ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г. ШЕВЧЕНКО
Бендерский политехнический филиал
Кафедра общеобразовательных и социально-экономических дисциплин

Математика

Методические указания

Бендеры, 2016

ББК 82
К 17

Составитель
Л. С. Лаврова, старший преподаватель математики.

Рецензенты:
И. Ф. Горшкова, преподаватель первой квалификационной категории.
Н.Г. Леонова, к.с.н., доцент кафедры «Прикладной математики и информатики» ГОУ «ПГУ им Т. Г. Шевченко».

К 17 Математика: Методические указания / составитель Л. С. Лаврова. - Бендеры , 2016 – 45с.

Методические указания предназначены для студентов 2 курса СПО по специальности 190631«Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта».
По каждой теме методические указания содержат краткий теоретический материал, задания для аудиторных, самостоятельных и индивидуальных работ. Индивидуальные работы составлены в 10 вариантах. Представленные дидактические задания и самостоятельные работы учитывают приложения математики, рекомендованные программой.

ББК 82
К 17

Рекомендовано Научно-методическим советом
ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Оглавление

Введение

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине "Математика" составлены в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования (третьего поколения) обязательных при реализации основных профессиональных образовательных программ по специальности 190631 «Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта» и охватывает три основные раздела изучаемого курса: «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление», «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

По каждой теме методические указания содержит краткий теоретический материал, задания для аудиторных, самостоятельных и индивидуальных работ. Каждая индивидуальная работа составлена в 10 вариантах и содержит демонстрационный вариант, который поможет студенту выстроить мысль в определенную логическую последовательность для получения необходимого результата. Представленые дидактические задания и индивидуальные работы учитывают приложения математики , рекомендованные програмной.В работах широко использованы внутрипредметные и межпредметные связи.

Методические указания составлены с целью оказания практической помощи студентам при выполнении практических работ по математике.

Теория пределов. Непрерывность функции

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если для всех значений x, достаточно близких к a и отличных от a, значение функции $f(x)$ сколь угодно мало отличается от числа b.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \qquad (1.1)$$

Свойства пределов:

1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$;
2. $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$;
3. $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)/\lim_{x\to a} g(x) \quad \left(\lim_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$;
4. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) \quad (c-const.)$;
5. $\lim_{x\to a} c = c \quad (c-const.)$;
6. $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}$.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$ (1.2)

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$ (1.3)

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x = x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x = x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c - const,\ c \neq 0,$ $c \neq \infty$, то, учитывая свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций, получим: $\frac{0}{c} \to 0$; $\frac{c}{0} \to \infty$; $\frac{\infty}{c} \to \infty$; $\frac{c}{\infty} \to 0$; $c\cdot\infty \to \infty$; $c\cdot 0 \to 0$; $a^{\infty} \to 0$, *если* $0 < a < 1$; $a^{\infty} \to \infty$ *если* $a > 1$.

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов: $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; $\left(\frac{0}{0}\right)$; $(0\cdot\infty)$; $(\infty-\infty)$; (1^{∞}); (∞^0); (0^0).

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в данной точке*** $\boldsymbol{x_0}$, если она: 1) определена в точке x_0; 2) имеет конечный предел при $x \to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$.

Функция называется непрерывной на некотором промежутке X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Классификация точек разрыва:

1) x_0 – точка устранимого разрыва, если
   а) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$;
   б) в точке x_0 функция не определена
2) x_0 – точка разрыва I рода, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$

   $h = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ - скачок функции
3) x_0 – точка разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует

1. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to 4} \left(x^2 + 5x - 3\right)$; б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - x + 5}{x^3 + x + 2}$; в) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - 8}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{2x}$; д) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 3}{2x^3 + 3x - 5}$; е) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 2x - 3}$;

ж) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 + 5x - 1}{3x^3 - x + 1}$; з) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2 - \sqrt{x + 4}}$; и) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^3 - 6x^2}{4x^5 + 2x^3 + x^2}$;

к) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - x - x^2}{x^3 + 3}$.

2. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg3x}{\sin 2x}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\frac{x}{2}}$; д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - tgx}{2x}$; е) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$; з) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^x$; и) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x + 4}{3x + 1}\right)^{x+1}$.

Самостоятельная работа.

Найти точки разрыва и установить их тип

$$а)\, f(x)=\begin{cases} -e^{-2x}, x<0; \\ 0, x=0; \\ e^{2x}, x>0; \end{cases} \qquad б)\, f(x)=\frac{\cos x}{x}; \qquad в)\, f(x)=e^{\frac{1}{x-5}}; \qquad г)\, f(x)=\frac{x^4-3x^2}{x(x-2)}.$$

Индивидуальная самостоятельная работа № 1

Найти пределы функций:

1) $а)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$, где $x_0=2;\ 3;\ \infty$; $\quad б)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; $\quad в)\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg6x\cdot\sin 3x\right)$;

$г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

2) $а)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3+8}{x^2-4x+4}$, где $x_0=-2;\ 3;\ \infty$; $\quad б)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-4x+x^3}{x-2x^3}$; $\quad в)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tgx}$;

$г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x-2}$

3) $а)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-27}{x-3}$, где $x_0=2;\ 3;\ \infty$; $\quad б)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x}{4+2x^3}$; $\quad в)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x}$;

$г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

4) $а)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$, где $x_0=2;\ 3;\ \infty$; $\quad б)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-2+x}{1+2x+3x^2}$; $\quad в)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}$;

$г)\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

5) $а)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x-12}{x+3}$, где $x_0=2;\ -3;\ \infty$; $б)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{2x-x^2}$; $\quad в)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin\frac{x}{2}}$;

$г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x-3}$.

6) $а)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-9}$, где $x_0=2;\ 3;\ \infty$; $\quad б)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; $\quad в)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}$;

$г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{5x}$.

7) $а)\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x^2+3x}{7x^3+3x+1}$; $\quad в)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 x}$;

$г)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{7x}$.

8) *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3-\sqrt{9+x}}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+x-3x^2}{3x-6x^2+7x^3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2\sin 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

9) *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{16+x^2}-4}{x^2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-6x^2+3x^3}{2+3x^2-4x^3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{8x}$.

10) *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+2x-3}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin\dfrac{x}{2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-1}{6x-2}\right)^{3x-5}$.

Решение демонстрационного материала:

Найти предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\left(5x^2-6x+7\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-3x-18}{x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x-1}{2x^3+5x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2+5x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3-6x^2+5x-1\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{4x+1}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-x}{x}$.

Решение:

1) Применяя теоремы о пределах имеем:

$$\lim_{x\to 3}\left(5x^2-6x+7\right)=\lim_{x\to 3}\left(5x^2\right)-\lim_{x\to 3}\left(6x\right)+\lim 7=5\lim_{x\to 3}x\cdot\lim_{x\to 3}x-6\lim_{x\to 3}x+\lim 7=5\cdot 3\cdot 3-6\cdot 3+7=34.$$

2) Теорему о пределе частного применить нельзя, т. к. при $x\to -2$ предел знаменателя равен нулю. Кроме того, и предел числителя равен нулю.

Преобразуем дробь, разложив числитель на множители:

$$3x^2-3x-18=3\left(x^2-x-6\right)=3\left(x+2\right)\left(x-3\right).$$

Поэтому $\dfrac{3x^2-3x-18}{x+2}=\dfrac{3\left(x+2\right)\left(x-3\right)}{x-2};\quad x\neq -2.$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-3x-18}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3\left(x+2\right)\left(x-3\right)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}3\left(x-3\right)=3\left(-2-3\right)=-15.$

3) Преобразуем дробь, т. к. при $x\to 1$ предел числителя и предел знаменателя равны нулю. Имеем

$$\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x+1)(x^2+3)}{(x-2)}\qquad (x\neq -2).$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x^2+3)}{x-2}=\dfrac{8}{-1}=-8.$

4) Разделив почленно числитель и знаменатель дроби на x^3 (наивысшую степень x), получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+x-1}{2x^3+5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{5}{x}}=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

5) Сократим дробь на общий множитель:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2+5x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x+5}=\frac{3\cdot 0-2}{2\cdot 0+5}=-\frac{2}{5}.$$

6) Умножим числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}$ и затем сократим дробь на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{5-x}\right)^2-\left(\sqrt{5+x}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{(5-x)-(5+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{5-x-5-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2}=\frac{2\sqrt{5}}{-2}=-\sqrt{5}.$$

7) Первые три слагаемых при $x\to\infty$ пределов не имеют. Вынося x^3 за скобки, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3-6x^2+5x-1\right)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}x^3\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=\infty.$$

(при $x\to\infty$ величины $\dfrac{6}{x},\dfrac{5}{x^2},\dfrac{1}{x^3}$ - бесконечно малые и их пределы равны нулю).

8) При $x\to\infty$ знаменатель $4x+1$ неограниченно возрастает, т. е. является величиной бесконечно большой, тогда обратная величина $1/(4x+1)$ есть бесконечно малая. Значит, искомый предел равен нулю .

9) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/5}\right)^{(x/5)\cdot 5}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/5}\right)^{(x/5)}\right)^5=e^5.$$

10) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}-1=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}-1=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}-1=3-1=2.$$

Производная. Правила дифференцирования

Производной функции $\boldsymbol{f(x)}$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx, при условии, что $\Delta x \to 0$, т. е.

$$\boldsymbol{y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \qquad (\mathbf{2.1})$$

Основные правила дифференцирования.

1. $c' = 0 \quad (c - const.)$;
2. $(u + v - \omega)' = u' + v' - \omega'$;
3. $(cu)' = cu' \quad (c - const.)$;
4. $x' = 1$;
5. $(uv)' = u'v + uv'$;
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Таблица 5. ***Основные формулы дифференцирования.***

	Основные элементарные функции	***Сложные функции***
1	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
2	$(log_a x)' = \frac{1}{x\ lna}$	$(log_a u)' = \frac{1}{u\ lna} \cdot u'$
3	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
4	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
5	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
6	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
7	$(a^x)' = a^u \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
8	$(sin\ x)' = cos\ x$	$(sin\ u)' = cos\ u \cdot u'$
9	$(cos\ x)' = -sin\ x$	$(cos\ u)' = -sin\ u \cdot u'$
10	$(tg\ x)' = \frac{1}{cos^2\ x}$	$(tg\ u)' = \frac{1}{cos^2\ u} \cdot u'$
11	$(ctg\ x)' = \frac{1}{sin^2\ x}$	$(ctg\ u)' = \frac{1}{sin^2\ u} \cdot u'$
12	$(arcsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(arcsin\ u)' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
13	$(arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(arccos\ u)' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
14	$(arctg\ x)' = \frac{1}{1 + x^2}$	$(arctg\ u)' = \frac{1}{1 + u^2} \cdot u'$

15	$(arcctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctg\ u)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Правило дифференцирования сложной функции

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (2.2)$$

1. Продифференцировать данные функции:

а) $y = (2x^2 - x - 2)(2x - 4)$; б) $y = \frac{5x}{1+x^2}$; в) $y = \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{x}$;

г) $y = \frac{2}{3x\sqrt{x}} + e^x + \lg 2$; д) $y = \frac{1-x^3}{1+x^3}$; е) $y = 2x^{-2/3} + 2tgx + \sqrt{3}$;

ж) $y = xe^x - 2\cos x + \sqrt{5}$; з) $y = \frac{5x^2 - 3x\sin x + 2}{x}$; и) $y = \frac{2}{4-x^2} + \ln|x|$;

к) $y = \left((x^3 - 1)\cos x + \ln 3\right)^{11}$; л) $y = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

2. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 3$. *Вычислите ее скорость в момент времени* $t = 4$ *с.*

3. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 6x + 5$ *в точке с абсциссой* $x = 4$.

