит к выравниванию населённостей уровней и к появлению максимальной поляризации. Если в каких-то физических явлениях требуется, чтобы поляризация была максимально возможной, то для этого используют $\frac{\pi}{2}$ -импульс.

В промежутке времени $\frac{\pi}{2} \leq \Omega_0 t \leq \pi$ система эволюционирует таким образом, что населённость верхнего уровня монотонно растёт от $\frac{1}{2}$ до 1, а населённость нижнего уровня убывает от $\frac{1}{2}$ до 0. Поляризация системы монотонно убывает, от $N\mu$ до 0. К моменту времени $\Omega_0 t = \pi$ населенность верхнего уровня становится равной 1, а нижнего – нулю, такое состояние атомной системы называется полностью инвертированным состоянием. Или говорят, что имеет место полная инверсия системы под действием внешнего импульса. Поляризация P_0 становится равной нулю. Полная инверсия системы невозможна в состоянии термодинамического равновесия. Для полной инверсии необходимо применение внешнего источника (накачки). Если амплитуда падающего импульса ε_0 и длительность его действия t таковы что $\frac{\mu}{\hbar} \varepsilon_0 t = \pi$ ($\Omega_0 t = \pi$), то такой импульс называется π -импульсом. Под действием π -импульса система достигает полной инверсии и к концу его действия поляризация оказывается равной нулю (рис. 6.2, 6.3).

В промежутке времени $\pi \leq \Omega_0 t \leq \frac{3}{2}\pi$ населённость верхнего уровня убывает от 1 до $\frac{1}{2}$, а нижнего возрастает от 0 до $\frac{1}{2}$. Поляризация по величине растёт от 0 до максимума, но ориентирована в обратную сторону. В момент

времени $\Omega_0 t = \frac{3}{2}\pi$ населённости уровней снова выравниваются и поляризация оказывается максимально возможной $-N\mu$. Если амплитуда импульса ε_0 и длительность его действия t таковы, что $\frac{\mu}{\hbar}\varepsilon_0 t = \frac{3}{2}\pi$ ($\Omega_0 t = \frac{3}{2}\pi$), то под действием этого импульса населённости уровней выравниваются, становятся равными $\frac{1}{2}$, и поляризация оказывается максимально возможной, но обратной по отношению к $\frac{\pi}{2}$ -импульсу. Такой импульс называется $\frac{3}{2}\pi$ -импульсом (рис. 6.2, 6.3).

Наконец, если рассматривать поведение системы в промежутках времени $\frac{3}{2}\pi \leq \Omega_0 t \leq 2\pi$, то населенность верхнего уровня монотонно убывает от $\frac{1}{2}$ до 0, населенность нижнего уровня растёт от $\frac{1}{2}$ до 1, а модуль поляризации убывает от $N\mu$ до 0. В конце промежутка времени, когда $\Omega_0 t = 2\pi$ система возвращается в исходное состояние. Данный импульс называется 2π -импульс. Если на систему действует 2π -импульс, то она каким-то образом эволюционирует возбуждаясь и девозбуждаясь, но так что в момент окончания действия 2π -импульса система возвращается в исходное состояние. 2π -импульс, является уникальным импульсом. Если такой импульс проходит через двухуровневую атомную систему, то его форма постепенно преобразуется в переходной стадии, и он приобретает форму секанса гиперболического: $\varepsilon \sim \operatorname{sech} \frac{t-z}{\tau}$, где τ – длительность 2π -амплитуды.

Такой импульс называется солитоном.

ОПТИЧЕСКАЯ НУТАЦИЯ В НЕРЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим случай, когда частота электромагнитной волны ω не совпадает с частотой перехода ω_{21} . Это означает, что расстройка резонанса $\Delta = \omega_{21} - \omega \neq 0$, тогда система уравнений для определения волновых функций примет вид:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar \Delta}{2} \Psi_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu \Psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = \frac{\hbar \Delta}{2} \Psi_2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu \Psi_1 \end{cases} \quad (7.1)$$

Будем предполагать, что в начальный момент времени, заселён только первый уровень $\Psi_1|_{t=0} = 1$ и на двухуровневую систему падает импульс с постоянной огибающей: $\varepsilon_0 = const$.

Наша задача определить временную эволюцию атома под действием внешнего поля электромагнитной волны. Для этого умножим первое уравнение в (7.1) на i и возьмём производную по времени с обеих частей равенства и введем частоту оптической нутации $\Omega_0 = \frac{\varepsilon_0 \mu}{\hbar}$.

$$\begin{aligned} ii \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} &= -i \frac{\Delta}{2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - i \frac{1}{2} \Omega_0 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -i \frac{\Delta}{2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} \Omega_0 \left(\frac{\Delta}{2} \Psi_2 - \frac{1}{2} \Omega_0 \Psi_1 \right) = -i \frac{\Delta}{2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \\ &\quad \frac{1}{4} \Omega_0^2 \Psi_1 + \frac{\Delta}{2} \left(i \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \frac{\Delta}{2} \Psi_1 \right), \\ -\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} &= \frac{1}{4} (\Omega_0^2 + \Delta^2) \Psi_1. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Введем частоту нутации $\Omega^2 = \Omega_0^2 + \Delta^2$, тогда

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \Omega^2 \Psi_1 = 0. \quad (7.3)$$

Решение дифференциального уравнения второго порядка будем искать в виде:

$$\Psi_1 = A \cos \frac{\Omega}{2} t + B \sin \frac{\Omega}{2} t. \quad (7.4)$$

Коэффициенты A и B находим используя начальные условия:

$$\Psi_1|_{t=0} = 1 = A \quad (7.5)$$

$$\dot{\Psi}_1|_{t=0} = \frac{B\Omega}{2} \quad (7.6)$$

С другой стороны

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = -\hbar \frac{\Delta}{2} \Psi_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu \Psi_2,$$

$$\begin{aligned}
i\hbar\dot{\Psi}_1|_{t=0} &= \hbar\frac{\Delta}{2}\Psi_1|_{t=0} - \frac{1}{2}\varepsilon_0\mu\Psi_2|_{t=0}, \\
i\hbar\dot{\Psi}_1|_{t=0} &= -\hbar\frac{\Delta}{2}, \\
\Psi_1|_{t=0} &= -\frac{\Delta}{2i}i = i\frac{\Delta}{2}
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Приравняв (7.6) и (7.7), получаем

$$\frac{B\Omega}{2} = \frac{i\Delta}{2},$$

следовательно $B = i\frac{\Delta}{\Omega}$.

Тогда окончательно (7.4) примет вид

$$\Psi_1 = \cos\frac{\Omega}{2}t + i\frac{\Delta}{\Omega}\sin\frac{\Omega}{2}t \tag{7.8}$$

Находим решение для волновой функции Ψ_2 из уравнения (7.1)

$$i\left(-\frac{\Omega}{2}\sin\frac{\Omega}{2}t + i\frac{\Delta}{\Omega}\cos\frac{\Omega}{2}t\right) = -\frac{\Delta}{2}\left(\cos\frac{\Omega}{2}t + i\frac{\Delta}{\Omega}\sin\frac{\Omega}{2}t\right) - \frac{\Omega_0}{2}\Psi_2,$$

$$\frac{\Omega_0}{2}\Psi_2 = \frac{1}{2}i\sin\frac{\Omega}{2}t\left(\Omega - \frac{\Delta^2}{\Omega}\right) = \frac{1}{2}i\frac{\Omega_0^2}{\Omega}\sin\frac{\Omega}{2}t,$$

$$\Psi_2 = \frac{i\Omega_0}{\Omega}\sin\frac{\Omega}{2}t \tag{7.9}$$

Находим населённость первого уровня:

$$\rho_{11} = |\Psi_1|^2 = \Psi_1\Psi_1^*,$$

$$\rho_{11} = \left(\cos\frac{\Omega}{2}t + i\frac{\Delta}{\Omega}\sin\frac{\Omega}{2}t\right)\left(\cos\frac{\Omega}{2}t - i\frac{\Delta}{\Omega}\sin\frac{\Omega}{2}t\right) = \cos^2\frac{\Omega}{2}t +$$

$$\frac{\Delta^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega}{2}t = 1 - \sin^2\frac{\Omega}{2}t + \frac{\Delta^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega}{2}t = 1 - \sin^2\frac{\Omega}{2}t\left(1 - \frac{\Delta^2}{\Omega^2}\right) = 1 - \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega}{2}t,$$

$$\rho_{11} = 1 - \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega}{2}t. \tag{7.10}$$

Населённость второго уровня $\rho_{22} = |\Psi_2|^2 = 1 - \rho_{11}$, тогда

$$\rho_{22} = \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega}{2}t \tag{7.11}$$

Найдем поляризацию:

$$P = N\mu_{\text{cp}},$$

$$\begin{aligned} P &= N\mu(\Psi_1^* \Psi_2 e^{-i\omega t} + \Psi_2^* \Psi_1 e^{i\omega t}) = \\ N\mu &\left(\left(\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right) i\frac{\Omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) e^{-i\omega t} - i\frac{\Omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \left(\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right) e^{i\omega t} \right), \\ P &= N\mu \left(i\frac{\Omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) e^{-i\omega t} + \frac{\Delta\Omega_0}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) e^{-i\omega t} \right. \\ &\quad \left. - i\frac{\Omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) e^{i\omega t} + \frac{\Delta\Omega_0}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) e^{i\omega t} \right) = \\ N\mu &\left(i\frac{\Omega_0}{\Omega} \frac{1}{2} \sin(\Omega t) (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) + \frac{\Delta\Omega_0}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) \right), \\ P &= N\mu \left(\frac{\Omega_0}{\Omega} \sin(\Omega t) \sin(\omega t) + 2 \frac{\Delta\Omega_0}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \cos(\omega t) \right). \quad (7.12) \end{aligned}$$

Рассмотрим предельный случай $\Delta = 0$, тогда $\Omega = \Omega_0$. Тогда

$\Psi_1 = \cos\frac{\Omega_0}{2}t$, $\Psi_2 = i\sin\frac{\Omega_0}{2}t$, $\rho_{11} = \cos^2\frac{\Omega_0}{2}t$, $\rho_{22} = \sin^2\frac{\Omega_0}{2}t$ и $P = N\mu \sin(\Omega_0 t) \sin(\omega t)$, что совпадает с полученными выражениями в случае точного резонанса.

Обсудим полученные результаты. При $\Delta \neq 0$ частота нутации определяется выражением $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \Delta^2}$, следовательно, частота нутации зависит не только от амплитуды внешнего поля ε_0 , но и от расстройки резонанса Δ (рис. 7.1). Частота нутации при $\Delta \neq 0$ монотонно растёт, как с ростом поля ε_0 , так и с ростом расстройки резонанса Δ и при этом Ω всегда больше Ω_0 .

