

ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Т.Г. ШЕВЧЕНКО

**Физико-математический факультет**  
*Кафедра квантовой радиофизики и систем связи*

# **ВВЕДЕНИЕ В ОПТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЯЮЩИЕ СРЕДЫ**

*Учебно-методическое пособие*

Тирасполь

2021

УДК 535.1 (075.8)

ББК В343.42я73

В24

Составители:

**О.Ф. Васильева**, к.ф.-м. н., доц.

**А.П. Зинган**, к.ф.-м. н., доц.

**О.В. Коровай**, к.ф.-м. н., доц.

**В.В. Васильев**, ст. преп. каф. прикладной математики и информати-

ки

Рецензенты:

**Е.И. Брусенская**, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики

**Д.А. Марков**, к.ф.-м.н., начальник управления информационного развития

Введение в оптические направляющие среды: уч.-метод. пособие / ГОУ “Приднестр. гос. ун-т им. Т.Г. Шевченко”, физ.-мат. фак.; составители: О.Ф. Васильева, А.П. Зинган, О.В. Коровай, В.В. Васильев. – Тирасполь: Изд-во Приднестр. ун-та, 2021. – 88 с.

*Учебно-методическое пособие содержит лекционный материал, практические задания, материал для самостоятельного изучения современного состояния экспериментальных данных генерации второй гармоники. Предназначено для студентов физико-математического факультета направления подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»*

**УДК 535.1 (075.8)**

**ББК В343.42я73**

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

© Васильева О.Ф., Зинган А.П.,  
Коровай О.В., Васильев В.В.,  
составление, 2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Введение	7
Уравнения Максвелла. Волновое уравнение	9
Нелинейная поляризация среды	15
Физическая природа нелинейной поляризации	21
Волновое уравнение для сред с нелинейной поляризацией	24
Нелинейно-оптические явления в квадратично-нелинейных средах	26
Нелинейно-оптические явления в среде с кубической восприимчивостью	31
Фазовый (волновой) синхронизм. Интерференционная природа фазового синхронизма	34
Уравнение генерации второй гармоники	42
Генерации второй гармоники в условии точного фазового синхронизма $\Delta k = 0$ и в отсутствии поглощения $\delta_1 = \delta_2 = 0$	52
Учет поглощения в процессе генерации второй гармоники	58
Генерация второй гармоники в отсутствии точного фазового синхронизма	62
Фотонная модель процесса генерации второй гармоники	69
Генерация второй гармоники в нано-волноводах с фосфидом галлия	74
Генерация второй гармоники в нано-волноводах AlGaAs	77
Эффективная генерация второй гармоники в плоских волноводах GaN с малыми потерями	78
Многополярная генерация второй гармоники в нанорезонаторах	80
Оптические солитоны в волоконных световодах	82
Кроссворд	84
Литература	87
Приложение	88

## ПРЕДИСЛОВИЕ



Данное учебно-методическое пособие в основном основано на лекциях замечательного ученого, профессора, доктора физико-математических наук Петра Ивановича Хаджи.

Родился Петр Иванович 2 апреля 1939 года в селе Кайраклия Тараклийского района МССР в семье крестьян. 3 августа 2018 года на 80 году жизни скоропостижно скончался известный приднестровский ученый, педагог, заведующий кафедрой квантовой радиофизики и систем связи физико-математического факультета Петр Иванович Хаджи.

В 1962 году он окончил Кишиневский государственный университет, после чего ему была присвоена квалификация «физик-педагог». С 1962 по 1964 годы работал инженером на Новгородском заводе полупроводниковых триодов.

В 1964 г. был принят в аспирантуру в Кишиневский институт прикладной физики АН МССР.

В 1969 году Петр Иванович защитил кандидатскую диссертацию, а в 1983 – докторскую. 6 декабря 1991 года решением аттестационной комиссии при Совете министров СССР Петру Ивановичу Хаджи было присвоено звание профессора по специальности «теоретическая физика».

В 1992 году П.И. Хаджи связывает свою жизнь с Приднестровский государственным университетом имени Т.Г. Шевченко. 10 августа 1994 года Петр Иванович был назначен заведующим кафедрой нелинейной оптики и квантовой радиофизики физико-математического факультета. В связи с реорганизацией кафедры Хаджи Петр Иванович был назначен на должность профессора и заведующего кафедрой квантовой радиофизики и систем связи физико-математического факультета.

Хаджи П.И. являлся инициатором организации физического семинара факультета, на котором постоянно обсуждались результаты научных исследований и диссертационных работ аспирантов и сотрудников, новые публикации по результатам научных исследований специалистов в различных областях физики.

Под руководством профессора Хаджи Петра Ивановича 19 аспирантов защитили свои кандидатские диссертации и один – докторскую.

На кафедре квантовой радиофизики и систем связи Петром Ивановичем была создана научная школа аспирантов и сотрудников кафедры. Под его руководством защитили свои кандидатские диссертации сотрудники физико-математического факультета. Список сотрудников и темы их диссертационных исследований представлены в Таблице 1.

Петр Иванович был прекрасным педагогом, талантливым ученым, лектором, наставником. Он обладал огромным научным потенциалом и фундаментальными знаниями, ему была присуща колоссальная работоспособность.

Петр Иванович много внимания уделял подготовке студентов-физиков, становлению их как специалистов, работал с учителями физики, читал лекции, проводил различные виды занятий в других учебных заведениях.

Общий трудовой стаж педагогической работы профессора Хаджи П.И. составил 53 года, а стаж работы в ПГУ им. Т.Г. Шевченко – 26 лет.

За годы плодотворной научной деятельности ученым было опубликовано 7 монографий и более 570 научных работ, большинство из которых опубликованы в престижных российских (советских) и зарубежных научных журналах.



*Мы выражаем глубокую благодарность нашему великому учителю!*

Таблица 1

№	ФИО	Тема диссертационного исследования	Год защиты	Место защиты
1.	Васильева Ольга Федоровна	Динамические процессы в системах бозе-конденсированных атомов и экситон-поляритонов в нано- и микроструктурах	2018	Московский областной государственный университет
2.	Зинган Анна Петровна	Особенности динамики стимулированной атомно-молекулярной рамановской конверсии в бозе-конденсате	2017	Московский областной государственный университет
3.	Коровай Александр Валерьевич	Особенности взаимодействия сверхкоротких импульсов лазерного излучения с размерно-ограниченными полупроводниковыми структурами	2003	Приднестровский государственный университет имени Т.Г. Шевченко
4.	Коровай Олеся Васильевна	Особенности распространения сверхкоротких импульсов лазерного излучения в размерно-ограниченных полупроводниковых структурах	2003	Приднестровский государственный университет имени Т.Г. Шевченко
5.	Ляхомская Ксения Даниловна	Явление самоотражения в системе экситонов и биэкситонов в полупроводниках	2001	Приднестровский государственный университет имени Т.Г. Шевченко
6.	Марков Дмитрий Александрович	Динамика нелинейных процессов и усилителей излучения в системе когерентных экситонов и биэкситонов в полупроводниках	2013	Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
7.	Надькин Леонид Юрьевич	Исследование оптических свойств полупроводника в экситонной области спектра под действием мощного импульса накачки и слабого зондирующего импульса	2013	Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
8.	Ткаченко Дмитрий Викторович	Когерентные нелинейные явления в физике волн материи и экситонов	2009	Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

## ВВЕДЕНИЕ

В «долазерной» оптике считалось, что основными характеристиками световой волны, определяющими характер её взаимодействия с веществом, являются частота или непосредственно связанная с нею длина волны  $\lambda$  и поляризация волны. Для подавляющего большинства оптических эффектов величина напряжённости электрического светового поля  $E$  не влияла на характер явления. Показатель преломления  $n$ , коэффициент поглощения, эффективное сечение рассеяния света фигурировали в справочниках без указания интенсивности света, для которой они были измерены, так как зависимость указанных величин от интенсивности не наблюдалась. Можно указать лишь несколько работ, в которых были сделаны попытки исследовать влияние интенсивности света на оптические явления. В 1923 г. С. И. Вавилов и В. Л. Лёвшин обнаружили уменьшение поглощения света урановым стеклом с ростом интенсивности света и объяснили это тем, что в сильном электромагнитном поле большая часть атомов (или молекул) находится в возбуждённом состоянии и уже не может поглощать свет. Считая, что это лишь один из множества возможных нелинейных эффектов в оптике, Вавилов впервые ввёл термин «нелинейная оптика».

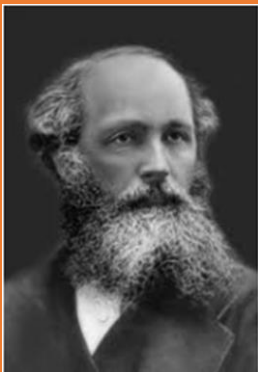
Нелинейная оптика – это раздел физической оптики, изучающий распространение интенсивных световых волн и взаимодействие их с веществом, при котором характер оптических явлений зависит от интенсивности излучения.

Широкие возможности изучения нелинейных оптических явлений открылись после создания лазеров. Дело в том, что интенсивность света, излучаемого импульсным лазером, на много порядков величины превышает интенсивность любых обычных источников света. Так, интенсивность света от стандартной спектральной лампы (например, ртутной) имеет порядок  $10^4$  Вт/м<sup>2</sup>, тогда как для стандартного импульсного лазера она уже примерно равна  $10^{14}$  Вт/м<sup>2</sup>, в случае современного сверхмощного лазера имеем  $10^{24}$  Вт/м<sup>2</sup>. При таких интенсивностях возникают новые оптические эффекты и существенно меняется характер уже известных явлений.

В 1961 году П. Франкен с сотрудниками (США) открыл эффект удвоения частоты света в кристаллах – генерацию второй гармоники света. В 1962 году наблюдалось утроение частоты – генерация третьей оптической гармоники. В 1961–1963 гг. в СССР и США были получены фундаментальные результаты в теории нелинейных оптических явлений, заложившие теоретические основы нелинейной оптики. В 1965 году было обнаружено явление самофокусировки световых пучков. Оказалось, что мощный световой пучок, распространяясь в среде, во многих случаях не только не испытывает обычной, так называемой дифракционной расходимости, а напротив, само-

произвольно сжимается. Явление самофокусировки электромагнитных волн в общей форме было предсказано в 1962 г. А. Аскарьяном (СССР). Оптические эксперименты были стимулированы теоретическими работами Ч. Таунса с сотрудниками (США, 1964). Большой вклад в понимание природы явления внесли работы А. М. Прохорова с сотрудниками.

Особую роль играют нелинейные эффекты в волоконнооптических линиях связи. С одной стороны, нелинейные эффекты в световодах ограничивают возможную скорость и дальность передачи информации по световодам и их необходимо учитывать при создании линий связи. С другой стороны, при определенных условиях нелинейные эффекты могут быть использованы для увеличения скорости и дальности передачи информации. С повышением интенсивности возникают нелинейные эффекты, заключающиеся в том, что световой сигнал (волна или импульс) вызывает изменение характеристик волокна, по которому он распространяется, а это в свою очередь, уже приводит к весьма существенному изменению условий распространения самого сигнала. Таким образом, возникает воздействие светового сигнала на самого себя через изменение характеристик волокна. Очевидно, возможны и перекрестные взаимодействия, если в волокне одновременно распространяются два или более сигналов.



Джеймс Клерк Максвелл

(родился 13 июня 1831 в Эдинбурге, Шотландия; умер - 5 ноября 1879, Кембридж, Англия) - британский физик, математик и механик. Шотландец по происхождению. Член Лондонского королевского общества (1861). Максвелл заложил основы современной классической электродинамики (уравнения Максвелла), ввёл в физику понятия тока смещения и электромагнитного поля, получил ряд следствий из своей теории (предсказание электромагнитных волн, электромагнитная природа света, давление света и другие). Один из основателей кинетической теории газов (установил распределение молекул газа по скоростям). Одним из первых ввёл в физику статистические представления, показал статистическую природу второго начала термодинамики («демон Максвелла»), получил ряд важных результатов в молекулярной физике и термодинамике. Автор трёхцветного принципа цветной фотографии.

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Электромагнитное поле в классической электродинамике определяется совокупностью векторов напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , магнитного поля  $\vec{H}$  и векторов электрической  $\vec{D}$  и магнитной  $\vec{B}$  индукцией. Эти векторы являются непрерывными функциями пространства и времени в пределах заданной непрерывной среды и подчиняются уравнениям Максвелла. Система уравнений Максвелла в дифференциальном виде записывается следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (1.4)$$

где  $\rho = \frac{q}{V}$  – объемная плотность заряда,  $\vec{j}$  – плотность тока.

Уравнение (1.1) является математической формулировкой закона Фарадея для электромагнитной индукции и утверждает, что циркуляция вектора напряженности результирующего электрического поля вдоль замкнутого контура (ЭДС индукции) определяется скоростью изменения потока вектора

магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим замкнутым контуром.

Уравнение (1.2) является математической формулировкой теоремы Гаусса–Остроградского для электрического поля и утверждает, что поток вектора индукции электрического поля через произвольную замкнутую поверхность определяется электрическим зарядом, находящимся внутри этой поверхности (в объеме, ограниченном этой поверхностью).

Уравнение (1.3) является математической формулировкой теоремы о циркуляции магнитного поля и обобщением на переменные электромагнитные поля эмпирического закона Био-Савара-Лапласа о возбуждении магнитного поля электрическими токами. Оно показывает, что источниками магнитного поля могут быть не только движущиеся в проводниках электрические заряды (электрические токи), но и изменяющиеся во времени электрические поля в диэлектриках или вакууме. Величина, пропорциональная скорости

изменения электрического поля во времени  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , была названа Максвеллом

током смещения, который возбуждает магнитное поле по тому же закону, что и ток проводимости. Полный ток, равный сумме тока проводимости и тока смещения, всегда является замкнутым. Уравнение (1.3) свидетельствует о том, что циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура определяется полным током через произвольную поверхность, ограниченную данным контуром.

Уравнение (1.4) является математической формулировкой теоремы Гаусса–Остроградского для магнитного поля и утверждает, что поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность равен нулю. Это уравнение отображает опытные данные об отсутствии магнитных зарядов, аналогичных электрическим зарядам. Магнитное поле порождается только электрическим током.

В интегральной форме система уравнений Максвелла записывается в следующем виде:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{L} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (1.5)$$

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \int_v \rho dV, \quad (1.6)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{D} d\vec{S} + \int_s \vec{j} d\vec{S}, \quad (1.7)$$

$$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (1.8)$$

Физический смысл уравнений Максвелла в интегральной форме аналогичен физическому смыслу этих уравнений в интегральной форме.

Предположим, что в рассматриваемом пространстве отсутствуют токи ( $\vec{j} = 0$ ) и заряды ( $\rho = 0$ ). Для оптического диапазона волн это предположение всегда остается в силе. В этом случае систему уравнений Максвелла перепишется в виде:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad (1.10)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1.12)$$

Систему уравнений (1.9)–(1.12) необходимо дополнить материальными уравнениями, уравнениями связи между векторами напряженности  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , и векторами индукции  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$ . Для линейных изотропных сред можно записать

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (1.13)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (1.14)$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, а  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$  и  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{м}}$  электрическая и магнитная постоянная соответственно.

Если линейная среда анизотропная, то величины  $\varepsilon$  и  $\mu$  – тензоры второго ранга. В этом случае каждая компонента вектора  $\vec{D}$  представляется линейной комбинацией вектора  $\vec{E}$  (и наоборот):

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{11} E_x + \varepsilon_{12} E_y + \varepsilon_{13} E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{21} E_x + \varepsilon_{22} E_y + \varepsilon_{23} E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{31} E_x + \varepsilon_{32} E_y + \varepsilon_{33} E_z. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Если имеется поглощение или усиление света в среде, то диэлектрическая проницаемость среды является комплексной величиной  $\varepsilon = \varepsilon' - i\sigma$ , где  $\sigma$  – коэффициент поглощения (усиления). Если диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon$  остается неизменной в пределах какого-либо объема, то такую среду называют однородной. В неоднородных средах  $\varepsilon$  является функцией координат.

Получим с помощью системы уравнений (1.9)–(1.12) уравнение волновое уравнение. Для этого воспользуемся формулами из векторного анализа:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}, \quad \operatorname{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A}. \quad (1.16)$$

Тогда  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$ , но согласно (1.10)  $\operatorname{div}\vec{D} = 0$ , следовательно  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\Delta\vec{E}$ . С другой стороны согласно (1.9)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mu_0\vec{H} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H} = -\mu_0\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Приравнивания обе части  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E})$ :

$$-\Delta\vec{E} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \quad \text{Учитывая, что скорость рас-}$$

пространения света в вакууме  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ , а  $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ , получим:

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.17)$$

Или, раскрывая лапласиан, получим:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (1.18)$$

Аналогично для вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  можем получить

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \quad (1.19)$$

Колесания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  происходят с одинаковой фазой, а мгновенные значения величин  $E$  и  $H$ , как это следует из системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля, связаны соотношением:

$$\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2. \quad (1.20)$$

В данном учебно-методическом пособии мы чаще всего будем пользоваться системой СГС. В таблице 1 представлена система уравнений Максвелла в дифференциальной форме в СГС и СИ.

Таблица 1

СГС	СИ
$\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\text{div}\vec{D} = 4\pi\rho$	$\text{div}\vec{D} = \rho$
$\text{rot}\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$	$\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$
$\text{div}\vec{B} = 0$	$\text{div}\vec{B} = 0$

В таблице 2 представлена система уравнений Максвелла в векторной форме в СГС и СИ.

Таблица 2

СГС	СИ
$[\nabla\vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$(\nabla\vec{D}) = 4\pi\rho$	$(\nabla\vec{D}) = \rho$
$\text{rot}\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$	$\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$
$(\nabla\vec{B}) = 0$	$(\nabla\vec{B}) = 0$

где  $\nabla$  – оператор набла.

### **Практическая часть.**

1. Используя систему уравнений Максвелла (1.9)–(1.12) получить

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

2. Установить связь между амплитудой светового вектора  $E_0$  и интенсивностью света  $I$  – скалярной характеристикой, под которой понимается модуль среднего по времени значения плотности потока энергии, переносимой световой волной:  $I = \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \rangle$ . (Ответ:  $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0^2$ .)

3. Найти средний вектор Умова-Пойтинга у плоской электромагнитной волны  $E = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ , если волна распространяется в вакууме.

(Ответ:  $\langle \vec{S} \rangle = \frac{kc^2 \epsilon_0}{2\omega} E^2$  .)

4. Плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна распространяется в вакууме. Амплитуда напряженности составляющей волны  $E_0 = 50$  мВ/м, частота  $\nu = 100$  МГц. Найти действующее значение плотности тока смещения и среднюю за период колебания плотность потока энергии. (Ответ:  $j_{\text{действ}} = 0.2$  А/м<sup>2</sup>)

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение электромагнитной волне.
2. Запишите систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме в системе СИ.
3. Запишите систему уравнений Максвелла в интегральной форме в системе СГС.
4. Запишите систему уравнений Максвелла в векторной форме в системе СИ.
5. Дайте определение напряженности электрического поля.
6. Дайте определение напряженности магнитного поля.
7. Запишите материальное уравнение в системе СИ, связывающее напряженность магнитного поля и вектор магнитной индукции.
8. Какие среды называются анизотропными?
9. Какие среды называются изотропными?
10. Запишите уравнение Максвелла, которое является математической формулировкой теоремы Гаусса–Остроградского для электрического поля.
11. Какое из уравнений Максвелла свидетельствует о том, что циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура определяется полным током через произвольную поверхность, ограниченную данным контуром?
12. Запишите уравнения для электромагнитной волны.

## НЕЛИНЕЙНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ СРЕДЫ

Поляризация есть «отклик» среды на внешнее воздействие, т.е. на воздействие внешнего электромагнитного поля (в данном случае поля световой волны), характеризуемого вектором электрической напряженности (световым вектором)  $\vec{E}$ . Под действием внешнего электрического поля среда поляризуется. Электрическое поле вызывает смещение электронных оболочек атомов относительно ядер в результате атомы приобретают электрический дипольный момент, наведённый полем. Сумма всех таких дипольных моментов в единице объема среды есть поляризация среды. В данном случае поляризация является электронной. Наряду с электронной поляризацией возможна и ионная поляризация сред, когда смещается из положения равновесия ионы. Если в среде имеются постоянные диполи (дипольные молекулы), то может наблюдаться ориентационная (вращательная) поляризация, обусловленная поворотом диполей по направлению поля.

Каждая из этих типов поляризации устанавливается в течение различного времени под действием электрического поля волны. Например, электронная поляризация является самой быстрой. Время отклика (время, в течение которого возникает поляризация)  $\tau \sim 10^{-15} - 10^{-13}$  сек. Что касается ионной поляризации, то в силу того, что ионы являются достаточно тяжелыми частицами время установления ионной поляризации  $\tau \approx 10^{-13} - 10^{-11}$  сек. Ориентационная поляризация дипольных молекул является ещё более медленной.  $\tau \approx 10^{-10} - 10^{-8}$  сек.

В большинстве случаев можно пренебречь ионной и ориентационной поляризациями и считать, что в силу большой частоты световых волн основную роль в оптическом диапазоне играет электронная поляризация.

Вектор поляризации определяется выражением:

$$\vec{P} = N_0 \vec{d}, \quad (2.1)$$

где  $N_0$  – концентрация диполей,  $d$  – дипольный момент отдельного атома.

В основе взаимодействия света со средой лежит элементарный процесс возбуждения атома или молекулы вещества световым полем и последующего переизлучения света возбужденной частицей. Характер этого взаимодействия зависит от соотношения между величиной напряженности поля световой волны  $\vec{E}$  и характерной напряженностью внутриатомного поля  $\vec{E}_{am}$ , определяющего силы связи оптических электронов (т.е. внешних, наиболее слабо связанных электронов) с ядром атома вещества. Для атома водорода  $E_{am} = 5 \cdot 10^{11}$  В/м, для более тяжелых атомов  $E_{am} = 10^{10} \dots 10^{11}$  В/м. Оценка по-

ля световой волны  $\vec{E}$  в случае нелазерных источников света дает величину  $E \leq 10^3$  В/м, т.е.  $E \ll E_{am}$ . При этом условии отклик атомного осциллятора на внешнее воздействие будет иметь линейный характер, поляризация в случае изотропной среды может быть представлена в виде:

$$\vec{P} = \mathcal{X}\vec{E}, \quad (2.2)$$

где  $\mathcal{X}$  – линейная восприимчивость среды, являющаяся безразмерной величиной и зависящая только от свойств среды. В линейной кристаллооптике  $\mathcal{X} = const$  (не зависит от поля). Для изотропной среды каждая компонента поляризации  $P_i = \mathcal{X}E_i$  связывается однозначно с той же компонентой поля  $E_i$ .

