ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Т.Г. ШЕВЧЕНКО
Физико-технический институт
Физико-математический факультет
Кафедра высшей и прикладной математики и информатики

ПОДГОТОВКА К ПРОФОРИЕНТАЦИОННОЙ ОЛИМПИАДЕ ПГУ ПО МАТЕМАТИКЕ

Методические рекомендации

Тирасполь, 2024 г.

УДК 512.1
ББК 22.1

Составители:
А.П. Зинган, канд. физ.-мат. наук, доцент
О.Ф. Васильева, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры фундаментальной физики, электроники и систем связи
В.В. Васильев, ст. преп.

Рецензенты:
Л.Н. Сафонова, зам. директора по научно-методической работе, учитель математики высшей категории Тираспольского общеобразовательного теоретического лицея №1
Е.Г. Шинкаренко, канд. пед. наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики и информатики ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Подготовка к профориентационной олимпиаде ПГУ по математике: методические рекомендации / ГОУ «Приднестр. гос. ун-т им. Т.Г. Шевченко», Физ.-мат. фак.; составитель: А.П. Зинган, О.Ф. Васильева, В.В. Васильев. – Тирасполь: Изд-во Приднестр. ун-та, 2024. – 52 с. – (электронное издание).

Минимальные системные требования:
CPU (Intel/AMD) 1,5ГГц/ОЗУ 2ГГб/HDD 450Мб/1024*768/Windows 7 и старше/Internet Explorer 11/Adobe Acrobat Reader 6 и старше

Содержит теоретический материал, практические задания олимпиад прошлых лет с решениями, материал для самостоятельного изучения.

Предназначено для учащихся 10 и 11 классов общеобразовательных школ, лицеев и гимназий республики

УДК 512.1
ББК 22.1

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Истории олимпиад для школьников больше 150 лет. Еще в 19 веке Астрономическое общество Российской империи проводило их для учащейся молодежи. В 1885–1917 годах киевский журнал «Вестник опытной физики и элементарной математики» публиковал «Задачи на премию». В Советском Союзе олимпиады появились в 1930-е: в 1934 году первое состязание юных математиков организовал Ленинградский университет, а в 1935 – Московское математическое общество. В 1938 году МГУ провел олимпиады по химии и по физике.

Изначально целью олимпиад было привлечение школьников к серьезным занятиям науками, в том числе — новыми. Так, в 1965 году прошла первая олимпиада по лингвистике, потому что в это время появились компьютеры, работающие с текстовой информацией. Специальных наград победителям не полагалось, но для многих участие в олимпиаде определяло дальнейшую судьбу: стало первым шагом в большую науку.

С 1964 года начала формироваться система Всесоюзных предметных олимпиад, которая в 1991 году трансформировалась в систему Всероссийских олимпиад школьников.

В последние годы появляется много новых олимпиад. Их проводят органы власти, средние и высшие учебные заведения, центры дополнительного образования и центры педагогического мастерства. В Российской Федерации появляются комитеты международных предметных и метапредметных соревнований для школьников, например, ставшие популярными «Кенгуру» по математике и British Bulldog. Все они разные и могут преследовать разные цели. В зависимости от цели олимпиады делятся на соревновательные и обучающие.

Предметная олимпиада – это форма интеллектуального соревнования учащихся в определенной научной области, позволяющая выявить не только знания фактического материала, но и умение применять эти знания в новых нестандартных ситуациях, требующих творческого мышления. Эти олимпиады проводятся с целью выявления наиболее талантливых учащихся в различных областях науки, предоставления возможностей всем желающим учащимся проверить свои знания в определенной научной области в условиях соревнования, привлечения учащихся к научно-исследовательской работе.

При организации олимпиад для того или иного контингента участников чрезвычайно существенно, чтобы уровень трудности задач был надлежащим образом заранее правильно оценен. Следует планировать его так, чтобы наиболее сильные участники могли решить бо́льшую часть задач, а с другой стороны, чтобы не было чрезмерного преобладания участников, не решивших ни одной задачи.

Государственное образовательное учреждение «Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко» ежегодно проводит профориентационную Олимпиаду для школьников 10–11 классов, а также учащихся колледжей и техникумов. Олимпиады – отличный способ проявить себя, расширить кругозор, развить способности. На первый план выходят креативное мышление, оригинальность и творчество. Предметные олимпиады проводятся, как правило, в несколько туров. Профориентационная олимпиада ПГУ проходит в два тура: первый – отборочный, который проводится дистанционно и второй – очный. В соответствии с Правилами приема в ПГУ им. Т.Г. Шевченко дипломы призеров профориентационной Олимпиады учитываются при поступлении в университет и дают определенное преимущество. Кроме того, производится начисление дополнительных баллов соответственно за I место начисляют 15 баллов, за II – 10 баллов, за III – 5 баллов. Срок действия дипломов составляет два года.

Данные методические рекомендации предназначены для подготовки учащихся старших классов к участию в олимпиадных соревнованиях по математике. Также пособие может быть полезно педагогам – руководителям факультативов и математических кружков.

Пособие состоит из трёх частей. В первом разделе дается краткая теоретическая справка. Во втором содержатся олимпиадные задания прошлых лет с приведенным подробным решением. В третьем разделе приводятся задачи для самостоятельного решения. В конце есть ответы для самопроверки.

Итак, попытайтесь помериться силами с участниками прошедших олимпиад! Желаем успехов!

КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Условные обозначения и сокращения

N – множество всех натуральных чисел;
Z – множество всех целых чисел;
Q – множество всех рациональных чисел;
R – множество всех действительных (вещественных) чисел;
$\Leftrightarrow$ – равносильно, эквивалентно, тогда и только тогда;
$\Rightarrow$ – следует;
$\stackrel{\text{def}}{=}$ – по определению равно;
$D(f)$ – область определения функции $y = f(x)$;
$E(f)$ – множество значений функции;
const – постоянная величина;
$\in$ – принадлежит.

Степени и корни. Модуль числа

Определение степени с целым показателем.

Пусть $a \in R$, $n \in N$. Тогда:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{сомножителей}};\ a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n},\ \text{если}\ a \neq 0;$$

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1,\ \text{если}\ a \neq 0;\ 0^0\ \text{не определено.}$$

Правила действий со степенями.

Пусть $p, q \in Z$. Тогда:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q};\ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q};\ \left(a^p\right)^q = a^{pq};\ (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p.$$

Определение корня.

Корнем $n-$ой степени из числа $a \geq 0$ называется такое неотрицательное число, обозначаемое $\sqrt[n]{a}$, что $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Правила действий с корнями.

Пусть $a, b > 0; m, n, k \in N$. Тогда:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$; $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$;

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Определение степени с рациональным показателем.

Пусть $a > 0$; $n \in N$; $m \in Z$. Тогда:

$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$.

В силу данного определения степени с рациональным показателем и правил действий над корнями на действия с рациональными степенями распространяются те же правила, что и на действия с целыми степенями, а именно при $a, b > 0$, $p, q \in Q$ справедливы равенства:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q};\ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q};\ \left(a^p\right)^q = a^{pq};\ \left(a \cdot b\right)^p = a^p \cdot b^p.$$

Например, $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$.

Замечание. По сути, степень с рациональным показателем является лишь «удобным обозначением» для корней *n*-й степени.

Формулы сокращенного умножения.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a+b)$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Модуль числа и его свойства.

1. Определение модуля числа: $|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0; \\ -x, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$

2. Геометрически $|x|$ есть расстояние от точки x числовой оси од начала отсчета – точки *O*.

3. Модуль произведения, частного и степени:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|;\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ y \neq 0;\ |x^n| = |x|^n,\ n \in Z,\ x \neq 0.$$

4. $\sqrt{x^2} = |x|$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Радианное измерение углов.

За 1 радиан принят такой угол, что 2π радиан составляют 360°, т.е.

$$1\,рад = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ.$$

Углы в градусах	φ°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Углы в радианах	$\frac{\pi}{180^\circ}\cdot$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Значения тригонометрических функций некоторых углов.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

Основные тригонометрические тождества.

$$sin^2 x + cos^2 x = 1;\ 1 + tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x};\ 1 + ctg^2 x = \frac{1}{sin^2 x}.$$

Формулы приведения.

При переходе от тригонометрической функции с аргументом $\pi \pm \alpha$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ используются следующие правила:

1) Если аргумент функции имеет вид $\pi \pm \alpha$, то название функции сохраняется;

2) Если аргумент функции имеет вид $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то функция $\sin$ меняется на $\cos$ (и наоборот), а функция tg меняется на ctg (и наоборот).

3) Знак перед полученной функцией ставится такой, какой имеет исходная функция, когда α принадлежит первой четверти.

Тригонометрические функции суммы и разности аргументов.

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y;$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y;$$

$$\mathrm{tg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1 \mp \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, y}.$$

Формулы двойного аргумента.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x;$$

$$\mathrm{tg}\, 2x = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}^2 x};$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций.