4. Вычислить острый угол, под которым парабола $y = x^2 - 4$ *пересекает ось абсцисс.*

Самостоятельная работа.

1. Продифференцировать данные функции:

а) $y = \frac{6}{x^6} - \frac{5}{x} + 3x^5 - \sqrt{x} + 17$; *б)* $y = \frac{\sqrt{x^2+8x+1}}{3x+8}$; *в)* $y = \left(ctgx - \frac{1}{x} - e^x\right)^5$;

г) $y = \sqrt{\frac{4x-2}{5+2x}}$; *д)* $y = \ln\left(e^x - 2^x\right) + \sqrt{\cos x - \sin x}$.

2. Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = x$ *в точке (8; 4)*

3. Найти острый угол между параболами $y = x^2 - 2$ *и* $y = -x^2 - 6$ *в точке их пересечения, имеющей положительную абсциссу.*

4. Найти координаты точки, в которой касательная к параболе $y = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 5$ *образует угол* 135° *с осью Ox.*

Индивидуальная самостоятельная работа №2

Задание 1. Продифференцировать данные функции:

1. *а)* $y = 9x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + 4$; *б)* $y = \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+6}$; *в)* $y = \left(e^x + 3x + \arcsin x\right)^4$;

2. *а)* $y=\frac{3}{x}+5\sqrt{x}-4x^3+\frac{2}{x^4}-7$; *б)* $y=\frac{\sqrt{x^2+3x+1}}{x+1}$; *в)* $y=\left(9^x+2x^2+\cos x\right)^5$;

3. *а)* $y=3x^4+5\sqrt{x}-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+9$; *б)* $y=\frac{\sqrt{x^3+3x-2}}{2x-3}$; *в)* $y=\left(\ln x+tg\ x+\frac{1}{x}\right)^3$;

4. *а)* $y=7\sqrt{x}-\frac{2}{x^5}-3x^3+\frac{4}{x}-1$; *б)* $y=\frac{\sqrt{x^2-5x+9}}{3x+5}$; *в)* $y=\left(\sqrt{x}+\log_9 x+\sin x\right)^7$;

5. *а)* $y=7x+\frac{5}{x^2}-\sqrt{x}+\frac{6}{x}+1$; *б)* $y=\frac{\sqrt{x^3-6x+15}}{3+x}$; *в)* $y=\left(e^x+5x^3+\arccos x\right)^6$;

6. *а)* $y=5x^2-\sqrt{x}+\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x}+3$; *б)* $y=\frac{\sqrt{x^2+8x-1}}{8x+3}$; *в)* $y=\left(e^x+3x+\arcsin x\right)^4$;

7. *а)* $y=3x^5-\frac{3}{x}-\sqrt{x}+\frac{10}{x^5}+4$; *б)* $y=\frac{\sqrt{x^2-7x+4}}{7x-2}$; *в)* $y=\left(\ln x+ctg\ x-\frac{1}{x}\right)^5$;

8. *а)* $y=\sqrt{x}+\frac{3}{x}-4x^6+\frac{4}{x^5}+3$; *б)* $y=\frac{\sqrt{x^2+6x+1}}{3x-10}$; *в)* $y=\left(\sqrt{x}+2\log_3 x+\cos x\right)^8$;

9. *а)* $y=8x^2+\sqrt{x}-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^3}+4$; *б)* $y=\frac{\sqrt{x^2+9x-6}}{2x-5}$; *в)* $y=\left(2^x+2x^3-tg\ x\right)^4$;

10. *а)* $y=4x^6+\frac{5}{x}-\sqrt{x}-\frac{7}{x^4}+2$; *б)* $y=\frac{\sqrt{x^2-9x+1}}{9x+5}$; *в)* $y=\left(e^x+3x^5+\arcsin x\right)^3$;

Задание 2. *Зависимость пути от времени при прямолинейном движении тела массой* $\boldsymbol{m}$ *кг задана уравнением* $\boldsymbol{s=f(t)}$. *Найти кинетическую энергию тела* $\boldsymbol{E=\frac{mv^2}{2}}$ *через* $\boldsymbol{t}$ *с после начала движения.*

1. $s=t^2-4t+3,\quad m=9,\quad t=5.$
2. $s=8t+3t^2-1,\quad m=10,\quad t=4.$
3. $s=3t^2-4t-4,\quad m=11,\quad t=3.$
4. $s=3t^2-6t+4,\quad m=12,\quad t=6.$
5. $s=1-10t+3t^2,\quad m=13,\quad t=7.$
6. $s=3t^2+4t-1,\quad m=14,\quad t=8.$
7. $s=3t^2+6t-4,\quad m=15,\quad t=9.$
8. $s=5t^2+3t-4,\quad m=16,\quad t=10.$
9. $s=6t^2-7t-4,\quad m=5,\quad t=5.$
10. $s=9t+3t^2-4,\quad m=6,\quad t=10.$

Решение демонстрационного материала:

Задание 1. Продифференцировать данные функции:

а) $y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x} + 2$; *б)* $y = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{x + 4}$; *в)* $y = \left(e^x + 3x + \arcsin x\right)^4$.

Решение:

а) Применим правило дифференцирования суммы:

$$(u + v - \omega)' = u' + v' - \omega'.$$

$$y' = \left(2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x} + 2\right)' = \left(2x^5\right)' - \left(\frac{4}{x^3}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(3\sqrt{x}\right)' + (2)' =$$

$$= \left(2x^5\right)' - \left(4x^{-3}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(3\sqrt{x}\right)' + (2)';$$

воспользуемся правилами $(\mathrm{cu})' = \mathrm{cu}'$ *и* $c' = 0$, где $\mathrm{c} - \mathrm{const}$.:

$$y' = 2\left(x^5\right)' - 4\left(x^{-3}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' + 3\left(\sqrt{x}\right)';$$

воспользуемся формулами 3, 4 и 5:

$$y' = 2 \cdot 5x^4 - 4 \cdot (-3)x^{-4} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 10x^4 + 12x^{-4} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}} = 10x^4 + \frac{12}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

Итак $y' = 10x^4 + \frac{12}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$.

б) Применим правило дифференцирования частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

тогда:

$$y' = \left(\frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{x + 4}\right)' = \frac{\left(\sqrt{2x^2 - 2x + 3}\right)' \cdot (x + 4) - \sqrt{2x^2 - 2x + 3} \cdot (x + 4)'}{(x + 4)^2}$$

При дифференцировании числителя используем формулы 3 и 5, получаем:

$$y' = \frac{\left(\sqrt{2x^2 - 2x + 3}\right)' \cdot (x + 4) - \sqrt{2x^2 - 2x + 3} \cdot (x + 4)'}{(x + 4)^2} = \frac{(x + 4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 2x + 3}} \cdot \left(2x^2 - 2x + 3\right)' - \sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{(x + 4)^2} =$$

$$= \frac{(x + 4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 2x + 3}} \cdot (4x - 2) - \sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{(x + 4)^2} = \frac{(x + 4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 2x + 3}} \cdot (4x - 2)}{(x + 4)^2} - \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{(x + 4)^2} =$$

$$= \frac{(4x - 2)}{2\sqrt{2x^2 - 2x + 3} \cdot (x + 4)} - \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{(x + 4)^2}$$

в) Для вычисления производной сложной функции применим формулу:

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot \mathrm{u}'$$

получаем:

$$y' = \left(\left(e^x + 3x + \arcsin x \right)^4 \right)' = 4\left(\left(e^x + 3x + \arcsin x \right)^3 \right) \cdot \left(e^x + 3x + \arcsin x \right)'$$

При дифференцировании второго множителя используем правило:

$$(u + v)' = u' + v'$$

и формулы 3, 6 и 11, получаем:

$$\left(e^x + 3x + \arcsin x \right)' = \left(e^x \right)' + \left(3x \right)' + \left(\arcsin x \right)' = e^x + 3 + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Итак, в результате получаем:

$$y' = 4\left(\left(e^x + 3x + \arcsin x \right)^3 \right) \cdot \left(e^x + 3 + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$$

Задание 2. *Зависимость пути от времени при прямолинейном движении тела массой* $\boldsymbol{m} = 12$ *кг задана уравнением* $\boldsymbol{s} = t^2 + 2t + 3$. *Найти кинетическую энергию тела* $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{mv^2}}{\boldsymbol{2}}$ *через* $\boldsymbol{t} = 5$ *с после начала движения.*

Решение:

Так как скорость – это первая производная от пути, то

$$v = s' = \left(t^2 + 2t + 3 \right)' = 2t + 2.$$

Подставив $t = 5$ *с*, получаем:

$$v\left(5 \right) = 2 \cdot 5 + 2 = 12 \text{ м / с}.$$

Таким образом, кинетическая энергия тела равна:

$$E = \frac{12 \cdot 12^2}{2} = 864 \text{ Дж}.$$

Исследование функций с помощью производной

Переменная $y = f(x)$ является ***функцией*** от переменной x, если задана такая зависимость между этими переменными, которая позволяет для каждого значения x однозначно определить значение переменной y.

Совокупность всех тех значений, которые принимает аргумент x функции $y = f(x)$, называется ***областью определения*** этой функции. Обозначается $D(f)$.

Совокупность всех тех значений, которые принимает сама функция y, называется ***областью значения*** этой функции. Обозначается $E(f)$.

Нули функции – точки, в которых функция обращается в нуль. Это решения уравнения $f(x) = 0$ (точки пересечения графика с осью Ox).

Промежутки знакопостоянства функции – интервалы, на которых функция положительна (график расположен выше оси Ox) или отрицательна (график расположен ниже оси Ox). Это решения неравенств f(x)> 0 и f(x)< 0.