Если среда анизотропная, в этом случае восприимчивость является тензорной величиной и компонента поляризации определяется всеми компонентами поля и уравнение (2.2) имеет вид.

$$P_x = \mathcal{X}_{xx}E_x + \mathcal{X}_{xy}E_y + \mathcal{X}_{xz}E_z \quad (2.3)$$

Пусть  $\left. \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow P_1 = \sum_{j=1}^3 \mathcal{X}_{1j}E_j$ , тогда для каждой компоненты

$$P_i = \sum_{j=1}^3 \mathcal{X}_{ij}E_j, \text{ где } \mathcal{X}_{ij} \text{ – тензор восприимчивости } \hat{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{11} & \mathcal{X}_{12} & \mathcal{X}_{13} \\ \mathcal{X}_{21} & \mathcal{X}_{22} & \mathcal{X}_{23} \\ \mathcal{X}_{31} & \mathcal{X}_{32} & \mathcal{X}_{33} \end{pmatrix}.$$

Кроме этой связи есть и материальные уравнения, связывающие вектор диэлектрической индукции электрического поля с напряженностью электрического поля и поляризацией:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.2) в (2.4), получим

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\mathcal{X}\vec{E} = (1 + 4\pi\mathcal{X})\vec{E}, \quad (2.5)$$

где диэлектрическая проницаемость среды будет равна  $\varepsilon = 1 + 4\pi\mathcal{X}$ . Данное соотношение справедливо только в одноосцилляторной модели.

В многоосцилляторной модели  $\varepsilon = \varepsilon_0 + 4\pi\mathcal{X}$ .

Если среда является анизотропной, о вектор диэлектрической индукции запишется в виде:

$$D_i = E_i + 4\pi P_i = E_i + 4\pi \sum_{j=1}^3 \mathcal{X}_{ij}E_j = \left( \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} + 4\pi\mathcal{X}_{ij} \right) E_j = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij}E_j$$

Т.е. имеем диэлектрический тензор

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 + 4\pi\mathcal{X}_{11} & 4\pi\mathcal{X}_{12} & 4\pi\mathcal{X}_{13} \\ 4\pi\mathcal{X}_{21} & 1 + 4\pi\mathcal{X}_{22} & 4\pi\mathcal{X}_{23} \\ 4\pi\mathcal{X}_{31} & 4\pi\mathcal{X}_{32} & 1 + 4\pi\mathcal{X}_{33} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Все эти уравнения связаны с линейной оптикой.

Однако при больших амплитудах поля  $\vec{E}$  волны восприимчивость среды  $\chi$ , и также диэлектрическая функция  $\epsilon$  начинают зависеть от напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . Чтобы проиллюстрировать проявление нелинейной зависимости, вычислим значение восприимчивости среды  $\chi$  и диэлектрической функции  $\epsilon$  в рамках простой классической задачи.

Рассмотрим газ, состоящий из атомов (два точечных заряда: ядро и электрон) без постоянного электрического дипольного момента. В отсутствие внешнего поля положение точечных зарядов совпадает. Поместим его в постоянное электрическое поле. Заряды в каждом атоме сместятся на некоторое расстояние. Для простоты будем считать, что смещение электрона совпадает с направлением внешнего электрического поля. Тогда можно не учитывать векторного характера величин, входящих в задачу, и оперировать скалярными величинами. Таким образом, атомы приобретут дипольный момент  $d = er$ , где  $e$  – элементарный заряд,  $r$  – радиус–вектор электрона. Подставляя значение дипольного момента в (2.1) получаем:

$$P = N_0 er \quad (2.7)$$

На электрон в данном случае будут действовать сила электрического поля  $F_y = eE$  и упругая сила, возвращающая электрон в состояние равновесия  $F_y = -kr - qr^3$  (в общем случае упругая сила нелинейного зависит от смещения электрона, т.е. от  $r$ ). Приравнивая данные силы, получаем уравнение для определения смещения электрона во внешнем поле

$$eE = kr + qr^3 \quad (2.8)$$

Из (2.7)  $r = \frac{P}{N_0 e}$ , тогда (2.8) переписывается в виде

$$eE = k \frac{P}{N_0 e} + q \left( \frac{P}{N_0 e} \right)^3 \quad (2.9)$$

Умножим (2.9) на  $\frac{N_0 e}{k}$ , тогда получим

$$\frac{e^2 N_0}{k} E = P + \frac{q}{ke^2 N_0^2} P^3 \quad (2.10)$$

Решим уравнение (2.10) относительно  $P$ , считая член с  $P^3$  малым. Пусть  $P = P_0 + P_1$  (два порядка малости), тогда подставив их в (2.10), полу-

чим два уравнения (одно для членов нулевого порядка малости, другое – для членов первого порядка малости) и решим их.

$$P_0 = \frac{e^2 N_0}{k} E, \text{ а } P_1 = -\frac{q}{ke^2 N_0^2} P_0^3.$$

Следовательно

$$P = P_0 + P_1 = \frac{e^2 N_0}{k} E - \frac{q}{ke^2 N_0^2} P_0^3 = \left( \frac{e^2 N_0}{k} - \frac{qe^4 N_0}{k^4} E^2 \right) E. \quad (2.11)$$

Сравнивая (2.11) с (2.2) получаем

$$\chi = \frac{e^2 N_0}{k} - \frac{qe^4 N_0}{k^4} E^2 \quad (2.12)$$

Т.е. восприимчивость является нелинейной функцией напряженности поля. Если же поле достаточно слабое (значительно меньше внутриатомного), то вторым членом можно пренебречь и восприимчивость становится постоянной величиной.

Таким образом, поляризация  $\vec{P} = \chi(\vec{E})\vec{E}$ . Через зависимость восприимчивости среды от поля  $\chi(\vec{E})$  вводится понятие нелинейной оптики. Ясно, что при малых полях, когда  $E \ll E_{cr}$  мы имеем  $\chi(\vec{E}) = \chi(0) = \chi = const$ . Однако с ростом поля усиливается зависимость  $\chi(\vec{E})$  и тогда можно вектор поляризации представить в виде:

$$P_i = \sum_{j=1}^3 \chi_{ij}(E) E_j \quad (2.13)$$

Восприимчивость  $\chi_{ij}(E)$  разложим в ряд по компонентам электрического поля электромагнитной волны  $E$ :

$$\begin{aligned} \chi_{ij}(E) = & \chi_{ij}(0) + \left. \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial E_x} \right|_{E=0} E_x + \left. \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial E_y} \right|_{E=0} E_y + \left. \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial E_z} \right|_{E=0} E_z + \\ & + \left. \frac{\partial^2 \chi_{ij}}{\partial E_x \partial E_x} \right|_{E=0} E_x E_x + \left. \frac{\partial^2 \chi_{ij}}{\partial E_x \partial E_y} \right|_{E=0} E_x E_y + \\ & + \left. \frac{\partial^2 \chi_{ij}}{\partial E_x \partial E_z} \right|_{E=0} E_x E_z + \dots = \chi_{ij} + \sum_{k=1}^3 \chi_{ijk} E_k + \sum_{k,m=1}^3 \theta_{ijkm} E_k E_m + \dots \end{aligned}$$

$$\text{где } \theta_{ijkm} = \left. \frac{\partial^2 \chi_{ij}}{\partial E_k \partial E_m} \right|_{E=0} \text{ и } \chi_{ij1} = \left. \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial E_1} \right|_{E=0}.$$

Чтобы иметь возможность представить  $\mathcal{X}$  в виде ряда необходимо, чтобы восприимчивость  $\mathcal{X}$  медленно менялась в зависимости от напряженности поля  $E$  и была дифференцируемой функцией от  $E$ .

Поляризация представляется в этом случае в виде разложения по степеням амплитуд поля:

$$P_i = \sum_{j=1}^3 \chi_{ij}(E) E_j = \sum_{j=1}^3 \chi_{ij}^{(2)} E_j + \sum_{j,k=1}^3 \chi_{ijk}^{(3)} E_j E_k + \sum_{j,k,m=1}^3 \theta_{ijkm} E_j E_k E_m + \dots \quad (2.14)$$

$\chi_{ij}^{(2)}, \chi_{ijk}^{(3)}$  – есть соответственно линейная восприимчивость и квадратично-нелинейная восприимчивость (тензор второго и третьего ранга).

$\theta_{ijkm}$  – есть тензор кубичной нелинейности (кубическая нелинейная восприимчивость)

В векторной форме можно записать:

$$\vec{P} = \mathcal{X}^{(2)} : \vec{E} + \mathcal{X}^{(3)} : \vec{E}\vec{E} + \theta : \vec{E}\vec{E}\vec{E} + \dots \quad (2.15)$$

$$\vec{P}_l = \mathcal{X}^{(2)} : \vec{E} \quad (2.16)$$

$$\vec{P}_{\text{кв}} = \mathcal{X}^{(3)} : \vec{E}\vec{E} \quad (2.17)$$

$$\vec{P}_{\text{куб}} = \theta : \vec{E}\vec{E}\vec{E} \quad (2.18)$$

Влияние среды на излучение сводится к учету переменной поляризации среды под влиянием излучения, в результате чего среда сама становится источником излучения, складывающегося с первоначальным в соответствии с принципом суперпозиции. Нелинейные явления в сильных электромагнитных волнах возникают не в результате принципа суперпозиции для электромагнитного поля, а в результате нелинейности влияния электромагнитного поля на поляризацию среды.

В таблице 3 представлены поляризация, вектор электрической индукции в СГС и СИ.

Таблица 3

СГС	СИ
$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
$\vec{P} = \chi \vec{E}$	$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$
$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = (1 + 4\pi\chi) \vec{E}$	$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}$

### **Практическая часть.**

5. Получить поляризацию диэлектрика в высокочастотном поле на примере классической модели, если уравнение движения электрона записыва-

ется в виде:  $m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_{\text{э}} + F_y + F_{mp}$ , где  $F_{\text{э}} = eE$ ,  $F_y = -kr$ ,  $F_{mp} = -m\gamma \frac{dr}{dt}$

(Ответ:  $P = \frac{e^2 N_0}{m} \frac{E_0 \cos(\omega t + \phi_0)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$  )

6. Получить поляризацию диэлектрика в высокочастотном поле на примере классической модели, если уравнение движения электрона записывается

в виде:  $m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_{\text{э}} + F_y + F_{mp}$ , где  $F_{\text{э}} = eE$ ,  $F_y = -kr - qr^3$ ,  $F_{mp} = -m\gamma \frac{dr}{dt}$

(Ответ: Поляризация в сильном световом поле является функцией не только частоты падающего излучения, но и его третьей гармоники. Поэтому в рассмотренной задаче появляются две волны: одна с частотой  $\omega$ , другая – с частотой  $3\omega$ )

### Контрольные вопросы

1. Что называют поляризацией среды?
2. Дайте определение восприимчивости среды
3. Чем обусловлена нелинейная поляризация среды?
4. Дайте определение ионной поляризации.
5. Запишите выражения для поляризации в случае анизотропной среды.
6. Чему равна поляризация в случае, квадратично-нелинейной среды?
7. Запишите уравнения диэлектрической проницаемости для одноосцилляционной и многоосцилляционной моделей соответственно.

## ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Ранее нами была найдена поляризация среды, моделируемая как совокупность линейных осцилляторов. Мы предполагали, что на осциллятор действует сила со стороны электрического поля  $F_y = eE$ , упругая сила

$F_y = -kr = -m\omega_0^2 r$ , где  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  – собственная частота осциллятора, а также

сила трения  $F_{mp} = -2m\gamma \frac{dr}{dt}$ . При этом предполагалось, что среда является линейной. Линейная среда соответствует тому, что потенциальная энергия осциллятора есть  $V(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$ , считая что у нас одномерное излучение, распространяющееся вдоль оси  $Ox$ .

Введём в рассмотрение нелинейную среду, обобщая потенциальную энергию взаимодействия электронов к виду  $V(x) = \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 + \frac{1}{3}mDx^3 + \dots$ ,  $D$  – коэффициент нелинейности.

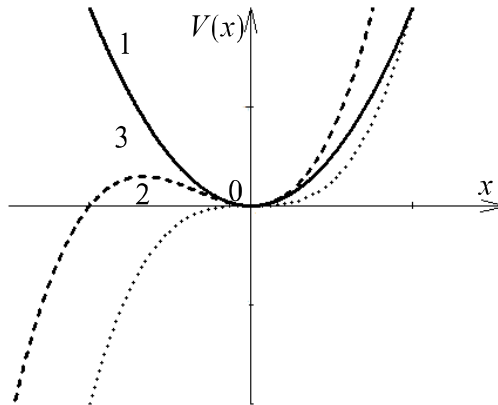


Рис. 3.1. Зависимость потенциальной энергии от  $x$ .

- 1 – линейная потенциальная энергия  $V(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$ ,
- 2 – нелинейная потенциальная энергия  $V(x) = \frac{1}{3}mDx^3$ ,
- 3 – суммарная потенциальная энергия  $V(x) = \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 + \frac{1}{3}mDx^3$ .

Мы рассматриваем только такие значения потенциальной энергии  $V(x)$ , при которых электрон всегда при любых смещениях  $x$  остаётся в потенциальной яме. В этом случае сила действующая на осциллятор, равная градиенту потенциальной энергии, будет вычисляется по формуле:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -m\omega_0 x - mDx^2 \quad (3.1)$$

Запишем уравнение движения для нелинейного осциллятора (второй закон Ньютона).

$$\begin{aligned} m\ddot{a} &= \sum \vec{F}_i, \\ m\ddot{x} &= -m\omega_0^2 x - mDx^2 - 2m\gamma\dot{x} - eE_0 e^{-i\omega t}, \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x + Dx^2 + 2\gamma\dot{x} &= -\frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Найдём поляризацию среды  $P = -N_0 e x$ . Для этого будем искать  $x$  в виде  $x = A e^{-i\omega t}$ . Подставив выражение  $x = A e^{-i\omega t}$  в уравнение (3.2), мы получим что в третьем слагаемом  $DA^2 e^{-2i\omega t}$  содержится экспоненциальный множитель на удвоенной частоте. Данное обстоятельство указывает, на то, что  $x$  должно содержать не только слагаемое  $\sim e^{-i\omega t}$ , а также и слагаемое  $\sim e^{-2i\omega t}$ :

$$x = A e^{-i\omega t} + B e^{-2i\omega t} \quad (3.3)$$

Подставив (3.3) в (3.2), мы получим:

$$\begin{aligned} -\omega^2 A e^{-i\omega t} - (2\omega)^2 B e^{-2i\omega t} + \omega_0^2 (A e^{-i\omega t} + B e^{-2i\omega t}) + \\ + DA^2 e^{-2i\omega t} - 2\gamma i\omega A e^{-i\omega t} - 2\gamma 2i\omega B e^{-2i\omega t} = -\frac{eE_0}{m} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (3.4)$$

В уравнении (3.4) слагаемыми пропорциональными  $e^{-3i\omega t}$  и  $e^{-4i\omega t}$  пренебрегаем, в связи с их малостью.

Уравнение (3.4) должно выполняться при любых значениях времени  $t$ , а это значит, что коэффициенты при  $e^{-i\omega t}$  и  $e^{-2i\omega t}$  можно приравнять к нулю:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega) = -\frac{e}{m} E_0 \quad (3.5)$$

$$(\omega_0^2 - 4\omega^2 - 4i\gamma\omega)B + DA^2 = 0 \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) определяем неизвестные коэффициенты

$$A = -\frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)} E_0 \quad (3.7)$$

$$B = -DA^2 / (\omega_0^2 - 4\omega^2 - 4i\gamma\omega) \quad (3.8)$$

Подставляя в выражение для поляризации  $P = -N_0 e x$  (3.3), получим

$$P = -N_0 e \{A e^{-i\omega t} + B e^{-2i\omega t}\} \quad (3.9)$$

Подставляя в (3.9) уравнения (3.7) и (3.8), получим выражение для поляризации, содержащее слагаемые пропорциональные  $e^{-i\omega t}$ , отвечающие за линейную поляризацию среды, и слагаемые пропорциональные  $e^{-2i\omega t}$ , отвечающие за нелинейную поляризацию среды.

Запишем амплитуду нелинейной поляризации среды

$$P_{\text{нел}} = -N_0 e B = N_0 e \frac{DA^2}{\omega_0^2 - 4\omega^2 - 4i\gamma\omega} = N_0 e \frac{\frac{e^2}{m^2} E_0^2 D}{(\omega_0^2 - 4\omega^2 - 4i\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)^2} \quad (3.10)$$

Из (3.10) видно, что нелинейная поляризация обусловлена нелинейностью коэффициента упругости  $\kappa$  либо нелинейностью потенциальной энергии взаимодействия осциллятора.

В (3.10) при  $\omega_0 = \omega$ , и  $\omega_0 = 2\omega$  наступает резонанс, что говорит о возможности генерации второй гармоники.

### Контрольные вопросы

1. Что называют нелинейным осциллятором?
2. Запишите уравнение линейного осциллятора.
3. Чему равна потенциальная энергия линейного осциллятора?
4. Что такое резонанс? Приведите примеры.
5. Назовите физическую природу нелинейной поляризации

## ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СРЕД С НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

Теоретическое рассмотрение эффектов взаимодействия света с веществом проводится на основе системы уравнений Максвелла (1.1) – (1.4). Будем предполагать, что среды являются немагнитными, т.е. магнитная проницаемость среды  $\mu = 1$  и также, что в средах отсутствуют свободные заряды ( $\rho = 0$ ) и свободные токи ( $\vec{j} = 0$ ). В этом случае система уравнений Максвелла примет вид (1.9) – (1.12). Используя Таблицу 2, уравнения (1.9) и (1.11) в системе СГС запишем в виде:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.2)$$

Возьмем  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E})$  от (4.1) и, учитывая (4.2) и (2.5), получим

$$\left[ \nabla[\nabla \vec{E}] \right] = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{E} + 4\pi \vec{P}) \quad (4.3)$$

Поляризацию представим в виде суммы линейных и нелинейных членов:

$$P_i = P_{л,i} + P_{нл,i} \quad (4.4)$$

$$P_{л,i} = \sum_j \chi_{ij}^{(2)} E_j \quad (4.5)$$

$$E_i = \sum_j \delta_{ij} E_j \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi \chi_{ij} \quad (4.7)$$

С учетом (4.4) – (4.7) уравнение (4.3) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \left[ \nabla[\nabla \vec{E}] \right]_i &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E_i + 4\pi P_i) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E_i + 4\pi P_{л,i} + 4\pi P_{нл,i}) = \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E_i + 4\pi \sum_j \chi_{ij} E_j + 4\pi P_{нл,i}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\sum_j \varepsilon_{ij} E_j + 4\pi P_{нл,i}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Тогда волновое уравнение представится в следующем виде:

$$\left[ \nabla[\nabla \vec{E}] \right]_i + \frac{1}{c^2} \sum_j \varepsilon_{ij} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{нл,i} \quad (4.9)$$

Волновое уравнение (4.9) является неоднородным уравнением для определения напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . Неоднородностью является вторая производная по времени от нелинейной поляризации среды  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{нл,i}$ .

Если среда является линейной, то волновое уравнение записывается в виде (4.10).

$$\left[ \nabla[\nabla\vec{E}] \right]_i + \frac{1}{c^2} \sum_j \varepsilon_{ij} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} = 0 \quad (4.10)$$

В условно–векторной форме запись волнового уравнения выглядит следующим образом:

$$\left[ \nabla[\nabla\vec{E}] \right] + \frac{1}{c^2} \varepsilon : \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{нл}}}{\partial t^2} \quad (4.11)$$

### Контрольные вопросы

1. Какие среды называются немагнитными?
2. Запишите систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме в случае не проводящей среды в системе СГС.
3. Что называют объемной плотностью заряда?
4. Запишите волновое уравнения для линейных сред.
5. Запишите волновое уравнение для нелинейных сред.
6. Какие среды называются нелинейными?
7. Выведете волновое уравнение для напряженности электрического поля.

## НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Пусть электромагнитная волна с частотой  $\omega$  попадает в торец нелинейного оптического кристалла с квадратично-нелинейной средой и пусть волна проходит в среду.

Будем рассматривать стационарный нелинейный режим распространения электромагнитной волны в среде. Электрическое поле  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  запишем в виде:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{e} \{A(\vec{r}, t)e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + A^*(\vec{r}, t)e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\}, \quad (5.1)$$

где  $\vec{e}$  – единичный орт поляризации волны,  $|\vec{e}| = 1$ .

Если электромагнитная волна является плоской и однородной в пространстве, т.е.  $A(\vec{r}, t)$  является постоянной и действительной функцией, то тогда (5.1) переписывается в виде:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \quad (5.2)$$

Выражение (5.2) используется как форма записи для стационарной, однородной в пространстве и во времени плоской электромагнитной волны. Будем рассматривать одномерное распространение, например распространение вдоль оси ОХ. График этой волны имеет вид, представленный на рисунке 5.2.

В пространстве электромагнитная волна (5.2) колеблется с длиной волны  $\lambda$ , между значениями  $-E_0 \leq |\vec{E}| \leq E_0$ . То же самое имеет место и во времени, где колебания происходят с частотой  $\omega$ . Огибающая является постоянной величиной:  $E_0 = const$ .