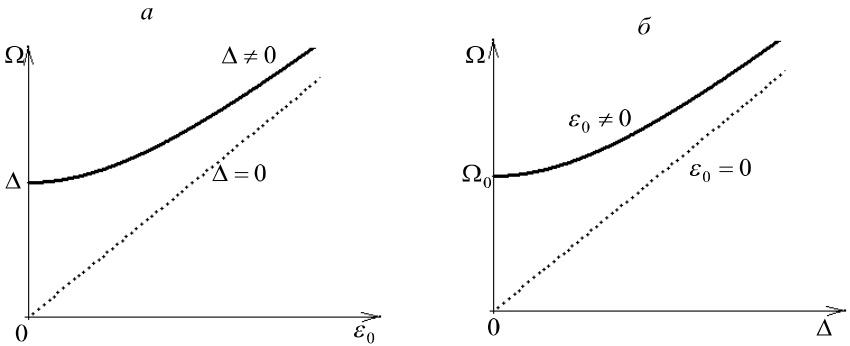


Рис. 7.1. Зависимость частоты нутации от амплитуды поля (а) и расстройки резонанса (б)

Проанализируем временное поведение населённости уровней (рис. 7.3). При $\Delta \neq 0$ невозможен полный переход всех атомов с нижнего на верхний уровень в течение одного периода. С течением времени населённость нижнего уровня монотонно убывает, а населённость верхнего уровня монотонно увеличивается. При $\Omega t = \pi/2$ населённости уровней выравниваются. А при $\Omega t = \pi$ населённость нижнего уровня достигает своего минимального значения, равно $\rho_{11}^{min} = \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + \Omega_0^2}$, а населённость второго уровня максимальна и равна $\rho_{22}^{max} = \frac{\Omega_0^2}{\Delta^2 + \Omega_0^2}$. Когда $\Omega t = 2\pi$, все атомы снова оказываются на нижнем энергетическом уровне.

Населённости ρ_{11}^{min} и ρ_{22}^{max} функционально зависят от расстройки резонанса. Из рисунка 7.3 видно, что с ростом расстройки резонанса $|\Delta|$ монотонно растёт величина ρ_{11}^{min} . При $\Delta = 0$ в течении периода все атомы переходят с нижнего уровня на верхний. Однако, при $\Delta \neq 0$, часть атомов остаётся на нижнем уровне и она тем больше, чем больше $|\Delta|$. Максимальное число атомов ρ_{22}^{max} , переходящих на верхний уровень убывает от 1 до 0 с ростом Δ . Таким образом, оптическая нутация в нерезонансном случае представляет собой периодическое изменение населённостей уровней с частотой Ω , причём не все атомы переходят с нижнего уровня на верхний.

Напомним, что в условии точного резонанса поляризация среды имеет только антифазную компоненту, т.е. пропорциональна $\sin\omega t$. Однако, при $\Delta \neq 0$ возникает так же синфазная компонента поляризации пропорциональная $\cos\omega t$. С ростом Δ вклад синфазной компоненты монотонно растёт.

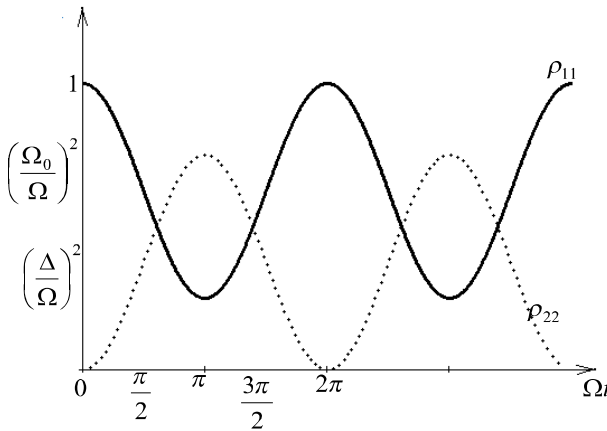


Рис. 7.2. Временная зависимость населённости уровней

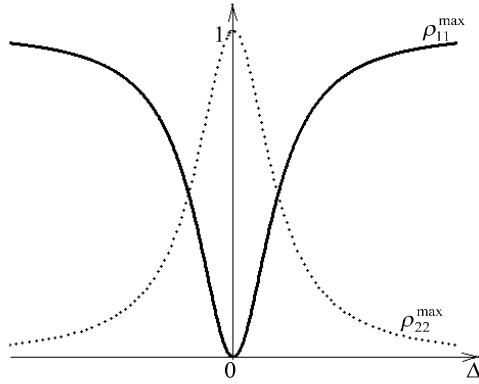


Рис. 7.3. Зависимость населенностей уровней от расстройки резонанса

Найдём полное поле волны, распространяющейся в среде. Простоты ради, предположим $\Delta = 0$, тогда поляризация равна $P = N \mu \sin(\Omega_0 t) \sin(\omega t)$. Полное поле равно сумме полей падающей волны и вторичного поля порождаемого переменной во времени поляризацией. Из курса классической электродинамики известно примерное выражение для амплитуды поля вторичной волны: $\varepsilon_{ind} = -\frac{d^2 P}{dt^2}$. Тогда при условии, что $\Omega_0 \ll \omega$, получим

$$\varepsilon_{ing} = N \mu \omega^2 \sin(\omega t) \sin(\Omega_0 t).$$

Падающая волна $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$.

Тогда полное поле равно:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t + N \mu \omega^2 \sin(\omega t) \sin(\Omega_0 t) \quad (7.13)$$

Из (7.13) видно, что полное поле осциллирует со временем с частотой Ω_0 . Изменяя частоты этих осцилляций можно изучить явление оптической нутации.

Вводя амплитуды модуляции полного поля $\varepsilon_m = \frac{N \mu \omega^2}{\varepsilon_0}$, то (7.13) переписывается в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \{ \cos \omega t + \varepsilon_m \sin(\omega t) \sin(\Omega_0 t) \}.$$

НУТАЦИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЕ ПАДАЮЩЕГО ИМПУЛЬСА

До сих пор мы рассматривали явление оптической нутации под действием ступенчатого импульса с амплитудой $\varepsilon_0(t) = \varepsilon_0 = const$. Рассмотрим случай, когда электрическое поле электромагнитной волны представляется в виде огибающей зависящей от времени:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t) \cos \omega t \quad (8.1)$$

Тогда частота оптической нутации $\Omega_0 \neq const$. Запишем систему дифференциальных уравнений описывающих поведение двухуровневой системы в этом случае.

$$\begin{cases} i \frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{\Delta}{2} \Psi_1 - \frac{1}{2} \frac{\mu \varepsilon_0(t)}{\hbar} \Psi_2 \\ i \frac{d\Psi_2}{dt} = \frac{\Delta}{2} \Psi_2 - \frac{1}{2} \frac{\mu \varepsilon_0(t)}{\hbar} \Psi_1 \end{cases} \quad (8.2)$$

Система уравнений (8.2) является системой дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которая в общем случае не решается. При $\Delta \neq 0$ эта система не имеет решений. Однако, известно несколько частотных случаев её решения, которые были получены Зенером-Ландау-Лифшицем.

В случае точного резонанса $\Delta = 0$ удаётся получить точное решение (8.2) при произвольной форме падающего импульса. Единственное требование $\varepsilon_0(t)$ должно медленно меняться во времени. В условиях точного резонанса (8.2) переписывается в виде:

$$\begin{cases} i \frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{\mu \varepsilon_0(t)}{2\hbar} \Psi_2 \\ i \frac{d\Psi_2}{dt} = -\frac{\mu \varepsilon_0(t)}{2\hbar} \Psi_1 \end{cases} \quad (8.3)$$

Введем новую функцию, которую назовём площадью импульса:

$$\theta(t) = \frac{\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0(t') dt' \quad (8.4)$$

В (8.3) перейдем от dt к $d\theta$.

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu}{\hbar} \varepsilon_0 \frac{d}{d\theta}. \quad (8.5)$$

С учетом (8.5) систему уравнений (8.3) переписется в виде:

$$\begin{cases} i \frac{d\Psi_1}{d\theta} = -\frac{1}{2}\Psi_2 \\ i \frac{d\Psi_2}{d\theta} = -\frac{1}{2}\Psi_1 \end{cases} \quad (8.6)$$

Определим начальные условия для площади импульса θ . Будем предполагать, что в начальный момент времени заселен только первый уровень.

$$\Psi_1|_{t=0} = 1, \quad (8.7)$$

$$\Psi_2|_{t=0} = 0. \quad (8.8)$$

Тогда

$$\Psi_1|_{\theta=0} = 1, \quad (8.9)$$

$$\Psi_2|_{\theta=0} = 0. \quad (8.10)$$

Продифференцируем по $d\theta$ первое уравнение в (8.6), тогда получим:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\Psi_1}{d\theta^2} &= \frac{1}{4}\Psi_1, \\ \frac{d^2\Psi_1}{d\theta^2} + \frac{1}{4}\Psi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Решение (8.11) представим в виде:

$$\Psi_1 = A \cos \frac{\theta}{2} + B \sin \frac{\theta}{2}. \quad (8.12)$$

Найдем начальные условия для $\frac{d\Psi_1}{d\theta}$.

$$i \frac{d\Psi_1}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = -\frac{1}{2}\Psi_2|_{\theta=0} = 0, \text{ следовательно}$$

$$\frac{d\Psi_1}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = 0. \quad (8.13)$$

Используя начальные условия (8.9) и (8.13) получаем коэффициенты А и В в (8.12).

$$1=A \quad (8.14)$$

$$0=B \quad (8.15)$$

Тогда

$$\Psi_1 = \cos \frac{\theta}{2}. \quad (8.16)$$

Найдём Ψ_2 :

$$-i \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2} \Psi_2$$

$$\Psi_2 = i \sin \frac{\theta}{2}. \quad (8.17)$$

Зная Ψ_1 и Ψ_2 нетрудно найти населенности первого и второго уровней, а также поляризацию:

$$\rho_{11} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (8.18)$$

$$\rho_{22} = \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (8.19)$$

$$P = N\mu \sin\theta \sin\omega t \quad (8.20)$$

Если предположить, что огибающая падающего поля является ступенчатой, то $\theta = \frac{\mu}{\hbar} \varepsilon_0 t = \Omega_0 t$.

Пусть на двухуровневую систему падает некий (часть) импульс площадью $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{2}$ – импульс). Тогда $\rho_{11} = \frac{1}{2}$, $\rho_{22} = \frac{1}{2}$ и $P_{max} = N\mu$, т.е. происходит выравнивание населённости уровней системы и поляризация оказывается максимально возможной $P_{max} = N\mu$. Этот случай является чрезвычайно важным в связи с тем, что $\frac{\pi}{2}$ – импульс генерирует в среде максимально возможную поляризацию.

Нарисуем график эволюции населённости.