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2} \cdot \cos\frac{x \mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x + y}{2} \cdot \cos\frac{x - y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x - y}{2} \cdot \sin\frac{x + y}{2};$$

$$\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}.$$

Определение обратных тригонометрических функций.

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin\alpha \text{ и } -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2};$$

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \arccos x \Leftrightarrow x = \cos\alpha \text{ и } 0 \le \alpha \le \pi;$$

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \mathrm{arctg} x \Leftrightarrow x = \mathrm{tg}\alpha \text{ и } -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2};$$

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \mathrm{arcctg} x \Leftrightarrow x = \mathrm{ctg}\alpha \text{ и } \le \alpha \le \pi.$$

Область определения и область значения обратных тригонометрических функций.

$$D(\arcsin x) = [-1;1];\ E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$$

$$D(\arccos x) = [-1;1];\ E(\arccos x) = [0;\pi];$$

$$D(\mathrm{arctg} x) = R;\ E(\mathrm{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);$$

$$D(\mathrm{arcctg} x) = R;\ E(\mathrm{arcctg} x) = (0;\pi).$$

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений.

$$\sin x = a,\ |a| \le 1 \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n, n \in Z \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.;$$

$$\cos x = a,\ |a| \le 1 \ \Leftrightarrow \ x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\mathrm{tg} x = a \ \Leftrightarrow \ x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, n \in Z;$$

$$ctg\ x = a \ \Leftrightarrow \ x = \mathrm{arcctg} a + \pi n, n \in \mathrm{Z}.$$

МНОГОЧЛЕНЫ И ИХ КОРНИ

Определение многочлена.

Многочленом степени $n(n \in N)$ называется всякое выражение вида:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R$ и $a_n \ne 0$.

Числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ называются коэффициентами многочлена, a_n – старший коэффициент, a_0 – свободный член.

Число x_0 называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(x_0)=0$

.

Квадратный трехчлен.

Квадратный трехчлен – это многочлен степени 2:

$f(x)=ax^2+bx+c$.

Выражение b^2-4ac называется дискриминантом трехчлена ax^2+bx+c, это выражение принято обозначать буквой D. Если $D>0$, то квадратный трехчлен имеет два различных корня x_1 и x_2, которые можно вычислить по формуле:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \qquad (1)$$

Если $D=0$, то числа $x_{1,2}$, определяемые формулой (1), равны. В этом случае трехчлен ax^2+bx+c имеет один корень x_0, равный $-\dfrac{b}{2a}$. При этом говорят, что число x_0 является корнем кратности 2.

Если $D<0$, то квадратный трехчлен вещественных корней не имеет.

При $D\geq 0$ справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Если x_1 и x_2 – корни трехчлена ax^2+bx+c , то он разлагается в произведение множителей $x-x_1$ и $x-x_2$ согласно формуле:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \qquad (2)$$

при $D=0$ в формуле (2) следует полагать $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

Теорема 2 (Теорема Виета). Корни x_1 и x_2 трехчлена ax^2+bx+c удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}, \qquad (3)$$

при $D=0$ в системе (3) следует полагать $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

Графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, ветви которой направлены вверх при $a>0$ и вниз – при $a<0$, абсцисса вершины этой параболы определяется по формуле $x_в = -\dfrac{b}{2a}$.

Многочлены степени $n>2$.

При любом $n\in N$ справедливо утверждение: многочлен степени n имеет не более n различных корней.

Теорема Безу. Если число x_0 является корнем многочлена $f(x)$ степени $n\geq 2$, то $f(x)$ «делится на $x-x_0$ без остатка», т.е. существует такой многочлен $g(x)$ степени $n-1$, что $f(x)=(x-x_0)\cdot g(x)$.

Примечание: Если $f(x)=(x-x_0)^k\cdot g(x)$ и при этом число x_0 не является корнем многочлена $g(x)$, то говорят, что корень x_0 многочлена $f(x)$ имеет кратность k.

Теорема о рациональном корне многочлена.

Пусть $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ – многочлен с целыми коэффициентами. Если несократимая дробь (рациональное число) $\dfrac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x)$, то числитель этой дроби является делителем свободного члена a_0, а знаменатель – делителем старшего коэффициента a_n многочлена $f(x)$.

Если все коэффициенты многочлена $f(x)$ – целые числа, а старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни многочлена $f(x)$ являются целыми.

УРАВНЕНИЯ

Уравнения с одним неизвестным.

Областью *определения* уравнения $f(x)=0$ называется множество всех значение переменной x, при которых функция $f(x)$ определена.

Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что данное уравнение корней не имеет.

Два уравнения называются *равносильными*, если множества их корней совпадают. Преобразование уравнения называется равносильным, если преобразованное уравнение равносильно исходному.

Совокупность уравнений.

Если множество корней уравнения $f(x)=0$ совпадает с объединением множеств корней уравнений $g(x)=0$ и $h(x)=0$, то говорят, что уравнение $f(x)=0$ равносильно совокупности уравнений $g(x)=0$ и $h(x)=0$:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=0 \\ h(x)=0 \end{array}\right..$$

Системы неравенств

Решением *системы* неравенств называется всякое число, подстановка которого в каждое неравенство системы, обращает все неравенства системы в верные числовые неравенства.

Решить *систему неравенств* – это значит найти множество всех решение данной системы неравенств или доказать, что она не имеет решений.

Две системы неравенств называются равносильными, если множества их решений совпадают. Преобразование системы неравенств называется равносильным, если полученная в результате этого преобразования система неравенств равносильна исходной системе неравенств.

Рациональные неравенства.

Рациональным называется всякое неравенство, сводящееся к одному из следующих видов:

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \ge 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – некоторые многочлены.

Для решения рациональных неравенств удобно применять метод интервалов. Рассмотрим применение этого метода на примере $\dfrac{x+1}{x-3} - \dfrac{3}{x+2} \ge 1$.

$$\frac{x+1}{x-3} - \frac{3}{x+2} - 1 \ge 0,$$

$$\frac{(x+1)(x+2) - 3(x-3) - (x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)} \ge 0,$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2 - 3x + 9 - \left(x^2 - x - 6\right)}{(x-3)(x+2)} \ge 0,$$

$$\frac{x+17}{(x-3)(x+2)} \ge 0.$$

Полученное неравенство решим методом интервалов. Для этого нанесем на числовую ось точки $x=-17$, $x=-2$, $x=3$ (нули числителя и знаменателя) и определим знак дроби в левой части неравенства внутри каждого из промежутков, на которые числовая ось разбивается данными точками.

Выкалывая точки $x=-2$, $x=3$, в которых знаменатель равен нулю, получаем ответ: $x \in [-17;-2) \cup (3;+\infty)$.

ФУНКЦИИ

Область определения функции.

Областью определения $D(y)$ функции $= f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл).

Области определения некоторых функций:

$$D\left(\frac{1}{x}\right)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty);$$

$$D\left(\sqrt[2n]{x}\right)=[0;+\infty),\ n\in Z;$$

$$D(tg\,x)=\left\{x: x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\right\};$$

$$D(ctg\,x)=\{x: x\neq\pi k, k\in Z\};$$

областью определения любого многочлена, а также корня нечетной степени и функции $\sin x$, $\cos x$, является вся вещественная ось.

Множество значений функции.

Множеством (областью) значений $E(y)$ функции $y=f(x)$ называется множество всех таких чисел, для каждого из которых найдется число x_0 такое, что: $f(x_0)=y_0$.

Области значений некоторых функций:

$$E\left(\frac{1}{x}\right)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty);$$

$$E\left(\sqrt[2n]{x}\right)=[0;+\infty),\ n\in Z;$$

$$E(\sin x), E(\cos x)=[-1;1];$$

$$E(tg\,x), E(ctg\,x)=(-\infty;+\infty);$$

$$E\left(x^{2n}\right)=[0;+\infty),\ n\in N;$$

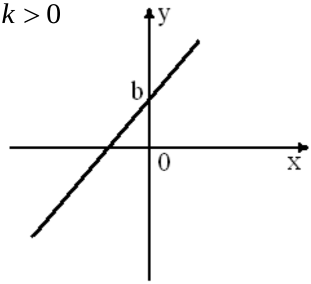
$$E\left(x^{2n+1}\right)=(-\infty;+\infty),\ n\in N;$$

Графики элементарных функций.