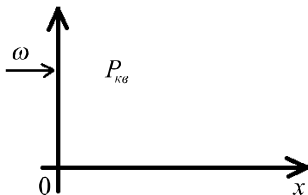


Рис. 5.1. Квадратично-нелинейная среда

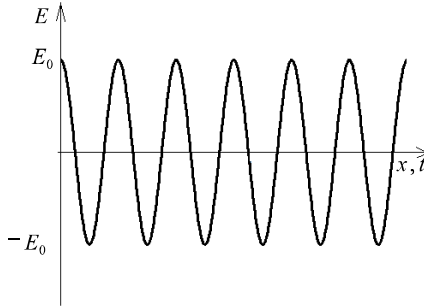


Рис. 5.2. Профиль волны (5.2). Здесь  $E_0 = eA$

Представим себе теперь волну, в которой огибающая медленно меняется в пространстве и во времени.

Рассмотрим стационарный режим распространения волны, в этом случае огибающая волны зависит только от пространственной координаты, т.е.  $A(\vec{r}, t) = A(\vec{r})$ . При одномерном распространении огибающая электромагнитной волны является функцией координаты  $A(x)$ . На рисунке 5.3 представлен график зависимости электромагнитной волны от координаты. Данная волна является амплитудно-модулированной, так как длина ее волны  $\lambda$  сохраняется в каждой точке пространства.

Будем называть такую волну, волной с медленно меняющемся в пространстве огибающей  $A(x)$ . Критерии медленного изменения огибающей в пространстве имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right| &\ll \kappa |A|, \\
 \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right| &\ll \frac{2\pi}{\lambda} |A|, \\
 \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right| &\ll \frac{|A|}{\lambda}, \\
 \left| \frac{\Delta A}{\Delta x} \right| &\ll \frac{|A|}{\lambda}.
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Критерий (5.3) гласит, что отношение изменения огибающей  $\Delta A$  к изменению координат  $\Delta x$  должно быть намного меньше самой огибающей к ее длине волны. Иными словами изменение огибающей на расстояниях порядка длины волны намного меньше самой огибающей. Такие волнения называются медленно меняющиеся в пространстве и во времени.

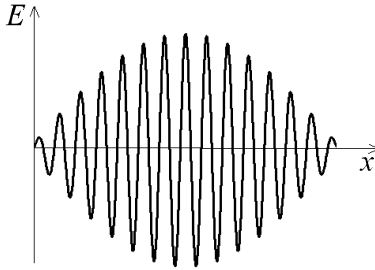


Рис. 5.3. Электромагнитная волна с медленно меняющейся в пространстве огибающей

Также накладываются условия на вторые производные  $\left| \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right| \ll \kappa \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right|$ .

Если же огибающая меняется и во времени, то в этом случае критерий медленно изменяющей её во времени имеет вид

$$\left| \frac{\partial A}{\partial t} \right| \ll \omega |A| \quad (5.4)$$

Пусть плоская электромагнитная волна с медленно меняющейся огибающей падает в квадратично-нелинейную среду, для которой вектор поляризации имеет вид

$$\vec{P}_{\text{кв}} = \chi : \vec{E}\vec{E} \quad (5.5)$$

Если волна меняется в пространстве и во времени, то и поляризация также будет меняться в пространстве и во времени.

Подставим (5.1) в выражение для поляризации (5.5), получим

$$\vec{P}_{\text{кв}} = \frac{1}{4} \chi : \vec{e}\vec{e} \{ A^2(\vec{r}, t) e^{i(2\kappa t - 2\kappa x)} + \text{к. с.} + 2|A|^2 \}, \quad (5.6)$$

где к.с. – комплексно-сопряженное.

Видно, что поляризация квадратно-нелинейной среды колеблется на удвоенной частоте  $2\omega$ . Это означает, что возникает вторичное поле генерируемое переменной поляризацией, которая также колеблется на удвоенной частоте. Поэтому, это поле называют второй гармоникой. Следовательно, в кристалле, наряду с волной на основной частоте  $\omega$ , распространяется вторая гармоника на частоте  $2\omega$  (рисунок 5.4). Дальнейшее распространение этих двух волн, породит свои вторые гармоники, т.е. будут волны на частоте  $\omega, 2\omega, 4\omega$  и т.д.

Спектр генерируемых волн по мере распространения всё более расширяется следовательно, основным свойством квадратичной нелинейной среды является обогащение спектра распространяющихся волн.

Если на квадратично-нелинейную среду падают две электромагнитные волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то в среде возникают компоненты поляризации, колеблющиеся на частотах  $\omega_1, \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2$ , а также возникают два слагаемых связанных с эффектом выпрямления электромагнитных волн (т.е. статистическая поляризация). Поскольку поляризация быстро изменяется во времени, то она порождает электромагнитные волны, которые колеблются соответственно на частотах  $\omega_1, \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2$  (рисунок 5.5).

Из рисунка 5.5 видно, что спектр распространяющихся волн в этом случае стал ещё более богатым, т.к. он содержит не только вторые гармоники каждой из двух волн, но и суммарные и разностные гармоники (частоты).

Однако, не все распространяющиеся волны “выживают”, некоторые попадают в область сильного поглощения и распространяться не могут, некоторые из них не распространяются из-за наличия большой фазовой расстройки.

### ***Практическая часть.***

*7. Получить поляризацию квадратично-нелинейной среды в случае когда падают две электромагнитные волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$*

## **Контрольные вопросы**

1. Что называют второй гармоникой?
2. Что такое мода?
3. Что происходит, когда на среду с квадратичной нелинейностью падает волна на основной частоте?
4. Что происходит, когда на среду с квадратичной нелинейностью падают две электромагнитные волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ?
5. В чем заключается критерий медленно меняющихся огибающих во времени и в пространстве?
6. Дайте определение плоской электромагнитной волны.
7. В чем заключается эффект выпрямления?
8. Выведете формулу поляризации в квадратично нелинейной среде.

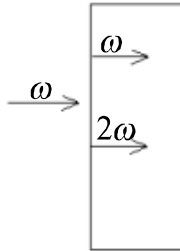


Рис. 5.4. Возникновение второй гармоники в квадратично-нелинейной среде

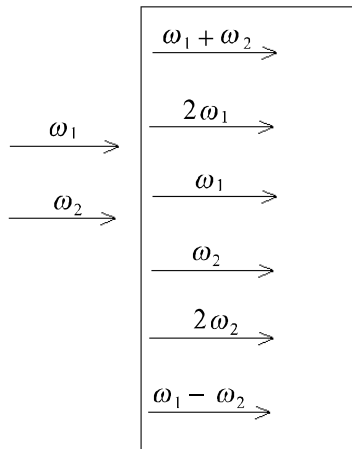


Рис. 5.5. Возникновение второй гармоники в квадратично-нелинейной среде, в случае когда на среду падают две волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

## НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В СРЕДЕ С КУБИЧЕСКОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТЬЮ

Пусть имеется кубически-нелинейная среда поляризация которой определяется выражением

$$\vec{P} = \theta : \vec{E}\vec{E}\vec{E} \quad (6.1)$$

Пусть на такую среду падает плоская монохроматическая электромагнитная волна с частотой  $\omega$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \{ A(\vec{r}) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.} \} \quad (6.2)$$

Изучим отклик этой среды на падающее поле. Для этого выясним, какие компоненты поляризации возникают при распространении волны в среде.

$$\vec{P} = \frac{1}{8} \theta : \left\{ \vec{e}\vec{e}\vec{e} \left( A^3 e^{i(3\omega t - 3\vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.} + 3|A|^2 A e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.} \right) \right\} \quad (6.3)$$

В среде возникают две компоненты поляризации, одна из них колеблется по-прежнему на частоте  $\omega$ , другая – на утроенной частоте  $3\omega$ . Поскольку компоненты поляризации существенно зависят от времени, то они порождают электромагнитные волны на частотах  $\omega, 3\omega$ , таким образом кубично-нелинейные среды порождают третью гармонику (рисунок 6.1). Они получаются в результате превращения падающей волны на основной частоте в волну на утроенной частоте. Здесь также имеет место эффект обогащения спектра распространяющихся волн. Эффект выпрямления для кубично-нелинейной среды отсутствует.

Если предположить, что волна является плоской и однородной, т. е. огибающая является постоянной и действительной величиной  $A(\vec{r}) = A$ , то (6.2) переписется в виде

$$\vec{E} = \vec{e} A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad (6.4)$$

Согласно (6.3) кроме волны (6.4) возникает ещё одна волна

$$\vec{E}_{\text{втор}} \sim |A|^2 A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad (6.5)$$

Волны (6.4) и (6.5), обусловлены поляризацией

$$\vec{P}_\omega = \chi : \vec{E} + \frac{1}{4} \theta : 3\vec{e}\vec{e}|A|^2 \vec{E} = \left( \chi : + \frac{3}{4} \theta : \vec{e}\vec{e}|A|^2 \right) \vec{E} \quad (6.6)$$

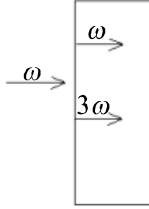


Рис. 6.1. Возникновение третьей гармоники в кубическо-нелинейной среде

Из (6.6) видно, что коэффициент пропорциональности в поляризации, т.е. восприимчивость среды содержит постоянную восприимчивость и слагаемое пропорциональное интенсивности (т.е.  $|A|^2$ ) распространяющейся волны.

Если восприимчивость среды является действительной величиной, то диэлектрическая проницаемость среды будет выражаться формулой

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + 4\pi\chi = \varepsilon_0 + 4\pi \left( \chi : + \frac{3}{4} \tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon} |A|^2 \right) = \varepsilon^* + \beta |A|^2 \quad (6.7)$$

где  $\varepsilon^*$  постоянная часть диэлектрической функции  $\varepsilon^* = \varepsilon_0 + 4\pi\chi$ ,  $\beta = 3\pi\theta : \tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}$  или иначе  $\varepsilon = \varepsilon^* + \gamma I$ , где интенсивность  $I = \frac{c|A|^2}{8\pi}$ ,  $\gamma = \frac{8\pi}{c} \beta$ . Таким образом видно, что диэлектрическая функция начинает зависеть от интенсивности распространяющейся волны. Из курса общей физики нам известно, что показатель преломления среды для немагнитных сред, вычисляется по формуле

$$n = \sqrt{\varepsilon} \quad (6.8)$$

Подставим (6.7) в (6.8), получим

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\varepsilon^* + \beta |A|^2} = |\text{разложим в ряд}| = \\ &= \sqrt{\varepsilon^*} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\varepsilon^*} |A|^2} = |\sqrt{\varepsilon^*} = n_0| = n_0 \left( 1 + \frac{\beta}{2\varepsilon^*} |A|^2 \right) = n_0 + n_2 |A|^2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

где  $|n_2|$  – керровская поправка (или коэффициент Керра).

Выражение (6.9) можно переписать в виде

$$n = n_0 + \alpha I \quad (6.10)$$

Возникновение керровской поправки в показателе преломления или в диэлектрической функции обусловлено эффектом самовоздействия распространяющейся волны в кубическо-нелинейной среде. Этот эффект определяется слагаемым в поляризации (6.6)  $3\vec{e}\vec{e}\vec{e}|A|^2 A e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$  т.к. эта поляризация колеблется на той же частоте, что и падающая волна. Эффект самовоздействия в квадратично-нелинейных средах отсутствует.

При падении двух волн с частотами  $\omega_1, \omega_2$  в среде возникают компоненты поляризации колеблющиеся на частотах  $\omega_1, \omega_2, 3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, 2\omega_2 + \omega_1, 2\omega_1 - \omega_2, 2\omega_2 - \omega_1$ . Отсюда видно существенное обогащение спектра распространяющихся волн. Имеется третья гармоника каждой из волн и комбинации суммарных и разностных частот.

### **Практическая часть.**

8. *Получить поляризацию кубическо-нелинейной среды в случае, когда падают две электромагнитные волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$*

### **Контрольные вопросы**

1. В чем заключается эффект самовоздействия?
2. Что называют третьей гармоникой?
3. Как определяется коэффициент Керра?
4. Что называют показателем преломления среды?
5. Что такое интенсивность волны?
6. Что такое монохроматическая волна?
7. Что происходит, когда на среду с кубической нелинейностью падают две электромагнитные волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ?
8. Что происходит, когда на среду с кубической нелинейностью падает волна на основной частоте?
9. Наблюдается ли эффект выпрямления в среде с кубической нелинейностью?
10. Чем обусловлено появление керровской поправки в показателе преломления?

## ФАЗОВЫЙ (ВОЛНОВОЙ) СИНХРОНИЗМ. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННАЯ ПРИРОДА ФАЗОВОГО СИНХРОНИЗМА

Для реализации возможности нелинейной среды переизлучать свет на определённых частотах, на которых возникает поляризация среды, необходимо выполнение дополнительного условия, которое называется условием фазового или волнового синхронизма.

Представим распространение волны в направлении  $z$  в виде

$$\vec{E}(z, t) = \frac{1}{2} \vec{E} (Ae^{i(\omega t - kz)} + A^* e^{-i(\omega t - kz)}) \quad (7.1)$$

Будем считать, что огибающая этой волны является постоянной и действительной величиной  $A(z, t) = A$ , тогда (7.1) переписывается в виде

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E} A \cos(\omega t - kz) \quad (7.2)$$

Обозначим  $\vec{E} A = \vec{E}_\omega$ , где  $\vec{E}_\omega$  – амплитуда волны распространяющейся на частоте  $\omega$ , тогда (7.2) переписывается в виде

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_\omega \cos(\omega t - kz) \quad (7.3)$$

При распространении такой волны в квадратично-нелинейной среде возникает волна на удвоенной частоте, т.е. вторая гармоника с частотой  $2\omega$  и волновым вектором  $\vec{K}$ , тогда поле второй гармоники будет равно

$$\vec{E}_{2\omega}(z, t) = \vec{E}_{2\omega} \cos(2\omega t - Kz) \quad (7.4)$$

Будем считать, что показатели преломления волн на основной и удвоенной частотах запишутся в виде

$$n_\omega = \sqrt{\varepsilon_\omega} \quad (7.5)$$

$$n_{2\omega} = \sqrt{\varepsilon_{2\omega}} \quad (7.6)$$

В (7.5) и (7.6)  $\varepsilon_\omega$  и  $\varepsilon_{2\omega}$  – диэлектрические проницаемости.

С другой стороны, мы можем определить скорости этих волн по формулам

$$v_\omega = \frac{c}{n_\omega} \quad (7.7)$$

$$v_{2\omega} = \frac{c}{n_{2\omega}} \quad (7.8)$$

Законы дисперсии этих волн имеют вид

$$\frac{ck}{\omega} = n_\omega \quad (7.9)$$

$$\frac{cK}{2\omega} = n_{2\omega} \quad (7.10)$$

Тогда подставляя (7.9) в (7.7), (7.10) в (7.8), получим выражения для скоростей распространения электромагнитных волн на основной и удвоенной частотах

$$v_m = \frac{c\omega}{cK} = \frac{\omega}{K} \quad (7.11)$$

$$v_{2m} = \frac{c2\omega}{cK} = \frac{2\omega}{K} \quad (7.12)$$

Так как в общем случае  $n_\omega \neq n_{2\omega}$ , то и  $v_m \neq v_{2m}$ . Одна из волн уходит вперед, а другая отстает при распространении, поэтому взаимодействие между волнами отсутствует, если их скорости сильно отличаются. Наиболее сильным взаимодействием является тогда, когда обе волны распространяются совместно. Для обеспечения взаимного превращения необходимо, чтобы

$$\Delta v = (v_\omega - v_{2\omega}) \rightarrow 0 \quad (7.13)$$

$$\Delta v = \frac{\omega}{K} - \frac{2\omega}{K} = \frac{\omega(K-2K)}{K^2} \quad (7.14)$$

Для выполнения условия (7.13) необходимо, чтобы  $(\vec{K} - 2\vec{k}) \rightarrow 0$ . Обозначим  $\Delta\vec{k} = \vec{K} - 2\vec{k}$ , где  $\Delta\vec{k}$  называется фазовой или волновой расстройкой.

Т.о. основным условием, которое должно выполняться в нелинейной среде при распространении волн, является условие фазового синхронизма, т.е.  $\Delta\vec{k} = 0$ . Только при этом условии взаимодействие основной волны и второй гармоники является наиболее интенсивным.

Рассмотрим более подробно процесс превращения волны на основной частоте во вторую гармонику. Пусть имеется квадратично-нелинейный кристалл и пусть на этот кристалл с торца падает волна на основной частоте  $\omega$  с амплитудой  $\vec{E}_\omega$ , описываемая формулой (7.3). При распространении в среде эта волна возбуждает поляризацию среды на удвоенной частоте  $\vec{P}_{2\omega} = \chi : \vec{E}\vec{E}$ , поэтому в среде появляется компонента поляризации

$$\begin{aligned} \vec{P}_{2\omega} &= \frac{1}{4} \chi : \vec{e}\vec{e} \{ A_\omega^2 e^{i(2\omega t - 2kz)} + \text{к.с.} \} = \frac{1}{4} \chi : \vec{e}\vec{e} A_\omega^2 2 \cos(2\omega t - 2kz) = \\ &= \frac{1}{2} \chi : \vec{e}\vec{e} A_\omega^2 \cos(2\omega t - 2kz) \end{aligned} \quad (7.15)$$

В любой произвольной точке кристалла  $z$  возникает поляризация среды на удвоенной частоте. Потенциально эта поляризация является источником вторичных волн на удвоенной частоте т.к. она быстро изменяется со временем с частотой  $2\omega$ . Т.о. в любых точках кристалла возникают дипольные моменты, которые переизлучают свет на удвоенной частоте  $2\omega$ . Однако волновой вектор этих волн, т.е. вторых гармоник равен  $\vec{K}$ . При этом поляри-

зация может переизлучать и в любых точках  $z'$ . Для того, чтобы найти амплитуду волны второй гармоники в некоторой точке  $z$  необходимо сложить все волны, которые возникают на протяжении  $0 \leq z' \leq z$ , т.е. необходимо найти результат интерференции этих волн.

Возможно, что в кристалле имеет место эффект накопления амплитуды второй гармоники по мере распространения. В той точке, где поляризация порождает вторую гармонику, фаза поляризации будет определяться соотношением

$$\Phi(z') = 2\omega t - 2kz'. \quad (7.16)$$

Далее от  $z'$  до  $z$  распространяется вторая гармоника с волновым вектором  $\vec{K}$ , поэтому дополнительный набег фазы будет  $-K(z - z')$ , поэтому полный набег фазы распространения волны в точке  $z'$ , есть

$$\varphi(z') = 2\omega t - 2kz' - K(z - z') = 2\omega t - Kz + \Delta kz' \quad (7.17)$$

Т.о. в фазу волны входит фазовая расстройка  $\Delta k$ . Результирующее поле второй гармоники в точке  $z$  есть результат интерференции волн, родившихся во всех точках от  $z' = 0$  до  $z' = z$ .

Найдем полную амплитуду, волны распространяющейся на удвоенной частоте

$$A_{2\omega} = A_{\omega}^2 \int_0^z \cos \varphi(z') dz' \quad (7.18)$$

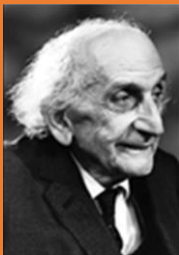
Подставим (7.17) в (7.18) и получим

$$\begin{aligned} A_{2\omega} &= A_{\omega}^2 \int_0^z \cos(2\omega t - Kz + \Delta kz') dz' = \left| \begin{array}{l} 2\omega t - Kz + \Delta kz' = x \\ \Delta k dz' = dx \Rightarrow dz' = \frac{dx}{\Delta k} \end{array} \right| = \\ &= A_{\omega}^2 \frac{1}{\Delta k} \int_{2\omega t - Kz}^{2\omega t - Kz + \Delta kz} \cos x dx = A_{\omega}^2 \frac{1}{\Delta k} \sin x \Big|_{2\omega t - Kz}^{2\omega t - Kz + \Delta kz} = \\ &= A_{\omega}^2 \frac{1}{\Delta k} [\sin(2\omega t - Kz + \Delta kz) - \sin(2\omega t - Kz)] = \\ &= A_{\omega}^2 2 \frac{1}{\Delta k} \cos \left( 2\omega t - Kz + \frac{\Delta kz}{2} \right) \sin \frac{\Delta kz}{2} \end{aligned} \quad (7.19)$$

В (7.19) была использована формула разности синусов

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \quad (7.20)$$

Результат интерференции всех вторых гармоник в точках  $z$  представляется в виде произведения двух функций зависящих от  $z$ . Одна из них колеблется на удвоенной частоте. В общем случае вторая гармоника описывается формулой (7.4), содержит множитель  $\cos(2\omega - kz)$ , который является быстро осциллирующим множителем для второй гармоники.  $\vec{E}_{2\omega}(z, t)$  в (7.4)



**Ланцош Корнелий**

(родился 2 февраля 1893 года в Секешфеваре, Венгрия; умер — 25 июня 1974, США, ему был 81 год) — венгерский, американский и ирландский физик-теоретик, математик. Работы посвящены квантовой механике, теории поля, общей теории относительности, теории гравитации, математической физике. В 1926 опубликовал статью, в которой показал, что гейзенберговская механика может быть истолкована в "непрерывном духе". Эта статья оказала значительное влияние на работы Э. Шредингера. Внес вклад в цифровую обработку сигналов: в честь него назван фильтр Ланцоша, широко применяемый для изменения разрешения цифровых изображений. Фильтр Ланцоша — способ математической обработки рядов данных. Применяется либо для интерполяции функции между заданными точками, либо в качестве фильтра нижних частот.

является амплитудой второй гармоники, которую мы считаем постоянной величиной. Однако, результат интерференции (7.19) показал, что по-прежнему имеется высокочастотный множитель с частотой  $2\omega$ , но амплитуда второй гармоники не является постоянной величиной. Амплитуда будет являться функцией координаты и расстройки  $\Delta k$ .

$$A_{2\omega} = A_{\omega}^2 \frac{\sin \frac{\Delta k z}{2}}{\frac{\Delta k}{2}} \quad (7.21)$$

Функция  $\frac{\sin x}{x} = \text{sinc } x$ , где

$\text{sinc } x$  — это кардинальный синус. Кардинальный синус часто используют в цифровой обработке сигналов и теории связи. В теории связи  $\text{sinc}$ -функция часто позволяет восстановить аналоговый сигнал по его отсчётам однозначно и без потерь. Та же идея лежит в основе фильтра Ланцоша, применяемого, в частности, для передискретизации сигналов. График функции  $\text{sinc } x$  представлен на рисунке 7.1. Тогда уравнение (7.21) переписывается в виде

$$A_{2\omega} = A_{\omega}^2 z \text{sinc} \frac{\Delta k}{2} z \quad (7.22)$$

Из (7.22) видно, что на самом деле амплитуда второй гармоники не является постоянной величиной, а медленно меняется в пространстве в зависимости от  $z$ . Определим интенсивность этой волны.