Функция $y = f(x)$ называется ***чётной***, если при всех значениях аргумента $f(-x) = f(x)$. Функция $y = f(x)$ называется ***нечётной***, если при всех значениях аргумента $f(-x) = -f(x)$. При этом имеется в виду, что если x входит в область определения, то и $-x$ также входит в область определения.

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $T > 0$, что выполняется равенство $f(x) = f(x \pm T)$, верное при всех x.

Критическими точками функции $y = f(x)$ называются точки, в которых производная обращается в нуль $f'(x) = 0$, а также точки, в которых производная не существует.

Точки экстремума функции – точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает или самое большое (max) значение, или самое малое (min) значение по сравнению со значениями в близких точках. Экстремумом функции называется значение функции в точке экстремума.

Промежутки монотонности - это промежутки возрастания и убывания функции. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) если в каждой точки интервала (a, b) существует производная и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$.

Кривая называется ***выпуклой вверх (вниз)*** на промежутке (a, b), если все точки кривой лежат, ниже (выше) любой её касательной к графику функции на промежутке (a, b) и $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$.

Точка М кривой, которая отделяет выпуклость от вогнутости, называется ***точкой перегиба*** графика функции.

Асимптотой графика функции называется прямая, к которой график функции при неограниченном удалении от начала координат также неограниченно приближается, но не касается.

Прямая $x = x_0$ параллельная оси Oy, называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \qquad (3.1)$$

Асимптота графика функции $y = f(x)$ называется наклонной, если она пересекает ось
Ox под углом $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, т.е. не под прямым углом. Частным случаем наклонной асимптоты является горизонтальная асимптота, параллельная оси Ox $(\varphi = 0)$.

Пусть наклонная асимптота имеет вид $y = kx + b$, тогда:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (3.2)$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) \qquad (3.3)$$

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости с координатами (x; $f(x)$), где x пробегает область определения функции $f(x)$.

Схема исследования функции с помощью производной и построение графика.

1. Найти область определения функции. Точки разрыва.
2. Выяснить, не является ли функция четной или нечетной.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).
4. Найти асимптоты графика функций.
5. Найти критические точки функции.
6. Определить промежутки монотонности и экстремумы функции.
7. Определить промежутки вогнутости и выпуклости и точки перегиба.
8. Построить график, используя полученные результаты исследования.

1. *Найдите промежутки монотонности функции:*

а) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$; б) $f(x) = \frac{1}{3}x - x^3$; в) $f(x) = x + \frac{9}{x}$.

2. *Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:*

а) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 8x^2$, $-1 \le x \le 2$; б) $f(x) = 4x + \frac{9}{x}$, $0{,}5 \le x \le 4$.

3. *Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба кривых:*

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$; б) $f(x) = 48x - x^3$.

4. *Исследовать функцию и построить её график:*

а) $f(x) = x^3 - 3x - 5$; б) $f(x) = \frac{x+3}{1-2x} + 1$; в) $f(x) = -x^2(x^2 - 4)$.

Самостоятельная работа.

1. *Найдите промежутки монотонности функции:* $f(x) = 2x - \sqrt{x}$.

2. *Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:*

$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$, $-2 \le x \le 2$.

3. *Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба кривой* $f(x) = xe^{-2x}$.

4. *Исследовать функцию и построить её график:* $f(x) = x^2 \ln x$.

Индивидуальная самостоятельная работа №3

Исследовать функцию и построить её график:

1. *а)* $y = 2x^3 - 6x^2 + 4$; *б)* $y = \frac{7-3x}{x^2-4}$.
2. *а)* $y = 2x^2 - x^4 + 3$; *б)* $y = \frac{4x}{x^2-1}$.
3. *а)* $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$; *б)* $y = \frac{5x^2}{x^2-1}$.
4. *а)* $y = 2x^3 + 3x^2 + 2$; *б)* $y = \frac{10x}{x^2+1}$.
5. *а)* $y = 2x^4 - x^2$; *б)* $y = \frac{6x^3}{x^2+1}$.
6. *а)* $y = 3x^3 - x^2 - 7x$; *б)* $y = \frac{5}{x^2+1}$.
7. *а)* $y = x^3 - 2x^2 + 8x - 2$; *б)* $y = \frac{4x}{x^2+1}$.
8. *а)* $y = x^3 + 3x - 8$; *б)* $y = \frac{x^2}{7x+21}$.

9. *а)* $y = x^3 - 2x^2 + 8x - 10;$ *б)* $y = \frac{x^2}{x-4}.$

10. *а)* $y = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2;$ *б)* $y = \frac{x^2}{x^2-5}.$

Решение демонстрационного материала:

Исследовать функцию и построить её график:

а) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2;$ *б)* $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}.$

Решение:

а) 1. Область определения функции интервал $(-\infty, +\infty)$, следовательно, $D(y) = R.$

2. Выясним, не является ли функция четной или нечетной.

$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - \frac{5}{2}(-x)^2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 = f(x)$, т. е. $f(-x) = f(x).$

Следовательно, функция четная.

3. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат

С осью Ox $(y = 0)$:

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2(x^2 - 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0; \\ x = -\sqrt{10}; \\ x = \sqrt{10}. \end{bmatrix}$$

С осью Oy $(x = 0)$: $y = 0.$

Следовательно, графика функции пересекается с осями координат в точках: $(-\sqrt{10}; 0), (0; 0)$ и $(\sqrt{10}; 0).$

4. Очевидно, что график функции не имеет асимптот.

5. Найдем критически точки.

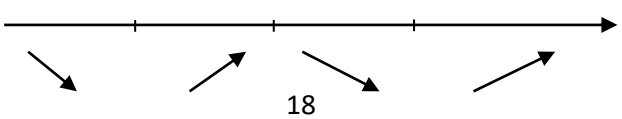
$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 - \frac{5}{2}\cdot 2x = x^3 - 5x.$$

$$f'(x) = 0: \quad x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 5\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0; \\ x^2 - 5 = 0; \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0; \\ x = -\sqrt{5}; \\ x = \sqrt{5}. \end{bmatrix}$$

6. Найдем промежутки монотонности и точки экстремума функции.

Критически точки разбивают всю область определения на 4 интервала. Найдем знак производной на каждом из этих интервалах.

$f'(x)$ $\quad -$ $\quad +$ $\quad -$ $\quad +$



$f(x)$ $-\sqrt{5}$ 0 $\sqrt{5}$ x

Функция возрастает на интервалах $(-\sqrt{5};0),(\sqrt{5};\infty)$ и убывает на интервале $(-\infty;-\sqrt{5}),(0;\sqrt{5})$.

Точка $x=0$ есть точка максимума.

$f_{max}=\frac{1}{4}\cdot 0^4-\frac{3}{2}\cdot 0^2=0.$

Точки $x=-\sqrt{3},\sqrt{3}$ есть точка минимума.

$f_{min}=\frac{1}{4}\cdot\left(-\sqrt{5}\right)^4-\frac{5}{2}\cdot\left(-\sqrt{5}\right)^2=\frac{25}{4}-\frac{25}{2}=-\frac{25}{4}=-6{,}25;$

$f_{min}=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^4-\frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2=\frac{25}{4}-\frac{25}{2}=-\frac{25}{4}=-6{,}25.$

Составим таблицу

x	$(-\infty;-\sqrt{5})$	$-\sqrt{5}$	$(-\sqrt{5};0)$	0	$(0;\sqrt{5})$	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5};\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{25}{4}$	↗	0	↘	$-\frac{25}{4}$	↗
	убывает	min	возрастает	max	убывает	min	возрастает

7. Найдем промежутки вогнутости и выпуклости и точки перегиба.

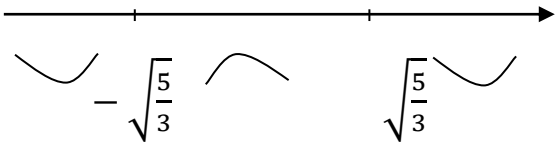
$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(x^3-5x\right)'=3x^2-5$$

$$f''(x)=0:\qquad 3x^2-5=0\Leftrightarrow 3x^2=5\Leftrightarrow x^2=\frac{5}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{\frac{5}{3}};\\ x=\sqrt{\frac{5}{3}}.\end{array}\right.$$

Найденные точки разбивают всю область определения на 3 интервала.

Найдем знак второй производной на каждом из этих интервалах.

$f''(x)$ + − +



$f(x)$ $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ $\sqrt{\frac{5}{3}}$ x

Функция вогнута вверх на интервалах $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}};\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ и вогнута вниз $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{5}{3}};\infty\right)$.

Найдем значение функции в точках $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ и $\sqrt{\frac{5}{3}}$:

$$f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^4-\frac{3}{2}\cdot\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{25}{9}-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{25}{36}-\frac{25}{6}=-3{,}47;$$

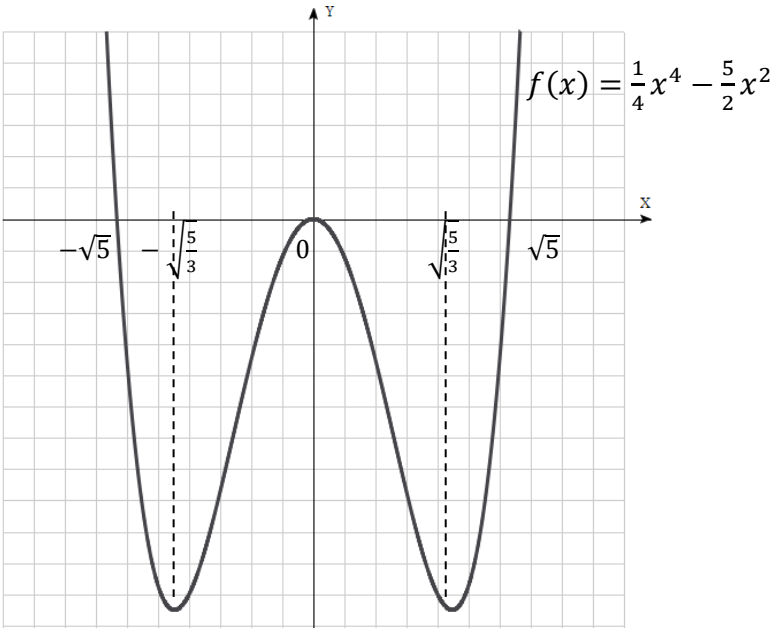
$$f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^4-\frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{25}{9}-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{25}{36}-\frac{25}{6}=-3{,}47.$$

Точка $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}};-3{,}47\right),\left(\sqrt{\frac{5}{3}};-3{,}47\right)$ - точки перегиба.