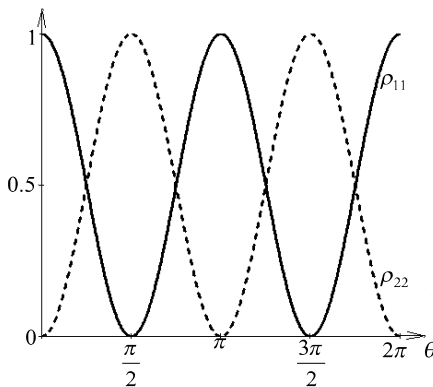


Рис. 8.1. Зависимость населенностей первого и второго уровня от площади падающего импульса

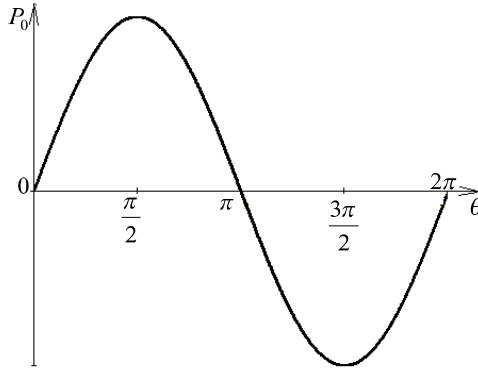


Рис. 8.2. Зависимость амплитуды поляризации от площади падающего импульса

Пусть теперь импульс в момент времени t_2 имеет площадь $\theta = \pi$. Под действием π – импульса, либо части импульса площадью $\theta = \pi$ возникает инверсия населённости двухуровневой системы: $\rho_{11} = 0$ и $\rho_{22} = 1$, т.е. все атомы перешли с нижнего уровня на верхний, такое состояние называется инвертированным, при этом $P = 0$.

Если $\theta = \frac{3\pi}{2}$, то населённости уровней снова выравниваются и поляризация снова оказывается максимально возможной, однако меняет свой знак. Этот импульс аналогичен $\frac{\pi}{2}$ – импульсу.

Если прошедший через систему импульс (либо часть импульса) имеет площадь 2π , то под действием такого импульса система эволюционирует и приходит в исходное состояние. Этот импульс называется 2π – импульсом.

Можно заметить, что в силу периодичности изменения ρ_{11} , ρ_{22} , P от θ действия на систему импульса с площадью $\theta = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2 \dots$ не меняет состояние системы, т.е. системы находятся в том же состоянии, в котором находились до падения импульса. Такие импульсы называются солитонами. Если под действием части импульса с площадью θ система оказалась в каком то состоянии, то продолжение действия импульса с площадью 2π приводит к тому, что населённости уровней не меняются, а поляризация меняет свой знак.

Практическая часть

1. Получить решение системы уравнений (8.6) в случае, когда в начальный момент времени заселен только второй уровень.

УЧЁТ ДИССИПАТИВНОГО ЗАТУХАНИЯ

Рассмотрим случай точного резонанса $\Delta=0$ и эволюцию двухуровневой системы с учётом затухания.

Уравнения для волновых функций ψ_1 и ψ_2 с учетом затухания имеют вид:

$$\begin{cases} i\dot{\psi}_1 = -i\gamma\psi_1 - \frac{\Omega_0}{2}\psi_2 \\ i\dot{\psi}_2 = -i\gamma\psi_2 - \frac{\Omega_0}{2}\psi_1 \end{cases}, \quad (9.1)$$

где γ – постоянная затухания, одинаковая для каждого уровня.

Предположим, что в начальный момент времени заселен только первый уровень $\psi_1|_{t=0} = 1$, $\psi_2|_{t=0} = 0$ и решим систему уравнений (9.1). Для этого умножим второе уравнение в (9.1) на i и продифференцируем по dt .

$$\begin{aligned} -\ddot{\psi}_2 &= -i\gamma i\dot{\psi}_2 - \frac{\Omega_0}{2}\left(-i\gamma\psi_1 - \frac{\Omega_0}{2}\psi_2\right) = \gamma\dot{\psi}_2 - i\gamma(i\dot{\psi}_2 + i\gamma\psi_2) + \frac{\Omega_0^2}{4}\psi_2, \\ \ddot{\psi}_2 + 2\gamma\dot{\psi}_2 + \left(\frac{\Omega_0^2}{4} + \gamma^2\right)\psi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2\gamma k + \frac{\Omega_0^2}{4} + \gamma^2 = 0. \quad (9.3)$$

Найдем корни характеристического уравнения (9.3).

$$k = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{\Omega_0^2}{4} - \gamma^2} = -\gamma \pm i\frac{\Omega_0}{2}. \quad (9.4)$$

Тогда решение (9.2) запишется в виде

$$\psi_2 = e^{-\gamma t} \left(A \cos \frac{\Omega_0}{2} t + B \sin \frac{\Omega_0}{2} t \right) \quad (9.5)$$

Коэффициенты A и B найдем из начальных условий.

$$0 = A \quad (9.6)$$

Тогда

$$\psi_2 = B e^{-\gamma t} \sin \frac{\Omega_0}{2} t \quad (9.7)$$

Найдём начальные условия для ψ_2 .

$$\begin{aligned} i\psi_2|_{t=0} &= -\frac{\Omega_0}{2}, \\ \psi_2|_{t=0} &= i\frac{\Omega_0}{2}, \\ i\frac{\Omega_0}{2} &= B\frac{\Omega_0}{2}\cos\frac{\Omega_0}{2}t|_{t=0}, \\ B &= i \end{aligned} \quad (9.8)$$

Тогда

$$\psi_2 = ie^{-\gamma t} \sin \frac{\Omega_0}{2} t \quad (9.9)$$

Теперь найдем ψ_1 .

$$\begin{aligned} ii \left(-\gamma e^{-\gamma t} \sin \frac{\Omega_0}{2} t + \frac{\Omega_0}{2} e^{-\gamma t} \cos \frac{\Omega_0}{2} t \right) &= -i\gamma i e^{-\gamma t} \sin \frac{\Omega_0}{2} t - \frac{\Omega_0}{2} \psi_1, \\ \psi_1 &= e^{-\gamma t} \cos \frac{\Omega_0}{2} t \end{aligned} \quad (9.10)$$

Сравним полученные решения (9.9) и (9.10) с выражениями для ψ_2 , ψ_1 в условиях точного резонанса полученных ранее (6.8) и (6.9). Видим, что найденные выражения отличаются на $e^{-\gamma t}$, которая стремится к нулю, при $t \rightarrow \infty$.

Зная ψ_2 , ψ_1 , нетрудно найти населенности уровней и поляризацию.

$$\rho_{11} = e^{-2\gamma t} \cos^2 \frac{\Omega_0}{2} t, \quad (9.11)$$

$$\rho_{22} = e^{-2\gamma t} \sin^2 \frac{\Omega_0}{2} t. \quad (9.12)$$

$$P = N\mu e^{-2\gamma t} \sin \Omega_0 t \sin \omega t \quad (9.13)$$

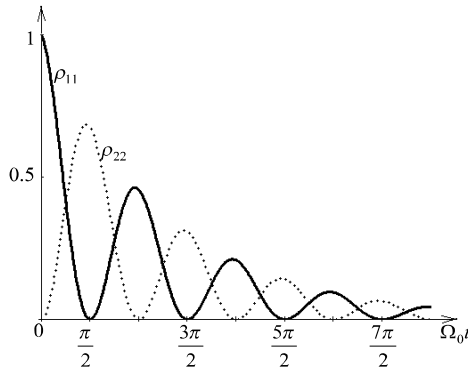


Рис. 9.1. Временная зависимость населенностей первого и второго уровней

Из (9.11), (9.12) и рисунка 9.1 видно, что населенности уровней при учете диссипативного затухания экспоненциально и необратимо убывают с течением времени.

Практическая часть

1. Получить решение системы уравнений (9.1) в случае, когда в начальный момент времени заселен только второй уровень.

ФОТОННОЕ ЭХО

Явление фотонного эха имеет место для неоднородно уширенной системы двухуровневых атомов. Оно состоит в том, что в результате действия на систему двух разнесённых во времени ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения, атомная система генерирует свой импульс, который называется эхо-импульсом.

Для наблюдения фотонного эха, первый импульс должен иметь площадь $\frac{\pi}{2}$, второй – π . Если время между пиками первого и второго импульсов равно τ , то эхо-сигнал появляется через такое же время τ после окончания действия второго импульса. Полуширина эхо-импульса определяется спектральной шириной функции распределения $f(\Delta)$ атомной системы.

Перейдём к теоретическому рассмотрению эхо-импульса. Будем считать, что падающий импульс имеет прямоугольную форму (простоты ради). Пусть первый импульс площадью $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ действует в течение времени τ_1 (рис. 10.1). Затем система свободно эволюционирует до момента времени $\tau_1 + \tau$. Второй импульс площадью $\theta_2 = \pi$ действует в течение времени τ_2 . Затем система снова свободно эволюционирует до $\tau_1 + \tau + \tau_2$. Предполагается, что импульсы являются мощными и ультракороткими, т.е. $\tau_1, \tau_2, \tau \ll \tau_{rel}$, то есть релаксационные эффекты не успевают сработать за время действия импульса.

Рассмотрим первый этап эволюции системы под действием поля первого импульса: $0 \leq t \leq \tau_1$. Эволюция системы описывается уравнениями для волновых функций ψ_1 и ψ_2 .

$$i\dot{\psi}_1 = -\frac{\Delta}{2}\psi_1 - \frac{\mu\varepsilon(t)}{2\hbar}\psi_2, \quad (10.1)$$

$$i\dot{\psi}_2 = \frac{\Delta}{2}\psi_2 - \frac{\mu\varepsilon(t)}{2\hbar}\psi_1. \quad (10.2)$$

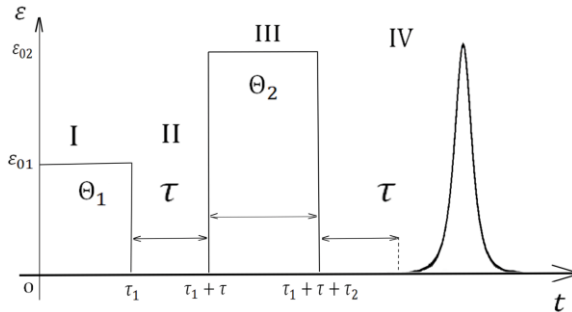


Рис. 10.1. Схема для наблюдения фотонного эха

Предположим, что в начальный момент времени все атомы находятся на первом уровне $\psi_1|_{t=0} = 1$, $\psi_2|_{t=0} = 0$. Поскольку предполагается, что амплитуда поля первого импульса велика, т.е. $\frac{\mu}{\hbar} \varepsilon_{01} \gg \Delta_0$ (т.е. в условиях сильного поля первого импульса атомы ведут себя как резонансные) следовательно

$$i\dot{\psi}_1 = -\frac{\mu\varepsilon_{01}}{2\hbar}\psi_2, \quad (10.3)$$

$$i\dot{\psi}_2 = -\frac{\mu\varepsilon_{01}}{2\hbar}\psi_1. \quad (10.4)$$

Введем площадь импульса:

$$\theta(t) = \frac{\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t') dt',$$

$$\theta_1(t) = \frac{\mu}{\hbar} \int_0^t \varepsilon_1(t') dt',$$

где t – промежуточное (текущее время).