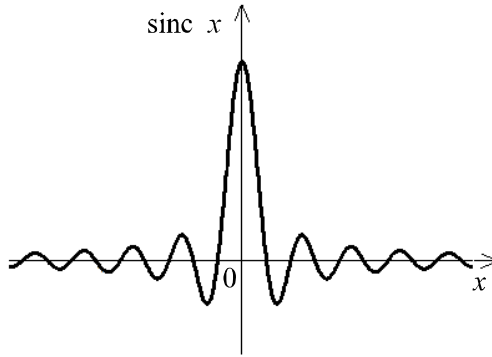


Рис. 7.1. График функции  $\text{sinc } x$ .

Рассмотрим как зависит амплитуда второй гармоники от фазовой расстройки  $\Delta k$  в произвольной фиксированной точке  $z$ . Нарисуем график зависимости  $A_{2\omega}^2(\Delta k)$ . Чтобы определить значение интенсивности поля второй гармоники в точке  $\Delta k = 0$ , рассмотрим первый замечательный предел от (7.23). В результате получим, что  $A_{2\omega, \text{max}}^2 = A_{\omega}^4 z^2$ . На рисунке 7.2 представлен график зависимости интенсивности поля второй гармоники от расстройки  $A_{2\omega}^2(\Delta k)$ . Амплитуда второго максимума составляет примерно 6 – 10% от амплитуды первого максимума, поэтому видно, что амплитуда второй гармоники максимально, только при  $\Delta k = 0$ .

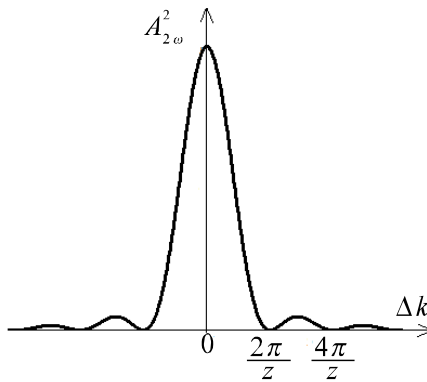


Рис. 7.2. График функции  $A_{2\omega}^2(\Delta k)$ .

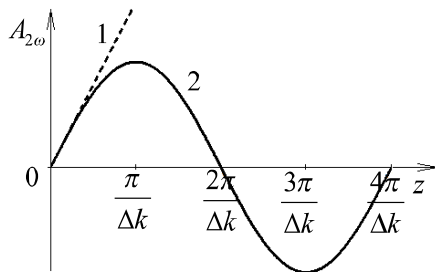


Рис. 7.3. График функции  $A_{2\omega}(z)$ .  
Здесь 1 – амплитуда второй гармоники при  $\Delta k = 0$ , 2 – при  $\Delta k \neq 0$ .

Вклад остальных максимумов очень мал, поэтому наиболее благоприятные условия, для генерации второй гармоники является условие  $\Delta k = 0$ , т.е. условие точного фазового синхронизма  $\vec{K} = 2\vec{k}$ . Это означает, что скорости распространения обеих волн одинаковые. В этом случае реализуется оптимальные условия для генерации второй гармоники.

Теперь зафиксируем произвольное значение фазовой расстройки  $\Delta k$  и рассмотрим зависимость амплитуды второй гармоники от координаты  $A_{2\omega}(z)$ . При этом выясним наблюдается ли эффект накопления второй гармоники при ее распространении, для этого нарисуем график  $A_{2\omega}(z)$ .

Из (7.23) и рисунка 7.3 видно, что при  $\Delta k \rightarrow 0$  период обращается в бесконечность и имеет место монотонное увеличение амплитуды второй гармоники за счет энергии волны на основной частоте.

При  $\Delta k \neq 0$  амплитуда второй гармоники  $A_{2\omega}$  периодически изменяется в пространстве. Период изменения равен  $\frac{4\pi}{\Delta k}$ . Чем больше фазовая расстройка  $\Delta k$ , тем меньше период колебаний и наоборот. Из рисунка 7.3 видно, что на расстоянии  $0 \leq z \leq \frac{\pi}{\Delta k}$  амплитуда второй гармоники монотонно растет, достигая своего максимального значения при  $z = \frac{\pi}{\Delta k} A_{2\omega, max} = 2 \frac{A_{\omega}^2}{\Delta k}$ . Следовательно на этом расстоянии имеет место увеличение амплитуды второго гармоники, или накопление эффекта.

Расстояние  $l_{\text{кор}} = \frac{\pi}{\Delta k}$  называется длиной когерентности. Длина когерентности характеризует расстояние, на котором разность фаз вторичных электромагнитных волн изменяется меньше чем на  $\pi$ . На расстоянии  $l_{\text{кор}}$ , начиная с переднего торца, интерференция всех порождаемых волн второй гармоники является конструктивной (т.е. приводит к максимальному значе-

нию максимумы амплитуды). Таким образом, если для генерации удвоенной частоты добиться соблюдения условия пространственного синхронизма  $\Delta \vec{k} = 0$  не удастся, можно попытаться ее генерировать при прохождении излучения большой мощности через пластинку толщиной, равной длине когерентности. Как показывает опыт, при достаточно большой мощности излучения на выходе из пластинки наблюдается вторая гармоника.

На расстоянии равном  $l_{\text{ког}}$  от переднего торца в нашем случае имеет место эффект накопления амплитуды второй гармоники.

На расстоянии  $\frac{\pi}{\Delta k} \leq z \leq \frac{2\pi}{\Delta k}$  имеет место рассасывание эффекта, т.е. имеет место монотонное уменьшение  $A_{2\omega}$  амплитуды второй гармоники. Так что в точке  $z = \frac{2\pi}{\Delta k} = 2\ell_{\text{ког}}$  вторая гармоника отсутствует. Следует думать, что вторая гармоника превратилась в волну на основной частоте.

На расстоянии  $\frac{2\pi}{\Delta k} \leq z \leq \frac{3\pi}{\Delta k}$  амплитуда второй гармоники снова растёт от нуля до максимального значения, т.е. имеет место эффект накопления второй гармоники.

Далее на расстоянии  $\frac{3\pi}{\Delta k} \leq z \leq \frac{4\pi}{\Delta k}$  снова имеет место эффект рассасывания т.д.

Таким образом, мы получили, что волна на основной частоте периодически превращается во вторую гармонику.

Физическим содержанием процесса удвоения частоты является перекачка энергии из одной волны в другую с удвоенной частотой. Соблюдение условия пространственного синхронизма необходимо для того, чтобы такая перекачка энергии происходила в одном направлении достаточно долго (рисунок 7.3 кривая 1). При отсутствии пространственного синхронизма перекачка энергии в волну с удвоенной частотой продолжается лишь небольшой промежуток времени, после чего начинается обратная перекачка энергии из волны с удвоенной частотой в волну с основной частотой, и эффект удвоения частоты уменьшается (рисунок 7.3 кривая 2).

### Контрольные вопросы

1. Назовите условия точного фазового синхронизма?
2. Для чего нужно соблюдать условие точного фазового синхронизма?
3. Что называют волновым вектором?
4. Что называют кардинальным синусом?
5. Где используют кардинальный синус?
6. Что такое интерференция электромагнитных волн?

7. Условия возникновения интерференции
8. Дайте определение волновой (фазовой) расстройке.
9. Что называют длиной когерентности?

## УРАВНЕНИЕ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ



**Питер Франкен**

(родился 10 ноября 1928 года; умер — 11 марта 1999 года) — американский физик. Экспериментально в 1961 году обнаружил явление генерации второй гармоники, что положило начало золотому веку в нелинейной оптике, которое привело к применению ее в различных областях: от оптической связи и биологической визуализации до генерации рентгеновских лучей и внутренней безопасности. В 1995 году был удостоен Мемориальной премии Клопштега за работу с вопросами, связанными с переработкой радиоактивных отходов.

Генерация второй гармоники была впервые продемонстрирована в 1961 году Питером Франкеном в Мичиганском университете. В его установке излучение рубинового лазера фокусировалось на кристалл кварца (рисунок 8.1). Далее излучение, вышедшее из кристалла, разворачивается в спектр с помощью дисперсионной призмы и фокусировалось на пластинку. В результате помимо света на частоте рубинового лазера из кристалла выходил свет на удвоенной частоте, т.е. вторая гармоника. В опыте Франкена излучение второй гармоники было очень слабым, но однако он сыграл важную роль в развитии нелинейной оптики. Опыты проведенные в дальнейшем показали, что при использовании других кристаллов можно получить коэффициент полезного действия генерации второй гармоники близкий к 100%. В

настоящее время явление генерации второй гармоники применяется для преобразования частоты лазерного излучения.

Получим уравнение генерации второй гармоники. Для этого будем предполагать, что на торец нелинейного кристалла с квадратичной нелинейностью падает электромагнитная волна на основной частоте  $\omega$ .

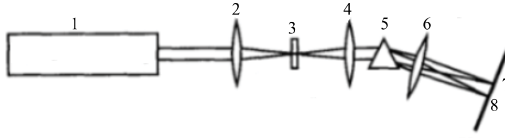


Рис. 8.1. Схема Питера Франкена для генерации второй гармоники. Здесь 1 – рубиновый лазер, 2 – фокусирующая линза, 3 – кристалл кварца, 4, 6 – собирающие линзы, 5 – дисперсионная призма, 7 – длина волны 694,3 нм, 8 – длина волны 347,15 нм.

Как мы уже убедились, эта волна по мере распространения будет превращаться во вторую гармонику. Распространение обеих волн описывается с помощью системы уравнений Максвелла для полей обеих волн.

Соответственно уравнения Максвелла приводит к нелинейному волновому уравнению, которое имеет вид (4.11):

$$\left[ \nabla[\nabla\vec{E}] \right] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon : \vec{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}_{\text{нл.}} \quad (8.1)$$

В (8.1) нелинейная поляризация  $\vec{P}_{\text{нл.}}$  будет являться  $\vec{P}_{\text{кв.}}$

$$\vec{P}_{\text{кв.}} = \chi : \vec{E}\vec{E} \quad (8.2)$$

Используя (8.1) и (8.2) мы получим систему дифференциальных нелинейных уравнений для амплитуд распространяющихся волн. При этом мы будем использовать ряд приближений.

Первое приближение: метод медленно меняющихся амплитуд волн, либо медленно меняющихся огибающих.

Рассмотрим очень длинный импульс (рисунок 8.2), который можно описать формулой (8.3)

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_\omega \cos(\omega t - kz) \quad (8.3)$$

Огибающая этих высокочастотных колебаний является постоянной величиной

$$E_\omega(z) = E_\omega \equiv \text{const} \quad (8.4)$$

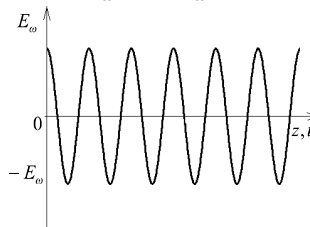


Рис. 8.2. Профиль волны (8.3)

Такая ситуация имеет место для очень длинных импульсов. Пространственная длительность этого импульса намного больше длины волны  $L \gg \lambda$ . Такой импульс включает в себя огромное число колебаний (около  $10^6 - 10^9$ ). И обладает большой временной длительностью. Время длительности намного больше периода колебаний  $\tau_p \gg T$  (рисунок 8.3). Такой импульс называется амплитудно-модулируемым. Здесь  $E_\omega(z, t)$  зависит от координат и от времени, однако она является медленно меняющейся функцией как координат так и времени.

Запишем критерии медленного изменения по времени огибающей, который говорит нам, что изменение огибающей на расстоянии порядка периода колебания намного меньше самой огибающей

$$\left| \frac{\partial E}{\partial t} \right| \ll \omega |E| \quad (8.5)$$

$$\left| \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right| \ll \omega \left| \frac{\partial E}{\partial t} \right| \quad (8.6)$$

Критерии пространственного изменения огибающей является (8.7) – (8.8), т.е. изменение огибающей на расстоянии длины волны намного меньше самой огибающей.

$$\left| \frac{\partial E}{\partial z} \right| \ll k |E| \quad (8.7)$$

$$\left| \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial E}{\partial z} \right| \quad (8.8)$$

Второе приближение: приближение одномерного распространения волны, т.е. распространение только вдоль оси  $z$ .

Третье приближение: рассмотрим стационарный режим распространения, когда поле электромагнитной волны таково, что огибающая не зависит от времени, а зависит только от координаты, т.е.  $E_\omega(z, t) = E_\omega(z)$ .

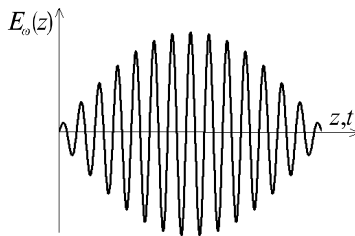


Рис. 8.3. Амплитудно-модулированная волна

Четвертое приближение: будем считать, что в кристалле распространяются только две электромагнитные волны: волна на частоте  $\omega$ , и волна на  $2\omega$ . Остальные волны отсутствуют. Полагаем, что они попадают в область сильного поглощения либо для них не выполняются условия фазового синхронизма.

В соответствии со сказанным, представим полное поле в кристалле в виде суперпозиции полей обеих волн.

$$\vec{E}(z, t) = \frac{1}{2} \{ \vec{e}_1 A_1(z) e^{i(\omega t - kz)} + \vec{e}_2 A_2(z) e^{i(2\omega t - Kz)} + \text{к. с.} \} \quad (8.9)$$

где  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  – единичные орты поляризации для волн на частотах  $\omega$  и  $2\omega$ ,  $A_1(z)$  и  $A_2(z)$  – амплитуды (огibaющие) волн на основной частоте и на частоте второй гармоники соответственно,  $k, K$  – волновые векторы, которые определяются законами дисперсии (8.10).

$$\frac{ck}{\omega} = n_\omega; \quad \frac{cK}{2\omega} = n_{2\omega} \quad (8.10)$$

Находим поляризацию среды, подставим (8.3) в (8.2)

$$\vec{P}_{\text{КВ}} = \frac{1}{4} \mathcal{X} : \{ \vec{e}_1 \vec{e}_1 A_1^2 e^{i(2\omega t - 2kz)} + \text{к. с.} + 2\vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1^* A_2 e^{i(\omega t - (K-k)z)} + \text{к. с.} \} \quad (8.11)$$

Далее (8.11) подставляем в волновое уравнение (8.1) и получаем

$$\begin{aligned} & [\nabla[\nabla\vec{E}]] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon : \vec{E} = \\ & = -\frac{4*\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{4} \mathcal{X} : \{ \vec{e}_1 \vec{e}_1 A_1^2 e^{i(2\omega t - 2kz)} + \text{к. с.} + 2\vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1^* A_2 e^{i(\omega t - (K-k)z)} + \text{к. с.} \} \right] \end{aligned} \quad (8.12)$$

Из курса векторного и тензорного анализа, известно что

$$[\nabla[\nabla\vec{E}]] = \nabla(\nabla\vec{E}) - (\nabla\nabla)\vec{E} = -\Delta\vec{E} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E} \quad (8.13)$$

В (8.13), учтено, что  $\text{div } \varepsilon\vec{E} = 0$  т.к. мы считаем, что отсутствует свободные заряды и свободные токи. Согласно (8.12) и (8.13) нам необходимо найти вторые производные поля по времени и по координате. Найдем их.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = -\frac{\omega^2}{2} \{ \vec{e}_1 A_1 e^{i(\omega t - kz)} + 4\vec{e}_2 A_2 e^{i(2\omega t - Kz)} + \text{к. с.} \} \quad (8.14)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{e}_1 \left[ \frac{\partial A_1}{\partial z} - ikA_1 \right] e^{i(\omega t - kz)} + \vec{e}_2 \left[ \frac{\partial A_2}{\partial z} - iKA_2 \right] e^{i(2\omega t - Kz)} + \text{к. с.} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{e}_1 \left[ \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial A_1}{\partial z} - k^2 A_1 \right] e^{i(\omega t - kz)} + \vec{e}_2 \left[ \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - 2iK \frac{\partial A_2}{\partial z} - K^2 A_2 \right] * \right. \\ \left. e^{i(2\omega t - Kz)} + \text{к. с.} \right\} \end{aligned} \quad (8.15)$$

Применяя в (8.15) формулу (8.8) из первого приближения, получим

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{e}_1 \left[ -2ik \frac{\partial A_1}{\partial z} - k^2 A_1 \right] e^{i(\omega t - kz)} + \vec{e}_2 \left[ -2iK \frac{\partial A_2}{\partial z} - K^2 A_2 \right] * e^{i(2\omega t - Kz)} + \text{к. с.} \right\} \quad (8.16)$$

Теперь найдем вторую производную от выражения нелинейной поляризации в формуле (8.11).

$$\frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{нл}}}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{4} \mathcal{X} : \left\{ 4\vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1^2 e^{i(2\omega t - 2kz)} + 2\vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1^* A_2 e^{i(\omega t - (K-k)z)} + \text{к. с.} \right\} \quad (8.17)$$

Подставим (8.13), (8.14), (8.16), (8.17) в (8.1) и получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \vec{e}_1 \left[ 2ik \frac{\partial A_1}{\partial z} + k^2 A_1 \right] e^{i(\omega t - kz)} + \vec{e}_2 \left[ 2iK \frac{\partial A_2}{\partial z} + K^2 A_2 \right] e^{i(2\omega t - Kz)} + \text{к. с.} \right\} - \\ & - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\omega^2}{2} \left\{ \vec{e}_1 A_1 e^{i(\omega t - kz)} + 4\vec{e}_2 A_2 e^{i(2\omega t - Kz)} + \text{к. с.} \right\} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\omega^2}{4} \mathcal{X} : \\ & \left\{ 4\vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1^2 e^{i(2\omega t - 2Kz)} + 2\vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1^* A_2 e^{i(\omega t - (K-k)z)} + \text{к. с.} \right\} \quad (8.18) \end{aligned}$$

Уравнение (8.18) должно выполняться для любых моментов времени  $t$ , в любой точке  $z$ , тогда коэффициент при экспонентах мы можем приравнять к нулю ( $Q e^{i\omega t} + R e^{2i\omega t} = 0$ , при условии что  $Q = 0$ ;  $R = 0$ ).

Приравниваем коэффициенты при  $e^{i\omega t}$ , получаем

$$\vec{e}_1 \left[ 2ik \frac{\partial A_1}{\partial z} + k^2 A_1 \right] e^{-ikz} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon : \vec{e}_1 A_1 e^{-ikz} = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1^* A_2 e^{-i(K-k)z} \quad (8.19)$$

Приравниваем коэффициенты при  $e^{i2\omega t}$ , получаем

$$\vec{e}_2 \left[ 2iK \frac{\partial A_2}{\partial z} + K^2 A_2 \right] e^{-iKz} - \frac{4\omega^2}{c^2} \varepsilon : \vec{e}_2 A_2 e^{-iKz} = \frac{8\pi\omega^2}{c^2} \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_1 A_1^2 e^{-i2Kz} \quad (8.20)$$

Умножив (8.19) на  $e^{ikz}$ , а (8.20) на  $e^{iKz}$ , мы получим систему нелинейных дифференциальных уравнений для определения пространственной эволюции амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  электромагнитных волн.

$$\vec{e}_1 \left[ 2ik \frac{\partial A_1}{\partial z} + k^2 A_1 \right] - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon : \vec{e}_1 A_1 = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1^* A_2 e^{-i\Delta kz} \quad (8.21)$$

$$\vec{e}_2 \left[ 2iK \frac{\partial A_2}{\partial z} + K^2 A_2 \right] - \frac{4\omega^2}{c^2} \varepsilon : \vec{e}_2 A_2 = \frac{8\pi\omega^2}{c^2} \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_1 A_1^2 e^{i\Delta kz} \quad (8.22)$$

где  $\Delta k = K - 2k$  – фазовая расстройка.

Представим диэлектрическую функцию в виде

$$\varepsilon : = \varepsilon' : - i\varepsilon'' : \quad (8.23)$$

где  $\varepsilon'$  : – действительная, а  $\varepsilon''$  : – мнимая компоненты диэлектрической функции.