Составим таблицу

x	$\left(-\infty;-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$	$-\sqrt{\frac{5}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{5}{3}};\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{5}{3}};\infty\right)$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	⌣	-3,47	⌢	-3,47	⌣
	вогнута вниз	точка перегиба	вогнута вверх	точка перегиба	вогнута вниз

8. Построить график, используя полученные результаты исследования.



б) 1. Область определения функции множество всех действительных чисел, кроме тех при которых знаменатель равен нулю, т. е. $x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq -2$.

Следовательно, $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;\infty)$.

2. Выясним, не является ли функция четной или нечетной.

$f(-x)=\frac{(-x)^2-3}{(-x)+2}=\frac{x^2-3}{-x+2}\neq \pm f(x)$, следовательно, функция не является ни чётной, ни нечётной.

3. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат

С осью *Ox* $(y=0)$:

$$\frac{x^2-3}{x+2}=0 \Leftrightarrow x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{3}; \\ x=\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

С осью *Oy* $(x=0)$: $y=\frac{0^2-3}{0+2}=-\frac{3}{2}=-1{,}5.$

Следовательно, графика функции пересекается с с осями координат в точках: $\left(-\sqrt{3};0\right)$; $\left(\sqrt{3};0\right)$ и $(0;-1{,}5)$.

4. Найдем асимптоты графика функций.

Найдем вертикальные асимптоты.

Т.к. $x=-2-$ точка разрыва функции, исследуем поведение функции в этой точке слева и справа $\lim\limits_{x\to -2-0}\dfrac{x^2-3}{x+2}=\infty,\qquad \lim\limits_{x\to -2+0}\dfrac{x^2-3}{x+2}=\infty.$

Т.к. пределы равны ∞значит $x=-2$ точка разрыва второго рода.

Следовательно, прямая $x=-2-$ вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты $y=\kappa x+b,$ где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x^2+2x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3-x^2-2x}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-3}{x+2}=-2.$$

Следовательно, прямая $y=x-2$ является наклонной асимптотой.

5. Найдем критические точки функции

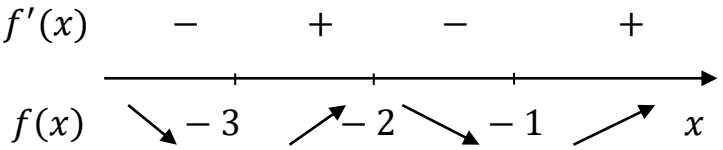
$$f'(x)=\left(\frac{x^2-3}{x+2}\right)'=\frac{\left(x^2-3\right)'\cdot(x+2)-\left(x^2-3\right)\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{2x\cdot(x+2)-\left(x^2-3\right)\cdot 1}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+4x-x^2+3}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}.$$

$$f'(x)=0:\qquad \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x+3=0;\\ x+2\neq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1;\\ x=-3;\end{array}\right.\\ x\neq -2.\end{cases}$$

6. Найдем промежутки монотонности и точки экстремума функции.

Критические точки разбивают всю область определения на 4 интервала. Найдем знак производной на каждом из этих интервалах.



Функция возрастает на интервалах $(-3;-2),(-1;\infty)$ и убывает на интервале $(-\infty;-3),(-2;-1)$.

Точки $x=-3,\ 1$ есть точки минимума.

$$f_{min}=f(-3)=\frac{(-3)^2-3}{-3+2}=\frac{6}{1}=-6;$$

$$f_{min}=f(-1)=\frac{(-1)^2-3}{-1+2}=-\frac{2}{1}=-2.$$

Составим таблицу

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-2)$	-2	$(-2;1)$	-1	$(1;\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	-	-	0	+
$f(x)$	↘	-6	↗	-	↘	-2	↗
	убывает	min	возрастает	-	убывает	min	возрастает

7. Найдем промежутки вогнутости и выпуклости и точки перегиба.

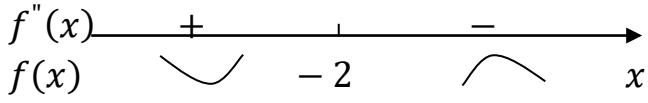
$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}\right)'=\frac{\left(x^2+4x+3\right)'(x+2)-\left(x^2+4x+3\right)\left((x+2)^2\right)'}{\left((x+2)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{(2x+4)(x+2)^2-\left(x^2+4x+3\right)\cdot 2(x+2)(x+2)'}{(x+2)^4}=\frac{(2x+4)(x+2)^2-\left(x^2+4x+3\right)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{(x+2)\left((2x+4)(x+2)-2\left(x^2+4x+3\right)\right)}{(x+2)^4}=\frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x-6}{(x+2)^3}=\frac{2}{(x+2)^3};$$

$$f''(x)=0:\qquad \frac{2}{(x+2)^3}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\in R;\\ x+2\neq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in R;\\ x\neq -2.\end{cases}$$

Найденная точка разбивает всю область определения на 2 интервала. Найдем знак второй производной на каждом из этих интервалах.

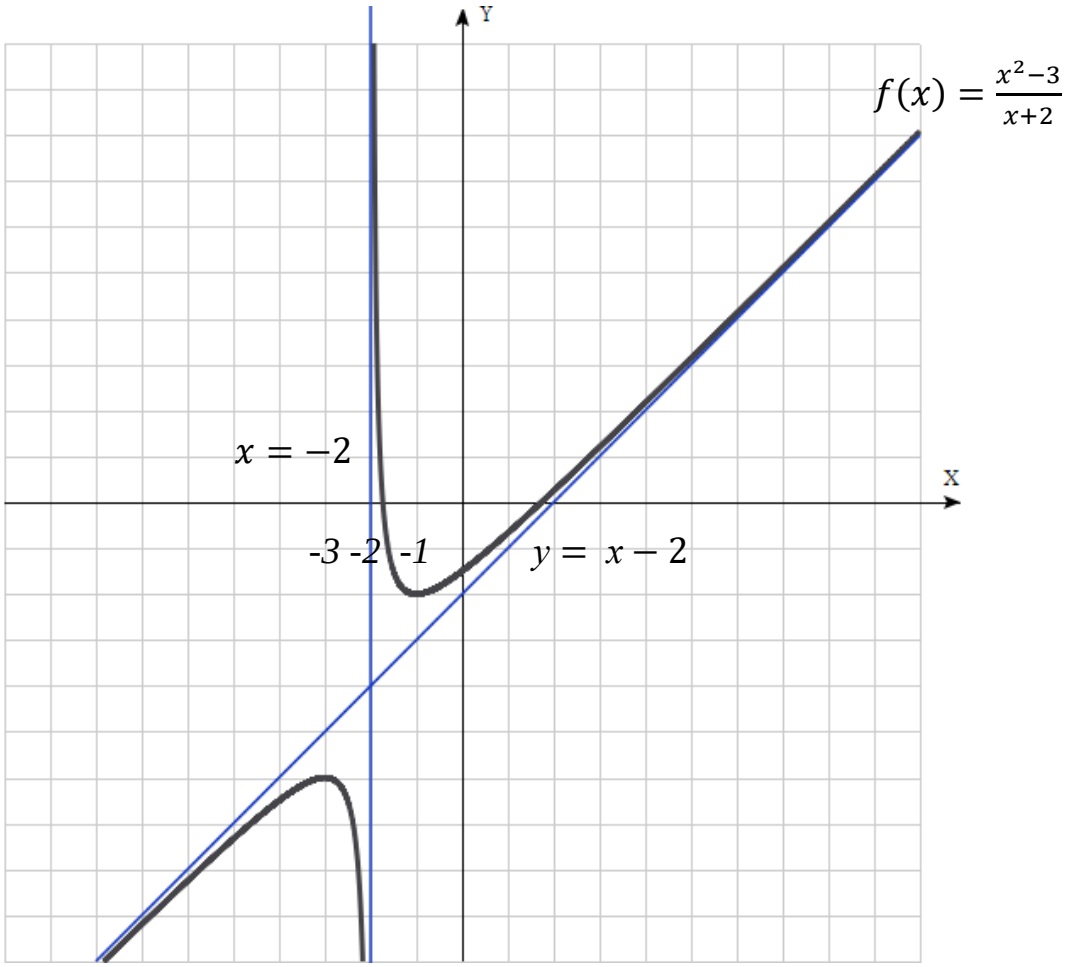


Функция вогнута вверх на интервале $(-2;\infty)$ и вогнута вниз $(-\infty;-2)$.

Составим таблицу

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;1)$
$f''(x)$	+	-	-
$f(x)$	⌣	-	⌢
	вогнута вниз	-	вогнута вверх

8. Построить график, используя полученные результаты исследования.



Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a, b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a, b), если $F'(x) = f(x)$

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x) = F(x) + C$ где $C - const$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$, C — const.

Операция нахождения первообразной для данной функции называется ***интегрированием***. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad (\mathbf{4.1})$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx;$
2. $\int dF(x) = F(x) + C;$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \qquad k$ — const;
4. $\int\left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du = C; \quad C = \text{const};$
2. $\int du = u + C;$
3. $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$
3а. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$
4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
6. $\int e^u du = e^u + C;$
7. $\int \cos u\, du = \sin u + C;$
8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C;$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{tg}u + C;$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\text{ctg}u + C;$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$ 13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$

14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C;$ 15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$ 17. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$

18. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Метод замены переменной

Пусть $x = \varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)\mathrm{dx} = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt \qquad (\mathbf{4.2})$$

При этом, если $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \mathrm{F(t)} + \mathrm{C},$ то

$$\int f(x)\mathrm{dx} = \mathrm{F}\big(\psi(x)\big) + \mathrm{C},$$

где $\psi(x)$— функция, обратная $\varphi(t)$.

Данная формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx = \varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t = \psi(x)$.

Интегрирование по частям.

Если производные функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны, то справедлива формула: $\int udv = uv - \int vdu.$ $(\mathbf{4.3})$

Данная формула называется формулой интегрирования по частям.

В качестве $u(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

1. *Пользуясь таблицей и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы. Результат интегрирования проверить дифференцированием:*

$а)\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx;\quad б)\int 4\left(x^2-x+3\right)dx;\quad в)\int\left(x^4+\sqrt[5]{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx;$

$г)\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx;\quad д)\int\frac{x^2}{x^2+1}dx;\quad е)\int\frac{x^4}{1+x^2}dx;$

$г)\int\left(\sin x-5\cos x\right)dx;\quad д)\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx;\quad е)\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx.$

2. *Проинтегрировать заменой переменной.*

$а)\int(7-2x)^3dx;\quad б)\int\frac{dx}{(4-3x)^2};\quad в)\int\left(x^2+3\right)^5\cdot xdx;\quad г)\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}};\quad г)\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{1-\sin x}};$

$д)\int\frac{e^{3x}dx}{e^{3x}+1};\quad е)\int a^{x^4}x^3dx;\quad ж)\int x\cos\left(x^2+1\right)dx.$

3. *Проинтегрировать по частям.*

$а)\int x\cos xdx;\quad б)\int(1-x)\sin xdx;\quad в)\int\frac{\ln x}{x^3}dx;\quad г)\int xe^xdx;\quad д)\int\frac{x^2dx}{\sin^2 x};\quad е)\int arc\sin xdx.$

Самостоятельная работа.