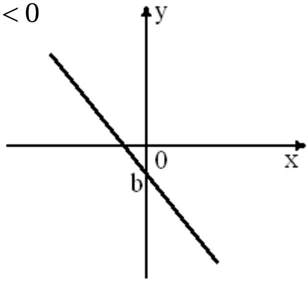
На рисунках изображены эскизы графиков основных элементарных функций.

$$y = kx + b$$

а) $k > 0$

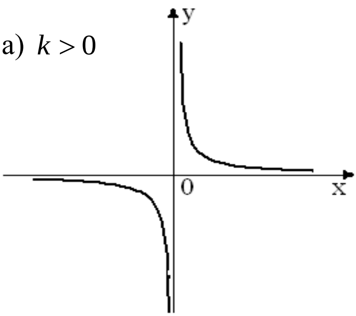


б) $k < 0$

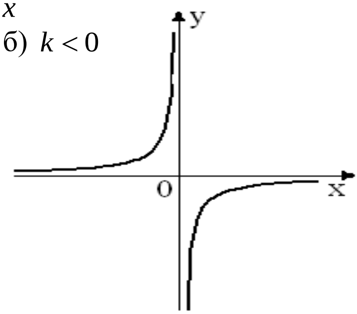


$$y = \frac{k}{x}$$

а) $k > 0$

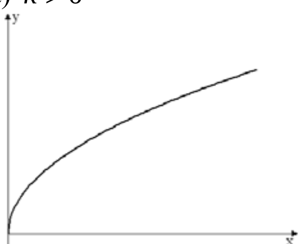


б) $k < 0$

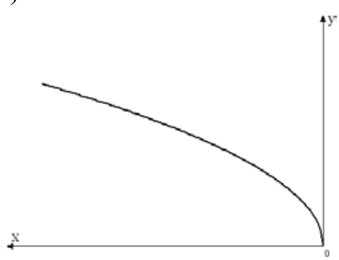


$$y = \sqrt{kx}$$

а) $k > 0$

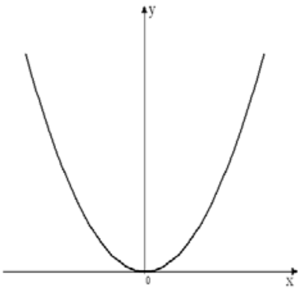


б) $k < 0$

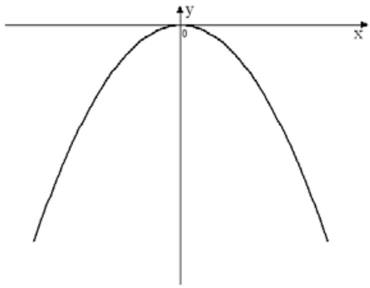


$$y = kx^2$$

а) $k > 0$

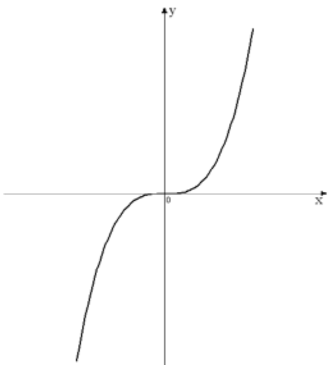


б) $k < 0$

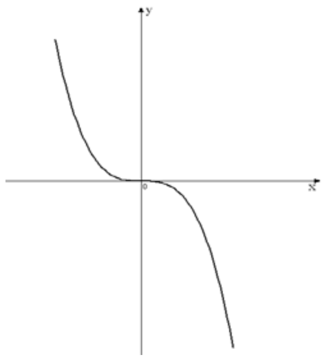


$$y = kx^3$$

а) $k > 0$

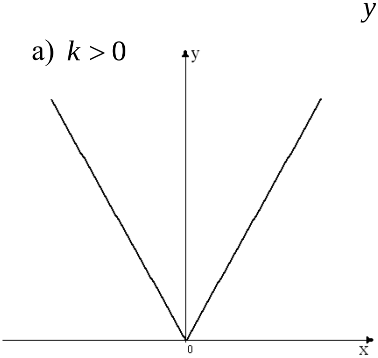


б) $k < 0$

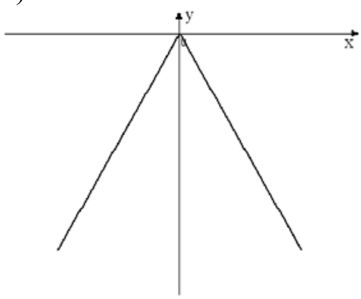


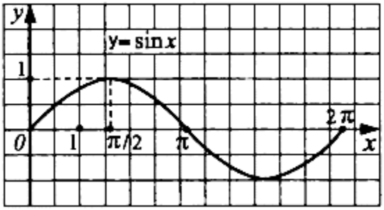
$$y = |kx|$$

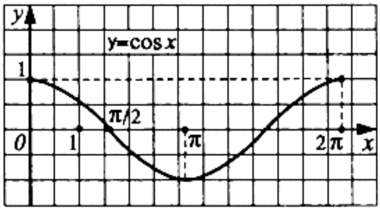
а) $k > 0$

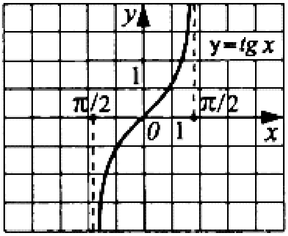


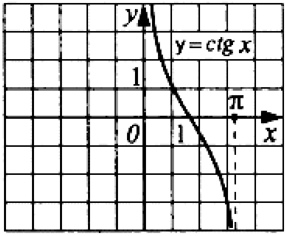
б) $k < 0$











ПРОГРЕССИИ

Арифметическая прогрессия.

Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется арифметической прогрессией, если разность между любым членом этой последовательности и предшествующим ему членом равна одному и тому же числу d, называемому разностью данной прогрессии, т.е. $a_n - a_{n-1} = d$ или $a_n = a_{n-1} + d$.

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – арифметическая прогрессия с разностью d, то $a_n = a_1 + d(n-1)$, а сумма первых n членов данной прогрессии может быть вычислена по одной из формул:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}; \ S_n = \frac{\left(2a_1 + d(n-1)\right)\cdot n}{2}.$$

Арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ является возрастающей $(a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots)$, если $d > 0$, и убывающей, если $d < 0$.

Геометрическая прогрессия.

Последовательность чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ называется геометрической прогрессией, если отношение любого члена этой последовательности к предыдущему ему члену равно одному и тому же числу q, называемому знаменателем данной прогрессии, т.е. $\frac{b_n}{b_{n-1}} = q$, или $b_n = b_{n-1} \cdot q$.

Если чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ – геометрическая прогрессия со знаменателем q, то $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, а сумма первых n членов данной прогрессии может быть вычислена по формуле: $\cdot q^{n-1}$

$$S_n = \frac{b_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Если знаменатель геометрической прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, то такая геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей. При этом $b_n \to 0$ при $n \to \infty$ (n-й член прогрессии при увеличении n неограниченно приближается к нулю).

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАНИЯ ПРОШЛЫХ ЛЕТ С РЕШЕНИЯМИ

Олимпиадная работа для 11 класса (2021 год)

1. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2 - xy - 2x + 3y = 11$.

(15 баллов)

2. Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит квадрат, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60^o. Боковая грань AA_1D_1D перпендикулярна плоскости основания, а ее площадь равна $3\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой грани AA_1B_1B.

(20 баллов)

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2\log_2^2(\sin x) + 3\log_2(\sin x) + 1}{\log_3(-\cos x)} = 0 \\ \sqrt{y-7} = \sqrt{2}\cos x + 1 \end{cases}.$$

(20 баллов)

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} 24\cos^2 x + 11\cos^2 y = 10a - 17 \\ 33\cos^2 x + 8\cos^2 y = 28a - 59. \end{cases}$$

(20 баллов)

5. На координатной плоскости изобразить фигуру, заданную неравенством $x^2 + y^2 + 6(x - |y|) \le 0$. Найти площадь этой фигуры.

(25 баллов)

Решение олимпиадных заданий для учащихся 11 класса (2021 год)

1. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2 - xy - 2x + 3y = 11$.

Решение.

$x^2 - xy - 2x + 3y = 11$,

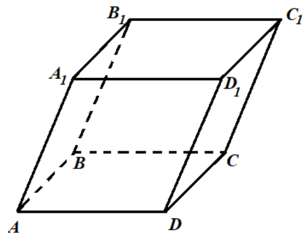
$$y(x-3)=x^2-2x-11,$$

$$y=x+1-\frac{8}{x-3}.$$

Возможные варианты для $x \in N: x=1;2;5;7;11$, откуда соответствующие значения переменной $y=6;11;2;6;11$.

Ответ: $(1;6),(2;11),(5;2),(7;6),(11;11)$.

2. Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит квадрат, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60^o. Боковая грань AA_1D_1D перпендикулярна плоскости основания, а ее площадь равна $3\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой грани AA_1B_1B.



Решение.

Так как по условию плоскости AA_1D и ABD перпендикулярны, а прямая AB перпендикулярна линии пересечения этих плоскостей – прямой AD, то $AB \perp AA_1D$. Отсюда, в частности, $AB \perp AA_1$. Значит, AA_1B_1B – прямоугольник, и $S_{AA_1B_1B}=AA_1 \cdot AB$.