Подставим (8.23) в (8.21) и (8.22), получим

$$\vec{e}_1 \left[ 2ik \frac{\partial A_1}{\partial z} + \kappa^2 A_1 \right] - \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon' : -i\varepsilon'' : ) \vec{e}_1 A_1 = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1^* A_2 e^{-i\Delta\kappa z} \quad (8.24)$$

$$\vec{e}_2 \left[ 2i\kappa \frac{\partial A_2}{\partial z} + \kappa^2 A_2 \right] - \frac{4\omega^2}{c^2} (\varepsilon' : -i\varepsilon'' : ) \vec{e}_2 A_2 = \frac{8\pi\omega^2}{c^2} \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_1 A_1^2 e^{i\Delta\kappa z} \quad (8.25)$$

Умножим слева уравнение (8.24) на  $\vec{e}_1$ , а уравнение (8.25) слева на  $\vec{e}_2$  и учтём, что  $\vec{e}_1 \vec{e}_1 = 1$  и  $\vec{e}_2 \vec{e}_2 = 1$ .

$$2ik \frac{\partial A_1}{\partial z} + \kappa^2 A_1 - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{e}_1 (\varepsilon' : -i\varepsilon'' : ) \vec{e}_1 A_1 = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \vec{e}_1 \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1^* A_2 e^{-i\Delta\kappa z} \quad (8.26)$$

$$2i\kappa \frac{\partial A_2}{\partial z} + \kappa^2 A_2 - \frac{4\omega^2}{c^2} \vec{e}_2 (\varepsilon' : -i\varepsilon'' : ) \vec{e}_2 A_2 = \frac{8\pi\omega^2}{c^2} \vec{e}_2 \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_1 A_1^2 e^{i\Delta\kappa z} \quad (8.27)$$

Учитывая, что  $\varepsilon' = n^2$ , т.к.  $n = \sqrt{\varepsilon}$ , где  $n$  – показатель преломления, определим, что  $\vec{e}_1 \varepsilon' : \vec{e}_1 = n_\omega^2$

$$\vec{e}_2 \varepsilon' : \vec{e}_2 = n_{2\omega}^2 \quad (8.29)$$

Используя закон дисперсии, получим

$$\frac{\kappa\omega}{\omega} = n_\omega \quad (8.30)$$

$$\frac{\kappa\omega}{2\omega} = n_{2\omega} \quad (8.31)$$

Из (8.30) и (8.21) получим выражения для волновых векторов

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_\omega^2 \quad (8.32)$$

$$\kappa^2 = \frac{(2\omega)^2}{c^2} n_{2\omega}^2 \quad (8.33)$$

Подставляя (8.28) и (8.32) в (8.26) и умножая (8.26) на  $\frac{1}{2ik}$ , получим

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{i\omega^2}{2i\kappa c^2} \varepsilon'' : \vec{e}_1 A_1 = \frac{4\pi\omega^2 \vec{e}_1}{c^2 2i\kappa} \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1^* A_2 e^{-i\Delta\kappa z} \quad (8.34)$$

Подставляя (8.29) и (8.33) в (8.27) и умножая (8.27) на  $\frac{1}{2i\kappa}$ , получим

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{4i\omega^2 \vec{e}_2 \varepsilon'' :}{2i\kappa} \vec{e}_2 A_2 = \frac{8\pi\omega^2 \vec{e}_2}{c^2 2i\kappa} \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_1 A_1^2 e^{i\Delta\kappa z} \quad (8.35)$$

Воспользуемся следующими равенствами, полученными из (8.32) и (8.33)

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\kappa^2}{n_\omega^2} \quad (8.36)$$

$$\frac{4\omega^2}{c^2} = \frac{\kappa^2}{n_{2\omega}^2} \quad (8.37)$$

Тогда (8.34) и (8.35) переписутся в виде

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\kappa \vec{e}_1 \varepsilon'' : \vec{e}_1}{2n_{2\omega}^2} A_1 = \frac{2\pi \kappa \vec{e}_1}{n_{\omega}^2} \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_2 A_1^* A_2 e^{-i\Delta k z} \quad (8.38)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{\kappa \vec{e}_2 \varepsilon'' : \vec{e}_2}{2n_{2\omega}^2} A_2 = -i \frac{\pi \kappa}{n_{2\omega}^2} \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_1 A_1^2 e^{i\Delta k z} \quad (8.39)$$

Введём следующие обозначения

$$\frac{\kappa \vec{e}_1 \varepsilon'' : \vec{e}_1}{2n_{2\omega}^2} = \delta_1; \quad \frac{\kappa \vec{e}_2 \varepsilon'' : \vec{e}_2}{2n_{2\omega}^2} = \delta_2, \quad \frac{2\pi \kappa \vec{e}_1 \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_2}{n_{\omega}^2} = \sigma_1, \quad \frac{\pi \kappa \vec{e}_2 \mathcal{X} : \vec{e}_1 \vec{e}_1}{n_{2\omega}^2} = \sigma_2 \quad (8.40)$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – коэффициенты поглощения на частотах каждой из волн,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – коэффициенты преобразования.

С учетом (8.40) уравнения (8.38) и (8.39) примут вид

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \delta_1 A_1 = -i \sigma_1 A_1^* A_2 e^{-i\Delta k z} \quad (8.41)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \delta_2 A_2 = -i \sigma_2 A_1^2 e^{i\Delta k z} \quad (8.42)$$

Систему уравнений (8.41) – (8.42) называют уравнениями генерации второй гармоники. Правые части этих уравнений представляют собой неоднородности к каждому из уравнений ответственные за генерацию соответствующей волны.

Предположим что  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , т.е. нет превращения одной волны в другую, тогда уравнение (8.41) переписется в виде

$$\frac{dA_1}{dz} + \delta_1 A_1 = 0 \quad (8.43)$$

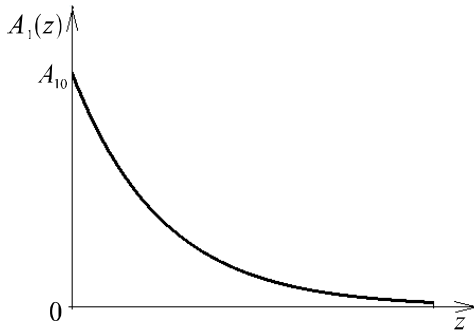


Рис. 8.4. Пространственная зависимость амплитуды волны на основной частоте, решение (8.45)

Уравнение (8.43) будем решать методом разделения переменных. Возьмем интегралы с обеих частей данного уравнения и получим решение.

$$\int \frac{dA_1}{A_1} = - \int \delta_1 dz$$

$$\ln A_1 = -\delta_1 z + \ln c$$

$$A_1 = ce^{-\delta_1 z} \quad (8.44)$$

Пусть в начальный момент времени  $A_1$  равно  $A_{10}$ , тогда (8.44) примет вид

$$A_1 = A_{10}e^{-\delta_1 z} \quad (8.45)$$

Действительно из (8.45) и рисунка 8.4 видно, что имеет место экспоненциальное убывание амплитуды расходящихся волн со своими коэффициентами поглощения  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , что соответствует закону Бугера–Ламберта–Бера.

В случае если имеет место превращение одной волны в другую, то этот закон существенно усложняется.

Рассмотрим простейший случай, когда с торца кристалла падает только волна на основной частоте  $\omega$ , т.е.

$$A_1 \Big|_{z=0} = A_{10} \quad (8.46)$$

$$A_2 \Big|_{z=0} = 0 \quad (8.47)$$

Из полученных уравнений следует, что функции  $A_1$  и  $A_2$  являются комплексными.

Представляются эти функции в виде

$$A_1(z) = a_1(z)e^{i\varphi_1(z)} \quad (8.48)$$

$$A_2(z) = a_2(z)e^{i\varphi_2(z)} \quad (8.49)$$

где  $a$  и  $\varphi_1, \varphi_2$  действительный амплитуды и фазы соответственно волны на основной частоте и на удвоенной.

Подставляя (8.48) и (8.49) в (8.41) и (8.42), получим

$$\left( \frac{\partial a_1}{\partial z} + ia_1 \frac{d\varphi_1}{dz} \right) e^{i\varphi_1} + \delta_1 a_1 e^{i\varphi_1} = -i\sigma_1 a_1 a_2 e^{i(\varphi_2 - 2\varphi_1) - i\Delta kz}$$

Обозначим  $\varphi_2 - 2\varphi_1 - \Delta kz = \psi$

$$\frac{da_1}{dz} + ia_1 \frac{d\varphi_1}{dz} + \delta_1 a_1 = -i\sigma_1 a_1 a_2 e^{i\psi} = -i\sigma_1 a_1 a_2 (\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$\frac{da_1}{dz} + \delta_1 a_1 = \sigma_1 a_1 a_2 \sin \psi$$

$$\begin{aligned}
a_1 \frac{d\varphi_1}{dz} &= -\sigma_1 a_1 a_2 \cos \psi \\
\left( \frac{da_2}{dz} + ia_2 \frac{d\varphi_2}{dz} \right) e^{i\varphi_2} + \delta_2 a_2 e^{i\varphi_2} &= -i\sigma_2 a_1^2 e^{2i\varphi_1 + i\Delta\kappa z} \\
\frac{da_2}{dz} + ia_2 \frac{d\varphi_2}{dz} + \delta_2 a_2 &= -i\sigma_2 a_1^2 e^{-i\psi} \\
\frac{da_2}{dz} + \delta_2 a_2 &= -\sigma_1 a_1^2 \sin \psi \\
a_2 \frac{d\varphi_2}{dz} &= -\sigma_2 a_1^2 \cos \psi \\
\frac{d\varphi_1}{dz} &= -\sigma_1 a_2 \cos \psi \\
\frac{d\varphi_2}{dz} &= -\sigma_2 \frac{a_1^2}{a_2} \cos \psi \\
\frac{d\psi}{dz} = \frac{d\varphi_2}{dz} - 2 \frac{d\varphi_1}{dz} - \Delta\kappa &= \left( -\sigma_2 \frac{a_1^2}{a_2} + 2\sigma_1 a_2 \right) \cos \psi - \Delta\kappa
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений для амплитуд распространяющихся волн и фазы  $\psi$ :

$$\frac{d\psi}{dz} = -\Delta\kappa - \left( \sigma_2 \frac{a_1^2}{a_2} - 2\sigma_1 a_2 \right) \cos \psi \quad (8.50)$$

$$\frac{da_1}{dz} + \delta_1 a_1 = \sigma_1 a_1 a_2 \sin \psi \quad (8.51)$$

$$\frac{da_2}{dz} + \delta_2 a_2 = -\sigma_2 a_1^2 a_2 \sin \psi \quad (8.52)$$

Дополним систему уравнений (8.50) – (8.52) начальными условиями. Будем предполагать, что торец кристалла накачивается (возбуждается) только лишь волной на основной частоте, тогда начальные условия запишем в виде:

$$a_1 \Big|_{z=0} = a_{10}; \quad a_2 \Big|_{z=0} = 0, \quad \psi \Big|_{z=0} = \psi_0 \quad (8.53)$$

И будем искать решение для  $a_1(z)$ ,  $a_2(z)$ ,  $\psi(z)$  внутри кристалла. Полученные таким образом решения дадут нам представления о том, каким образом возникает в среде вторая гармоника, каково пространственное распространение амплитуд этих волн, начиная с торца кристалла.

Получим решение уравнений (8.50) – (8.52) для ряда частных случаев.

Рассмотрим сначала случай, когда отсутствует превращение волн друг в друга, т.е. когда коэффициент  $\sigma_1, \sigma_2 \equiv 0$ , тогда, систему уравнений (8.50) – (8.52) легко решить

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dz} + \delta_1 a_1 &= 0 \\ \frac{da_1}{a_1} + \delta_1 dz &= 0 \\ \ln a_1 + \delta_1 z &= \ln c \\ a_1 &= c e^{-\delta_1 z} \end{aligned}$$

При  $z = 0, a_{10} = c \Rightarrow a_1(z) = a_{10} e^{-\delta_1 z}$  (8.54)

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{dz} + \delta_2 dz &= 0 \\ a_2(z) &= a_{20} e^{-\delta_2 z} \end{aligned} \quad (8.55)$$

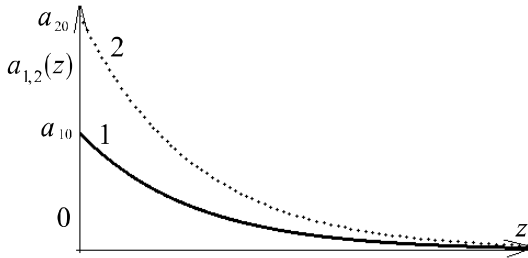


Рис. 8.5. Пространственная зависимость амплитуды волны на основной частоте (1) и на удвоенной (2), решения (8.54) и (8.55).

В этом случае, амплитуды обеих волн экспоненциально убывают, при распространении в кристалле (рисунок 8.5). В конечном счете, обе волны исчезают на расстоянии порядка  $z \gg \delta_1^{-1}, z \gg \delta_2^{-1}$ . Превращения волн друг в друга нет.

### Контрольные вопросы

1. Запишите закон Бугера–Ламберта–Бера.
2. Опишите экспериментальную установку Франкена по обнаружению второй гармоники.
3. Дайте определение амплитудно–модулированному импульсу.
4. Какова пространственная зависимость амплитуды волны на основной частоте, в случае когда отсутствует превращение одной волны в другую?
5. Запишите систему уравнений, описывающую генерацию второй гармоники.

**ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ  
В УСЛОВИИ ТОЧНОГО ФАЗОВОГО СИНХРОНИЗМА  $\Delta k = 0$   
И В ОТСУТСТВИИ ПОГЛОЩЕНИЯ  $\delta_1 = \delta_2 = 0$**

Рассмотрим случай решения  $\Delta k = 0$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ , т.е. распространения волн в условиях точного фазового синхронизма и в отсутствии поглощения, тогда система уравнений (8.50) – (8.52) принимает вид

$$\frac{da_1}{dz} = \sigma_1 a_1 a_2 \sin \psi \quad (9.1)$$

$$\frac{da_2}{dz} = -\sigma_2 a_1^2 \sin \psi \quad (9.2)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = -\left(\frac{\sigma_2 a_1^2}{a_2} - 2\sigma_1 a_2\right) \cos \psi \quad (9.3)$$

Получим интеграл движения для амплитуд  $a_1$ ,  $a_2$ . Для этого, поделим уравнение (9.1) на (9.2).

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{da_2} &= -\frac{\sigma_1 a_2}{\sigma_2 a_1} \\ \frac{a_1 da_1}{\sigma_1} + \frac{a_2 da_2}{\sigma_2} &= 0 \\ \frac{a_1^2}{\sigma_1} + \frac{a_2^2}{\sigma_2} &= c \end{aligned} \quad (9.4)$$

(9.4) – соотношение Мэнли–Роу. Постоянная  $c$  определяется из начальных условий (мы считаем, что в начальный момент времени имеется только волна на основной частоте), таким образом получим  $\frac{a_{10}^2}{\sigma_1} = c$ . Тогда уравнение (9.4) переписывается в виде:

$$\frac{a_1^2}{\sigma_1} + \frac{a_2^2}{\sigma_2} = \frac{a_{10}^2}{\sigma_1} \quad (9.5)$$

(9.5) – этот интеграл движения, который связывает только  $a_1$  и  $a_2$ .

Разделим (9.5) на  $\frac{a_{10}^2}{\sigma_1}$ , в результате получим уравнение эллипса:

$$\frac{a_1^2}{a_{10}^2} + \frac{a_2^2}{\sigma_2 a_{10}^2} = 1 \quad (9.6)$$

Из (9.6) и рисунка 9.1 видно, что возможно полное превращение волны на основной частоте  $a_1$  во вторую гармонику  $a_2$ , при этом максимально возможное значение амплитуды второй гармоники  $a_2$ , равно  $a_{2 \max} =$

$\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} a_{10}$ . Также анализируя (9.6) и рисунок 9.1 можно описать и дальнейшее превращение  $a_2$  в  $a_1$ .

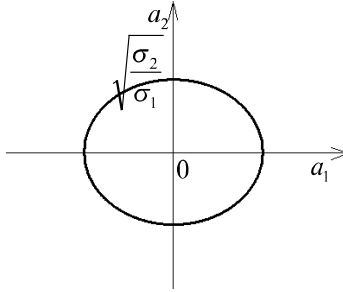


Рис. 9.1. Интеграл движения (9.6)

Из (9.5) получим выражение для амплитуды волны на основной частоте

$$\begin{aligned} a_1^2 &= a_{10}^2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} a_2^2 \\ a_1^2 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_{10}^2 - a_2^2 \right) \end{aligned} \quad (9.7)$$

Теперь найдём выражение для фазы  $\psi$ . Для этого поделим (9.3) на (9.2)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{da_2} &= \frac{\frac{\sigma_2 a_1^2}{a_2} - 2\sigma_1 a_2 \cos \psi}{\sigma_2 a_1^2 \sin \psi} \\ \frac{\sin \psi}{\cos \psi} d\psi &= \frac{\sigma_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_{10}^2 - a_2^2 \right) - 2a_2^2 \sigma_1}{\sigma_2 a_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_{10}^2 - a_2^2 \right)} da_2 \\ \frac{\sin \psi}{\cos \psi} d\psi &= \frac{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_{10}^2 - 3a_2^2}{a_2 \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_{10}^2 - a_2^2 \right)} da_2 \end{aligned}$$

Обозначим  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_{10}^2 = a_0^2$ , тогда

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin \psi}{\cos \psi} d\psi &= \int \frac{a_0^2 - 3a_2^2}{a_2(a_0^2 - a_2^2)} da_2 = \left| \begin{array}{l} \frac{a_0^2 - 3a_2^2}{a_2(a_0^2 - a_2^2)} = \frac{A}{a_2} + \frac{Ba_2 + C}{a_0^2 - a_2^2} \\ a_0^2 - 3a_2^2 = A(a_0^2 - a_2^2) + Ba_2^2 + Ca_2 \\ c = 0 \\ -3 = -A + B \\ a_0^2 = Aa_0^2, \text{ следовательно } A = 1 \text{ и } B = -2 \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{a_2} - \frac{2a_2}{a_0^2 - a_2^2} - \ln \cos \psi = \ln a_2 + \ln(a_0^2 - a_2^2) + \ln c \\
\ln \cos \psi &= \ln \frac{c}{a_2(a_0^2 - a_2^2)} \cos \psi = \frac{c}{a_2(a_0^2 - a_2^2)} \quad (9.8)
\end{aligned}$$

Постоянную  $c$  определяем из начальных условий, для этого перепишем выражение (9.8) в виде

$$c = a_2(a_0^2 - a_2^2) \cos \psi$$

Так как в начальный момент времени вторая гармоника отсутствует, то

$$c = 0; \cos \psi = 0; \psi = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, мы получили, что фаза является постоянной величиной, тогда уравнение (9.3) в данном случае нам не понадобится.

В уравнение (9.2) подставим  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , получим

$$\begin{aligned}
\frac{da_2}{dz} &= -\sigma_2 a_1^2 \\
\frac{da_2}{dz} &= -\sigma_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (a_0^2 - a_2^2) \\
\frac{da_2}{dz} &= -\sigma_1 (a_0^2 - a_2^2) \\
\frac{da_2}{a_0^2 - a_2^2} &= -\sigma_1 dz
\end{aligned}$$

Обозначим  $a_2 = a_0 y$

$$\begin{aligned}
\frac{a_0 dy}{a_0^2(1 - y^2)} &= -\sigma_1 dz \\
\frac{dy}{1 - y^2} &= -\sigma_1 a_0 dz \\
\frac{1}{1 - y^2} &= \frac{A}{1 - y} + \frac{B}{1 + y} \\
1 &= A(1 + y) + B(1 - y) \\
1 &= A + B
\end{aligned}$$

$A - B = 0$ , следовательно  $A = B = \frac{1}{2}$  тогда

$$\int dy \left( \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right) = -2\sigma_1 a_0 \int dz$$

$$\ln|1+y| - \ln|1-y| = -2\sigma_1 a_0 z + \ln c$$

$$\frac{1+y}{1-y} = c e^{-2\sigma_1 a_0 z}$$

Из начальных условий  $c = 1$ .

$$\frac{1+y}{1-y} = e^{-2\sigma_1 a_0 z}$$

$$1+y = e^{-2\sigma_1 a_0 z} (1-y)$$

$$y = -\frac{1-e^{-2\sigma_1 a_0 z}}{1+e^{-2\sigma_1 a_0 z}} = -\frac{1-e^{-2\sigma_1 a_0 z}}{1+e^{-2\sigma_1 a_0 z}} \frac{e^{\sigma_1 a_0 z}}{e^{\sigma_1 a_0 z}} = -\frac{2sh \sigma_1 a_0 z}{2ch \sigma_1 a_0 z} = -th \sigma_1 a_0 z \quad (9.9)$$

где  $sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  и  $ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , тогда

$$a_2 = -\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} a_{10} th \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} z \quad (9.10)$$

Тогда с учетом интеграла движения (9.7), получим выражения для амплитуды электромагнитной волны на основной частоте

$$a_1^2 = a_{10}^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 \sigma_1} a_{10}^2 th^2 \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} z$$

$$a_1^2 = \frac{a_{10}^2}{ch^2 \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} z} \quad (9.11)$$

В (9.11) учтено, что  $\frac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x$ .

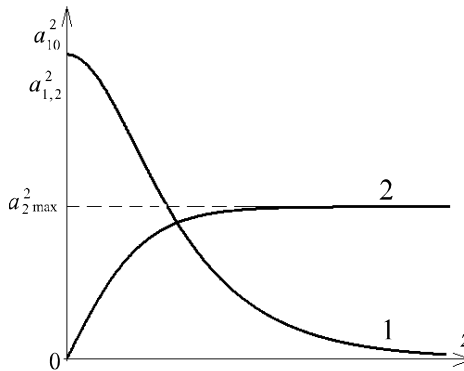


Рис. 9.2. Пространственная зависимость интенсивности волны на основной частоте (1) и второй (2) гармонике

Из полученных решений (9.10) – (9.11) и рисунка 9.2 видно, что на переднем торце кристалла имеется только волна на основной частоте с амплитудой  $a_{10}$ , интенсивность которой очень медленно убывает, тогда как вторая гармоника только-только рождается. С расстоянием амплитуда волны на основной частоте монотонно убывает от значения  $a_{10}$  до 0, тогда как амплитуда второй гармоники монотонно растет и асимптотически стремится снизу к значению  $a_{2\max} = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} a_{10}$ . Из полученных решений для  $a_1, a_2$  также видно, что начальное условие  $a_{10}$  определяет не только амплитуды этих волн (что всегда имеет место в линейных дифференциальных уравнениях), но определяет скорость изменения этих функций (так как стоит в аргументе данных функций), чего никогда не бывает в теории линейных дифференциальных уравнений.

Если начальная амплитуда электромагнитной волны на основной частоте  $a_{10}$  мало, то характеристическое расстояние  $z$ , на котором происходит заметное изменение амплитуды распространяющихся волн, велико  $\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} z_{\text{хар.}} = 1$ , следовательно

$$z_{\text{хар.}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10}} \quad (9.12)$$

Из (9.12) видно, что характеристическое расстояние обратно пропорционально  $a_{10}$ , поэтому чем больше амплитуда  $a_{10}$  волны на основной частоте, тем быстрее сама волна превращается во вторую гармонику.