Найдите следующие интегралы:

$а)\int\frac{\cos x}{9+\sin^2 x}dx;\quad б)\int\sin^2 x\cos^2 xdx;\quad в)\int\sin 5x\cos xdx;\quad г)\int\frac{2-3x}{x^2+2}dx;\quad г)\int\frac{1-2x-x^3}{1-x^2}dx;$

$д)\int\sin^2(1-x)dx;\quad е)\int tg^4 3xdx.$

Индивидуальная самостоятельная работа № 4

Задание 1. *Найти функцию по ее дифференциалу* $dy=f(x)\,dx$, *если функция принимает значение* b *при* $x=x_0$.

1. $f(x)=4x^3-3x^2+2x-5,\quad y=2,\quad x_0=2.$
2. $f(x)=8x^3-6x^2-2x+4,\quad y=6,\quad x_0=1.$
3. $f(x)=5x^3-6x^2+3x-8,\quad y=5,\quad x_0=2.$
4. $f(x)=3x+x^3-2x^2+5,\quad y=4,\quad x_0=1.$
5. $f(x)=-6x^2+8x^3-2x+4,\quad y=10,\quad x_0=1.$
6. $f(x)=5x^3+6x^2-3x+7,\quad y=3,\quad x_0=2$
7. $f(x)=\sin 2x-6\cos^2 x\sin x,\quad y=\frac{3}{2},\quad x_0=\frac{\pi}{2}.$
8. $f(x)=\cos 2x-6\sin^2 x\cos x,\quad y=2,\quad x_0=\frac{\pi}{2}.$
9. $f(x)=\cos 2x-6\cos^2 x\sin x,\quad y=2,\quad x_0=\pi.$
10. $f(x)=\sin 2x-6\sin^2 x\cos x,\quad y=\frac{1}{2},\quad x_0=\frac{\pi}{6}.$

Задание 2. *Найти интегралы:*

1) *а)* $\int\left(3x^2-x^5-4\right)dx$; *б)* $\int\frac{5xdx}{\sqrt{5x^2+3}}$; *в)* $\int(x+4)\cdot\cos 3xdx$.

2) *а)* $\int\left(x+2x^6+4x^2\right)dx$; *б)* $\int e^{\cos 2x}\cdot\sin 2xdx$; *в)* $\int(x+6)\cdot\cos 4xdx$.

3) *а)* $\int\left(x^5-2x-4\right)dx$; *б)* $\int\frac{3xdx}{\sqrt{9x^2+2}}$; *в)* $\int(x+1)\cdot\cos 7xdx$.

4) *а)* $\int\left(2x^4+3x-1\right)dx$; *б)* $\int e^{3x^3+4}\cdot x^2dx$; *в)* $\int x\cdot\sin\frac{x}{5}dx$.

5) *а)* $\int\left(2x-x^6+3x^2\right)dx$; *б)* $\int\frac{2xdx}{\sqrt{2x^2+5}}$; *в)* $\int(x+1)\cdot\sin\frac{x}{3}dx$.

6) *а)* $\int\left(2x^6-x+4\right)dx$; *б)* $\int\frac{xdx}{e^{2x^2+1}}$; *в)* $\int(x+3)\cdot\sin\frac{x}{4}dx$.

7) *а)* $\int\frac{2x^6-x^5+1}{x}dx$; *б)* $\int\frac{xdx}{\sqrt{3x^2-6}}$; *в)* $\int(x-2)\cdot e^x dx$.

8) *а)* $\int\frac{2x^6-x^3+4}{x^4}dx$; *б)* $\int\frac{x^2dx}{e^{x^3+1}}$; *в)* $\int(x-1)\cdot\cos 5xdx$.

9) *а)* $\int\frac{x^5-1+x^3}{x^3}dx$; *б)* $\int\frac{xdx}{\sqrt{5-3x^2}}$; *в)* $\int(x-2)\cdot\cos 4xdx$.

10) *а)* $\int\frac{x^2-2x^5+3}{x^6}dx$; *б)* $\int e^{7x^2+2}\cdot xdx$; *в)* $\int(x-3)\cdot\cos xdx$.

Задание 3. *Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением* $v=f(t)$. *Найдите закон движения точки, если за время* t *с она пройдет путь* S *м.*

1. $v(t)=t^2-4t+3,\quad t=3,\quad S=20.$
2. $v(t)=8t+3t^2-1,\quad t=1,\quad S=5.$
3. $v(t)=3t^2-4t-4,\quad t=2,\quad S=8.$
4. $v(t)=3t^2-6t+4,\quad t=3,\quad S=8.$
5. $v(t)=1-10t+3t^2,\quad t=4,\quad S=10.$
6. $v(t)=3t^2+4t-1,\quad t=3,\quad S=0.$
7. $v(t)=3t^2+6t-4,\quad t=2,\quad S=8.$
8. $v(t)=5t^2+3t-4,\quad t=3,\quad S=12.$
9. $v(t)=6t^2-7t-4,\quad t=2,\quad S=15.$
10. $v(t)=9t+3t^2-4,\quad t=3,\quad S=14.$

Решение демонстрационного материала:

Задание 1.

Найти функцию по ее дифференциалу $dy=(2x^3-3x^2+5x-7)\,dx$, *если функция принимает значение* $y=3$ *при* $x=2$.

Решение:

Проинтегрируем обе части равенства.

$$\int dy = \int \left(2x^3 - 3x^2 + 5x - 7\right) dx;$$

Получаем:

$$\int dy = \int \left(2x^3 - 3x^2 + 5x - 7\right) dx;$$

Используем свойства 3 и 4, разобьем интеграл от суммы функции на сумму интегралов, при этом постоянные множители вынесем за знак интегралов.

$$\int dy = 2\int x^3 dx - 3\int x^2 dx + 5\int x dx - 7\int dx;$$

Применим табличные интегралы 2, 3.

$$y = \frac{2x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 7x + C.$$

Подставим начальные условия $y = 3$ *при* $x = 2$.

$$3 = \frac{2 \cdot 2^4}{4} - \frac{3 \cdot 2^3}{3} + \frac{5 \cdot 2^2}{2} - 7 \cdot 2 + C;$$

$$3 = \frac{2 \cdot 16}{4} - \frac{3 \cdot 8}{3} + \frac{5 \cdot 4}{2} - 7 \cdot 2 + C;$$

$$3 = 8 - 8 + 10 - 14 + C;$$

$$3 = -4 + C;$$

$$C = 7.$$

Таким образом, искомая функция имеет вид:

$$y = \frac{2x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 7x + 7.$$

Задание 2. *Найти интегралы:*

$$а)\int \frac{3 - 2x^8 - x^3 - x^4}{x^4} dx; \qquad б)\int \frac{7x dx}{\sqrt{3x^2 + 4}}; \qquad в)\int e^{5-4x^2} \cdot x dx; \qquad г)\int (x - 7) \cdot \sin 5 dx.$$

Решение:

а) Для вычисления данного интеграла следует разделить многочлен, стоящий в числителе, на знаменатель. Если это выполнить, то получиться, что:

$$\int \frac{3 - 2x^8 - x^3 - x^4}{x^4} dx = \int \left(\frac{3}{x^4} - 2x^4 - \frac{1}{x} - 1\right) dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{используем свойства 3 и 4, разобьем интеграл от суммы} \\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные} \\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{array}\right\} = 3\int x^{-4} dx - 2\int x^4 dx -$$

$$-\int \frac{1}{x} dx - \int dx = \left\{\begin{array}{l}\text{используем табличные} \\ \text{интегралы 3, 4, 2}\end{array}\right\} = \frac{3x^{-3}}{-3} - \frac{2x^5}{5} - \ln x - x + C =$$

$$= -\frac{1}{x^3} - \frac{2x^5}{5} - \ln x - x + C.$$

б) Вычислим данный интеграл, произведя подстановку

$$\int \frac{7xdx}{\sqrt{3x^2+4}} = \left| \begin{array}{l} t = 3x^2 + 4 \\ dt = 6xdx \\ dx = \dfrac{dt}{6x} \end{array} \right| = \int \frac{7x \cdot \frac{dt}{6x}}{\sqrt{t}} = \frac{7}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула } 3a \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \frac{7}{6} \cdot 2\sqrt{t} + C = \frac{7}{3}\sqrt{t} + C.$$

Подставляя в результат интегрирования $t = 3x^2 + 4$, получаем:

$$\int \frac{7xdx}{\sqrt{3x^2+4}} = \frac{7}{3}\sqrt{3x^2+4} + C.$$

в) Вычислим данный интеграл, произведя подстановку.

$$\int e^{5-4x^2} \cdot xdx = \left| \begin{array}{l} t = 5 - 4x^2 \\ dt = -8xdx \\ dx = \dfrac{dt}{-8x} \end{array} \right| = \int e^t \cdot x \frac{dt}{-8x} = -\frac{1}{8}\int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула } 6 \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = -\frac{1}{8}e^t + C.$$

Подставляя в результат интегрирования $t = 5 - 4x^2$, получаем:

$$\int e^{5-4x^2} \cdot xdx = -\frac{1}{8}e^{5-4x^2} + C.$$

г) Для вычисления данного интеграла применим интегрирование по частям, используя формулу: $\int udv = uv - \int vdu.$

$$\int (x-7) \cdot \sin 5xdx = \left| \begin{array}{ll} u = x - 7 & du = dx \\ dv = \sin 5xdx & v = -\dfrac{\cos 5x}{5} \end{array} \right| = (x-7) \cdot \left(-\frac{\cos 5x}{5}\right) - \int \left(-\frac{\cos 5x}{5}\right) dx =$$

$$= -(x-7) \cdot \frac{\cos 5x}{5} + \frac{1}{5}\int \cos 5xdx = -(x-7) \cdot \frac{\cos 5x}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin 5x}{5} + C =$$

$$= -\frac{x\cos 5x}{5} + \frac{7\cos 5x}{5} + \frac{\sin 5x}{25} + C.$$

Задание 3. *Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением* $v(t) = 3x^2 + 9x - 7$. *Найдите закон движения точки, если за время* $t = 4$ *с она пройдет путь* $S = 16$ *м.*

Решение:

Так как расстоянии – это интеграл от скорости, то

$S = \int (3x^2 + 9x - 7)dx$, *где*

$$\int\left(3x^2+9x-7\right)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{используем свойства 3 и 4, разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{array}\right\}=3\int x^2dx+$$

$$+\,9\int xdx-7\int dx=\left\{\begin{array}{l}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 2, 3}\end{array}\right\}=\frac{3x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}-7x+C.$$

Подставим начальные условия $t=4$ *с и* $S=16$ *м.*

$$16=\frac{3\cdot4^3}{3}+\frac{9\cdot4^2}{2}-7\cdot4+C;$$

$$16=64+72-28+C;$$

$$16=108+C;$$

$$C=-92.$$

Таким образом, закон движения точки имеет вид:

$$S=\frac{2x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-7x-92.$$

Определенный интеграл

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (\mathbf{5.1})$$

где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$,

Данная формула называется ***формулой Ньютона — Лейбница***.