По условию, $S_{AA_1D_1D}=3\sqrt{3}$. Имеем:

$$S_{AA_1D_1D}=AA_1 \cdot AD \cdot \sin 60^o \Rightarrow AA_1 \cdot AD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3},\ AA_1 \cdot AD=6.$$

Так как $AB=AD$ ($ABCD$ – квадрат), то $S_{AA_1B_1B}=AA_1 \cdot AB=AA_1 \cdot AD=6$.

Ответ: 6.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2\log_2^2(\sin x)+3\log_2(\sin x)+1}{\log_3(-\cos x)}=0 \\ \sqrt{y-7}=\sqrt{2}\cos x+1 \end{cases}.$$

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{2\log_2^2(\sin x)+3\log_2(\sin x)+1}{\log_3(-\cos x)}=0 \\ \sqrt{y-7}=\sqrt{2}\cos x+1 \end{cases}$$

1) Рассмотрим первое уравнение системы. Сделаем замену переменной $\log_2(\sin x)=a$, тогда первое уравнение системы примет вид: $2a^2+3a+1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=-0,5 \end{array}\right.$.

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(\sin x)=-1 \\ \log_2(\sin x)=-0.5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0,5 \\ \sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z \\ x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z \\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z \end{array}\right. .$$

Проверим выполнение области определения:

1. $\sin x>0$ – выполняется.
2. $\log_3(-\cos x)\neq 0 \Rightarrow -\cos x\neq 1 \Rightarrow x\neq \pi+2\pi n, n\in Z$ – выполняется.
3. $-\cos x>0 \Rightarrow \cos x<0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{2}+2\pi n<x<\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$.

Проводим отбор корней: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z \\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z \end{array}\right.$.

2) С учетом решения первого уравнения системы, рассмотрим систему

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z\end{array}\right.\\ \sqrt{y-7}=\sqrt{2}\cos x+1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z\\ \sqrt{y-7}=1-\sqrt{1,5}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z\\ \sqrt{y-7}=0\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z\\ y=7\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, 7\right), n\in Z$.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases}24\cos^2 x+11\cos^2 y=10a-17\\ 33\cos^2 x+8\cos^2 y=28a-59.\end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases}24\cos^2 x+11\cos^2 y=10a-17\\ 33\cos^2 x+8\cos^2 y=28a-59\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-171\cos^2 x=-228a+513\\ 57\cos^2 y=-114a+285\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos^2 x=\dfrac{4}{3}a-3\\ \cos^2 y=-2a+5.\end{cases}$$

Полученная система будет иметь хотя бы одно решение, если

$$\begin{cases}0\le\dfrac{4}{3}a-3\le 1\\ 0\le -2a+5\le 1\end{cases} \Rightarrow \dfrac{9}{4}\le a\le\dfrac{5}{2}.$$

Ответ: $a\in\left[\dfrac{9}{4};\dfrac{5}{2}\right]$.

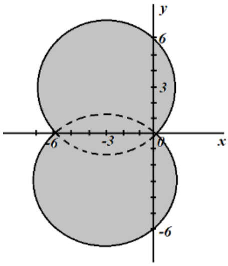
5. На координатной плоскости изобразить фигуру, заданную неравенством $x^2+y^2+6\left(x-|y|\right)\le 0$. Найти площадь этой фигуры.

Решение.

Рассмотрим два случая:

1. $y\ge 0$. Тогда неравенство примет вид $x^2+y^2+6\left(x-y\right)\le 0\Rightarrow\left(x+3\right)^2+\left(y-3\right)^2\le 18$ – это круг с центром в точке $\left(-3;3\right)$, радиусом $\sqrt{18}$, без части, находящейся ниже оси Ox .

2. $y \le 0$. Тогда неравенство примет вид $x^2 + y^2 + 6(x+y) \le 0 \Rightarrow (x+3)^2 + (y+3)^2 \le 18$ – это круг с центром в точке $(-3;-3)$, радиусом $\sqrt{18}$, без части, находящейся выше оси Ox.



Таким образом, получаем фигуру следующего вида:

Найдем ее площадь.

$S_{кр} = \pi R^2 = 18\pi$, $S_{кв} = 36$. Площадь части круга, отсеченного осью Ox – сегмента – $S_{сег} = \dfrac{18\pi - 36}{4} = 4{,}5\pi - 9$. Тогда площадь получившейся фигуры равна $S_{кр1} + S_{кр2} - 2S_{сег} = 27\pi + 18$.

Ответ: $27\pi + 18$.

Олимпиадная работа для 11 класса (2022 год)

1. Решите

а) неравенство $\log_{11}(8x^2+7) - \log_{11}(x^2+x+1) \ge \log_{11}\left(\dfrac{x}{x+5}+7\right)$;

б) уравнение $\sqrt{x^2+28x+196} + \sqrt{x^2+8x+16} = 10$;

в) систему $\begin{cases} \log_{11}(8x^2+7) - \log_{11}(x^2+x+1) \ge \log_{11}\left(\dfrac{x}{x+5}+7\right) \\ \sqrt{x^2+28x+196} + \sqrt{x^2+8x+16} = 10 \end{cases}$.

(15 баллов)

2. При сложении двух целых чисел школьник поставил лишний нуль на конце одного из слагаемых и получил в сумме *777777* вместо *111111*. Какие числа он складывал?

(10 баллов)

3. Для того, чтобы узнать, чему равна высота радиомачты, инженер измерял углы, под которыми видна радиомачта с поверхности земли на расстояниях 30, 60 и 90 м от её основания.

Оказалось, что сумма этих трёх углов равна 90^0. Найдите высоту радиомачты.

(15 баллов)

4. Решите неравенство $\sqrt{4-x}-2 \le x|x-3|+\operatorname{arctg} x$.

(20 баллов)

5. Точка M – середина стороны BC четырёхугольника $ABCD$. Угол AMD равен $120°$. Докажите, что $AB+BM+CD \ge AD$.

(15 баллов)

6. При каких значениях параметра a всякое решение неравенства $x^2-3x+2<0$ будет одновременно решением неравенства $ax^2-(3a+1)x+3>0$?

(25 баллов)

Решение олимпиадных заданий для учащихся 11 класса (2022 год)

1. Решите

а) неравенство $\log_{11}\left(8x^2+7\right)-\log_{11}\left(x^2+x+1\right) \ge \log_{11}\left(\dfrac{x}{x+5}+7\right)$;

б) уравнение $\sqrt{x^2+28x+196}+\sqrt{x^2+8x+16}=10$;

в) систему $\begin{cases} \log_{11}\left(8x^2+7\right)-\log_{11}\left(x^2+x+1\right) \ge \log_{11}\left(\dfrac{x}{x+5}+7\right) \\ \sqrt{x^2+28x+196}+\sqrt{x^2+8x+16}=10 \end{cases}$.

Решение

а) правая часть неравенства определена при $x<-5$ и $x>-\dfrac{35}{8}$. Поскольку при любых значениях x выражение $8x^2+7$ принимает положительные значения, при $x<-5$ и $x>-\dfrac{35}{8}$ неравенство принимает вид:

$$\frac{8x^2+7}{x^2+x+1} \ge \frac{8x+35}{x+5};\ \frac{8x^3+40x^2+7x+35}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)} \ge \frac{8x^3+43x^2+43x+35}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)};$$

$$\frac{3x^2+36x}{(x+5)(x^2+x+1)}\le 0;\ \frac{3x(x+12)}{(x+5)(x^2+x+1)}\le 0,$$

откуда $x\le -12$; $-5<x\le 0$. Учитывая ограничения $x<-5$ и $x>-\frac{35}{8}$, получаем $x\le -12$; $-\frac{35}{8}<x\le 0$.

б) Преобразуем уравнение: $\sqrt{x^2+28x+196}+\sqrt{x^2+8x+16}=10$; $|x+14|+|x+4|=10$. При $x<-14$ и $x>-4$ значение левой части получившегося уравнения больше 10, а при $-14\le x\le -4$ значение левой части уравнения равно 10. Таким образом, решение уравнения $-14\le x\le -4$.

в) Решение неравенства системы: $x\le -12$; $-\frac{35}{8}<x\le 0$. Решение уравнения системы: $-14\le x\le -4$. Получаем, что решение системы: $\left[-14;-12\right]\cup\left(-\frac{35}{8};-4\right]$.

Ответ: а) $\left(-\infty;-12\right]\cup\left(-\frac{35}{8};0\right]$; б) $\left[-14;-4\right]$;

в) $\left[-14;-12\right]\cup\left(-\frac{35}{8};-4\right]$.

2. При сложении двух целых чисел школьник поставил лишний нуль на конце одного из слагаемых и получил в сумме *777777* вместо *111111*. Какие числа он складывал?

Решение

Из условия $x+y=111111$, $x+10y=777777$. Откуда $9y=666666$, $y=74074$. Тогда $x=37037$.

Ответ: 74074 и 37037.