Перейдем от $\frac{d}{dt}$ к $\frac{d}{d\theta}$:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu}{\hbar} \varepsilon_{01} \frac{d}{dt} \quad (10.5)$$

Тогда

$$i \frac{d\psi_1}{d\theta} = -\frac{1}{2} \psi_2, \quad (10.6)$$

$$i \frac{d\psi_2}{d\theta} = -\frac{1}{2} \psi_1. \quad (10.7)$$

Начальные условия запишутся в виде

$$\psi_1|_{\theta=0} = 1, \psi_2|_{\theta=0} = 0. \quad (10.8)$$

Продифференцируем по $d\theta$ уравнение (10.6) и с учетом (10.7), получим

$$-\frac{d^2\psi_1}{d\theta^2} = \frac{1}{4}\psi_1,$$

$$\frac{d^2\psi_1}{d\theta^2} + \frac{1}{4}\psi_1 = 0. \quad (10.9)$$

Решения уравнения (10.9) представим в виде

$$\psi_1 = A \cos \frac{\theta}{2} + B \sin \frac{\theta}{2}. \quad (10.10)$$

Определим коэффициенты А и В из начальных условий.

$$1=A \quad (10.11)$$

Получим начальные условия для $\frac{d\psi_1}{d\theta}$.

$$i \frac{d\psi_1}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = 0,$$

$$\frac{d\psi_1}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = 0.$$

Следовательно

$$B \frac{1}{2} = 0,$$

$$B = 0. \quad (10.12)$$

Тогда (10.10) переписывается в виде

$$\psi_1 = \cos \frac{\theta}{2}. \quad (10.13)$$

Найдем выражение для ψ_2 .

$$-\frac{i}{2} \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2} \psi_2,$$

$$\psi_2 = i \sin \frac{\theta}{2}. \quad (10.14)$$

Окончательно решения имеют вид:

$$\psi_1(t) = \cos \frac{\theta}{2}, \quad (10.15)$$

$$\psi_2(t) = i \sin \frac{\theta}{2}. \quad (10.16)$$

Рассмотрим момент времени $t = \tau_1$ (момент окончания первого импульса). Волновые функции (10.15) и (10.16) в данный момент времени примут вид

$$\psi_1(\tau_1) = \cos \frac{\theta_1}{2}, \quad (10.17)$$

$$\psi_2(\tau_1) = i \sin \frac{\theta_1}{2}, \quad (10.18)$$

где θ_1 - полная площадь первого импульса, определяемая выражением $\theta_1 = \frac{\mu}{\hbar} \int_0^{\tau_1} \varepsilon_{01}(t) dt$.

Результат эволюции атомной системы под действием поля первого импульса определяется её площадью.

В момент окончания первого импульса атомная система приобрела определённую населённость уровней и поляризацию среды. После этого в течение времени $\tau_1 \leq t \leq \tau_1 + \tau$ система свободно эволюционирует в отсутствии внешнего поля. Найдём результат свободной эволюции системы. Для этого снова используем систему уравнений для ψ_1 , ψ_2 , полагая $\varepsilon(t)=0$ запишем

$$\begin{cases} i\dot{\psi}_1 = -\frac{\Delta}{2}\psi_1 \\ i\dot{\psi}_2 = \frac{\Delta}{2}\psi_2 \end{cases} \quad (10.19)$$

Из (10.19) следует, что в течение времени $\tau_1 \leq t \leq \tau_1 + \tau$ будет иметь место только фазовая эволюция системы. Решим (10.19). Рассмотрим вначале первое уравнение.

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{\psi_1} &= i\frac{\Delta}{2}dt, \\ \ln \psi_1 &= i\frac{\Delta}{2}t + \ln c, \\ \psi_1 &= Ce^{i\frac{\Delta}{2}t}. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Аналогичным образом запишем решения для ψ_2 .

$$\psi_2 = De^{-i\frac{\Delta}{2}t}. \quad (10.21)$$

Постоянные C и D найдем, используя в качестве начальных условий время $t = \tau_1$, тогда

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta_1}{2} &= Ce^{i\frac{\Delta}{2}\tau_1}, \\ C &= \cos \frac{\theta_1}{2} e^{-i\frac{\Delta}{2}\tau_1}. \end{aligned} \quad (10.22)$$

$$\begin{aligned} i \sin \frac{\theta_1}{2} &= De^{-i\frac{\Delta}{2}t}, \\ D &= i \sin \frac{\theta_1}{2} e^{i\frac{\Delta}{2}\tau_1}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Тогда (10.20) и (10.21) примут вид

$$\psi_1 = \cos \frac{\theta_1}{2} e^{i\frac{\Delta}{2}(t-\tau_1)}, \quad (10.24)$$

$$\psi_2 = i \sin \frac{\theta_1}{2} e^{i\frac{\Delta}{2}(\tau_1 - t)}. \quad (10.25)$$

Найдём значение волновых функций в момент времени $t = \tau_1 + \tau$ когда включается второй импульс.

$$\psi_1(\tau_1 + \tau) = \cos \frac{\theta_1}{2} e^{i\frac{\Delta}{2}\tau}, \quad (10.26)$$

$$\psi_2(\tau_1 + \tau) = i \sin \frac{\theta_1}{2} e^{-i\frac{\Delta}{2}\tau}. \quad (10.27)$$

За время этапа свободной эволюции волновые функции ψ_1 и ψ_2 получили определенные фазовые изменения в виде $e^{\pm i\frac{\Delta}{2}\tau}$, τ – длительность свободной эволюции. Сама фаза равна $\varphi = \pm \frac{\Delta}{2}\tau$, поэтому можно утверждать, что произошла некая дефазировка атомной системы. Поскольку каждый атом характеризуется своей расстройкой резонанса Δ , то каждый атом набирает свою собственную фазу, которая отличает от фазы других атомов. Приобретение разных фаз у различных атомов за время своей эволюции называют декогерентизацией атомной системы.

Рассмотрим теперь эволюцию системы в течение времени $\tau_1 + \tau \leq t \leq \tau_1 + \tau + \tau_2$, когда на систему действует второй мощный импульс. Предполагая снова выполнения критерия $\frac{\mu \varepsilon_{02}}{\hbar} \gg \Delta$, пренебрегая в уравнении (10.1) и (10.2) для ψ_1 и ψ_2 первыми слагаемыми. Перейдем к решению (10.1) и (10.2) в случае когда система находится под действием поля второго импульса.

$$i \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\mu \varepsilon_{02}}{2\hbar} \psi_2, \quad (10.28)$$

$$i \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\mu \varepsilon_{02}}{2\hbar} \psi_1, \quad (10.29)$$

$$\theta_2 = \frac{\mu}{\hbar} \int_{\tau_1 + \tau}^{\tau_1 + \tau + \tau_2} \varepsilon_{02}(t') dt'. \quad (10.30)$$

Решения уравнений (10.28) и (10.29) имеют следующий вид:

$$\psi_1 = A \cos \frac{\theta}{2} + B \sin \frac{\theta}{2}, \quad (10.31)$$

$$\psi_2 = C \cos \frac{\theta}{2} + D \sin \frac{\theta}{2}. \quad (10.32)$$

Неопределённые коэффициенты А, В, С, D найдём из начальных условий в момент времени $t = \tau_1 + \tau$.

$$\psi_{1,2}(\tau_1 + \tau) = \psi_{1,2}^0 = \begin{matrix} \cos \frac{\theta_1}{2} e^{\pm i\frac{\Delta}{2}\tau} \\ i \sin \frac{\theta_1}{2} \end{matrix}. \quad (10.33)$$

Тогда

$$\psi_{10} = A,$$

$$\psi_{20} = C,$$

$$i \frac{d\psi_1}{d\theta} = -\frac{1}{2}\psi_2,$$

$$\frac{i}{2}(A \sin \frac{\theta}{2} + B \cos \frac{\theta}{2}) = -\frac{1}{2}(C \cos \frac{\theta}{2} + D \sin \frac{\theta}{2}),$$

$$-iA = -D,$$

$$iB = C,$$

$$D = iA = i\psi_{10},$$

$$C = -iB,$$

$$B = iC = i\psi_{20},$$

$$\psi_1 = \psi_{10} \cos \frac{\theta}{2} + i \psi_{20} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\psi_2 = \psi_{20} \cos \frac{\theta}{2} + i \psi_{10} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\psi_{1,0}(t) = \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{i\frac{\Delta}{2}\tau} - \sin \frac{\theta_1}{2} e^{-i\frac{\Delta}{2}\tau} \sin \frac{\theta_2}{2}, \quad (10.34)$$

$$\psi_{2,0}(t) = i \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{-i\frac{\Delta}{2}\tau} + i \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{i\frac{\Delta}{2}\tau}. \quad (10.35)$$

Найдём результат эволюции к моменту времени $t = \tau_1 + \tau + \tau_2$, когда второй импульс выключается. Так как время t входит только в θ , то $\theta_2(t = \tau_1 + \tau + \tau_2) = \frac{\mu}{\hbar} \int_{\tau_1 + \tau}^{\tau_1 + \tau + \tau_2} \varepsilon_{02}(t) dt = \theta_2$, где θ_2 – полная площадь второго импульса.