Полученное решение называют автомодельным. Это означает, что начальная координата  $z = 0$  может быть взята в любой точке  $z_0$ . В точке  $z_0$  интенсивности обеих волн отлична от нуля. Дальнейшая эволюция начинается с этой точки точно также как и эволюция с точки  $z = 0$ . Это означает что начальное состояние этих волн, хотя и изменяются тем не менее качественно сохраняют эволюцию. Сохранение эволюции — это характерное свойство автомодельных решений. Характер поведения решений таков, что волна на основной частоте полностью превращаются во вторую гармонику, которая продолжает распространяться в среде не превращаясь обратно в волну на основной частоте, т.о. процесс превращения является необратимым при  $\Delta k = 0$ . Т.е. обратного превращения второй гармоники в волну на основной частоте нет.

### Контрольные вопросы

1. Опишите пространственную зависимость волны на основной частоте в случае точного фазового синхронизма и отсутствия поглощения в среде?
2. Опишите пространственную зависимость волны на удвоенной частоте в случае точного фазового синхронизма и отсутствия поглощения в среде?
3. Какое решение называется автомодельным?
4. От каких величин зависит характеристическое расстояние?
5. Что называют интегралом движения?
6. Для чего мы получаем интегралы движения?
7. Запишите соотношение Мэнли–Роу.

## УЧЕТ ПОГЛОЩЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ

Рассмотрим случай точного фазового синхронизма  $\Delta k = 0$  и предположим с учетом поглощения. Запишем нашу систему уравнений

$$\frac{da_1}{dz} + \delta_1 a_1 = \sigma_1 a_1 a_2 \sin \psi \quad (10.1)$$

$$\frac{da_2}{dz} + \delta_2 a_2 = -\sigma_2 a_1^2 \sin \psi \quad (10.2)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = -\left(\sigma_2 \frac{a_1^2}{a_2} - 2\sigma_1 a_2\right) \cos \psi \quad (10.3)$$

Данную систему нелинейных дифференциальных уравнений (10.1) – (10.3) можно решить аналитически точно в случае, если коэффициенты поглощения (затухания) для волн на основной частоте и второй гармоники равны  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ , во всех других случаях получить точное аналитическое решения не представляется возможным, тогда система уравнений (10.1) – (10.3) примет вид

$$\frac{da_1}{dz} + \delta a_1 = \sigma_1 a_1 a_2 \sin \psi \quad (10.4)$$

$$\frac{da_2}{dz} + \delta a_2 = -\sigma_2 a_1^2 \sin \psi \quad (10.5)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = -\left(\sigma_2 \frac{a_1^2}{a_2} - 2\sigma_1 a_2\right) \cos \psi \quad (10.6)$$

Пусть на торец падает только волна на основной частоте. Тогда решение для амплитуд  $a_1$  и  $a_2$  будем искать в виде

$$a_1 = u_1 e^{-\delta z} \quad (10.7)$$

$$a_2 = u_2 e^{-\delta z} \quad (10.8)$$

Тогда подставляя (10.7) – (10.8) в уравнения (10.4) – (10.6), получим

$$\left(\frac{du_1}{dz} - \delta u_1\right) e^{-\delta z} + \delta u_1 e^{-\delta z} = \sigma_1 u_1 u_2 e^{-2\delta z} \sin \psi$$

$$\frac{du_1}{dz} = \sigma_1 u_1 u_2 e^{-\delta z} \sin \psi \quad (10.9)$$

$$\frac{du_2}{dz} = -\sigma_2 u_1^2 e^{-\delta z} \sin \psi \quad (10.10)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = -\left(\sigma_2 \frac{u_1^2}{u_2} - 2\sigma_1 u_2\right) e^{-\delta z} \cos \psi \quad (10.11)$$

Получается новая система нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Для решения нашей системы уравнений перейдем к новым переменным  $\zeta = \frac{1-e^{-\delta z}}{\delta}$ , причем  $\zeta|_{z=0} = 0$ .

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{d}{d\zeta} e^{-\delta z}$$

$$\frac{du_1}{d\zeta} = \sigma_1 u_1 u_2 \sin \psi \quad (10.12)$$

$$\frac{du_2}{d\zeta} = -\sigma_2 u_1^2 \sin \psi \quad (10.13)$$

$$\frac{d\psi}{d\zeta} = -\left(\sigma_2 \frac{u_1^2}{u_2} - 2\sigma_1 u_2\right) \cos \psi \quad (10.14)$$

Найдем начальные условия для новой системы уравнений (10.12) – (10.14).

$$u_1 = a_1 e^{\delta z}$$

$$u_1|_{\zeta=0} = u_1|_{z=0} = a_{10}$$

$$u_2|_{\zeta=0} = u_2|_{z=0} = 0$$

После введения переменной  $\zeta$  мы получили, что система уравнений (10.12) – (10.14) абсолютно идентична системе уравнений (9.1) – (9.3). Тогда решение (10.12) – (10.14) можно сразу записать

$$u_1^2(\zeta) = \frac{a_{10}^2}{ch^2(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} \zeta)}$$

$$u_2^2(\zeta) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_{10}^2 th^2(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} \zeta)$$

Для амплитуд  $a_1$  и  $a_2$  тогда имеем

$$a_1^2 = \frac{a_{10}^2 e^{-2\delta z}}{ch^2\left(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} \frac{1-e^{-\delta z}}{\delta}\right)} \quad (10.15)$$

$$a_2^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_{10}^2 e^{-2\delta z} th^2\left(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} \frac{1-e^{-\delta z}}{\delta}\right) \quad (10.16)$$

Интеграл движения при этом  $a_1^2 + a_2^2 = a_0^2 e^{-2\alpha z}$ .

Из полученных решений следует, что сумма интенсивностей обеих волн экспоненциально убывает с расстоянием. На начальном этапе у переднего торца интенсивность волны на основной частоте монотонно убывает, а интенсивность второй гармоники монотонно растет. Далее с ростом расстояния интенсивность второй гармоники достигает своего максимума и потом экспоненциально убывает. Волна на основной частоте все время убывает, причем быстрее, чем в отсутствие затухания.

Предположим, что у нас поглощение слабое, а именно  $\delta z \ll 1$ , тогда

$$\zeta = \frac{1-e^{-\delta z}}{\delta} = \text{разложили в ряд} = \frac{1-(1-\delta z)}{\delta} = z$$

Тогда  $a_2^2$  может быть записано в виде

$$a_2^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_{10}^2 e^{-2\delta z} th^2(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} z) \quad (10.17)$$

Найдем координаты максимума амплитуды (интенсивности) второй гармоник, для этого найдем производную от  $a_2$  по координате  $z$  и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{da_2^2}{dz} = -2\delta e^{-2\delta z} th^2(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} z) + e^{-2\delta z} 2th(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} z) \frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10}}{ch^2} = 0 \\ -\delta th(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} z) + \frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10}}{ch^2(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} z)} = 0 \end{aligned}$$

Считая, что  $th x = \frac{sh x}{ch x}$ , получим

$$\begin{aligned} \delta sh 2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} z = 2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10} \\ z_0 = z = \frac{1}{2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10}} arsh \frac{2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} a_{10}}{\delta} \end{aligned} \quad (10.18)$$

Из полученных результатов и решений следует, что волна на основной частоте  $a_1$  монотонно убывает с ростом расстояния. Это убывание обусловлено как превращением этой волны во вторую гармонику, так и поглощением энергии волной по мере её распространения, поэтому интенсивность волны на основной частоте при  $\delta \neq 0$  убывает в пространстве быстрее, чем в случае  $\delta = 0$  (рисунок 10.1). Что касается интенсивности второй гармоники, то она сначала монотонно растет, затем в некоторой точке пространства  $z_0$  достигает своего максимума и далее убывает, обращаясь в нуль на больших расстояниях.

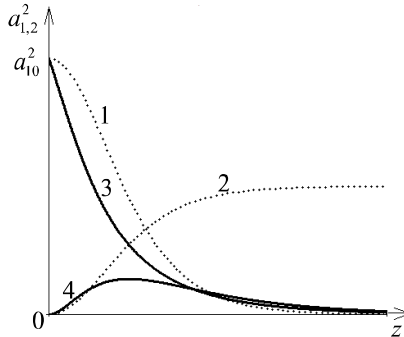


Рис. 10.1. Пространственная зависимость интенсивности волны на основной частоте (1 – без поглощения, 3 – с учетом поглощения) и второй (2 – без поглощения, 4 – с учетом поглощения) гармоники

Если поглощение велико, т.е.  $z \gg \delta^{-1}$ , то в этом случае также имеет место процесс необратимого превращения волны на основной частоте во вторую гармонику. Однако отсутствует асимптотический характер пространственного изменения амплитуды второй гармоники  $a_2$ . На больших расстояниях обе волны экспоненциально убывают из-за поглощения. Видно, что с ростом  $\delta$  убывает  $z_0$ , поэтому если взять толстый кристалл с толщиной  $L \gg z_0$ , то не будет ни второй гармоники, ни волны на основной частоте.

В случае произвольных коэффициентов поглощения решить систему уравнений (10.1) – (10.3) можно только численными методами. Стоит отметить, что качественно динамика системы не изменится.

### **Контрольные вопросы**

1. Как изменяется динамика системы при учете поглощения?
2. В каком случае удастся получить аналитическое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих генерацию второй гармоники?
3. Как отличается динамика системы при слабом и сильном поглощении?
4. Почему в данном случае мы используем автомодельное решение?
5. Какова динамика системы в случае произвольных констант поглощения?

## ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В ОТСУТСТВИИ ТОЧНОГО ФАЗОВОГО СИНХРОНИЗМА

Рассмотрим динамику генерации второй гармоники в условиях, когда поглощение отсутствует  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ , т.е. рассмотрим чисто дисперсионный предел. В этом случае система уравнений (8.50) – (8.52) принимает вид

$$\frac{da_1}{dz} = \sigma_1 a_1 a_2 \sin \psi \quad (11.1)$$

$$\frac{da_2}{dz} = -\sigma_2 a_1^2 \sin \psi \quad (11.2)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = -\Delta k - \left( \frac{-\sigma_2 a_1^2}{a_2} - 2\sigma_1 a_2 \right) \cos \psi \quad (11.3)$$

Начальные условия для (11.1) – (11.3)

$$a_1|_{z=0} = a_{10}, \quad a_2|_{z=0} = 0, \quad \psi|_{z=0} = \psi_0$$

Получим первый интеграл движения, разделив (11.1) на (11.2).

$$\frac{da_1}{da_2} = -\frac{\sigma_1 a_2}{\sigma_2 a_1}$$

$$\frac{a_1 da_1}{\sigma_1} + \frac{a_2 da_2}{\sigma_2} = 0$$

$$\frac{a_1^2}{\sigma_1} + \frac{a_2^2}{\sigma_2} = c = \frac{a_{10}^2}{\sigma_1}$$

$$a_1^2 = a_{10}^2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} a_2^2$$

$$a_1^2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_{10}^2 - a_2^2 \right) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (a_0^2 - a_2^2), \quad (11.4)$$

где  $a_0^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_{10}^2 = a_{2, \max}^2$ . Таким образом,  $a_0$  играет роль максимума амплитуды второй гармоники  $a_{2, \max}$ .

Поделим уравнение (11.3) на (11.2) и получим

$$\frac{d\psi}{da_2} = \frac{\Delta k + \left( \frac{\sigma_2}{a_2} a_1^2 - 2\sigma_1 a_2 \right) \cos \psi}{\sigma_2 a_1^2 \sin \psi} = \frac{a_2 \Delta k + \left( \sigma_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (a_0^2 - a_2^2) - 2\sigma_1 a_2^2 \right) \cos \psi}{a_2 \sigma_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (a_0^2 - a_2^2) \sin \psi} \quad (11.5)$$

Введем замену  $\cos \psi = y$ , тогда  $-\sin \psi d\psi = dy$ . Уравнение (11.5) переписывается в виде

$$\frac{dy}{da_2} = -\frac{\Delta k a_2 + \sigma_1 (a_0^2 - 3a_2^2) y}{a_2 \sigma_1 (a_0^2 - a_2^2)} = -\frac{-\Delta k}{\sigma_1 (a_0^2 - a_2^2)} - \frac{y (a_0^2 - 3a_2^2)}{a_2 (a_0^2 - a_2^2)} \quad (11.6)$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка (11.6). Решим сначала соответствующее однородное.

$$\frac{dy}{da_2} = -\frac{(a_0^2 - 3a_2^2)y}{a_2(a_0^2 - a_2^2)}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{a_0^2 - 3a_2^2}{a_2(a_0^2 - a_2^2)} da_2$$

$$\frac{a_0^2 - 3a_2^2}{a_2(a_0^2 - a_2^2)} = \frac{A}{a_2} + \frac{Ba_2 + C}{a_0^2 - a_2^2} = \frac{1}{a_2} - \frac{2a_2}{a_0^2 - a_2^2}$$

$$a_0^2 - 3a_2^2 = A(a_0^2 - a_2^2) + Ba_2^2 + Ca_2$$

$$c = 0 \quad -3 = -A + B$$

$$A = 1 \quad B = -2$$

$$\ln y = -\ln a_2 - \ln(a_0^2 - a_2^2) + \ln c$$

$$\ln y = \ln \frac{c}{a_2(a_0^2 - a_2^2)}$$

$$y = \frac{c}{a_2(a_0^2 - a_2^2)} \tag{11.8}$$

Найдем теперь решение неоднородного уравнения (11.6), считая в решении (11.8)  $c \neq const$ , а функцией  $c(a_2)$ .

$$\frac{dc}{da_2} \frac{1}{a_2(a_0^2 - a_2^2)} - \frac{c}{a^2(a_0^2 - a_2^2)} + \frac{c2a_2}{a_2(a_0^2 - a_2^2)^2} = -\frac{\Delta\kappa}{\sigma_1(a_0^2 - a_2^2)} - \frac{(a_0^2 - 3a_2^2)c}{a_2^2(a_0^2 - a_2^2)^2}$$

$$\frac{dc}{da_2} = -\frac{\Delta\kappa}{\sigma_1} a_2$$

$$c = -\frac{\Delta\kappa}{2\sigma_1} a_2^2 + C_0$$

$$y = \frac{C_0 - \frac{\Delta\kappa}{2\sigma_1} a_2^2}{a_2(a_0^2 - a_2^2)}$$

$C_0$  - постоянная интегрирования, которую мы определим из начальных условий

$$C_0 = ya_2(a_0^2 - a_2^2) + \frac{\Delta\kappa}{2\sigma_1} a_2^2$$

$$C_0 = 0$$

$$y = -\frac{\Delta\kappa a_2}{2\sigma_1(a_0^2 - a_2^2)} \quad (11.9)$$

Поскольку  $y = \cos \psi$ , то

$$\begin{aligned} \cos \psi &= -\frac{\Delta\kappa a_2}{2\sigma_1(a_0^2 - a_2^2)} \\ \frac{da_1}{dz} &= -\sigma_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (a_0^2 - a_2^2) \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta\kappa}{2\sigma_1}\right)^2 \frac{a_2^2}{(a_0^2 - a_2^2)^2}} \\ \frac{da_2}{dz} &= -\sigma_1 \sqrt{a_0^4 - 2a_0^2 a_2^2 + a_2^4 - \left(\frac{\Delta\kappa}{2\sigma_1}\right)^2 a_2^2} \\ a_2 &= a_0 u \\ a_0 \frac{du}{dz} &= -\sigma_1 a_0 \sqrt{1 - 2u^2 + u^4 - \left(\frac{\Delta\kappa}{2\sigma_1 a_0}\right)^2 u^2} \\ \frac{du}{\sqrt{u^4 - 2u^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\kappa}{2\sigma_1 a_0}\right)^2\right) + 1}} &= -\sigma_1 a_0 dz \\ \int \frac{du}{\sqrt{u^4 - 2u^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\kappa}{2\sigma_1 a_0}\right)^2\right) + 1}} &= -\int \sigma_1 a_0 dz \end{aligned} \quad (11.10)$$

Решение интеграла в правой части (11.10) сводится к решению эллиптического интеграла, преобразованного к нормальной форме Лежандра через эллиптические функции Якоби.

Функция

$$F(z) = \int_a^z f(z) dz \quad (11.11)$$

называется **эллиптическим интегралом**, если  $f(z)$  – рациональная функция от  $z$  и квадратного корня  $\sqrt{G(z)}$  из многочлена

$G(z) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = a_0 (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4)$  (11.12), не имеющего кратных корней.

В формуле (11.11) считается, что нижний предел интегрирования  $a$  не совпадает ни с одним корнем многочлена  $G(z)$ .

Каждый эллиптический интеграл (11.11) может быть выражен в виде суммы элементарных функций и трех сравнительно простых типов эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода. Чаще всего используют эллиптический интеграл первого рода  $\int_a^z \frac{dz}{\sqrt{G(z)}}$ .

Пусть  $G(x)$  – действительный многочлен, положительный в интервале  $(a, x)$ , тогда  $\int_a^x f(x)dx$  принимает действительные значения. Таблица, указанная в приложении содержит преобразования  $x = x(\phi)$ , отображающие интервал интегрирования  $(a, x)$  в соответствующий интервал действительного аргумента  $\phi$  между 0 и  $\pi/2$ , так что

$$\frac{dx}{\sqrt{G(x)}} = \mu \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \quad (0 < k^2 < 1) \quad (11.13)$$

для различных возможных типов действительных многочленов четвертой степени  $G(x) = G_4(x)$  и третьей степени  $G(x) = G_3(x)$ . Соответствующие значения постоянных параметров  $k^2$  и  $\mu$  также табулированы.

Во всех случаях старшие коэффициенты многочленов  $G(x)$  приняты равными 1 или  $-1$ . В случае действительных корней принимаем  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$ .

Для вычислений интегралов с помощью таблицы 1 необходимо пользоваться следующими вспомогательными величинами:

$$\alpha_{ik} = \alpha_k - \alpha_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad (11.14)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta} \frac{\beta - \delta}{\beta - \gamma} \quad (11.15)$$

Обращение эллиптических интегралов  $z = F(\phi, k)$  порождает функции  $\text{am } z$  (амплитуда  $z$ ) и  $\text{sn}(z) \equiv \sin(\text{am } z)$  (синус амплитуды  $z$ ), т.е.

$$\phi = \text{am } z, \quad z = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = F(\phi, k) \quad (11.16)$$

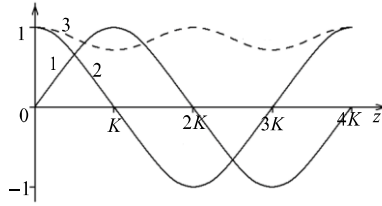


Рис. 11.1. Эллиптические функции Якоби  $\text{sn}(z) - 1$ ,  $\text{cn}(z) - 2$ ,  $\text{dn}(z) - 3$

Функция  $\text{sn}(z)$  является эллиптической функцией Якоби и называется «снойда» или эллиптический синус. Различают также функции  $\text{cn}(z)$  (кнойда) и  $\text{dn}(z)$  (днойда), определяемые как

$$\text{cn}(z) = \cos(\text{am } z) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(z)} \quad (11.17)$$

$$\text{dn}(z) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(z)} \quad (11.18)$$

Графики эллиптических функций представлены на рисунке 11.1. Видно, что эллиптические функции Якоби являются периодическими функциями.

Эллиптические функции вырождаются, если  $k^2 = 1$  или  $k^2 = 0$ , при этом один из периодов становится равным бесконечности, что соответствует аperiodическому режиму эволюции.

$$k = 0, \quad K = \frac{\pi}{2}, \quad \text{sn}(z, 0) = \sin z, \quad \text{cn}(z, 0) = \cos z, \quad \text{dn}(z, 0) = 1 \quad (11.19)$$

$$k = 1, \quad K = \infty, \quad \text{sn}(z, 1) = \text{th } z, \quad \text{cn}(z, 1) = \text{dn}(z, 1) = \frac{1}{\text{ch } z} \quad (11.20)$$

Перейдем к расчету интеграла в (11.10). Чтобы проинтегрировать (11.10), необходимо знать корни полинома, стоящего под знаком радикала.

$$u^4 - 2u^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta \kappa}{2\sigma_1 a_0} \right)^2 \right) + 1 = 0 \quad (11.21)$$

Корни (11.21) запишем в виде

$$\begin{aligned} u_{\pm}^2 &= 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta \kappa}{2\sigma_1 a_0} \right)^2 \pm \sqrt{\left( \frac{\Delta \kappa}{2\sigma_1 a_0} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta \kappa}{2\sigma_1 a_0} \right)^4} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta \kappa}{2\sigma_1 a_0} \right)^2 \pm \frac{|\Delta \kappa|}{2\sigma_1 a_0} \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta \kappa}{4\sigma_1 a_0} \right)^2} \end{aligned}$$

Легко видеть, что  $u_{\pm}^2 \geq 0$ . Обозначим корни уравнения (11.21) следующим образом:  $u_1 = u_+$ ,  $u_2 = u_-$ ,  $u_3 = -u_-$ ,  $u_4 = -u_+$ . Причем  $u_1 > u_2 > u_3 > u_4$ , тогда пользуясь таблицей 1, будем искать решение (11.10).

$$\begin{aligned}
 \mu &= \frac{2}{\sqrt{(u_+ + u_-)(u_- + u_+)}} = \frac{2}{u_+ + u_-} \\
 \kappa^2 &= \frac{2u_+}{u_+ + u_-} \frac{2u_-}{u_+ + u_-} = \frac{4u_+u_-}{(u_+ + u_-)^2} \\
 u &= \frac{-u_-(u_+ + u_-) + u_+ 2u_- \sin^2 \varphi}{u_+ + u_- - 2u_- \sin^2 \varphi} \\
 \frac{2}{u_+ + u_-} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}} &= -\sigma_1 a_0 z + c \\
 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}} &= -\frac{\sigma_1 a_0 z}{2} (u_+ + u_-) + c \\
 \varphi &= am \left( -\frac{\sigma_1 a_0 z}{2} (u_+ + u_-) + c \right) = am(\psi) \\
 \sin \varphi &= \sin amz = \operatorname{sn} z \\
 u &= \frac{-u_-(u_+ + u_-) + u_+ 2u_- \operatorname{sn}^2 \psi}{u_+ + u_- - 2u_- \operatorname{sn}^2 \psi} \tag{11.22}
 \end{aligned}$$

Поскольку  $\operatorname{sn} \psi$  является периодической функцией, то и  $u$  тоже является периодической функцией от  $z$  следовательно, амплитуда второй гармоники  $a_2$  является тоже периодической функцией.