3. Для того, чтобы узнать, чему равна высота радиомачты, инженер измерял углы, под которыми видна радиомачта с поверхности земли на расстояниях 30, 60 и 90 м от её основания. Оказалось, что сумма этих трёх углов равна $90°$. Найдите высоту радиомачты.

Решение

Пусть DE – радиомачта, отрезки DA, DB, DC перпендикулярны DE, угол $DAE=\alpha$, угол $DBE=\beta$, угол $DCE=\gamma$; $DA=30$, $DB=60$, $DC=90$. Нужно найти $x=DE$ при условии, что $\alpha+\beta+\gamma=90^0$.

$\text{tg}\alpha=\dfrac{x}{30}$, $\text{tg}\beta=\dfrac{x}{60}$, $\text{tg}\gamma=\dfrac{x}{90}$. Пусть $k=\text{tg}\alpha$, тогда $\text{tg}\beta=\dfrac{k}{2}$, $\text{tg}\gamma=\dfrac{k}{3}$. С другой стороны

$$k=\text{tg}\alpha=\text{tg}\left(90-\beta-\gamma\right)=\frac{1}{\text{tg}\left(\beta+\gamma\right)}=\frac{1-\text{tg}\,\beta\,\text{tg}\,\gamma}{\text{tg}\,\beta+\text{tg}\,\gamma}=\frac{1-\dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{k}{3}}{\dfrac{k}{2}+\dfrac{k}{3}}=\frac{6-k^2}{5k}.$$

Получили уравнение $k=\dfrac{6-k^2}{5k}$. Отсюда $k=1$, $x=30\,\text{tg}\,\alpha=30k=30$.

Ответ: 30 м.

4. Решите неравенство $\sqrt{4-x}-2\le x\left|x-3\right|+\text{arctg}\,x$.

Решение

Область определения неравенства задается условием $x\le 4$. Обозначим $f\left(x\right)=\sqrt{4-x}-2$, $g\left(x\right)=x\left|x-3\right|+\text{arctg}\,x$. Заметим, что при $x<0$ выполняются неравенства $f\left(x\right)>0$ и $g\left(x\right)<0$ (поскольку $\text{arctg}\,x<0$ при $x<0$). Значит, при отрицательных x неравенство не выполняется.

Если же $0\le x\le 4$, то части неравенства меняют знак: $f\left(x\right)\le 0$ и $g\left(x\right)\ge 0$, откуда $f\left(x\right)\le g\left(x\right)$.

Ответ: $\left[0;4\right]$.

5. Точка M – середина стороны BC четырёхугольника $ABCD$. Угол AMD равен 120^0. Докажите, что $AB+BM+CD\ge AD$.

Решение

Пусть B_1 и C_1 точки, симметричные B и C относительно прямых AM и DM соответственно. В результате имеем $AB_1=AB$, $B_1M=BM=MC_1$, $C_1D=CD$. Далее, из условия

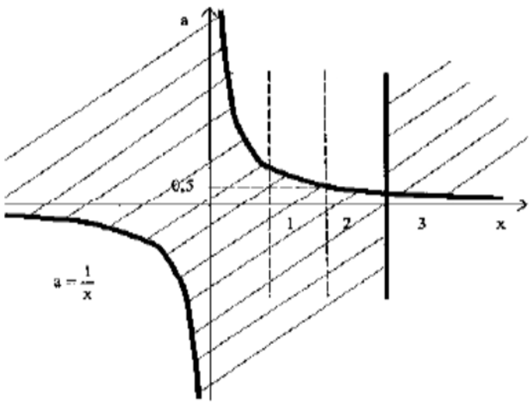
$< AMB + < DMC = 180^0 - < AMD = 180^0 - 120^0 = 60^0$. Следовательно, в силу симметричного отражения, $< AMB_1 + < DMC_1 = 60^0$. Откуда $< B_1MC_1 = 60^0$. Так как $B_1M = MC_1$, то треугольник B_1MC_1 равносторонний, и $B_1M = B_1C_1$. Таким образом, $AB + BM + CD = AB_1 + B_1C_1 + C_1D \ge AD$.

ч. т. д.

6. При каких значениях параметра a всякое решение неравенства $x^2 - 3x + 2 < 0$ будет одновременно решением неравенства $ax^2 - (3a+1)x + 3 > 0$?

Решение

На плоскости $x0a$ множество точек $(x;a)$, удовлетворяющих уравнению $ax^2 - (3a+1)x + 3 = 0$, то есть $ax(x-3) = x - 3$, изображается прямой $x = 3$ и обоими ветвями гиперболы $a = \frac{1}{x}$. Точки, удовлетворяющие второму из неравенств, изображаются заштрихованной областью (см. рис.). Ясно, что отрезок $1 < x < 2$ (решение первого неравенства) целиком попадает в эту область при $a \le \frac{1}{2}$.



Ответ: $a \le \frac{1}{2}$

Олимпиадная работа для 11 класса (2023 год)

1. Найдите наибольшую из сумм первых n членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 141$ и $a_2 = 124$.

(10 баллов)

2. Исследуйте функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ и постройте ее график.

(20 баллов)

3. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 4, точка K — середина бокового ребра AP. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC. Найдите площадь сечения.

(20 баллов)

4. Пароход от Нижнего Новгорода до Астрахани идет 5 суток, а от Астрахани до Нижнего Новгорода – 7 суток. Сколько дней будут плыть по течению плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

(10 баллов)

5. Докажите, что $\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} = -\dfrac{1}{2}$.

(20 баллов)

6. Решите систему

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$

(20 баллов)

Решение олимпиадных заданий для учащихся 11 класса (2023 год)

1. Найдите наибольшую из сумм первых n членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 141$ и $a_2 = 124$.

Решение

Зная два последовательных члена арифметической прогрессии, можно найти разность $d = a_2 - a_1 = 124 - 141 = -17$. Сумма первых n членов арифметической прогрессии определяется как $S_n = \dfrac{2a_1 + d\left(n-1\right)}{2}n$. Подставив найденное значение d и значение первого члена прогрессии, можно задать сумму первых n членов арифметической прогрессии как функцию от n:

$$S=\frac{299n-17n^2}{2}.$$

Чтобы найти наибольшую из сумм первых n членов арифметической прогрессии, нужно знать точку максимума функции $S(n)$. Для этого вычислим производную:

$$S'=\frac{299}{2}-17n,\quad S'=0,\quad \frac{299}{2}-17n=0,\quad n=\frac{299}{34}=8\frac{27}{34}.$$

Наибольшая из сумм первых n членов арифметической прогрессии будет достигаться при $n=9$ или $n=8$.

$$S_9=\frac{282-17\cdot 8}{2}\cdot 9=657$$

$$S_8=\frac{282-17\cdot 7}{2}\cdot 8=652$$

Ответ: 657.

2. Исследуйте функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ и постройте ее график.

Решение

1. Область определения: $x^2-1\neq 0 \quad \rightarrow \quad x\neq \pm 1$

$x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$

2. Нули функции: $x^3=0 \quad \rightarrow \quad x=0$

3. Промежутки знакопостоянства:

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ -- & \circ & ---- & \bullet & ---- & \circ & -- \\ & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

4. Возрастание, убывание:

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2\left(x^2-1\right) - x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

$$= \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = 0$$

$$y' = 0 \quad \to \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

В точках экстремума производная равна нулю или не существует.

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & + & - & + \end{array}$$

$$--\bullet---\circ-----\bullet-----\circ---\bullet---$$

$$-\sqrt{3} \qquad -1 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad \sqrt{3}$$

$$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$$

5. Выпуклость, вогнутость.

$$y'' = \left(\frac{x^4 - 3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)' = \frac{\left(4x^3 - 6x\right)\left(x^2-1\right)^2 - 2\left(x^4 - 3x^2\right)\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(4x^3 - 6x\right)\left(x^2-1\right) - 4x\left(x^4 - 3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^3} =$$

$$= \frac{4x^5 - 6x^3 - 4x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{\left(x^2-1\right)^3} = \frac{6x + 2x^3}{\left(x^2-1\right)^3} = \frac{2x\left(3 + x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^3} = 0$$

Точки перегиба:

$$\begin{array}{cccc} - & + & - & + \end{array}$$

$$--\circ-----\bullet-----\circ--$$

$$-1 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 1$$

$$\cap \qquad \cup \qquad \cap \qquad \cup$$

6. Наклонные асимптоты:

Определим наклонные асимптоты:

$y = ax + b$

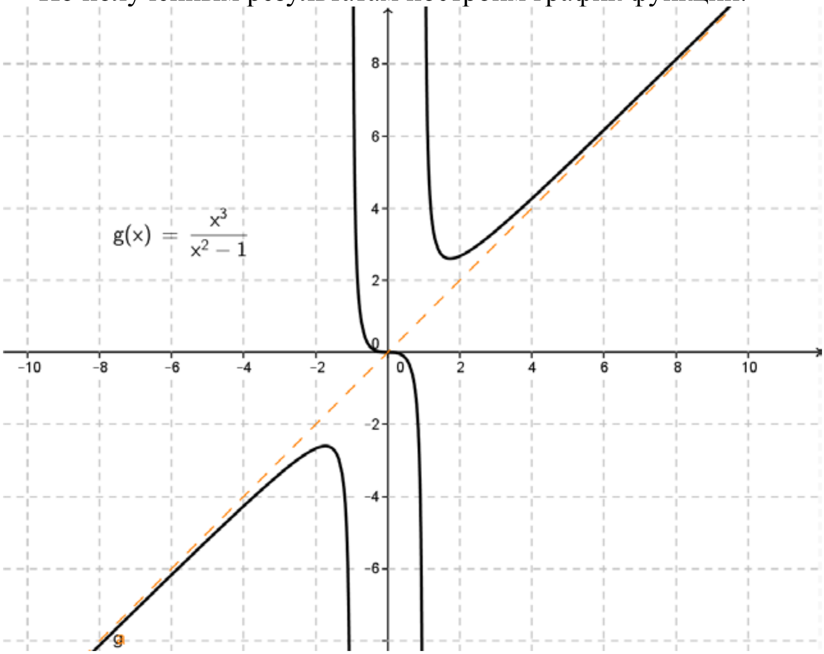
$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\infty}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - ax) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = 0$$

Получили: $y = x$

Ответ:

По полученным результатам построим график функций.

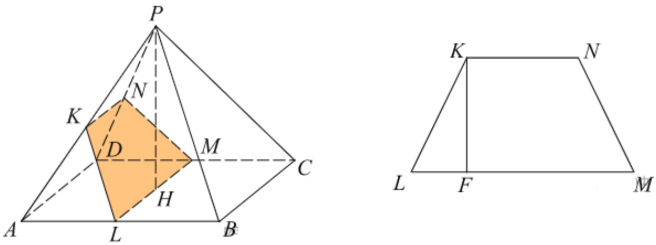


3. В правильной четырехугольной пирамиде *PABCD*, все ребра которой равны 4, точка *K* – середина бокового ребра *AP*. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку *K* и параллельной прямым *PB* и *BC*. Найдите площадь сечения.

Решение

В плоскости *ABP* через точку *K* проведем прямую, параллельную прямой *PB* до пересечения ее с прямой *AB* в точке *L* — середине *AB*. В основании *ABCD* через точку *L* проведем прямую, параллельную прямой BC до пересечения ее с ребром CD в точке M — его середине. По признаку параллельности прямой и плоскости плоскость KLM параллельна прямым PB и BC. Прямая LM параллельна прямой AD, следовательно, она параллельна плоскости APD, а, значит, плоскость KLM пересекает плоскость APD по прямой, параллельной LM и пересекает ребро PD в его середине N.

Таким образом, искомое сечение — трапеция $KLMN$.



Отрезки KL и MN равны, как средние линии равных правильных треугольников ABP и DCP, а отрезок LM — средняя линия квадрата $ABCD$, следовательно, построенное сечение — равнобедренная трапеция, в которой $LM = 4$, $KL = KN = MN = 2$. Проведем высоту KF этой трапеции. Тогда $LF = \dfrac{LM - KN}{2} = 1$, и из прямоугольного треугольника KLF находим $KF = \sqrt{KL^2 - LF^2} = \sqrt{3}$.

Окончательно получаем $S_{KLMN} = \dfrac{LM + KN}{2} \cdot KF = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

4. Пароход от Нижнего Новгорода до Астрахани идет 5 суток, а от Астрахани до Нижнего Новгорода – 7 суток. Сколько дней будут плыть по течению плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

Решение

Пусть скорость парохода – x, а скорость течения – v. Тогда:

	Скорость	Время	Путь
от Нижнего Новгорода до Астрахани	$x+v$	5	$5(x+v)$
от Астрахани до Нижнего Новгорода	$x-v$	7	$7(x-v)$

Так как пути туда и обратно одинаковы, можем их приравнять.

$5(x+v) = 7(x-v)$, $x = 6v$.

Тогда путь можно выразить через скорость течения: $S = 5(6v+v) = 35v$. Найдем время: $t = \dfrac{S}{v} = \dfrac{35v}{v} = 35$.

Ответ: 35 суток.

5. Доказать, что $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$.

Решение

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$$

Домножим обе части равенства на $2\sin\frac{\pi}{5}$.

$$2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=-\sin\frac{\pi}{5},$$

Используем формулу произведения синуса на косинус:

$$\sin\frac{3\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}+\sin\pi-\sin\frac{3\pi}{5}=-\sin\frac{\pi}{5},$$

$$-\sin\frac{\pi}{5}+0=-\sin\frac{\pi}{5},$$

$$-\sin\frac{\pi}{5}=-\sin\frac{\pi}{5}, \text{ ч.т.д.}$$

6. Решите систему

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

Решение

Возведем в куб первое уравнение системы:

$$(x+y+z)\left(x^2+2xy+2xz+y^2+2yz+z^2\right)=a^3,$$

$$x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+3xz^2+3y^2z+3yz^2=a^3.$$

Вычтем из первого уравнения третье.

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2y+xy^2+x^2z+xyz+xyz+y^2z+xz^2+yz^2=0, \end{cases}$$

Сгруппируем слагаемые подряд попарно.

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ xy(x+y)+xz(x+y)+yz(x+y)+z^2(x+y)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ (x+y)(xy+xz+yz+z^2)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ (x+y)(y+z)(x+z)=0, \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=0 \\ z=a \\ 2y^2+z^2=a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y+z=0 \\ x=a \\ 2z^2+x^2=a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+z=0 \\ y=a \\ 2z^2+y^2=a^2 \end{cases} \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=a \end{cases} \\ \begin{cases} x=a \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=a \\ z=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(0,0,a),(0,a,0),(a,0,0)$.

Олимпиадная работа для 11 класса (2024 год)

1. В уравнении $(x^2+...)(x+1)=(x^4+1)(x+2)$ одно число стёрто и заменено точками. Найдите стёртое число, если известно, что один из корней этого уравнения равен единице.

(10 баллов)

2. Разложите многочлен x^8+x^4+1 на три множителя.

(10 баллов)

3. При каком значении a многочлены x^4+ax^2+1 и x^3+ax+1 имеют общий корень?

(10 баллов)

4. В банк кладётся 1000 руб. В каком случае спустя 10 лет вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 5% от

имеющейся суммы один раз в год или если он начисляет $\frac{5}{12}\%$ один раз в месяц?

(10 баллов)

5. Докажите, что при любых положительных a и b выполняется неравенство $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\ge 5\sqrt[5]{ab}$.

(10 баллов)

6. Найдите область значений функции $y=3\sin^2 x-4\sin x-2$.

(10 баллов)

7. Постройте график функции $y=\dfrac{12+x-x^2}{x^2-16}$.

(10 баллов)

8. Решите уравнение $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=40$.

(10 баллов)

9. Решите неравенство $\sqrt{5-2\sin x}\ge 6\sin x-1$.

(10 баллов)

10. Из произвольной точки M внутри данного острого угла A опустим перпендикуляры MP и MQ на его стороны. Из вершины A опустим перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $<PAK=<MAQ$.

(10 баллов)

Решение олимпиадных заданий для учащихся 11 класса (2024 год)

1. В уравнении $(x^2+...)(x+1)=(x^4+1)(x+2)$ одно число стёрто и заменено точками. Найдите стёртое число, если известно, что один из корней этого уравнения равен единице.

Решение

Чтобы найти стёртое число, достаточно подставить в уравнение $x=1$. Тогда искомое число 2.

Ответ: 2.

2. Разложите многочлен x^8+x^4+1 на три множителя.

Решение

$$x^8+x^4+1=x^8+2x^4+1-x^4=$$

$$=\left(x^4+1\right)^2-\left(x^2\right)^2=\left(x^4+x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)=$$

$$=\left(\left(x^2+1\right)^2-x^2\right)\left(x^4-x^2+1\right)=$$

$$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^4-x^2+1\right).$$

Ответ: $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$.

3. При каком значении a многочлены x^4+ax^2+1 и x^3+ax+1 имеют общий корень?

Решение

Пусть общий корень данных многочленов $x=b$. Тогда, разделив оба многочлена на $x-b$, получим в остатке от деления $1+b^2\left(a+b^2\right)$ и $1+b\left(a+b^2\right)$. Т.к. $x=b$ – корень, значит остатки от деления должны быть равны нулю. Решим полученную систему

$$\begin{cases}1+b^2\left(a+b^2\right)=0\\1+b\left(a+b^2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\left(a+b^2\right)\left(b-1\right)=0\\1+b\left(a+b^2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\a=-2.\end{cases}$$

Ответ: -2.

4. В банк кладётся 1000 руб. В каком случае спустя 10 лет вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы один раз в год или если он начисляет $\frac{5}{12}\%$ один раз в месяц?