Поэтому значения волновых функций к этому моменту времени $\psi_{1,2}|_{t=\tau_1+\tau+\tau_2} = \psi_{1,2}^{(IV)}$.

$$\psi_1^{(IV)} = \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{i\frac{\Delta}{2}\tau} - \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{-i\frac{\Delta}{2}\tau}, \quad (10.36)$$

$$\psi_2^{(IV)} = i \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{-i\frac{\Delta}{2}\tau} + i \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{i\frac{\Delta}{2}\tau}. \quad (10.37)$$

После окончательного действия второго импульса система предоставляется самой себе, и она свободно эволюционирует, то есть поле $\varepsilon=0$, следовательно, получаем:

$$i\dot{\psi}_1 = -\frac{A}{2}\psi_1,$$

$$i\dot{\psi}_2 = \frac{A}{2}\psi_2,$$

$$\dot{\psi}_1 = i\frac{A}{2}\psi_1, \quad (10.38)$$

$$\dot{\psi}_2 = -i\frac{A}{2}\psi_2. \quad (10.39)$$

Решение дифференциальных уравнений (10.38) и (10.39) запишем в виде:

$$\psi_1 = Ce^{i\frac{A}{2}t}, \quad (10.40)$$

$$\psi_2 = De^{-i\frac{A}{2}t}, \quad (10.41)$$

где C, D - постоянные интегрирования. Найдём эти постоянные из условия, что $\psi_1|_{t=\tau_1+\tau+\tau_2}$ нам известны, то есть:

$$\psi_1|_{t=\tau_1+\tau+\tau_2} = \psi_{10},$$

тогда

$$\psi_{10} = Ce^{i\frac{A}{2}(\tau_1+\tau+\tau_2)},$$

$$\psi_{20} = De^{-i\frac{A}{2}(\tau_1+\tau+\tau_2)}.$$

Откуда получаем

$$C = \psi_{10}e^{-i\frac{A}{2}(\tau_1+\tau+\tau_2)},$$

$$D = \psi_{20}e^{i\frac{A}{2}(\tau_1+\tau+\tau_2)}.$$

$$\psi_1 = \psi_{10}e^{i\frac{A}{2}(t-\tau_1-\tau-\tau_2)}, \quad (10.42)$$

$$\psi_2 = \psi_{20}e^{-i\frac{A}{2}(t-\tau_1-\tau-\tau_2)}. \quad (10.43)$$

Будем отсчитывать время T от момента окончания действия второго импульса: $T = t - (\tau_1 + \tau + \tau_2)$, тогда

$$\psi_1 = \psi_{10} e^{i\frac{\Delta}{2}T},$$

$$\psi_2 = \psi_{10} e^{i\frac{\Delta}{2}T},$$

$$\psi_1 = \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{i\frac{\Delta}{2}(\tau+T)} - \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{-i\frac{\Delta}{2}(\tau-T)}, \quad (10.44)$$

$$\psi_2 = i \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{-i\frac{\Delta}{2}(\tau+T)} + i \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{i\frac{\Delta}{2}(\tau-T)}. \quad (10.45)$$

На этапе свободной эволюции IV эволюция системы состоит в изменении фаз волновых функций, как и на II этапе.

Найдём теперь поляризацию системы:

$$P = N\mu(\psi_1\psi_2^*e^{i\omega t} + \psi_1^*\psi_2e^{-i\omega t}). \quad (10.46)$$

В поляризации (10.46) мы получили четыре слагаемых (плюс еще четыре комплексно-сопряженных). Обозначим, для удобства, их следующим образом: $I A + II B + III A + III B$.

Рассмотрим пока только одно из этих слагаемых, например $III B$.

$$\begin{aligned} P_4 &= N\mu(i \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \sin^2 \frac{\theta_2}{2} e^{-i\Delta(\tau-T)+i\omega t} + \text{к. с.}) \\ &= i N\mu \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \sin^2 \frac{\theta_2}{2} (e^{-i\Delta(\tau-T)+i\omega t} - e^{i\Delta(\tau-T)-i\omega t}) \\ &= i \frac{1}{2} N\mu \sin \theta_1 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} (-2i \sin(\Delta(\tau - T) - \omega t)) = \\ &= N\mu \sin \theta_1 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \sin(\Delta(\tau - T) - \omega t). \end{aligned} \quad (10.47)$$

Поляризация среды P_4 в (10.47) существенно зависит от площадей импульсов θ_1 , θ_2 , а также от расстройки резонанса Δ каждого атома. Можно утверждать, что поляризация является существенно дефазированной, поскольку каждый из атомов обладает своей собственной расстройкой резонанса Δ . Поэтому надо подсчитать среднее значение поляризаций, усредним P_4 по расстройке резонанса Δ с функцией распределения $f(\Delta)$. Предположим, что функция распределения $f(\Delta)$ является гауссовской

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta_0} e^{-\frac{\Delta^2}{\Delta_0^2}}, \quad \text{где } \Delta_0 - \text{полуширина.}$$

$$P_{4 \text{ ср.}} = \int_{-\infty}^{\infty} P_4(\Delta) f(\Delta) d\Delta =$$

$$N\mu \sin \theta_1 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta e^{-\frac{\Delta^2}{4_0^2}} \frac{1}{\sqrt{\pi} 4_0} \sin(\Delta(\tau - T) - \omega t). \quad (10.48)$$

Используем в (10.48) известный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2 x^2} \sin P(x + \lambda) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q} e^{-\frac{p^2}{4q^2}} \sin p\lambda$, тогда получим

$$P_{4 \text{ ср.}} = -N\mu \sin \theta_1 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi} 4_0} \frac{\sqrt{\pi}}{4_0} e^{-\frac{(\tau-T)^2}{4} 4_0^2} \sin \omega t,$$

$$P_{4 \text{ ср.}} = -N\mu \sin \theta_1 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} e^{-\frac{1}{4} 4_0^2 (\tau-T)^2} \sin \omega t. \quad (10.49)$$

Таким образом, средняя поляризация среды зависит от площадей импульсов θ_1, θ_2 , от текущего времени T после окончания действия второго импульса, от промежутка времени τ свободной эволюции между двумя разнесёнными импульсами и от спектральной ширины Δ_0 функции распределения $f(\Delta)$ атомов расстройки резонанса.

Выясним, как зависит $P_4(T)$ от времени свободной эволюции, после окончания действия второго импульса.

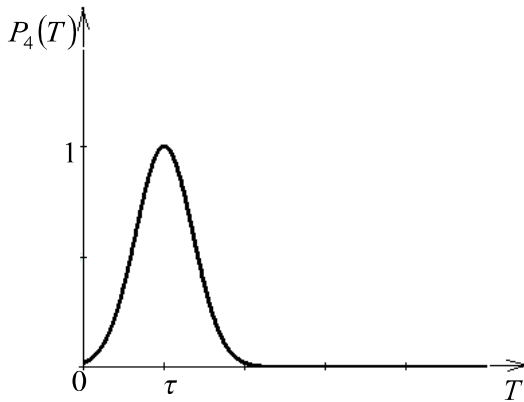


Рис. 10.1. Временная зависимость поляризации среды

Как видно из (10.49) и рисунка (10.1) зависимость поляризации от времени является функцией гауссовского типа: $P_4 = e^{-\frac{1}{4}\Delta_0^2(T-\tau)^2}$. Видно, что при $T = \tau$ поляризация $P_4 = 1$, при $T = 0$ поляризация $P_4(0) = e^{-\frac{\Delta_0^2\tau^2}{4}} \ll 1$, ($\Delta_0\tau \gg 1$) и при $T \gg \tau$ поляризация $P_4 \ll 1$. Поэтому график этой функции представляет собой смещённый гауссиан (рис. 10.1). Полуширина этой кривой определяется величиной Δ_0^{-1} . Чем больше спектральная ширина функции распределения атомов, тем короче временная полуширина импульса поляризации P_4 .

Найдём амплитуду поля эхо-сигнала:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{эхо}} &= -\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \\ \varepsilon_{\text{эхо}} &= N\mu \omega^2 \sin \theta_1 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} e^{-\frac{1}{4}\Delta_0^2(T-\tau)^2} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (10.50)$$

Из (10.50) видно, что амплитуда эхо-сигнала максимальна в момент времени $T=\tau$, следовательно, с течением времени второго этапа свободной эволюции, либо времени после окончания действия второго импульса поле эхо-сигнала, оставаясь практически равным нулю, вдруг резко вспыхивает в момент времени $T=\tau$, после чего амплитуда этого поля быстро убывает, оставаясь далее равной нулю. Поэтому можно утверждать, что неоднородно уширенная система двухуровневых уровней атомов под действием двух разнесённых во времени мощных ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения излучает ультракороткий импульс на той же частоте ω , временная полуширина которого равна обратной спектральной полуширине функции распределения атомов $f(\Delta)$.

Чем больше ширина Δ_0 функции распределения $f(\Delta)$, тем короче по времени импульс эхо-сигнала.

Полуширина эхо-импульса не зависит от полуширин τ_1, τ_2 исходных двух импульсов, не зависит так же от их амплитуд $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}$. Однако амплитуда эхо-сигналов зависит от площадей падающих импульсов θ_1, θ_2 . При этом максимальное значение амплитуды эхо-сигнала достигается при $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, а $\theta_2 = \pi$, следовательно, первый импульс называется $\frac{\pi}{2}$ -импульсом, а второй π -импульсом.

Если первый импульс имеет площадь $\frac{\pi}{2}$, то его действие на среду сводится к тому, что населённости уровней выравниваются, а поляризация становится максимально возможной. На этапе свободной эволюции все атомы дефазированы и теряется когерентность поляризации среды. При этом, чем больше расстройка резонанса Δ любого атома, тем больший набег фазы он приобретает ($\frac{\Delta}{2}\tau$).

В результате действия на систему π -импульса фаза каждого атома обращается (по знаку), сохраняя свою величину. Фаза каждого атома $\frac{\Delta}{2}\tau$ теперь становится равной $-\frac{\Delta}{2}\tau$. Таким образом π -импульс как бы обращает время вспять, переворачивая фазу на обратную.

После окончания действия π -импульса снова имеет место «дефазировка» в том же направлении по времени. Если в течение первого этапа свободной эволюции фаза данного атома росла, то в течение второго этапа свободной эволюции она будет точно так же изменяться со временем. Однако это изменение теперь приводит к уменьшению набегу фазы по модулю, так как имело место обращение фазы в результате действия π -импульса. Такой процесс уменьшения дефазировки приводит постепенно к полной когерентизации системы атомов. Время когерентизации точно равно времени декогерентизации. Таким образом, через время τ после окончания действия второго импульса имеет место полная когерентизация атомной системы.

Поскольку в момент времени $T=\tau$ все атомы когерентизируются, то поляризация окажется максимальной, в результате возникает мощный импульс эхо-сигнала.

Рассмотрим теперь вклад остальных трёх слагаемых в поляризации среды (10.46).

$$P_{IA} \sim e^{i\Delta(T+\tau)} \sim e^{-\frac{1}{4}\Delta_0^2(T+\tau)^2}, \quad (10.51)$$

таким образом, вклад данного слагаемого минимален, τ е равен нулю.

$$P_{IB} \sim e^{i\Delta T} \sim e^{-\Delta_0^2 \frac{T^2}{4}}. \quad (10.52)$$

Из (10.52) видно, что на больших временах P_{IB} стремится к нулю, как и P_{IIA} в (10.53).

$$P_{IIA} \sim e^{-i\Delta T}. \quad (10.53)$$

Таким образом, все остальные слагаемые поляризации дают нулевой вклад в амплитуду эхо-сигнала.

САМОИНДУЦИРОВАННАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ

Явление самоиндуцированной прозрачности имеет место при распространении ультракоротких импульсов лазерного излучения в двухуровневых средах. Все изученные нами до сих пор явления (оптическая нутация, фотонное эхо и др.) не зависят от пространственной координаты. Предполагалось, что эти явления происходят либо в тонкой пластинке, либо система частиц имела одинаковое в пространстве распределение. Однако необходимо учитывать нормальное распределение излучения в пространстве и во времени, что требует подключения производных по координатам $\frac{\partial}{\partial x}$ наряду с производными по времени $\frac{\partial}{\partial t}$ в одномерном случае. При учете эффектов распространения поле запишется в виде:

$$E(x, t) = \varepsilon(x, t) \cos(\omega t - kx) \quad (11.1)$$

Запишем волновое уравнение в одномерном случае:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (11.2)$$

Поляризацию среды будем искать в виде:

$$P(x, t) = N\mu \sin\left(\frac{\mu}{h} \int_{-\infty}^t \varepsilon(x, t') dt'\right) \sin(\omega t - kx), \quad (11.3)$$

где k – волновой вектор, равный $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Используя (11.3) для поляризации и волновое уравнение (11.2), мы изучим далее явление самоиндуцированной прозрачности. При этом будем считать, что распространяющиеся импульсы имеют огибающую $\varepsilon(x, t)$ медленно меняющуюся в пространстве и во времени.

$$\left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right| \ll \omega |\varepsilon| \quad (11.4)$$

$$\left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right| \ll k |\varepsilon| \quad (11.5)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \ll \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon \quad (11.6)$$

Приближение медленно меняющихся огибающих справедливо (11.4)–(11.6) и для поляризации.

Найдем первые и вторые производные по времени t и по координате x от (11.1) и (11.3).

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \cos \varphi + k \varepsilon \sin \varphi,$$

где $\varphi = \omega t$.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \cos \varphi + 2k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \sin \varphi - k^2 \varepsilon \cos \varphi. \quad (11.7)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \omega \varepsilon \sin \varphi$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \sin \varphi - \omega^2 \varepsilon \cos \varphi. \quad (11.8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = N\mu \left\{ \frac{\mu}{\hbar} \varepsilon \cos \theta \sin \varphi + \omega \sin \theta \cos \varphi \right\}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = N\mu \left\{ \frac{\mu}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \cos \theta \sin \varphi - \frac{\mu^2}{\hbar^2} \varepsilon^2 \sin \theta \sin \varphi + 2 \frac{\mu}{\hbar} \omega \varepsilon \cos \theta \cos \varphi - \omega^2 \sin \theta \sin \varphi \right\}.$$

Слагаемыми с высшими производными пренебрегаем, т.к.

$$\left| \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|, \quad (11.9)$$

$$\left| \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \right| \ll \omega \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right|. \quad (11.10)$$

Кроме того слагаемые первое и второе слагаемые поляризации имеют высший порядок нелинейности, поэтому мы ими пренебрегаем:

$$\frac{\left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \cos \theta \sin \varphi \right|}{\left| \omega \varepsilon \cos \theta \cos \varphi \right|} = \frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}}{\omega |\varepsilon|} \ll 1, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \ll \omega |\varepsilon|. \quad (11.11)$$

Подставим (11.7), (11.8) и вторую производную по времени поляризации в (11.2), и учитывая (11.9) – (11.11), получим:

$$2k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \sin \varphi - k^2 \varepsilon \cos \varphi + \frac{2\omega}{c^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \sin \varphi + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \cos \varphi =$$

$$\frac{4\pi}{c^2} N\mu \left\{ 2 \frac{\mu}{\hbar} \omega \varepsilon \cos \theta \cos \varphi - \omega^2 \sin \theta \sin \varphi \right\}, \quad (11.12)$$

Уравнение (11.12) выполняется для любого момента времени t в любой точке с координатой x . Поскольку оно содержит $\sin\varphi, \cos\varphi$, где $\varphi = \omega t - kx$, то это означает, что множители при $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ равны нулю. Тогда

$$2k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{2\omega}{c^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c^2} N\mu\omega^2 \sin\theta, \quad (11.13)$$

$$-k^2 \varepsilon + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon = \frac{8\pi}{c^2} \frac{N\mu^2}{\hbar} \omega \varepsilon \cos\theta. \quad (11.14)$$

Оценим выражение $\frac{8\pi}{c^2} \frac{N\mu^2}{\hbar} \omega \varepsilon \cos\theta$.

$$\left| \frac{8\pi}{c^2} \frac{N\mu^2}{\hbar} \omega \varepsilon \cos\theta \right| \ll \frac{8\pi}{c^2} N \frac{\omega \mu^2}{\hbar} = \frac{8\pi}{c^2} \frac{N\mu^2 \omega \hbar \varepsilon^2}{\hbar \hbar \varepsilon^2} = \frac{N\hbar\omega}{\varepsilon^2} \frac{\Omega_0^2}{c^2}, \quad (11.15)$$

где $\Omega_0 = \frac{\mu\varepsilon}{\hbar}$.

Тогда из (11.14) с учетом (11.15), получаем

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\Omega_0^2}{c^2} \frac{N\hbar\omega}{\varepsilon^2}. \quad (11.16)$$

Второе слагаемое в (11.16) является малым по сравнению с первым (оно на шесть порядков меньше первого слагаемого), поэтому (11.16) переписывается в виде:

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (11.17)$$

Таким образом, как видно из (11.17), мы получили закон дисперсии. Тогда

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{2\pi}{c} N\mu\omega \sin\theta. \quad (11.18)$$

Уравнение (11.18) называется волновым уравнением, либо приведенным волновым уравнением в частных производных. Данное уравнение мы будем использовать далее для нахождения закономерностей распространения ультракоротких импульсов лазерного излучения в протяжённых средах. Решить уравнение (11.18) в общем виде не представляется возможным.

Найдём решение уравнения (11.18) в системе координат ξ (кси), связанной с бегущей переменной $\xi = t - \frac{x}{s}$, где s – скорость распространения импульса. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{S} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} &= \frac{2\pi N \mu \omega}{c} \sin \theta, \\
-\frac{c-S}{cS} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} &= -\frac{2\pi N \mu \omega}{c} \sin \theta, \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} &= \frac{2\pi N \mu \omega S}{c-S} \sin \theta.
\end{aligned} \tag{11.19}$$

Уравнение (11.19) является интегро-дифференцированным нелинейным уравнением.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = \frac{2\pi N \mu \omega S}{c-S} \sin \left(\frac{\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^1 \varepsilon(x, t') dt' \right). \tag{11.20}$$

Перейдём к новой функции θ .

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu}{\hbar} \varepsilon, \text{ следовательно } \varepsilon = \frac{\hbar}{\mu} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\hbar}{\mu} \frac{d\theta}{d\xi}.$$

$$\frac{\hbar}{\mu} \frac{d^2\theta}{d\xi^2} = \frac{2\pi N \mu \omega S}{c-S} \sin \theta.$$

Обозначим

$$\vartheta^2 = \frac{2\pi N \mu^2 \omega S}{\hbar(c-S)}.$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = \frac{2\pi N \mu \omega S}{\hbar(c-S)} \sin \theta$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = U,$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = \frac{dU}{d\xi} = \frac{dU}{d\theta} \frac{d\theta}{d\xi} = U \frac{dU}{d\theta},$$

$$U \frac{dU}{d\theta} = \vartheta^2 \sin \theta \tag{11.21}$$

Решение уравнения (11.21) запишем в виде

$$\frac{U^2}{2} + c = -\vartheta^2 \cos \theta + c \tag{11.22}$$

Постоянные интегрирования c определим из граничных условий. Поскольку предполагается, что распространяется ультракороткий импульс, который имеет хвосты, как в передней части, так и в задней части. Амплитуда этих хвостов стремится к 0. Полагая, что $\xi = 0$ (начало координат) находится в окрестности пика. Будем считать, что хвосты располагаются при $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Поскольку хвосты имеют нулевую амплитуду, то это означает $\varepsilon|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$. Следовательно, $\left. \frac{d\varepsilon}{d\xi} \right|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$ (импульс является конечным).

Рассмотрим граничное условие $\xi \rightarrow -\infty$, тогда $\theta = 0$, следовательно, $\frac{d\theta}{d\xi} = 0$, тогда $c = \vartheta^2$. И (11.22) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
 U^2 &= 2\vartheta^2(1 - \cos\theta) = 4\vartheta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\
 \frac{\theta}{2} &= y, \\
 \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2 &= 4\vartheta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\
 \frac{d\theta}{d\xi} &= \pm 2\vartheta \sin \frac{\theta}{2}, \\
 \frac{dy}{d\xi} &= \pm \vartheta \sin y, \\
 \frac{dy}{\sin y} &= \pm \vartheta d\xi
 \end{aligned} \tag{11.23}$$

Решение уравнения (11.23) получим в виде

$$\ln \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \pm \vartheta (\xi - \xi_0),$$

где ξ_0 – константа интегрирования.

$$\theta = 4 \operatorname{arctg} e^{\pm \vartheta (\xi - \xi_0)},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu}{\hbar} \varepsilon = \frac{d\theta}{d\xi},$$

$$\varepsilon(\xi) = \frac{\hbar}{\mu} \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\hbar}{\mu} 4 \frac{\pm \vartheta e^{\pm \vartheta (\xi - \xi_0)}}{1 + e^{\pm 2\vartheta (\xi - \xi_0)}} = \frac{4\pi\hbar}{\mu} \frac{1}{e^{\pm \vartheta (\xi - \xi_0)} + e^{\mp \vartheta (\xi - \xi_0)}} = \pm \frac{2\frac{\hbar}{\mu}\vartheta}{\operatorname{ch}\vartheta(\xi - \xi_0)} = \xi\vartheta = \frac{1}{\tau},$$

где τ – полуширина амплитуды поля $\varepsilon(\xi)$.

Как нам известно из [1], функция вида (11.24) описывает уединенную волну – солитон.

$$\varepsilon(\xi) = \pm \frac{2\frac{\hbar}{\mu}\tau}{\operatorname{ch}\vartheta \frac{\xi - \xi_0}{\tau}}. \tag{11.24}$$

Представим на рисунке 11.1 график функции (11.24).

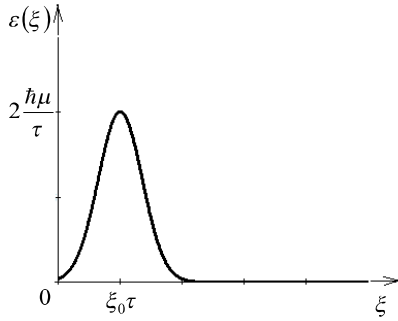


Рис. 11.1. График зависимости уединенной волны (солитона) от ξ .

Временная полуширина солитона τ , связано со скоростью S , следующим соотношением: $\tau = \sqrt{\frac{\hbar(c-S)}{2\pi N\mu^2 wS}}$.

Поскольку координата ξ изменяется в пределах $-\infty < \xi < +\infty$ следовательно мы можем совершить линейный перенос начало координат в точку ξ к точке $\xi' = \xi - \xi_0$, тогда график по ξ' видоизмениться (рис. 11.2) и (11.24) переписется в виде:

$$\varepsilon(\xi') = \pm \frac{\frac{2\pi}{\mu\tau}}{ch \frac{\xi'}{\tau}}. \quad (11.25)$$

Солитон, описываемый формулой (11.25), называется центрированным относительно начало координат.