Из полученных результатов следует, что имеет место периодическое превращение поля основной частоты во вторую гармонику и обратно в процессе распространения. В случае если  $\Delta k = 0$ , то мы имеем необходимый процесс превращения поля на основной частоте во вторую гармонику. Получение закономерности имеют место и в эксперименте. Однако такие периодические колебания заметны на расстоянии пяти-шести периодов, на еще больших расстояниях картина затушевывается. Это связано с тем, что в кристалле имеет место диссипативное поглощение, т.е. все необратимо поглощается. Ясно, что если длина поглощения, определяемая как обратный коэффициент поглощения, намного больше чем период, то в этом случае можно заметить периодические колебания интенсивности второй гармоники. Если же, наоборот, длина поглощения порядка периода или меньше, то в этом случае в эксперименте периодические колебания не видят, это обусловлено сильным

поглощением света. Решить задачу о генерации второй гармоники при  $\Delta k \neq 0$  с учетом реального поглощения в аналитической форме не удастся.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое эллиптический интеграл?
2. Нарисуйте график эллиптического синуса.
3. Что называют эллиптическими функциями Якоби?
4. Чему равен период колебаний эллиптического косинуса?
5. Опишите влияние длины поглощения на динамику системы.
6. В чем отличие в динамике системы в случае точного фазового синхронизма и в отсутствии фазового синхронизма?

## ФОТОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ

Квант излучения фотона обладает энергией  $E = \hbar\omega$ . Будем рассматривать генерацию второй гармоники как квантовый процесс, при котором два фотона с частотой  $\omega$ , взаимодействуя между собой через среду, связываются и дают фотон с частотой  $2\omega$ . При этом волновой вектор будет равен  $\vec{k} + \vec{k} = 2\vec{k}$ . Можно рассчитать процесс генерации второй гармоники с точки зрения взаимодействия друг с другом системы фотонов с частотой  $\omega$  и  $2\omega$  (в среде). Для того, чтобы описать этот процесс мы должны воспользоваться гамильтонианом в представлении вторичного квантования через операторы рождения и уничтожения фотонов:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar\Omega\hat{b}^+\hat{b} + \hbar\mu(\hat{b}^+\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{b}), \quad (12.1)$$

где  $\omega$  – частота фотона с минимальной энергией (на основной частоте),  $\hat{a}^+$  – оператор рождения фотона на основной частоте,  $\hat{a}$  – оператор уничтожения фотона, оператор полного числа фотонов с частотой  $\omega$  будем обозначать  $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$ ,  $\hat{b}^+$  – оператор рождения фотонов с частотой  $\Omega$  (второй гармоники),  $\hat{b}$  – оператор уничтожения фотонов с частотой  $\Omega$ , оператор полного числа фотонов второй гармоники будем обозначать  $\hat{N} = \hat{b}^+\hat{b}$ .

Последнее слагаемое в (12.1) описывает процессы генерации и уничтожения фотонов на частоте  $\omega$  и  $\Omega$ . Используя гамильтониан взаимодействия можно получить динамику процесса генерации второй гармоники. Для этого необходимо получить систему уравнений для операторов  $\hat{a}^+$ ,  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}^+$ ,  $\hat{b}$ , а также для операторов  $\hat{n}$  и  $\hat{N}$ . Для этого используем уравнение Гайзенберга:

$$i \frac{da}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{dH}{da^+} \quad (12.2)$$

$$i \frac{da^+}{dt} = -\frac{1}{\hbar} \frac{dH}{da} \quad (12.3)$$

Таким образом из (12.1) с учетом (12.2) – (12.3), для оператора  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  получаем:

$$\begin{aligned} i\dot{a} &= \omega\hat{a} + 2\mu\hat{a}^+\hat{b} \\ i\dot{b} &= \Omega\hat{b} + \mu\hat{a}\hat{a} \\ i\dot{a}^+ &= -\omega\hat{a}^+ - 2\mu\hat{b}^+\hat{a} \\ i\dot{b}^+ &= -\Omega\hat{b}^+ - \mu\hat{a}^+\hat{a}^+ \end{aligned}$$

Далее для  $\hat{n}$  и  $\hat{N}$  получаем

$$\begin{aligned} i\dot{n} &= i(\hat{a}^+\hat{a}) = i(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}) = -\omega\hat{a}^+\hat{a} - 2\mu\hat{a}\hat{b}^+\hat{a} + \omega\hat{a}^+\hat{a} + 2\mu\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{b} = \\ &= -2\mu(\hat{b}^+\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{b}) \end{aligned}$$

$$i\dot{N} = i(\dot{b}^+\dot{b}) = i(\dot{b}^+\dot{b} + \dot{b}^+\dot{b}) = -\Omega\dot{b}^+\dot{b} - \mu\hat{a}^+\hat{a}^+\dot{b} + \Omega\dot{b}^+\dot{b} + \mu\dot{b}^+\hat{a}\hat{a} \\ = \mu(\dot{b}^+\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^+\hat{a}^+\dot{b}).$$

$$\text{Обозначим } Q = i(\dot{b}^+\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^+\hat{a}^+\dot{b}), R = \dot{b}^+\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+\dot{b}.$$

Тогда

$$\dot{n} = 2\mu Q; \quad \dot{N} = -\mu Q.$$

$$\dot{Q} = i(\dot{b}^+\hat{a}\hat{a} + \dot{b}^+\hat{a}\hat{a} + \dot{b}^+\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^+\hat{a}^+\dot{b} - \hat{a}^+\hat{a}^+\dot{b} - \hat{a}^+\hat{a}^+\dot{b}) = \\ = (-\Omega\dot{b}^+\hat{a}\hat{a} - \mu\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}\hat{a} + \omega\dot{b}^+\hat{a}\hat{a} + 2\mu\dot{b}^+\hat{a}^+\dot{b}\hat{a} + \omega\dot{b}^+\hat{a}\hat{a} + 2\mu\dot{b}^+\hat{a}\hat{a}^+\dot{b}) - \\ - (-\omega\hat{a}^+\hat{a}^+\dot{b} - 2\mu\hat{a}\dot{b}^+\hat{a}^+\dot{b} - \omega\hat{a}^+\hat{a}^+\dot{b} - 2\mu\hat{a}^+\hat{a}\dot{b}^+\dot{b} + \Omega\hat{a}^+\hat{a}^+\dot{b} + \mu\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}) = \\ = (2\omega - \Omega)(\dot{b}^+\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+\dot{b}) - 2\mu n^2 + 8\mu n N = (2\omega - \Omega)R - 2\mu n^2 + 8\mu n N. \\ i\dot{R} = -(2\omega - \Omega)(-\hat{a}^+\hat{a}^+\dot{b} + \dot{b}^+\hat{a}\hat{a}).$$

Тогда

$$\dot{R} = -(2\omega - \Omega)Q \\ \dot{Q} = (2\omega - \Omega)R - 2\mu n^2 + 8\mu n N$$

Введем расстройку резонанса  $\Delta = 2\omega - \Omega$ . Для решения физической задачи недостаточно только записать систему уравнений, но необходимо определить начальные условия системы. В нелинейных процессах оказывается, что динамика существенно определяется начальными условиями. В нашем случае будем считать, что

$$a|_{t=0} = a_0 e^{i\varphi_0}; \quad a^+|_{t=0} = a_0^+ e^{-i\varphi_0}; \\ b|_{t=0} = b_0 e^{i\psi_0}; \quad b^+|_{t=0} = b_0^+ e^{-i\psi_0}; \\ n|_{t=0} = n_0 = a^+ a|_{t=0} = |a_0|^2; \\ N|_{t=0} = N_0 = b^+ b|_{t=0} = |b_0|^2; \\ Q|_{t=0} = Q_0 = i b_0 a_0 a_0 (e^{-i(\psi_0 - 2\varphi_0)} - e^{i(\psi_0 - 2\varphi_0)}) = |\psi_0 - 2\varphi_0| = \theta_0 = \\ = i n_0 \sqrt{N_0} (-2i) \sin \theta_0 = 2 n_0 \sqrt{N_0} \sin \theta_0; \\ R|_{t=0} = R_0 = 2 n_0 \sqrt{N_0} \cos \theta_0,$$

где  $\theta_0$  – начальная разность фаз.

Решаем систему этих уравнений в случае точного резонанса  $\Delta = 0$ , тогда  $R = const$  и система эволюционных уравнений запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{n} = 2\mu Q \\ \dot{N} = -\mu Q \\ \dot{Q} = -2\mu n^2 + 8\mu n N. \end{cases} \quad (12.4)$$

Найдем интегралы движения. Для этого разделим первое уравнение в (12.4) на второе, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{n}}{\dot{N}} &= -2 \\ \frac{dn}{dN} &= -2 \\ dn &= -2dN \\ n &= -2N + C\end{aligned}$$

Постоянную  $C$  находим из начальных условий и получаем, что  $C = n_0$ , тогда

$$n + 2N = n_0 \quad (12.5)$$

С помощью интеграла движения (12.5), в системе дифференциальных уравнений (12.4), мы от трех уравнений можем перейти к двум:

$$\begin{aligned}\begin{cases} \dot{N} = -\mu Q \\ \dot{Q} = -2\mu n^2 + 8\mu nN \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{N} = -\mu Q \\ \dot{Q} = -2\mu(n_0 - 2N)^2 + 8\mu N(n_0 - 2N) \end{cases}; \\ \begin{cases} \dot{N} = -\mu Q \\ \dot{Q} = 2\mu(-n_0^2 - 4N^2 + 8Nn_0 - 8N^2) \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{N} = -\mu Q \\ \dot{Q} = -2\mu(12N^2 + n_0^2 - 8Nn_0) \end{cases}\end{aligned} \quad (12.6)$$

Поделим второе уравнение в (12.6) на первое, получим

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dN} &= \frac{2(12N^2 + n_0^2 - 8Nn_0)}{Q} \\ QdQ &= 2(12N^2 + n_0^2 - 8Nn_0)dN \\ \frac{Q^2}{2} &= 2(4N^3 - 4N^2n_0 + Nn_0^2) + C\end{aligned}$$

Согласно начальным условиям постоянная  $C = 0$ , тогда

$$\begin{aligned}\begin{cases} Q^2 = 4N(n_0 - 2N)^2 \\ \dot{N} = -\mu Q \end{cases} \\ Q = \pm\sqrt{4N(n_0 - 2N)^2} = \pm 2\sqrt{N}(n_0 - 2N) \\ \dot{N} = \pm 2\mu\sqrt{N}(n_0 - 2N); \\ \frac{dN}{\sqrt{N}(n_0 - 2N)} = \pm 2\mu dt\end{aligned}$$

$$\int \frac{dN}{\sqrt{N}(n_0 - 2N)} = \int 2\mu dt;$$

Обозначим  $N = \frac{n_0}{2} y^2$ , тогда

$$\int \frac{n_0 y dy}{\sqrt{\frac{n_0}{2}} y n_0 (1 - y^2)} = \sqrt{\frac{2}{n_0}} \int \frac{dy}{1 - y^2} = 2\mu \int dt;$$

$$y = \frac{e^{2\sqrt{2n_0\mu t}} - 1}{e^{2\sqrt{2n_0\mu t}} + 1}$$

$$y = \frac{e^{\sqrt{2n_0\mu t}} - e^{-\sqrt{2n_0\mu t}}}{e^{\sqrt{2n_0\mu t}} + e^{-\sqrt{2n_0\mu t}}}$$

$$y = th(\sqrt{2n_0\mu t})$$

Тогда плотность фотонов на удвоенной частоте будет равна

$$N = \frac{n_0}{2} y^2 = \frac{n_0}{2} th^2(\sqrt{2n_0\mu t}) \quad (12.7)$$

Используя интеграл движения (12.5), с учетом (12.7), получим плотность фотонов на основной частоте и выражение для  $Q^2$ .

$$n = n_0 - 2N = n_0 \left( 1 - th^2(\sqrt{2n_0\mu t}) \right) = \frac{n_0}{ch^2(\sqrt{2n_0\mu t})} \quad (12.8)$$

$$Q^2 = 4N(n_0 - 2N)^2 = 4 \frac{n_0}{2} th^2(\sqrt{2n_0\mu t}) \left( n_0 - n_0 th^2(\sqrt{2n_0\mu t}) \right)^2 =$$

$$= 2n_0 th^2(\sqrt{2n_0\mu t}) \frac{n_0^2}{ch^4(\sqrt{2n_0\mu t})} = 2n_0^3 \frac{sh^2(\sqrt{2n_0\mu t})}{ch^4(\sqrt{2n_0\mu t})}$$

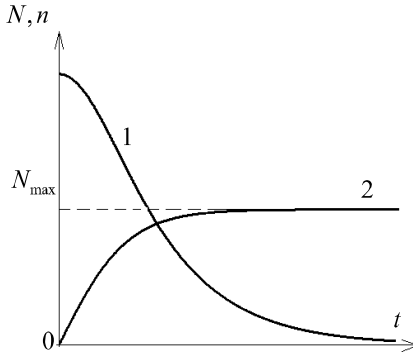


Рис. 12.1. Временная эволюция плотностей фотонов на основной частоте (1) и на удвоенной(2).

Таким образом мы получили, что согласно (12.7) – (12.8) и рисунка 12.1 плотность фотонов на основной частоте  $n$  монотонно убывает со временем, асимптотически приближаясь к нулю, а плотность фотонов второй гармоники монотонно возрастает асимптотически стремясь к  $\frac{n_0}{2}$ . Отметим также, что скорость изменения функций  $n(t)$  и  $N(t)$  существенно определяется начальной плотностью фотонов  $n_0$  (т.е фотонов на основной частоте).

### Контрольные вопросы

1. Как определить энергию фотона?
2. Что такое гамильтониан?
3. Что называют оператором рождения?
4. Что называют оператором уничтожения?
5. Запишите уравнение Гайзенберга.
6. Что такое расстройка резонанса?
7. В чем заключается динамика системы в фотонной модели генерации второй гармоники?

## ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В НАНО–ВОЛНОВОДАХ С ФОСФИДОМ ГАЛЛИЯ

Одна из ключевых задач интегрированной квантовой фотоники состоит в том, что наиболее эффективное обнаружение, хранение и манипулирование фотонами осуществляются в видимом спектральном диапазоне, где наиболее эффективная передача фотонов происходит на длинах волн телекоммуникаций. Для преодоления этого разрыва могут быть использованы нелинейные процессы. Нелинейный материал для процесса преобразования частоты должен удовлетворять нескольким требованиям: прозрачность как для длин волн телекоммуникаций так и для видимого диапазона длин волн, высокая нелинейность и высокий показатель преломления для обеспечения удержания сильного света, что важно для интегрированных фотонных платформ. В работе [1] по этим причинам был выбран фосфид галлия (GaP), обладающий высоким показателем преломления, хорошую теплопроводность для настройки температуры и широкий диапазон прозрачности от 550 нм до 11 мкм. Были разработаны и изготовлены нано–волноводы на основе GaP для получения высокой эффективности генерации второй гармоник за счет согласования и перекрытия фаз мод на основной частоте (накачки) и на частоте второй гармоники. На рисунке 13.1 показано преобразование инфракрасной длины волны со смещением красного цвета в видимую длину волны со смещением синего в нелинейной среде. Эффективность преобразования этого процесса зависит от фазового согласования и интеграла перекрытия мод между накачкой и модой второй гармоники.

Как показано на рисунке 13.2, когда рассогласование фаз между накачкой (волной на основной частоте) и волной на удвоенной частоте равно нулю, мощность генерации второй гармоники увеличивается по длине волновода. Когда рассогласование по фазе между накачкой и собственной модой второй гармоник велико, мощность генерации второй гармоник колеблется по длине волновода.

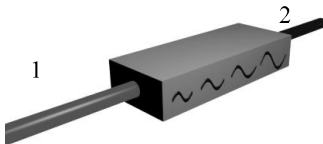


Рис. 13.1. Накачка (волна на основной частоте) в инфракрасном диапазоне (1) преобразуется в смещенную на синюю сигнал генерации второй гармоники в видимом диапазоне (2)

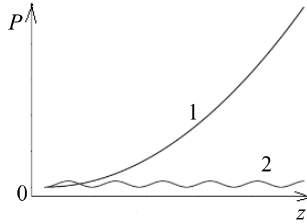


Рис. 13.2. Нормированная мощность волны на удвоенной частоте в зависимости от длины волновода. 1 – случай полного согласования фаз, 2 – случай не согласованного состояния фаз основной волны и волны на удвоенной частоте

На рисунке 13.3 показана схема экспериментальной установки по получению второй гармоники. Накачка (волна на основной частоте), длиной волны 1260 – 1360 нм и частотой около 400 кГц, подается в волновод с помощью конического линзового волновода. При этом длина волны накачки настраивается от 1260 нм до 1360 нм с шагом 0,1 нм, чтобы компенсировать изменения фазового синхронизма. Объектив с числовой апертурой, равной 0,7, используется для сбора выходного светового излучения. Выходной сигнал от объектива отображается с помощью камеры, которая фиксирует показания интенсивности выходящего светового потока.

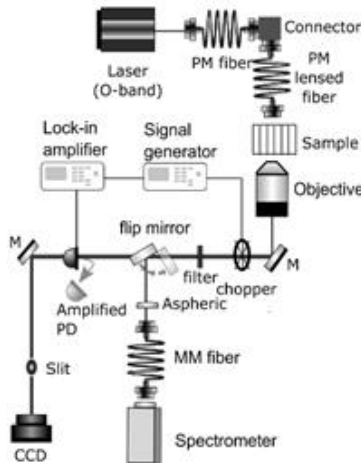


Рис. 13.3. Экспериментальная установка, демонстрирующая входной сигнал конического волновода, крепление микросхемы и выходной объектив для фокусировки второй гармоники, CCD – камера, используемая для анализа волны на удвоенной частоте

На рисунке 13.4 показан спектр волны на основной удвоенной частоте, полученный на спектрометре, а на вставке показан оптический спектр волны на основной частоте. Спектр представлен в зависимости от длины волны. Удвоение частоты, свидетельствует об уменьшении длины волны в два раза, что и наблюдается на рисунке 13.4.

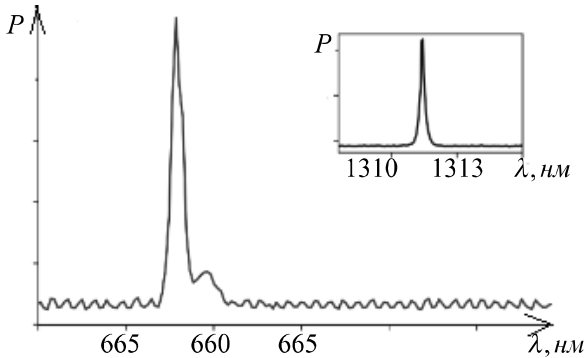


Рис. 13.4. Спектр генерации второй гармоники.  
На вставке приведен спектр волны на основной частоте

Таким образом, в работе [1] был разработан и испытан нановолновод на основе фосфида галлия для эффективной генерации второй гармоники. Продемонстрирована генерация второй гармоники в видимом диапазоне при условии фазового синхронизма. Представленные результаты способствуют развитию интегрированных фотонных платформ с эффективными нелинейными процессами смешения волн для классического и квантового применения.

### Контрольные вопросы

1. Опишите эксперименты, проведенные в [1].
2. При каких условиях в [1] наблюдалась вторая гармоника?
3. Какой материал был использован для изготовления волновода в [1], с помощью которого наблюдалась вторая гармоника.
4. Зарисуйте спектр генерации второй гармоники.

## **ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В НАНО-ВОЛНОВОДАХ AlGaAs**

Генерация второй гармоники нелинейно–оптический процесс с участием тензора восприимчивости, что позволяет в некоторых материалах конвертировать два фотона накачки в один на удвоенной оптической частоте. Эффективность процесса генерации второй гармоники зависит от условия согласования (полученного из закона сохранения импульса) и взаимодействия между профилями пространственного пучка волны на основной частоте и сгенерированной гармоники. Фазы накачки и волны на удвоенной частоте должны быть согласованы.

В [2] предложен нано–волновод AlGaAs, его особая геометрия позволяет получать достаточно высокую эффективность генерации второй гармоники из–за увеличения нелинейного перекрытия, обладает простым способом изготовления, возможностью интеграции с другими оптическими компонентами на чипе и перестраиваемостью фазы согласования фаз путем изменения температуры или использования различных волноводов различной ширины на одном кристалле. Относительно высокая эффективность данного устройства позволяет использовать его для обработки оптических сигналов. Было исследовано преобразование оптических сигналов от 1520–1600 нм до 760–800 нм. Показано, что длина волны на выходе может быть динамически настраиваема, путем определенной регулировки температуры или геометрических параметров волноводов. Кроме того, изменяя ширину волновода, можно также изменять дисперсионные характеристики устройства, давая возможность работать в области аномальной дисперсии и, таким образом, генерировать временные солитоны (структурно устойчивая уединенная волна, распространяющаяся в нелинейной среде).

### **Контрольные вопросы**

1. Какие преимущества устройства, разработанного в [2], для генерации второй гармоники?
2. К чему приводит изменение геометрии волновода?
3. От чего зависит эффективность генерации второй гармоники?

## ЭФФЕКТИВНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В ПЛОСКИХ ВОЛНОВОДАХ GaN С МАЛЫМИ ПОТЕРЯМИ

В последние годы значительное количество исследований было сосредоточено на GaN как на новом материале для нелинейной оптики и фотоники. GaN представляет собой полупроводник с большой шириной запрещенной зоны, который хорошо известен своими оптоэлектронными свойствами и многочисленными применениями в областях светоизлучающих устройств и высокочастотной электроники. В основном выращивается в виде тонких пленок методом парофазной эпитаксии металлов или молекулярно-лучевой эпитаксии на подложках из сапфира или кремния. Пленки GaN могут быть дополнительно структурированы для изготовления волноводов. Данные фотонные структуры могут улучшить генерацию второй гармоники, поскольку обеспечивают более высокие мощности и большие расстояния распространения. Как известно, чтобы реализовать эффективный процесс генерации второй гармоники необходимо соблюдение условия точного фазового синхронизма и в то же время сохранить низкие потери при ее распространении.