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$

2) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

4) $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$

5) $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,\ C - \text{const};$

6) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx;$

7) Если $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dx, \qquad (\mathbf{5.2})$$

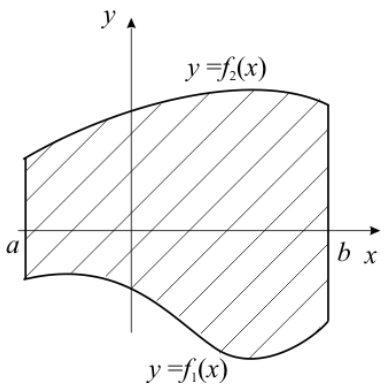
где $\propto = \psi(\alpha),\ \beta = \psi(b),\ t = \psi(x)$ — обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям приобретает вид:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (\mathbf{5.3})$$

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат



Если плоская фигура (рис.) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (\mathbf{5.4})$$

1. *Вычислить определенные интегралы*

$а) \int_1^2 \left(x^3 + 10x\right)dx;$ $б) \int_{-2}^3 \left(3x^2 + 6x - 2\right)dx;$ $в) \int_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx;$ $г) \int_0^8 \left(21x - 19\right)dx;$

$д) \int_{-4}^0 \left(x^3 + 8\right)dx;$ $в) \int_{10}^{13} \left(2x + 7\right)dx.$

2. *Вычислить определенные интегралы заменой переменной:*

$а) \int_{-2}^1 (2x-5)^3\,dx;$ $б) \int_0^2 \frac{dx}{(6-2x)^2};$ $в) \int_{-1}^1 \left(2x^2+6\right)^4 \cdot x dx;$ $г) \int_{-1}^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2+5}};$ $г) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-\cos x}}.$

3. *Проинтегрировать по частям.*

$а) \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 x\sin x dx;$ $б) \int_0^{\pi} (1-x)\sin x dx;$ $в) \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx;$ $г) \int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x dx;$ $д) \int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \cos 5x dx.$

4. *Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.*

а) $y = x^2 - 2,\ y = 1 - 2x$ б) $y = x^3,\ y = 8,\ x = 0$

в) $y = 3x^2 + 1,\ y = 3x + 6$ г) $y = x^2,\ y = x + 1$

Самостоятельная работа.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = \sqrt{x};\ y = 3 - x.$

2) $y^2 = x^3 + 6x - 5;\ x = 0;\ y = 4.$

3) $y = \ln x;\ y = \ln^2 x.$

Индивидуальная самостоятельная работа № 5

Задание 1. *Вычислить определенные интегралы.*

1) $а)\int_0^2 \frac{dx}{3-x}$; $б)\int_0^{\pi} 3x\cos\frac{x}{2}dx$.

2) $а)\int_{-5}^0 \frac{dx}{1-4x}$; $б)\int_0^{1/2} 8x\,arctg\,2xdx$.

3) $а)\int_1^9 \frac{dx}{3x-2}$; $б)\int_{\ln 3}^{\ln 5} 3xe2^x dx$.

4) $а)\int_{-2}^1 \frac{dx}{4-3x}$; $б)\int_1^2 4xe^{\frac{-x}{3}}dx$.

5) $а)\int_{-1}^1 \frac{dx}{5-3x}$; $б)\int_1^e \frac{7\ln x}{x}dx$.

6) $а)\int_{-2}^0 \frac{dx}{3-2x}$; $б)\int_1^2 4x\ln x dx$.

7) $а)\int_{-1}^1 \frac{dx}{5+4x}$; $б)\int_1^2 \frac{6\ln x dx}{x^2}$.

8) $а)\int_{-2}^0 \frac{dx}{1-7x}$; $б)\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4x\sin 2x dx$.

Задание 2. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями*

1) $а)y=-x^2+9$ *и* $y=0$; $б)y=x^2$ *и* $y=4x-3$; $в)y=x^2$ *и* $y=4x-3$ *и* $y=0$.

2) $а)y=-x^2+16$ *и* $y=0$; $б)y=x^2$ *и* $y=2x+3$; $в)y=x^2$ *и* $y=2x+3$ *и* $y=0$.

3) $а)y=-x^2+4$ *и* $y=0$; $б)y=x^2$ *и* $y=3-4x$; $в)y=x^2$ *и* $y=3-4x$ *и* $y=0$.

4) $а)y=-2x^2+12x$ *и* $y=0$; $б)y=x^2$ *и* $y=3x-2$; $в)y=x^2$ *и* $y=3x-2$ *и* $y=0$.

5) $а)y=-x^2+x+6$ *и* $y=0$; $б)y=x^2$ *и* $y=2x+8$; $в)y=x^2$ *и* $y=2x+8$ *и* $y=0$.

6) $а)y=-x^2+6x-5$ *и* $y=0$; $б)y=\frac{1}{9}x^2$ *и* $y=\frac{1}{3}x+2$; $в)y=\frac{1}{9}x^2$ *и* $y=\frac{1}{3}x+2$ *и* $y=0$.

7) $а)y=-x^2-2x+8$ *и* $y=0$; $б)y=-x^2$ *и* $y=x-1$; $в)y=-x^2$ *и* $y=x-1$ *и* $y=0$

8) $а)y=-x^2+2x+3$ *и* $y=0$; $б)y=x^2$ *и* $y=1+\frac{3}{4}x$; $в)y=x^2$ *и* $y=1+\frac{3}{4}x$ *и* $y=0$.

9) $а)y=-x^2+3x-4$ *и* $y=0$; $б)y=x^2$ *и* $y=x+2$; $в)y=x^2$ *и* $y=x+2$ *и* $y=0$.

10) $а)y=-x^2+8x+9$ *и* $y=0$; $б)y=x^2$ *и* $y=x-2$; $в)y=x^2$ *и* $y=x-2$ *и* $y=0$.

Решение демонстрационного материала:

Задание 1. *Вычислить интегралы.*

$а)\int_{-2}^1 \frac{dx}{8-4x}$; $б)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{4}x\sin 4x dx$.

Решение:

а) Вычислим данный интеграл, произведя подстановку

$$\int_{-2}^{1}\frac{dx}{8-4x}=\left|\begin{array}{c} t=8-4x \\ dt=-4dx\Rightarrow dx=-\dfrac{dt}{4} \\ x_1=-2\Rightarrow t_1=16 \\ x_2=1\Rightarrow t_2=4 \end{array}\right|=\int_{16}^{4}\frac{-\frac{dt}{2}}{t}=-\frac{1}{2}\int_{16}^{4}\frac{dt}{t}=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 4}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=-\frac{1}{2}\ln|t|\Big|_{16}^{4}=$$

$$=-\frac{1}{2}(\ln 4-\ln 16)=\frac{1}{2}(\ln 16-\ln 4)=\frac{1}{2}\ln\frac{16}{4}=\frac{1}{2}\ln 4=\ln 2.$$

б) Для вычисления данного интеграла применим интегрирование по частям, используя формулу: $\int_a^b udv=uv\big|_a^b-\int_a^b vdu.$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{4}x\sin 4xdx=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\sin 4xdx=\left|\begin{array}{cc} u=x & du=dx \\ dv=\sin 4xdx & v=-\dfrac{\cos 4x}{4}\end{array}\right|=\frac{1}{4}x\cdot\left(-\frac{\cos 4x}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}-$$

$$-\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-\frac{\cos 4x}{4}\right)dx=-\frac{1}{4}\left(\pi\cdot\frac{\cos 4\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\cos 4\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{4}\right)+\frac{\sin 4x}{16}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)-$$

$$+\frac{\sin 4\pi}{16}-\frac{\sin 4\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{16}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{3\pi}{8}=-\frac{3\pi}{32}.$$

Задание 2. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:*

а) $y=-x^2+9$ *и* $y=0;$ *б)* $y=x^2$ *и* $y=4x-3;$ *в)* $y=x^2$ *и* $y=2-x$ *и* $y=0.$

Решение:

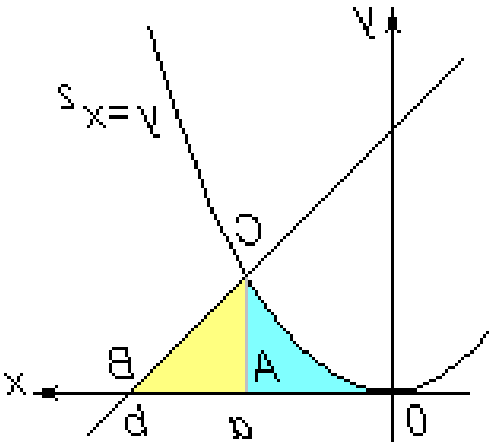
б) Построим схематический рисунок.

Для построения параболы $y=x^2$ возьмем несколько точек:

x	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
y	*9*	*4*	*1*	*0*	*1*	*4*	*9*

Для построения прямой $y = 2 - x$ достаточно знать две точки:

x	0	1
y	2	1



Найдем координаты точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 2 - x$.

Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x; \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x; \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2, \\ x_2 = 1. \end{array} \right.$$

Тогда

$$y_1 = 2 - (-2) = 4,$$

$$y_2 = 2 - 1 = 1.$$

Итак, точки пересечения $(-2; 4)$ и $(1; 1)$.

Площадь полученной фигуры найдем по формуле

$$S = S_{OAC} + S_{ACB} = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx$$

Получим:

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{4}{2} \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6},$$

$$S = \frac{5}{6} (\textit{кв.ед.})$$

Дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Обыкновенным дифференциальным уравнением n – го порядка для функции *y* аргумента *x* называется соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

где *F* – заданная функция своих аргументов.

Обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка (*n*=1) имеет вид: $F(x, y, y') = 0$ или, если его удается разрешить относительно производной: $y' = f(x, y)$. Общее решение *y=y(x,C)* или общий интеграл $\Phi(x, y(x), C) = 0$ уравнения 1-го порядка содержат одну произвольную постоянную. Единственное начальное условие для уравнения 1-го порядка $y(x_0) = y_0$ позволяет определить значение константы из общего решения или из общего интеграла.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида $y' = f(x)g(y)$ или

$$f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0$$

Для того, чтобы в уравнении (6.1) разделить переменные, т.е. привести это уравнение к уравнению с разделенными переменными, нужно произвести следующие действия:

1. Выразить производную функции через дифференциалы dx и dy.
2. Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобки.
3. Разделяют переменные.
4. Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.
5. Если заданы начальные условия, то находят частное решение.

1. *Найти общее решение дифференциального уравнения:*

$а) xdy + 2ydx = 0;$ $б) \frac{dy}{2x} = ydx;$ $в) x^2dy = y^2dx;$

$г) y' = x;$ $д) y' = y^2 \cos x;$ $е) y' - y - 1 = 0.$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

а) $2ydx=(1+x)dy,$ *если* $y=4$ *при* $x=1;$

б) $(1+y^2)dx=xydy,$ *если* $y=1$ *при* $x=2;$

в) $(1+x^3)dy=3x^2ydy,$ *если* $y=2$ *при* $x=0;$

г) $(1+x^2)dy-2xydx=0,$ *если* $y=4$ *при* $x=1;$

г) $y'+ytgx=0,$ *если* $y=2$ *при* $x=0.$

Самостоятельная работа.

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $x^2(y+1)dx+(x^3-1)(y-1)dy=0;$ б)$(x+xy^2)dx+(y-x^2y)dy=0;$

в) $(1+x^2)y'+y\sqrt{1+x^2}=xy;$ *г)* $y'=\sqrt[3]{2y+3}\cdot x^2\cdot\cos(x^3).$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

а) $(1+e^x)ydy=e^xdx(1+y^2),$ *если* $y=\sqrt{3}$ *при* $x=0;$

б) $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0,$ *если* $y=0$ *при* $x=-1.$

Индивидуальная самостоятельная работа № 6

Задание 1. *Найти частное решение дифференциального уравнения.*

1. *а)* $(x+3)dy-(y+2)dx=0,$ *если* $y=3$ *при* $x=2;$

   б) $y'+2y+4=0,$ *если* $y=5$ *при* $x=0.$

2. *а)* $(1-x)dy-(y-1)dx=0,$ *если* $y=3$ *при* $x=-2;$

   б) $y'-y+4=0,$ *если* $y=5$ *при* $x=0.$

3. *а)* $2(x+1)dy=ydx,$ *если* $y=3$ *при* $x=2;$

   б) $y'-2y-4=0,$ *если* $y=2$ *при* $x=0.$

4. *а)* $(x^2+1)dy=2xydx,$ *если* $y=2$ *при* $x=1;$

   б) $y'+2y-3=0,$ *если* $y=-\frac{1}{2}$ *при* $x=0.$

5. *а)* $(x^2+1)dy=xydx,$ *если* $y=2$ *при* $x=\sqrt{3};$

   б) $y'+4y-6=0,$ *если* $y=\frac{1}{2}$ *при* $x=0.$

6. *а)* $\frac{dy}{x-1}=\frac{dx}{y-4},$ *если* $y=4$ *при* $x=0;$

   б) $y'-2y-4=0,$ *если* $y=-1$ *при* $x=0.$

7. *а)* $(1+x)ydy-(1+y)xdx=0,$ *если* $y=3$ *при* $x=2;$

   б) $y'+2y-4=0,$ *если* $y=-1$ *при* $x=0.$

8. *а)* $(3-x)dy-(y+1)dx=0,$ *если* $y=3$ *при* $x=2;$

   б) $y'-y+1=0,$ *если* $y=5$ *при* $x=0.$

9. *а*) $3(x-1)dy = 2ydx$, *если* $y=3$ *при* $x=2$;

б) $y'-3y-5=0$, *если* $y=2$ *при* $x=0$.

10. *а*) $(x+1)dy = 2ydx$, *если* $y=2$ *при* $x=1$;

б) $y'-2y-8=0$, *если* $y=-\frac{1}{2}$ *при* $x=0$.

Задание 2. *Составить уравнение кривой, проходящей через точку М и имеющей угловой коэффициент* $\frac{dy}{dx}$

1. $M(1;\ 2)$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x}$.
2. $M(2;\ 1)$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$.
3. $M(2;\ 2)$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y}$.
4. $M(4;\ 3)$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$.
5. $M(1;\ 3)$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4x}$.
6. $M(5;\ -2)$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$.
7. $M(1;\ 2)$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$.
8. $M(2;\ 1)$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x}$.
9. $M(2;\ 2)$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4x}$.
10. $M(4;\ 3)$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x}$

Решение демонстрационного материала:

Задание 1. *Найти частное решение дифференциального уравнения.*

а) $(x+4)ydy-(y+3)dx=0$, *если* $y=-2$ *при* $x=-3$;

б) $y'-2y-3=0$, *если* $y=-1$ *при* $x=1$;

Решение:

а) Имеем уравнения с разделяющимися переменными.

Разделим в этом уравнении переменные:

$$(x+4)ydy=(y+3)dx;\Leftrightarrow \frac{ydy}{(y+3)}=\frac{dx}{(x+4)};$$

Интегрируя, получим:

$$\int\frac{ydy}{(y+3)}=\int\frac{dx}{(x+4)};$$

где $\int\frac{ydy}{(y+3)}=\int\frac{(y+3)-3}{(y+3)}dy=\int\frac{(y+3)}{(y+3)}dy-\int\frac{3}{(y+3)}dy=\int dy-\int\frac{3}{(y+3)}dy=y-3\ln(y+3)+C_1;$

$$\int\frac{dx}{(x+4)}=\ln(x+4)+C_2;$$

Итак

$$y-3\ln(y+3)=\ln(x+4)+C;$$

Реализуя начальное условие $y(-3)=-2$, имеем:

$$3-3\ln(-2+3)=\ln(-3+4)+C;\Leftrightarrow 3-3\ln1=\ln1+C;\Leftrightarrow C=3.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид:

$$y-3\ln(y+3)=\ln(x+4)+3.$$

б) Имеем уравнения с разделяющимися переменными.

Разделим в этом уравнении переменные:

$$\frac{dy}{dx} - 2y - 3 = 0; \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2y + 3; \Leftrightarrow \frac{dy}{2y+3} = dx;$$

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{dy}{2y+3} = \int dx; \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(2y+3) = x + C;$$

Реализуя начальное условие $y(1) = -1$, имеем:

$$\frac{1}{2}\ln(2\cdot(-1)+3) = 1 + C; \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 1 = 1 + C; \Leftrightarrow C = -1.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид: $\frac{1}{2}\ln(2y+3) = x - 1;$

Задание 2. *Составить уравнение кривой, проходящей через точку M(1;3) и имеющей угловой коэффициент* $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6y}$.

Решение:

Используя условия, составим дифференциальное уравнение:

$$y' = \frac{1}{6y};$$

Имеем уравнения с разделяющимися переменными.

Разделим в этом уравнении переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6y}; \Leftrightarrow 6ydy = dx;$$

Интегрируя, получим:

$$\int 6ydy = \int dx; \Leftrightarrow 6\frac{y^2}{2} = x + C; \Leftrightarrow 3y^2 = x + C;$$

Реализуя начальное условие $y(1) = 3$, имеем:

$3\cdot 3^2 = 1+C$; <=> $27 = 1 + C$; <=> $C = +26$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид: $3y^2 = x+26$

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение $y' = f(x, y)$ (1) называется *однородным*, если $f(x, y)$ может быть представлена как функция отношения своих аргументов, т.е.

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (7.1)$$

Таким образом, однородное уравнение имеет вид: $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ (7.2)

Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $u = \frac{y}{x}$ (2) $\Rightarrow$ $y = u \cdot x$, $y' = u'x + ux' = u'x + u$, (7.3)

где u – новая неизвестная функция от x, u' - ее производная по x.
Однородное уравнение (7.3) имеет общий интеграл:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u}\Bigg|_{u=\frac{y}{x}} = ln|x| + C$$

1. *Найти общие решение дифференциального уравнения.*

а) $y' = \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$; *б)* $y' = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$; *в)* $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2y}{x}$;;

г) $y' = \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$; *д)* $(x - y)ydx - x^2dy = 0$; *е)* $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$.

2. *Найти частное решение дифференциального уравнения:*

а) $y' = -\frac{x + y}{x}$, *если* $y = 0$ *при* $x = 2$

б) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy$, *если* $y = 1$ *при* $x = 1$;

в) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$, *если* $y = 1$ *при* $x = 2$.

Самостоятельная работа.

1. *Найти общее решение дифференциального уравнения:*

а) $(y' + 1)\ln\frac{y + x}{x + 3} = \frac{y + x}{x + 3}$; *б)* $y' = \frac{y + 2}{x + 1} + tg\frac{y - 2x}{x + 1}$;

в) $2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$; *г)* $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x + y}{x}$;.