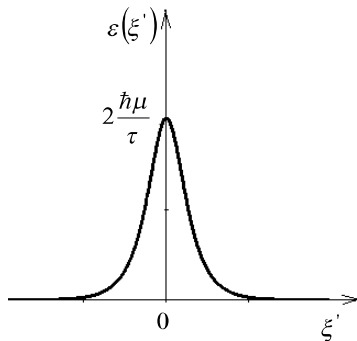


Рис. 11.2. График зависимости уединенной волны (солитона) от ξ'

Солитон характеризуется следующими параметрами:

- 1) амплитудой ε_0
- 2) полушириной τ
- 3) скоростью распространения S
- 4) полной площадью θ

Из полученных выражений для ε_0 и τ , что амплитуда и полуширина жёстко связаны друг с другом, а именно $\varepsilon_0 \tau = \frac{2\hbar}{\mu\tau} = const$. Это означает, что увеличение амплитуды ведёт к уменьшению полуширины солитона и наоборот. Невозможно иметь солитон с существенно изменяющимися полушириной и амплитудой. Видно так же, что полуширина связана со скоростью солитона S .

$$\frac{c}{S} = 1 + \frac{2\pi N \mu^2 \omega \tau^2}{\hbar},$$

$$S = \frac{c}{1 + \frac{2\pi N \mu^2 \omega \tau^2}{\hbar}}. \quad (11.26)$$

Из (11.26) следует, что $S < c$, т.е. солитон распространяется со скоростью намного меньшей скорости света в вакууме c . В семидесятые годы прошлого столетия очень широко исследовались солитоны в различных средах. Было обнаружено экспериментально, что скорость солитона на пять порядков больше скорости света в вакууме, т.е. $S = 10^{-5}c$ м/с.

Найдём площадь солитона:

$$\theta = \frac{\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x, \xi) d\xi = \frac{\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\mu\tau} \frac{d\xi}{ch\frac{\xi}{\tau}} = \left\langle \frac{\xi}{\tau} = x \middle| \xi = x\tau \middle| d\xi = \tau dx \right\rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{chx} =$$

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxe^x}{e^{2x} + 1} = \langle e^x = y \middle| e^x dx = dy \rangle = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = 4 \arctan y \Big|_0^{\infty} =$$

$$\frac{4\pi}{2} = 2\pi.$$

Таким образом, мы получили, что площадь солитона $\theta = 2\pi$. Напомним, что 2π – импульс - это такой импульс, который после прохождения через систему двухуровневых атомов оставляет её в основном состоянии.

Суть явления самоиндуцированной прозрачности состоит в следующем. При распространении ультракороткого импульса резонансного лазерного излучения в системе двухуровневых атомов, составляющие среду атомы подвергаются действию импульса не одновременно, а по мере углубления импульса в область, которую занимает атом. Под действием поля переднего фронта импульса частицы (атомы) постепенно переходят с нижнего уровня на верхний. Накрываемая импульсом часть объёма поляризуется. В ней

запасается энергия, взятая из поля. Остальная часть импульса распространяется уже в среде возбуждённых атомов под действием поля заднего фронта импульса частица когерентно переходит с верхнего уровня на нижний, отдавая запасенную ими энергию импульсу. Если площадь распространяющегося импульса точно равна 2π , то процесс забирая энергии от импульса и возвращения ему её обратно не меняет форму, распространяющегося импульса, которая имеет вид *sech* в бегущей системе координат. После прохождения импульса среда возвращается в исходное состояние. Процесс поглощения и переизлучения занимает некоторое время, поэтому скорость распространения импульса меньше скорости света в вакууме. Можно утверждать, что поглощение и переизлучение сбалансированы для 2π – импульса. Диссипативные потери энергии при распространении 2π – импульса отсутствуют. Амплитуда полуширина и скорость распространения 2π – импульса жёстко связаны друг с другом.

МОДЕЛЬ ДИСПЕРСИОННОЙ ОПТИЧЕСКОЙ БИСТАБИЛЬНОСТИ. ОПТИЧЕСКАЯ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ

Оптическая бистабильность является одним из проявлений эффекта совоздействия мощной световой волны, который заключается в том, что прошедший через среду (отраженный от среды) световой поток может оказаться многозначной функцией падающего светового потока, т.е. может иметь место гистерезисная зависимость прошедшего потока от падающего.

Для существования бистабильности необходимо: 1) нелинейность коэффициента поглощения или показателя преломления, 2) наличие обратной связи, т.е. зависимость распространяющегося в среде излучения от прошедшего. Обратная связь может быть внутренней либо внешней. Внутренняя обратная связь возникает при очень сильных нелинейностях среды, а внешняя обратная связь обеспечивается зеркалами либо резонаторами.

Мультистабильность наблюдается в условиях нелинейной зависимости дисперсионных характеристик вещества, в частности, показателя преломления. Рассмотрим простейшую мультистабильность при пропускании лазерного излучения плоскопараллельной пластинкой нелинейной среды (резонатор Фабри-Перо) (рис. 12.1).

Резонатор Фабри-Перо представляет собой устройство состоящее из двух зеркал, разнесенных на расстояние L . Зеркала характеризуются коэффициентами отражения и пропускания R , T . Излучение, которое попадает между зеркалами многократно переотражается от зеркал. Частично выходит либо входит (зеркала полупрозрачные $R \neq 0$, $T \neq 0$). Внутри резонатора образуется стоячая волна, которая является суперпозицией двух волн распространяющихся вперед.

Так как показатель преломления $n > 1$, то в среде формируются прямая и отраженная волны ξ_f и ξ_b . Для простоты будем считать керровский показатель $\alpha = 0$. В этом случае $n = n_0$. Чтобы решить задачу о пропускании необходимо сформулировать начальные условия и найти зависимость $\xi_t(\xi_i)$. Найдем поле в каждой из областей I, II, III (рис. 12.1). Полное электрическое поле в I состоит из полей падающей и отраженной волн. Считаем все волны плоскими и рассматриваем стационарный режим распространения:

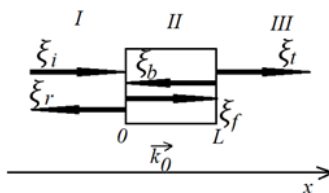


Рис. 12.1. Плоскопараллельная пластинка с нелинейной средой

$$I: E_I = \xi_i e^{ik_0 x} + \xi_r e^{-ik_0 x}, k_0 = \frac{\omega}{c};$$

$$II: E_{II} = \xi_f e^{ikx} + \xi_b e^{-ikx}, k = \frac{\omega n}{c};$$

$$III: E_{III} = \xi_t e^{ik_0(x-L)}.$$

Кроме электрических компонент поля есть и магнитные. Из системы уравнений Максвелла, считая, что неоднородность только по оси OX , имеем:

$$H = -i \frac{c}{\omega} \frac{dE}{dx}.$$

Найдем магнитные составляющие электромагнитного поля в областях I, II, III .

$$I: H_I = \xi_i e^{ik_0 x} - \xi_r e^{-ik_0 x};$$

$$II: H_{II} = n(\xi_f e^{ikx} - \xi_b e^{-ikx});$$

$$III: H_{III} = \xi_t e^{ik_0(x-L)}.$$

Из курса электродинамики следует, что на границе раздела двух сред сохраняются тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей. Поэтому при

$$x = 0: \xi_i + \xi_r = \xi_f + \xi_b; \quad (12.1)$$

$$\xi_i - \xi_r = n(\xi_f - \xi_b); \quad (12.2)$$

$$x = L: \xi_t = \xi_f e^{ikL} + \xi_b e^{-ikL}; \quad (12.3)$$

$$\xi_t = n(\xi_f e^{ikL} - \xi_b e^{-ikL}). \quad (12.4)$$

Найдем связь между амплитудами входящих и выходящих полей. Сложим уравнения (12.1) и (12.2):

$$\xi_f = \frac{2\xi_i}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} \xi_b. \quad (12.5)$$

Введем обозначения $\tau = \frac{2}{n+1}$ и $r = \frac{n-1}{n+1}$, которые играют роль амплитудных коэффициентов пропускания и отражения. Тогда

$$\xi_f = \tau \xi_i + r \xi_b. \quad (12.6)$$

Подставим (12.5) в (12.1) и получим

$$\begin{aligned}
 \xi_i + \xi_r &= \xi_b \left(1 + \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{2\xi_i}{n+1}, \\
 \xi_r &= \xi_b \left(1 + \frac{n-1}{n+1}\right) + \xi_i \left(\frac{2}{n+1} - 1\right); \\
 \xi_r &= \xi_i \frac{1-n}{n+1} + \xi_b \frac{2n}{n+1}, \\
 \xi_r &= -\frac{n-1}{n+1}\xi_i + \frac{2n}{n+1}\xi_b; \\
 \xi_r &= -r\xi_i + \tau'\xi_b,
 \end{aligned} \tag{12.7}$$

где $\tau' = \frac{2n}{n+1} = \tau n$ – амплитудный коэффициент пропускания из среды в вакуум.

Разделим уравнение (12.3) на (12.4):

$$\begin{aligned}
 \frac{\xi_f e^{ikL} + \xi_b e^{-ikL}}{n(\xi_f e^{ikL} - \xi_b e^{-ikL})} &= 1; \\
 n\xi_f e^{ikL} - n\xi_b e^{-ikL} &= \xi_f e^{ikL} + \xi_b e^{-ikL}; \\
 \xi_b &= r\xi_f e^{2ikL}.
 \end{aligned} \tag{12.8}$$

Тогда уравнение (12.3):

$$\begin{aligned}
 \xi_t &= \xi_f e^{ikL} + r\xi_f e^{2ikL} e^{-ikL} = (1+r)\xi_f e^{ikL} = \tau'\xi_f e^{ikL}, \\
 \xi_t &= \tau'\xi_f e^{ikL}.
 \end{aligned} \tag{12.9}$$

Таким образом, (12.6) – (12.9) – граничные условия для амплитуд распространяющихся полей. Найдем связь между ξ_i и ξ_t . Из (12.6), используя (12.8) получаем

$$\xi_f = \tau\xi_i + r^2\xi_f e^{2ikL},$$

из (12.9)

$$\begin{aligned}
 \xi_f &= \frac{\xi_t}{\tau'} e^{-ikL}, \\
 \tau\xi_i &= \frac{\xi_t}{\tau'} e^{-ikL} (1 - r^2 e^{2ikL}), \\
 \xi_i &= \frac{\xi_t}{\tau\tau'} (e^{-ikL} - r^2 e^{ikL}).
 \end{aligned}$$

Амплитуда полей прошедшей и падающей волн существенно зависит от геометрии образца: длины L и показателя преломления n . Считая, что энергетический коэффициент отражения $R = r^2 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$ и энергетический коэффициент пропускания $T = \tau\tau' = \frac{4n}{(n+1)^2}$, получаем, что $R + T = 1$. Тогда

$$\bar{\xi}_i = \frac{\xi_t}{T}(e^{-ikL} - Re^{ikL}).$$

Введем интенсивности волн $I_i = \frac{c\xi_i^2}{8\pi}$ и $I_t = \frac{c\xi_t^2}{8\pi}$.

$$I_i = \frac{I_t}{T^2}(1 + R^2 - 2R\cos(2kL));$$

$$T^2 I_i = I_t(T^2 + 4R\sin^2(kL));$$

$$I_i = I_t\left(1 + \frac{4R}{T^2}\sin^2(kL)\right).$$

Обозначим $F = \frac{4R}{T^2}$, тогда

$$I_i = I_t(1 + F\sin^2(kL));$$

$$I_t = \frac{I_i}{1 + F\sin^2(kL)}, k = \frac{\omega n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} n;$$

$$I_t = \frac{I_i}{1 + F\sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} nL\right)}. \quad (12.10)$$

Формула (12.10), выражающая зависимость $I_t(I_i)$, является функцией Эйри. Будем считать образец линейным, т.е. $n = n_0$, $L = L_0$. Тогда при $\frac{2\pi}{\lambda} nL = 0$; $\pi - I_t = I_i$, а при $\frac{2\pi}{\lambda} nL = \frac{\pi}{2}$ - $I_t = \frac{I_i}{1+F}$ (рис. 12.2).