В [3] представлены волноводы на основе GaN, предназначенные для генерации второй гармоники с очень низкими потерями при распространении, ниже 1 дБ/см при 663 нм. Эксперименты по генерации второй гармоники также проводились в работах [4, 5]. Однако эффективность преобразования волны на основной частоте во вторую гармонику в [4, 5] ниже, чем в [3].

Общая схема эксперимента, проведенного в работе [3], показана на рисунке 15.1. В качестве лазерного источника был использован импульсный ОРО EKSPLA NT242 с частотой повторения 1 кГц и длительностью импульса 4 нс. Перед инжекцией в волновод, луч был сфокусирован с помощью выпуклой линзы с фокусным расстоянием 17 см. Накачка (волна на основной частоте) была длиной волны 1260 нм, которая распространялась около 4 мм в волноводе и генерировала вторую гармонику длиной волны 630 нм. Вторая гармоника и волна на основной частоте отделялись второй призмой и отправлялись на соответствующие детекторы.

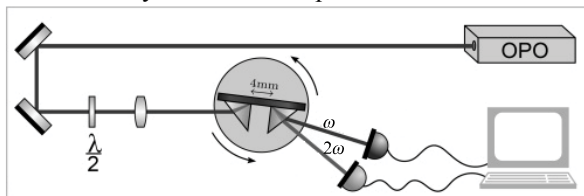


Рис. 15.1. Общая схема получения второй гармоники в [3]

Таким образом, в [3] показана перестраиваемость длин волн второй гармоники от видимой до ближней инфракрасной области спектра.

### **Контрольные вопросы**

1. Опишите экспериментальную установку для наблюдения второй гармоники?
2. Почему в [3] использовали полупроводник GaN?

## МНОГОПОЛЯРНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В НАНОРЕЗОНАТОРАХ

В течение многих лет управление светом на наноуровне было активным полем исследований, мотивируемым его разнообразными применениями для оптических наноантенн, интегральных фотонных схем, оптических вычислений и высокоскоростных фотонных устройств.

Методы, используемые для описания нелинейной генерации гармоник на наноуровне, основаны на мультиполярном разложении полей [6–8].

В [9] разработана комплексная мультиполярная теория генерации второй гармоники из квазистояний в цилиндрическом нанорезонаторе Al-GaAs. Генерацию второй гармоники получают в случае эффективного возбуждения моды с высокой добротностью. Для достижения эффективной связи с модой на частоте накачки многополярный состав источника накачки должен соответствовать многополярной структуре этой моды (рисунок 1).

В [9] было показано, что многомодовая интерференция и мультиполярное взаимодействие определяют функциональные возможности оптических нанорезонаторов и нелинейных наноантенн. Получено, что высококачественные моды суперрезонатора в отдельных субволновых диэлектрических частицах могут быть связаны с концепцией связанных состояний в континууме. Было предсказано, что возбуждение таких квазисостояний в идеализированных частицах будет стимулировать нелинейное преобразование частоты на наноуровне. Предложена гибридная металлодиэлектрическая наноантенная для повышения эффективности преобразования до десятков процентов из-за увеличения добротности резонансных состояний на основной частоте и частоте второй гармоники. С такими наноантеннами может быть реализован обратный процесс распада поля накачки в субгармоники, т.е. нелинейное параметрическое преобразование с понижением частоты. Результаты, полученные в [9], определяют глубокую концептуальную основу и новые перспективные стратегии в разработке функциональных элементов для приложений нанофотоники.

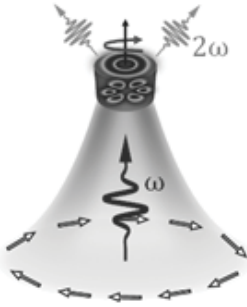


Рис. 16.1. Азимутально поляризованный цилиндрический векторный пучок частоты  $\omega$  возбуждает аксиально-симметричную сверхрезонаторную моду в нанодиске. В результате нелинейного взаимодействия генерируется свет второй гармоники  $2\omega$

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается нелинейное параметрическое преобразование с понижением частоты?
2. Что представляет собой наноантенна?
3. Где применяются или могут применяться наноантенны?

## ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ В ВОЛОКОННЫХ СВЕТОВОДАХ

История солитонов началась в 1834 году, когда Д.С. Рассел наблюдал и описал необычный тип волн на воде, распространяющихся без дисперсионного уширения. В 1872 году Ж.В. Буссинеск вывел уравнение, решение которого отвечало распространяющимся в любом из двух возможных направлений уединенным волнам. Эти волны могли проходить сквозь друг друга, сохраняя свою первоначальную форму. Более простое уравнение для волн на поверхности воды, бегущих только в одном направлении, было получено Д. Кортвегом и Г. де Фризом в 1895 году. В 1964 году Н. Забуски и М. Крускал нашли, что уравнение Кортвега–де Фриза имеет решения в виде уединенных волн, которые обладают свойствами частиц: сохраняют форму при распространении и после столкновения друг с другом. Это послужило основанием назвать их солитонами (т.е. “частицами уединенной волны”). В настоящее время во многих разделах физики солитоны стали важным элементом описания различных эффектов [10].

Одно из ограничений скорости передачи информации по волоконной линии связи при использовании импульсно–кодовой модуляции связано с уширением оптических импульсов по мере их распространения в волокне из-за дисперсии групповых скоростей. Дисперсионное уширение импульса может быть подавлено, если использовать достаточно мощные импульсы света. В работах [11, 12] предложено использовать оптические солитоны для передачи информации по волоконной линии связи. В [13, 14] выведено уравнение, описывающее распространение оптических импульсов в одномодовом волокне с учетом дисперсии групповых скоростей.

Проведенные в [15] эксперименты показали, что солитон действительно образуется из импульса длительностью 5 пс в волокне длиной 1 км при превышении порога мощности, равного 1 Вт. В эксперименте использовался лазер на центрах окраски с синхронизацией мод. Лазер накачивался излучением, мощностью 5 Вт и давал излучение мощностью 1–2,5 Вт на длине волны 1,23–1,46 мкм. В последующих работах [21, 22] продемонстрировано распространение импульсов длительностью 6–7 пс в волоконном световоде с отрицательной дисперсии на расстоянии 700 м. Исходные импульсы претерпевали изменения, характерные для нелинейной уединенной волны (солитона) (рисунок 17.1), при их пиковой мощности 1,24 Вт. При меньшей мощности импульс испытывал дисперсионное уширение, а при мощности 5 Вт сжимался в 3,5 раза. Наблюдалось также расщепление импульса на несколько субимпульсов и последующее их слияние в один импульс. Это явление называется рекуррентностью (рисунок 17.2).

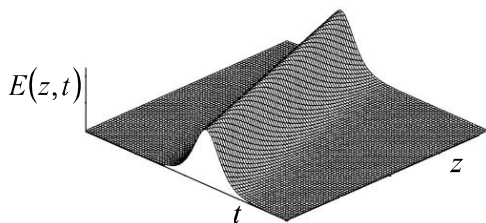


Рис. 17.1. Пространственный профиль солитона (яркий солитон)

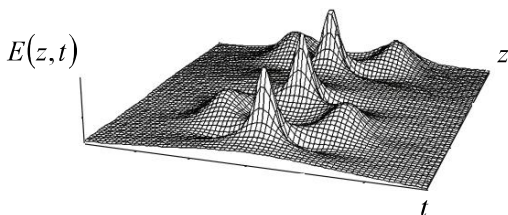


Рис. 17.2. Представлено явление повторяемости (рекуррентности)

На рисунке 17.3 представлен темный солитон, который выглядит как движущийся провал на фоне волны постоянной интенсивности.

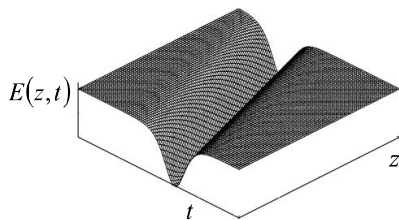
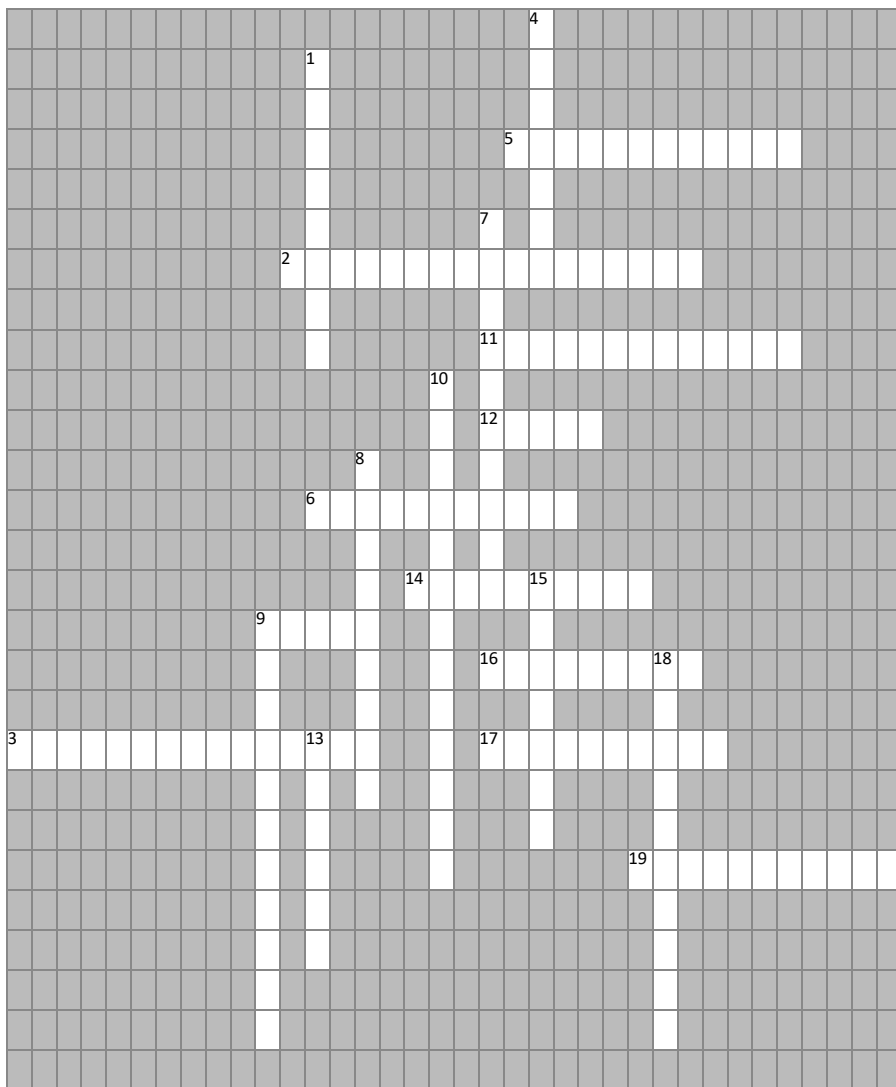


Рис. 17.3. Пространственный профиль солитона (темный солитон)

### Контрольные вопросы

1. Что такое солитон?
2. Опишите историю открытия солитонов?
3. Где используют оптические солитоны?
4. Чем отличается яркий солитон от темного?
5. Что называют рекуррентностью?

# Кроссворд



## По горизонтали:

2. Как называется условие наиболее эффективного энергообмена между собственной и вынуждающей волнами среды, имеющими одинаковые частоты, при их нелинейном взаимодействии? (Словосочетание записано через дефис)

3. Как называется явление световых пучков, обнаруженное в 1965 году (было предсказано в 1962 Г. А. Аскарьяном)?

5. Как называется среда, в которой каждая компонента поляризации определяется всеми компонентами поля  $P_x = \chi_{xx}E_x + \chi_{xy}E_y + \chi_{xz}E_z$  ?

6. С появлением лазеров оптика получила в свое распоряжение источник какого излучения, мощностью до  $10^{10}$  В ?

9. Что является изменением некоторой совокупности физических величин, которая способна перемещаться, удаляясь от места его возникновения, или колебаться внутри ограниченных областей пространства?

11. Взаимное увеличение или уменьшение результирующей амплитуды двух или нескольких когерентных волн при их наложении друг на друга, называется...?

12. Как называется устройство, преобразующее энергию накачки (световую, электрическую, тепловую, химическую и др.) в энергию когерентного, монохроматического, поляризованного и узконаправленного потока излучения?

14. Возникновение какой поправки в показателе преломления или в диэлектрической функции обусловлено, так называемым, эффектом самовоздействия распространения волны в кубической нелинейной среде?

16. Из данного уравнения видно, что поляризация квадратично нелинейной среды, колеблется на какой частоте?

$$\vec{P}_{\text{кв.}} = \frac{1}{4} \chi : \vec{e}\vec{e} \{A^2 e^{i(2\omega t - 2kr)} + \text{к.с.} + 2|A|^2\}$$

17. Какая оптика является разделом физической оптики, охватывающей исследования распространения мощных световых пучков в твердых телах, жидкостях и газах и взаимодействия с веществом при больших интенсивностях поля?

19. Как называется одна из двух характеристик, считавшаяся в долазерной физике основной характеристикой волны и определяющая ее взаимодействие с веществом?

## По вертикали:

1. Как называется твёрдое тело, в котором частицы расположены закономерно, образуя трёхмерно-периодическую пространственную укладку — кристаллическую решётку?

4. Кто в 1961 году с сотрудниками из США открыл эффект удвоения частоты света в кристаллах?

7. Как называется система, которая при выведении её из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы  $F$ , пропорциональной смещению  $x$ :  $F = -kx$ ?

8. В данном равенстве:  $\vec{E}(r, t) = \frac{1}{2} \vec{e} [A(r, t)e^{i(\omega t - kr)} + A^*(r, t)e^{-i(\omega t - kr)}]$ , коэффициент  $A$  - ...?

9. Какой эффект отсутствует в кубической нелинейной среде, в отличие от квадратично-нелинейной среды?

10. Расстояние  $l = \frac{\pi}{\Delta k}$  называется длиной чего?

13.  $\frac{\partial A_1}{\partial z} + \delta_1 A_1 = -i\sigma_1 A_1^* A_2 e^{-i\Delta k z}$  (1)

$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \delta_2 A_2 = -i\sigma_2 A_1^2 e^{i\Delta k z}$  (2), уравнения (1) и (2) – уравнения гене-

рации какой гармоники?

15. Один из выдающихся ученых, кто в 1923 году обнаружил уменьшение поглощения света урановым стеклом с ростом интенсивности света и объяснил это тем, что сильное электромагнитное поле приводит большую часть атомов в возбужденное состояние, в котором атомы не могут получать энергию?

18. Как называется плоская волна, у которой плоскости равных амплитуд и фаз совпадают?

## ЛИТЕРАТУРА

1. A.P. Anthur, Z. Haizhong, Y. Akimov, O. Junrong, D. Kalashnikova, L. Krivitsky “Second harmonic generation in gallium–phosphide nano–waveguides”, arXiv:2001.06142v1 (2020).
2. K.A. Rutkowska, D. Duchesne, M. Volatier, R. Ares, V. Aimez, R. Morandotti, “Second harmonic generation in AlGaAs nanowaveguides”, *Acta Phys. Pol. A*, 120, 725 – 731 (2011).
3. M. Gromovyi, J. Brault, A. Courville, S. Rennesson, F. Semond, G. Feuillet, P. Baldi, P. Boucaud, J.-Y. Duboz, M. P. De Micheli, “Efficient second harmonic generation in low-loss planar GaN waveguides”, *Opt. Express*, 25, 23035 (2017).
4. D. N. Hahn, G. T. Kiehne, J. B. Ketterson, G. K. L. Wong, P. Kung, A. Saxler, M. Razeghi, “Phase-matched optical second-harmonic generation in GaN and AlN slab waveguides,” *J. Appl. Phys.*, 85 (5), 2497 (1999).
5. D. Blanc, A. M. Bouchoux, C. Plumereau, A. Cachard, J. F. Roux, “Phase-matched frequency doubling in an aluminum nitride waveguide with a tunable laser source,” *Appl. Phys. Lett.*, 66 (6), 659 (1995).
6. D. Smirnova, Y. S. Kivshar, “Multipolar nonlinear nanophotonics,” *Optica*, 3, 1241 (2016).
7. D. A. Smirnova, A. B. Khanikaev, L. A. Smirnov, Y. S. Kivshar, “Multipolar third-harmonic generation driven by optically induced magnetic resonances,” *ACS Photonics*, 3, 1468 (2016).
8. D. Smirnova, A. I. Smirnov, Y. S. Kivshar, “Multipolar second-harmonic generation by mie-resonant dielectric nanoparticles,” *Physical Review*, A, 97 (2018).
9. I.I. Volokovskaya, L. Xu, L. Huang, A. Smirnov, A. Miroshnichenko, “Multipolar second-harmonic generation from high-Q quasi-BIC states in nanoresonators”, arXiv:2001.04318v1 (2020).
10. А.И. Маймистов “Солитоны в нелинейной оптике”, *Квантовая электроника*, 40, 9 (2010).
11. A. Hasegawa, F. Tappet, “Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion” *Appl. Phys. Lett*, 23, 142 (1973).
12. A. Hasegawa, F. Tappet, *Appl. Phys. Lett*, 23, 171 (1973).
13. M. Jain, N. Tzoar, *J. Appl. Phys.*, 49, 4649 (1978)
14. B. Bendow, P.D. Gianino, N. Tzoar, M. Jain, *J. Opt. Soc. Am.*, 70, 539 (1980).
15. D.M. Bloom, L.F. Mollenauer, Ch. Lin, N. Taylor, A.M. del Gaudio, *Opt. Lett.*, 4, 297 (1979).
16. L.F. Mollenauer, R.H. Stolen, J.P. Gordon, *Phys. Rev. Lett.*, 45, 1095 (1980).
17. L.F. Mollenauer, R.H. Stolen, M.N. Islam, *Opt. Lett.*, 10, 229 (1985).

Преобразование к нормальной форме Лежандра  
Все корни  $G(x)$  действительны

$G(x)$ корни	Старший коэффициент	Интервал	Преобразование $x =$	$\sin^2 \varphi =$	Соответствующие значения		$k^2$	$\mu$
					$x$	$\varphi$		
$G_4(x)$ , четыре действительных корня	1	$\alpha_1 \leq x$ или $x \leq \alpha_4$	$\frac{\alpha_1 \alpha_{42} - \alpha_2 \alpha_{41} \sin^2 \varphi}{\alpha_{42} - \alpha_{41} \sin^2 \varphi}$	$\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{41}} \frac{x - \alpha_4}{x - \alpha_2}$	$\alpha_4$ $\alpha_4$	0 $\pi/2$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_3)$	$\frac{2}{(\alpha_{31} \alpha_{42})^{1/2}}$
		$\alpha_3 \leq x \leq \alpha_2$	$\frac{\alpha_3 \alpha_{42} - \alpha_4 \alpha_{32} \sin^2 \varphi}{\alpha_{42} - \alpha_{32} \sin^2 \varphi}$	$\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{32}} \frac{x - \alpha_3}{x - \alpha_4}$	$\alpha_3$ $\alpha_3$	0 $\pi/2$		
	-1	$\alpha_4 \leq x \leq \alpha_3$	$\frac{\alpha_4 \alpha_{31} + \alpha_1 \alpha_{42} \sin^2 \varphi}{\alpha_{31} + \alpha_{42} \sin^2 \varphi}$	$\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{42}} \frac{x - \alpha_4}{\alpha_1 - x}$	$\alpha_4$ $\alpha_4$	0 $\pi/2$	$(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1)$	
		$\alpha_2 \leq x \leq \alpha_1$	$\frac{\alpha_2 \alpha_{31} - \alpha_3 \alpha_{21} \sin^2 \varphi}{\alpha_{31} - \alpha_{21} \sin^2 \varphi}$	$\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{21}} \frac{x - \alpha_2}{x - \alpha_3}$	$\alpha_2$ $\alpha_1$	0 $\pi/2$		
$G_6(x)$ три действительных корня	1	$\alpha_3 \leq x \leq \alpha_2$	$\alpha_3 + \alpha_{32} \sin^2 \varphi$	$\frac{x - \alpha_3}{\alpha_{32}}$	$\alpha_3$ $\alpha_3$	0 $\pi/2$	$\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}}$	$\frac{2}{(\alpha_{31})^{1/2}}$
		$\alpha_1 \leq x$	$\frac{\alpha_1 - \alpha_2 \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}$	$\frac{x - \alpha_1}{x - \alpha_2}$	$\alpha_1$ $\infty$	0 $\pi/2$		
	-1	$x \leq \alpha_3$	$\alpha_1 - \frac{\alpha_{31}}{\sin^2 \varphi}$	$\frac{\alpha_{31}}{\alpha_1 - x}$	$-\infty$ $\alpha_3$	0 $\pi/2$	$\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{31}}$	
		$\alpha_2 \leq x \leq \alpha_1$	$\frac{\alpha_2 \alpha_{31} - \alpha_3 \alpha_{32} \sin^2 \varphi}{\alpha_{31} - \alpha_{32} \sin^2 \varphi}$	$\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{32}} \frac{x - \alpha_2}{x - \alpha_3}$	$\alpha_2$ $\alpha_1$	0 $\pi/2$		

Учебное издание

ВВЕДЕНИЕ В ОПТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЯЮЩИЕ СРЕДЫ  
*Учебно-методическое пособие*

Издается в авторской редакции  
Компьютерная верстка Л.В. Савицкая

ИЛ № 06150. Сер. АЮ от 21.02.02. Подписано в печать 02.08.2021.  
Формат 60x90/16. Уч. изд. л. 5,5. Тираж 50 экз. Заказ № 1078.

Отпечатано в Изд-ве Приднестр. ун-та. 3300, г. Тирасполь, ул. Мира, 18.  
Опубликовано на Образовательном портале ПГУ им. Т.Г. Шевченко moodle.spsu.ru