Решение

Пусть проценты начисляются раз в год. Тогда в конце первого года вклад будет равен

$$\left(1000+1000\cdot\frac{5}{100}\right)=1000\left(1+\frac{5}{100}\right)\text{ руб.}$$

В конце второго года вклад увеличится на 5% уже от этой суммы и станет равным

$$1000\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)=1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2\text{ руб.}$$

Рассуждая аналогично, увидим, что через 10 лет вкладчик получит

$$1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10} \text{ руб.}$$

Если проценты начисляются раз в месяц, то таким же образом найдем, что вкладчик через 10 лет (т.е. через 120 месяцев) получит

$$1000\left(1+\frac{5}{1200}\right)^{120} \text{ руб.}$$

Предположим, что второе число больше первого. Для этого достаточно показать, что

$$1+\frac{5}{100}<\left(1+\frac{5}{1200}\right)^{12}.$$

Справа произведение 12 одинаковых скобок. В процессе умножения придется взять в каждой скобке по 1 и все их перемножить – получим в результате 1. Если же в одной скобке взять $\frac{5}{1200}$, а в других – по 1, то мы получим $\frac{5}{1200}$; но таких произведений столько же, сколько скобок, т.е. 12, и они дают число $12\cdot\frac{5}{1200}=\frac{5}{100}$. Хотя мы учли еще не все члены, получилось уже $1+\frac{5}{100}$, поэтому всё произведение будет больше этого числа. Таким образом, вкладчик получит больше денег, если банк начисляет проценты раз в месяц.

Ответ: если банк начисляет проценты раз в месяц.

5. Докажите, что при любых положительных a и b выполняется неравенство $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\geq 5\sqrt[5]{ab}$.

Решение

Чтобы избавиться от радикалов, положим $x=b^{\frac{1}{15}}$, $y=a^{\frac{1}{10}}$. Тогда данное неравенство примет вид $3x^5+2y^5-5x^3y^2\geq 0$.

Разделив обе части неравенства на y^5 и обозначив x/y через t, получим эквивалентное неравенство $3t^5-5t^3+2\geq 0$.

Левая часть разлагается на множители:

$$(t-1)^2\left(3t^3+6t^2+4t+2\right)\geq 0.$$

При $t > 0$ оба множителя неотрицательны, поэтому неравенство справедливо. Оно обращается в равенство только при $t = 1$, т. е. при $a^3 = b^2$. ч.т.д.

6. Найдите область значений функции $y = 3\sin^2 x - 4\sin x - 2$.

Решение

Данная функция периодическая. Найдем ее экстремумы.

$$y' = 6\sin x\cos x - 4\cos x = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \langle = \rangle \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ x = \arcsin\dfrac{2}{3} + 2\pi n, n \in Z \\ x = \pi - \arcsin\dfrac{2}{3} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

Найдем значение функции в найденных точках

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3;$$

$$y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5;$$

$$y\left(\arcsin\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{3}.$$

Таким образом, $E(y): \left[-\dfrac{10}{3}, 5\right]$.

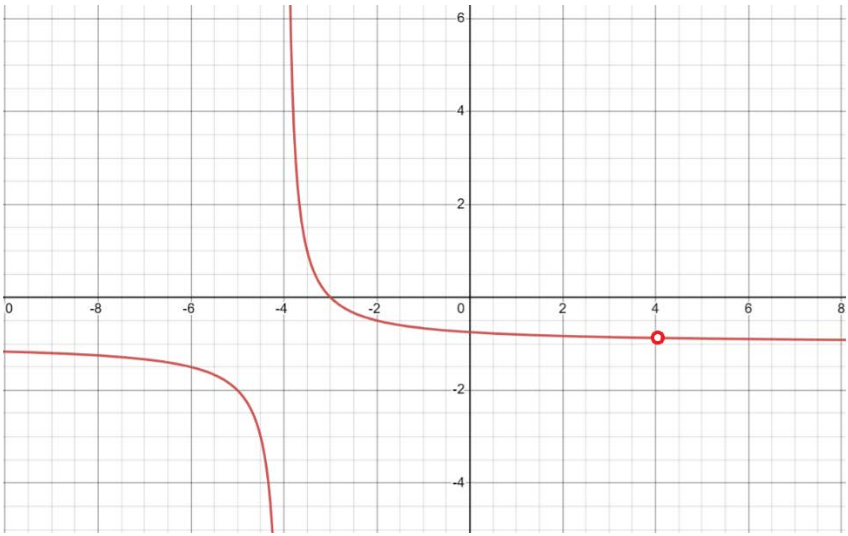
Ответ: $\left[-\dfrac{10}{3}, 5\right]$.

7. Постройте график функции $y = \dfrac{12 + x - x^2}{x^2 - 16}$.

Решение

Преобразуем данную функцию.

$$y = \frac{12 + x - x^2}{x^2 - 16} \langle = \rangle \begin{cases} y = -1 + \dfrac{1}{x + 4} \\ x \neq 4 \end{cases}$$



8. Решите уравнение $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=40$.

Решение

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=40 \Leftrightarrow$$
$$(x^2+3x+2)(x^2+9x+20)=40 \Leftrightarrow$$
$$x^4+12x^3+49x^2+78x=0 \Leftrightarrow$$
$$x(x^3+12x^2+49x+78)=0.$$

Подберем корень многочлена в скобке среди делителей свободного члена.

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-6 \\ x^2+6x+13=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-6 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-6,\ 0\}$

9. Решите неравенство $\sqrt{5-2\sin x} \geq 6\sin x - 1$.

Решение

Пусть $\sqrt{5-2\sin x}=t, t\geq 0$, тогда $\sin x=\dfrac{5-t^2}{2}$. Тогда

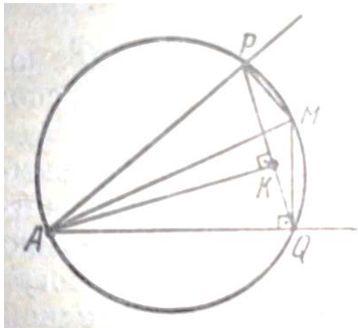
$$3t^2+t-14\ge 0\langle=\rangle$$

$$\begin{cases}5-2\sin x\ge 4\\ 5-2\sin x\ge 0\end{cases}\langle=\rangle\begin{cases}\sin x\le\dfrac{1}{2}\\ \sin x\le\dfrac{5}{2}\end{cases}\langle=\rangle-\frac{7\pi}{6}+2\pi n\le x\le\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$

10. Из произвольной точки M внутри данного острого угла A опустим перпендикуляры MP и MQ на его стороны. Из вершины A опустим перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $<PAK=<MAQ$.

Решение



Построим окружность с диаметром AM.

Поскольку углы APM и AQM – прямые, точки P и Q лежат на этой окружности; $<MAQ=<QPM$ (так как это вписанные в окружность углы, опирающиеся на одно и ту же дугу).

Заметим также, что $<PAK=<QPM$. Действительно, $<PAK=90°-<APK$ (AK – перпендикуляр к PQ) и $<QPM=90°-<APK$ (MP – перпендикуляр к AP).

Отсюда $<MAQ=<QPM$, что и требовалось доказать.

ЗАДАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Целые числа

1. В десятичной записи числа 300 единиц и несколько нулей (а других чисел нет). Может ли это число быть точным квадратом?
2. Решите в целых числах уравнение $2^x + 1 = y^2$.
3. Решите в целых числах уравнение $x! + y! = (x+y)!$.
4. На какие целые k можно сократить дробь $\dfrac{5l+6}{3l+1}$, где l – целое число?
5. При каких целых а оба корня уравнения $x^2 + ax + 6 = 0$ являются целыми числами?

Метод математической индукции

6. Докажите методом математической индукции неравенство ($n \in N$):

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

7. Докажите методом математической индукции равенство $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.
8. Докажите методом математической индукции равенство $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.
9. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального n выражение $6^{2n-1} + 1$ кратно 7.
10. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального n выражение $4^n + 15n - 1$ кратно 9.

Действительные числа

11. Упростите выражение $\sqrt{67 - 42\sqrt{2}} + \sqrt{19 - 6\sqrt{2}}$.
12. Докажите, что число $\sqrt[3]{6 + \sqrt{\dfrac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\dfrac{847}{27}}}$ рационально.

13. Освободитесь от иррациональности в знаменателе $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

14. Могут ли быть членами одной геометрической прогрессии числа 81, -36, 24?

15. Может ли быть рациональным числом иррациональное число в иррациональной степени?

Преобразование выражений

16. Разложите на множители x^5+x+1.

17. Вычислите $\frac{1}{\cos 290^\circ}+\frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^\circ}$.

18. Вычислите $\cos^8 a-\sin^8 a$, если $\cos 2a=m$.

19. Вычислите без таблиц $2^{\sqrt{\log_2 3}}-3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

20. Найдите $\log_{54}168$, если $\log_7 12=a,\ \log_{12}24=b.$

Прогрессии

21. Решить в целых числах уравнение $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3$.