В хороших резонаторах Фабри-Перо $T \cong 0,05$. Тогда $F = \frac{4R}{T^2} \cong 1600$. На рисунке 12.3 представлена зависимость пропускания от толщины образца. Пропускание линейного резонатора Фабри-Перо является периодической функцией в зависимости от $\frac{nL}{\lambda}$, при этом $\frac{1}{1+F} \leq \frac{I_t}{I_i} \leq 1$. Функция пропускания представляет собой периодическую последовательность резких пиков и провалов. Эта функция пропускания служит для экспериментального определения толщины образцов.

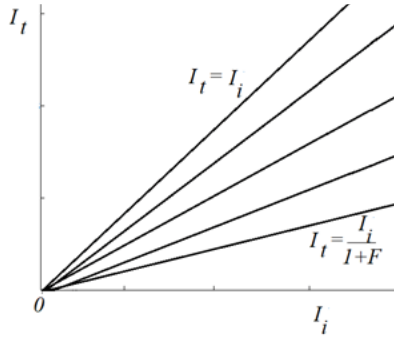


Рис. 12.2. Зависимость интенсивности I_t от I_i

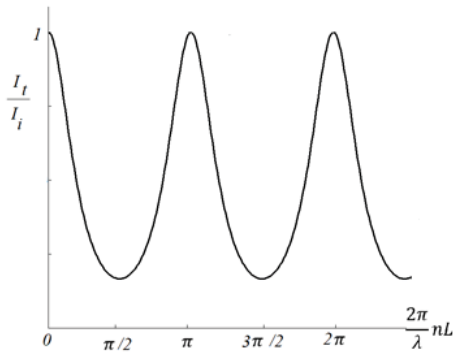


Рис. 12.3. Коэффициента пропускания от толщины образца

Резонатор Фабри-Перо используется для определения длины волны λ неизвестного излучения.

Рассмотрим нелинейную функцию пропускания $n = n_0 + \alpha |\xi|^2$.

$$n = n_0 + \alpha (|\xi_f|^2 + |\xi_b|^2).$$

Из (12.8) и (12.9) имеем

$$n = n_0 + \alpha \left(\frac{\xi_t^2}{\tau^2} + R \frac{\xi_t^2}{\tau^2} \right) = n_0 + \beta I_t, \beta = \frac{1+R}{\tau^2} \alpha. \quad (12.11)$$

Тогда (12.10) примет вид

$$I_i = I_t \left\{ 1 + F \sin^2 \left(2\pi(n_0 + \beta I_t) \frac{L}{\lambda} \right) \right\}. \quad (12.12)$$

Такая зависимость $I_i(I_t)$ является нелинейной функцией Эйри (12.12). При $2\pi(n_0 + \beta I_t) \frac{L}{\lambda} = 0 - I_i = I_t$, а при $2\pi(n_0 + \beta I_t) \frac{L}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - I_i = I_t(1 + F)$, I_i изменяется в створке между I_t и $I_t(1 + F)$ (рис. 12.4).

Если построить график, изображенный на рисунке 12.4, в зависимости $I_t(I_i)$, то функция пропускания будет являться мультистабильной (рис. 12.5), т.е. в определенных областях изменение входящей интенсивности I_i существует несколько значений прошедшей интенсивности I_t .

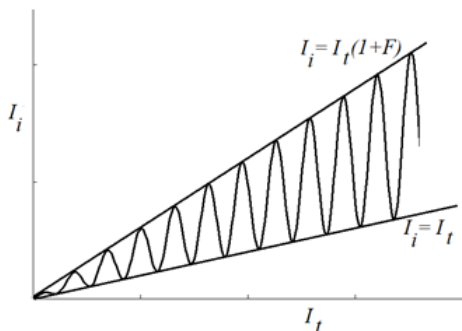


Рис. 12.4. Зависимость интенсивности I_t от I_i

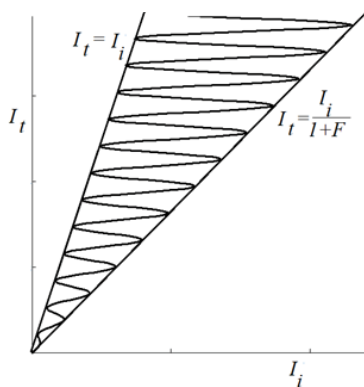


Рис. 12.5. Зависимость интенсивности I_t от I_i

При увеличении интенсивности падающего излучения I_i изображающая точка сначала движется вдоль нижнего участка первой петли мультистабильности до точки, где касательная к кривой становится вертикальной. В этой точке возникает скачек с нижней ветви первой петли на нижнюю ветвь второй петли, т.е. пропускание резко изменяется при очень малом изменении падающей интенсивности. При дальнейшем увеличении интенсивности падающего излучения I_i изображающая точка движется вдоль нижней ветви второй петли мультистабильности до точки, где снова касательная к кривой оказывается вертикальной. В этой точке снова возникает перескок на более высокую ветвь и т.д. Имеет место многократное скачкообразное изменение прошедшей интенсивности I_t при монотонном увеличении интенсивности падающего излучения I_i . Число петель мультистабильности бесконечно. Если теперь начать уменьшать интенсивность падающего излучения I_i , то имеет место сначала движение вдоль верхних участков петель до точки с вертикальной касательной, в которых происходят скачки с верхних петель на нижние. Отсюда легко видеть, что промежуточные участки мультистабильности кривой не участвуют в пропускании. Ширина петель мультистабильности увеличивается с увеличением интенсивности падающего излучения I_i . Может оказаться, что мультистабильное пропускание происходит с поглощением света. Тогда функция Эйри преобразуется и возникает экспоненциально убывающие множители, которые приводят к тому, что осциллирующее пропускание располагается между створками двух кривых, а не прямых. При учете поглощения число осцилляций функции пропускания является конечным, причем при больших значениях интенсивности падающего излучения I_i осцилляционный режим пропускания исчезает и превращается в однозначную кривую. Если поглощение еще более сильное, то мультистабильность ликвидируется. При малых коэффициентах поглощения существуют достаточно сильные волны: прямая и обратная (I_f и I_b). Наличие интенсивности обратной волны I_b свидетельствует о функционировании обратной связи. При больших коэффициентах поглощения прямая волна затухает в направлении своего распространения так, что у переднего торца она оказывается существенно ослабленной и не генерирует обратную волну, т.е. обратная связь отсутствует, что не дает возможности получить мультистабильной пропускание.

Отсутствие отраженной волны обусловлено специфической интерференцией распространяющихся волн: отражение исчезает в результате конструктивной интерференции всех отраженных лучей с переднего торца с лучом, который отразился в точке падения исходного луча. Если сложить амплитуды всех переотраженных лучей, то окажется, что суммарная амплитуда точно равна амплитуде первого отраженного луча и фаза сдвинута на π (они

в противофазе), т.е. все отраженные волны гасят друг друга и по сути полностью отсутствует отраженная волна.

Практическая часть

1. Рассмотреть один из более простых случаев получения оптической бистабильности на примере модели Бонифаччио-Луджиато. Получить аналитически профили падающих и проходящих волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. О.Ф. Васильева, А.П. Зинган, О.В. Коровай, В.В. Васильев. *Введение в оптические направляющие среды*, Изд-во ПГУ, Тирасполь (2020).
2. P.G. Savvidis, J.J. Baumberg, R.M. Stevenson, M.S. Svolnick, D.M. Whittaker, J.S. Roberts. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1547 (2000).
3. J.J. Baumberg, P.G. Savvidis, R.M. Stevenson, A.I. Tartakovskii, M. S. Skolnik, D.M. Whittaker, J.S. Roberts *Phys. Rev.* **В 62**, R 16247 (2000).
4. R. Huang, F. Tassone, Y. Yamamoto. *Phys. Rev.* **В 61**. R 7854 (2000).
5. R.M. Stevenson, V.N. Astratov, M.S. Skolnick, D.M. Whittaker, M. Emam-Ismail, A.I. Tartakovskii, P.G. Savvidis, J.J. Baumberg, J.S. Roberts. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3680 (2000).
6. I.A. Shelykh, R. John, D.D. Solnyshkov, A.V. Kavokin, N.A. Gippius, G. Malpuech. *Phys. Rev.* **В 76**, 155308 (2007).
7. О.Ф. Васильева, А.П. Зинган, В.В. Васильев. *ЖЭТФ*, **157**, вып.1, 144 (2020).
8. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. ГИФМЛ, Москва (1963).
9. Г. Корн, Т. Корн *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Наука, Москва (1971).
10. О.Ф. Васильева, А.П. Зинган, П.И. Хаджи, *Оптика и спектроскопия* 125, 425 (2018).
11. О.Ф. Васильева, П.И. Хаджи, *Оптика и спектроскопия* 115, 922 (2013).
12. П.И. Хаджи, О.Ф. Васильева, *Оптика и спектроскопия* 111, 831 (2011).
13. П.И. Хаджи, О.Ф. Васильева, *ФТТ* 53, 1216 (2011).
14. P.I. Khadzhi, O.F. Vasilieva, *Journal of Nanophotonics* 6, 061805 (2012).
15. P.I. Khadzhi, O.F. Vasilieva, *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics* 9, 295 (2014).
16. T. Espinosa-Ortega, T.C.H. Liew, arXiv:1302.1935v2 (2013).

Учебное издание

ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

Учебно-методическое пособие

Издается в авторской редакции
Компьютерная верстка *Л.В. Савицкая*

ИЛ № 06150. Сер. АЮ от 21.02.02. Подписано в печать 02.08.2021.
Формат 60х90/16. Уч. изд. л. 5,0. Тираж 50 экз. Заказ № 1079.

Отпечатано в Изд-ве Приднестр. ун-та. 3300, г. Тирасполь, ул. Мира, 18.

*Опубликовано
на Образовательном портале ПГУ им. Т.Г. Шевченко moodle.spsu.ru*