Индивидуальная самостоятельная работа № 7

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. *а)* $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10;$ *б)* $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy};$ *в)* $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

2. *а)* $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5;$ *б)* $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy};$ *в)* $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

3. *а)* $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12;$ *б)* $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy};$ *в)* $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$

4. *а)* $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8;$ *б)* $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy};$ *в)* $xy' = \sqrt{3x^2 + y^2} + y.$

5. *а)* $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6;$ *б)* $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy};$ *в)* $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

6. *а)* $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4;$ *б)* $y' = \frac{2x + 2y}{2x - y};$ *в)* $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

7. *а)* $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3;$ *б)* $y' = \frac{x + y}{x - y};$ *в)* $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

8. *а)* $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2;$ *б)* $y' = \frac{x^2 + 4xy - y^2}{3x^2 - 3xy},$ *в)* $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

9. *а)* $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6;$ *б)* $y' = \frac{2x + y}{3x - 3y};$ *в)* $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$

10. *а)* $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 7;$ *б)* $y' = \frac{x^2 + 5xy - y^2}{x^2 - 5xy},$ *в)* $xy' = 2\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

Решение демонстрационного материала:

Задание 1. *Найти частное решение дифференциального уравнения.*

а) $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1;$ *б)* $y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy};$ *в)* $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

Решение:

а) Данное уравнение является однородным уравнением, т.к. имеет вид $y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$

Полагая $y = ux,$ находим $y' = u'x + u.$

Подставим значения y и y' в преобразованное уравнение: $u'x + u = u^2 + u + 1.$ Приводим его к уравнению с разделяющимися переменными: $u'x = 1 + u^2.$ Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$\int \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{dx}{x},$ откуда $arctgu = \ln|x| + C.$

Подставляя $u = \frac{y}{x},$ получаем $arctg\frac{y}{x} = \ln|x| + \ln c.$

б) Данное уравнение является однородным уравнением, т.к. его можно записать в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Преобразуем данное уравнение:

$$y' = \frac{x^2\left(1+2\frac{y}{x}-5\frac{y^2}{x^2}\right)}{x^2\left(2-6\frac{y}{x}\right)} \Leftrightarrow y' = \frac{1+2\frac{y}{x}-5\frac{y^2}{x^2}}{2-6\frac{y}{x}}.$$

Полагая $y = ux,$ находим $y' = u'x + u.$

Подставим значения y и y' в преобразованное уравнение: $u'x + u = \frac{1+2u-5u^2}{2-6u}$. Приводим его к уравнению с разделяющимися переменными: $u'x = \frac{1+u^2}{2-6u}$. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int \frac{2-6u}{1+u^2}du = \int \frac{dx}{x}, \quad \text{откуда} \quad 2arctgu - 3\ln\left|1+u^2\right| = \ln|x| + \ln c.$$

Подставляя $u = \frac{y}{x},$ получаем $2arctg\frac{y}{x} - 3\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + \ln c.$

в) Данное уравнение является однородным уравнением, т.к. его можно записать в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Преобразуем данное уравнение:

$$y' = \frac{3\sqrt{2x^2+y^2}+y}{x} \Leftrightarrow y' = 3\sqrt{\frac{2x^2+y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' = 3\sqrt{2+\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}.$$

Полагая $y = ux,$ находим $y' = u'x + u.$

Подставим значения y и y' в преобразованное уравнение: $u'x + u = 3\sqrt{2+u^2} + u.$ Приводим его к уравнению с разделяющимися переменными: $u'x = 3\sqrt{2+u^2}$. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+u^2}}du = 3\int \frac{dx}{x}. \quad \text{откуда} \quad \ln\left|u+\sqrt{2+u^2}\right| = 3\ln|x| + C.$$

Подставляя $u = \frac{y}{x},$ получаем $\ln\left|\frac{y}{x}+\sqrt{2+\frac{y}{x^2}^2}\right| == 3\ln|x| + C.$

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0,$$

(8.1)

где p и q – действительные числа, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется *характеристическим* для данного уравнения (3). Оно является квадратным уравнением, поэтому в зависимости от величины дискриминанта $D = p^2 - 4q$ возможны три случая.

1) $D > 0$. Тогда корни характеристического уравнения (4) действительные и различные – $k_1 \neq k_2$. Они дадут два линейно независимых решения: $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Следовательно, в этом случае по теореме 1 общее решение уравнения (3) можно записать в виде: $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$.

2) $D = 0$. В этом случае $k_1 = k_2$. Поэтому одно решение уравнения (3) будет $y_1 = e^{k_1 x}$. В качестве второго, линейно независимого с первым, можно взять функцию $y_2 = xe^{k_1 x}$. Следовательно, в этом случае по теореме 1 общее решение уравнения (3) можно записать в виде:

$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$, или $y = e^{k_1 x}(c_1 + c_2 x)$.

3) $D < 0$. В этом случае корни уравнения (4) комплексно-сопряженные: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i$. Тогда в качестве линейно независимых решений можно взять функции $y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$. Следовательно, в этом случае по теореме 1 общее решение уравнения (3) можно записать в виде: $y = c_1 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$, или $y = e^{\alpha x}(c_1 \cdot \cos \beta x + c_2 \cdot \sin \beta x)$.

1. *Найти общие решение дифференциального уравнения.*

а) $y'' + 3y' - 4y = 0$;	б) $y'' - 9y' + 14y = 0$;	*в*) $y'' - y = 0$;
г) $y'' + 2y' = 0$;	*д*) $y'' - 14y' + 49y = 0$;	*е*) $y'' - 6y' + 34y = 0$;
ж) $y'' + 6y' + 8y = 0$;	*з*) $y'' - 16y = 0$;	*и*) $y'' + 8y' + 16y = 0$.

2. *Найти частное решение дифференциального уравнения:*

а) $y'' - y' - 2y = 0,$ *если* $y = 3$ *и* $y' = 0$ *при* $x = 0;$

б) $y'' - 2y' + 2y = 0,$ *если* $y = 1$ *и* $y' = 3$ *при* $x = 0;$

в) $y'' - 10y' + 25y = 0,$ *если* $y = 2$ *и* $y' = 8$ *при* $x = 0;$

г) $y'' + 3y' + 2y = 0,$ *если* $y = -1$ *и* $y' = 3$ *при* $x = 0.$

Самостоятельная работа.

1. *Найти частное решение дифференциального уравнения:*

а) $y'' - 4\sqrt{2}y' + 6y = 0,$ *если* $y = -3$ *и* $y' = \sqrt{2}$ *при* $x = 0;$

б) $y'' + 4y = 0,$ *если* $y = 1$ *и* $y' = -2$ *при* $x = \frac{\pi}{4};$

2. *Найти интегральную кривую дифференциального уравнения* $y'' + 2y' + 2y = 0$, *проходящее через точку* $(0;\ 1)$ *и касающуюся в этой точке прямой* $y = x + 1.$

Индивидуальная самостоятельная работа № 8

Задание 1. *Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*

1. *а*) $25y'' - 10y' + y = 0;$ *б*) $y'' + y' + y = 0.$
2. *а*) $49y'' + 14y' + y = 0;$ *б*) $y'' + 4y = 0.$
3. *а*) $y'' + 9y = 0;$ *б*) $y'' + 4y' + 20y = 0.$
4. *а*) $y'' - 4y' = 0;$ *б*) $16y'' + 8y' + y = 0.$
5. *а*) $y'' + 2y' - 8y = 0;$ *б*) $y'' + 3y' = 0.$
6. *а*) $y'' + 2y' + 17y = 0;$ *б*) $y'' - 16y = 0.$
7. *а*) $y'' - 7y' + 10y = 0;$ *б*) $y'' + 4y' + 4y = 0.$
8. *а*) $y'' + 20y' + 100y = 0;$ *б*) $y'' - 4y' + 13y = 0.$
9. *а*) $y'' - y' - 90y = 0;$ *б*) $y'' + 6y' + 25y = 0.$
10. *а*) $y'' - 2y' + y = 0;$ *б*) $y'' - 4y' + 3y = 0.$

Задание 2. *Найти частное решение дифференциального уравнения:*

1. $y'' - 5y' + 4y = 0,$ *если* $y = 5$ *и* $y' = 8$ *при* $x = 0.$
2. $y'' - 2y' + 2y = 0,$ *если* $y = 0$ *и* $y' = 1$ *при* $x = 0.$
3. $y'' + 2y' - 8y = 0,$ *если* $y = 4$ *и* $y' = -4$ *при* $x = 0.$
4. $y'' - 2y' + y = 0,$ *если* $y = 4$ *и* $y' = 2$ *при* $x = 0.$
5. $y'' - y' - 2y = 0,$ *если* $y = 3$ *и* $y' = 0$ *при* $x = 0.$
6. $y'' + 2y' + 5y = 0,$ *если* $y = 1$ *и* $y' = 1$ *при* $x = 0.$
7. $y'' - 10y' + 25y = 0,$ *если* $y = 2$ *и* $y' = 8$ *при* $x = 0.$
8. $y'' + 3y' + 2y = 0,$ *если* $y = -1$ *и* $y' = 3$ *при* $x = 0.$
9. $y'' + 6y' + 9y = 0,$ *если* $y = 2$ *и* $y' = 1$ *при* $x = 0.$
10. $y'' - 2y' + 2y = 0,$ *если* $y = 1$ *и* $y' = 3$ *при* $x = 0.$

Решение демонстрационного материала:

Задание 1. *Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.*

$а) y'' - 5y' + 6y = 0; \quad б)\ y'' + 6y' + 13y = 0.$

Решение:

а) Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 5k + 6 = 0.$

$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1 > 0,$

Корни этого уравнения действительные и различные:

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} k_1 = 2; \\ k_2 = 3. \end{array}\right.$$

Так как корни действительные и различные, то фундаментальную систему решений этого уравнения составят функции:

$$y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{3x}$$

Следовательно, общим решением уравнения будет иметь вид: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$, где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Ответ: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x},$

б) Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 6k + 13 = 0.$

$D = 36 - 4 \cdot 13 = -16 < 0.$

Корни этого уравнения будут комплексно-сопряженными:

$$k_{1,2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i, \text{т.е } \alpha = -3 \text{ и } \beta = 2.$$

Фундаментальную систему решений этого уравнения составят функции:

$$y_1 = e^{-3x} \cdot \cos 2x; \quad y_2 = e^{-3x} \cdot \sin 2x.$$

Общее решение запишется как линейная комбинация этих функций:

$$y = c_1 e^{-3x} \cdot \cos 2x + c_2 e^{-3x} \cdot \sin 2x.$$

Ответ: $y = e^{-3x}(c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x).$

Задание 2. *Найти частное решение дифференциального уравнения:*

$y'' - 2y' + y = 0,$ *если* $y = 1$ *и* $y' = 3$ *при* $x = 0.$

Решение:

Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 2k + 1 = 0$

$D = 4 - 4 = 0.$

Корни этого уравнения действительные и равные:

$$k_1 = k_2 = \frac{2 \pm 0}{2} = 1.$$

Фундаментальную систему решений этого уравнения составят функции:

$$y_1 = e^x; y_2 = x \cdot e^x.$$

Общее решение имеет вид:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y = 1$ *и* $y' = 3$ *при* $x = 0.$ Сначала найдем:

$$y' = (c_1 e^x + c_2 x e^x)' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x.$$

Составим систему из двух уравнений, подставляя в общее решение $y = 1,$ $x = 0,$ $y' = 3$:

$$\begin{cases} 1 = c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 \\ 3 = c_1 e^0 + c_2 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = c_1 \\ 3 = c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Подставим найденные значения $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$ в общее решение:

$y = 1 \cdot e^x + 2 \cdot x \cdot e^x \Rightarrow y = e^x + 2xe^x$ – это и будет частное решение.

Ответ: $y = e^x(1 + 2x).$

Литература

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2009.
2. Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов, М.: «Наука», 1980.
3. Пехлецкий И.Д. Математика, СПО. – М.: Академия, 2008.
4. Башмаков М.И. Математика, 10 кл. – М.: Академия, 2009.
5. Башмаков М.И. Математика, 11 кл. – М.: Академия, 2009.