22. Числа x,y,z (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию, а числа $x+y, y+z, z+x$ – арифметическую. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

23. Члены арифметической (a_n) и геометрической (b_n) прогрессий удовлетворяют условиям $a_{40}=b_{40}>0$, $a_{60}=b_{60}>0$. Что больше: a_{50} или b_{50}?

24. Сумма четырёх чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна -40, а сумма их квадратов равна 3280. Найдите эти числа.

25. Найдите сумму

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\ldots+\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}.$$

Исследование функций

26. Найдите область значений функции $y=3\cos x-4\sin x-1$.

27. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\cos(\sin x)}$.

28. Найдите наименьший положительный период функции $y=\cos\left(x\sqrt{2}\right)+\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

29. Расположите в порядке возрастания числа: $\sin 4°, \cos 2,\ \mathrm{tg}3,\ \mathrm{ctg}6$.

30. Найдите функцию, обратную данной и постройте график найденной функции: $y=\sqrt{\lg x}$.

Графики функций

31. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$.

32. Найдите асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2}{|x|+1}$.

33. Постройте график функции $y=2^{|\log_2 x|+1}$.

34. Найдите с помощью эскизов графиков число решений уравнения: $\lg x=\cos x$.

35. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию: $x^2+y^2=x^2y^2+1$.

Рациональные алгебраические уравнения

36. Решите уравнение $x^4-2x^3+\dfrac{3}{4}x^2-2x+1=0$.

37. Решите уравнение $2\left(x^2+x+1\right)^2-7\left(x-1\right)^2=13\left(x^3-1\right)$.

38. Решите уравнение $x^2+\dfrac{9x^2}{\left(3+x\right)^2}=7$.

39. Решите уравнение $\left|\left|\left|x-1\right|+2\right|-1\right|+1\Big|=2$.

40. Решите уравнение $2\left|x+6\right|-\left|x\right|-\left|x-6\right|=18$.

Рациональные алгебраические неравенства

41. Решите неравенство $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x-3\right)\geq 5$.

42. Решите неравенство $x^4+3x^2+2x^2+3x+1>0$.

43. Решите неравенство $x^{18}-x^{13}+x^{10}-x^7+x^2-x+1>0$.

44. Решите неравенство $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 < 0$.

45. Докажите неравенство $\sqrt{(a+c)(b+d)} \ge \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$, $(a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0, d \ge 0)$.

Системы рациональных алгебраических уравнений

46. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^4 + y^4 = 17 \end{cases}$.

47. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1) = 10 \\ (x-y)(xy+1) = -3 \end{cases}$.

48. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = z \\ y^2 + z^2 = 13x^2 \\ 2(x^2 + z^2) = zy^2 \end{cases}$.

49. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 2yz = 1 \\ y^2 + 2xz = 2. \\ z^2 + 2xy = 1 \end{cases}$

50. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{xz}{x+z} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{zy}{z+y} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Задачи на составление уравнений и их систем

51. Три пункта A, B, C соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной $\frac{1}{2}AB$, к отрезку дороги BC примыкает квадратное поле со стороной, равной BC, а к отрезку дороги AC примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной AC, а шириной $4\,км$. Площадь леса на $20\,км^2$ больше суммы площадей квадратных полей. Найдите площадь леса.

52. Сумма цифр трёхзначного числа равна 17, а сумма их квадратов 109. Если из данного числа вычесть 495, то получится

число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите число.

53. Для награждения победителей школьной олимпиады было закуплено насколько одинаковых книг и одинаковых значков. За книги заплатили 10 р. 56 к., за значки – 56 к. Книг купили на 6 штук больше, чем значков. Сколько было куплено книг?

54. Имеются три куска различных сплавов золота с серебром. Известно, что количество золота в 2 г сплава из третьего куска то же, что во взятых вместе 1 г из первого и 1 г из второго куска. Масса третьего куска равна суммарной массе части первого куска, содержащей 10 г золота, и части второго куска, содержащей 80 г золота. Третий кусок, масса которого в 4 раза больше первого, содержит 75 г золота. Сколько граммов золота содержится в первом куске?

55. Две точки двигаются по окружности длиной 1,2 м с постоянными скоростями. Если они двигаются в разных направлениях, то встречаются через каждые 15 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 60 с. Найдите скорость каждой точки.

Иррациональные уравнения и неравенства

56. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

57. Для каждого действительного числа a найдите все решения уравнения $\sqrt{x^2-1}+x=a$.

58. Решите неравенство $\sqrt{4^{x+1}+17}-5>2^x$.

59. Решите систему уравнений $\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2 \\ x^5\sqrt{x^2-4y^2}=0 \end{cases}$.

60. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}=3\sqrt[6]{xy} \\ x-y=63 \end{cases}$.

Тригонометрические уравнения, неравенства и системы

61. Решите уравнение $3\left(\log_2 \sin x\right)^2+\log_2\left(1-\cos 2x\right)=2$.

62. Решите уравнение $8\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}$.

63. Решите неравенство $\dfrac{2}{\operatorname{tg} x+1}<2-\operatorname{tg} x$.

64. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin(y-3x)=2\sin^3 x \\ \cos(y-3x)=2\cos^3 x \end{cases}.$

65. Решите систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin z}{\cos x \cos y}+3 \\ \operatorname{tg} z \ \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin x}{\cos z \cos y}-5 \\ \operatorname{tg} x \ \operatorname{tg} z = \dfrac{\sin y}{\cos x \cos z}-3 \end{cases}.$

Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

66. Решите уравнение $3^{\lg \operatorname{tg} x}-2\cdot 3^{\lg \operatorname{ctg} x+1}=1$.

67. Решите неравенство $(x-2)^{x^2-6x+8}>1$.

68. Решите систему уравнений $\begin{cases} 9^{2\operatorname{tg} x+\cos y}=3 \\ 9^{\cos y}-81^{\operatorname{tg} x}=2 \end{cases}.$

69. Решите неравенство $\log_{x^2}\dfrac{4x-5}{|x-2|}\geq\dfrac{1}{2}$.

70. Известно, что неравенство $\log_a\left(x^2-x-2\right)>$ $>\log_a\left(3+2x-x^2\right)$ выполняется при $x=\dfrac{a}{4}$. Найдите все решения этого неравенства.

ОТВЕТЫ

1.нет. **2**. (3; 3); (3; -3). **3**. (1; 1). **4**. ± 13. **5**. $\pm 5; \pm 7$. **6**. Указание. $\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}>\frac{1}{n+1}$. **11**. 6. **12**. Данное число равно 3. **14**. нет. **15**. да. **16**. $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$. **17**. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **18**. $\frac{m+m^3}{2}$. **19**. 0. **20**. $\frac{ab+1}{a(8-5b)}$. **21**. 7. **22**. 1 или -2. **23**. $a_{50}\ge b_{50}$. **24**. $2;-6;18;-54$. **25**. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+n}$. **26**. $[-6;4]$. **27**. R. **28**. $2\pi\sqrt{2}$. **29**. $\operatorname{ctg}6, \cos 2, \operatorname{tg}3, \sin 4^\circ$. **31**. наименьшего значения не существует, наибольшее 1. **32**. $y=x-1$ при $x\to\infty$, $y=-x-1$ при $x\to-\infty$. **34**. 3. **35**. $(x^2-1)(y^2-1)=0$ – 4 прямых. **36**. 2; 0,5. **37**. 2; 4; -1, $-0{,}5$. **38**. $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. **39**. 1. **40**. $[6;+\infty)$. **41**. $(-\infty;-4]\cup[-2;-1]\cup[1;+\infty)$. **42**. $\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$. **43**. $(-\infty;+\infty)$. **44**. $\varnothing$. **46**. $(1;2);(2;1)$. **47**. $(2;-1)$; $(1;-2);(-2;-1);(1;2);(0;3);(-3;0)$. **48**. $(0;0;0);\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3};5\right);\left(-\frac{5}{9};\frac{5}{3};\frac{10}{9}\right)$. **49**. $(1;0;1);(-1;0;-1);\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$; $\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **50**. $(3;2;1)$. **51**. $40\,км^2$. **52**. 863. **53**. 8. **54**. 12,5 г. **55**. 3 м/мин, 1,8 м/мин. **56**. -1. **57**. $\varnothing$ при $a<-1$; $x=\frac{a^2+1}{2a}$ при $-1\le a<0$; $\varnothing$ при $0\le a<1$; $x=\frac{a^2+1}{a}$ при $a\ge 1$. **58**. $(2;+\infty)$. **59**. $(4;2);\left(\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$. **60**. $(64;1);(-1;-64)$. **61**. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$. **62**. $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$. **63**. $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{4}+\pi n\right);\left(\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right), n\in Z$.

64. $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\pi+2\pi k\right),k,n\in Z$. **65**. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi m;\frac{\pi}{3}+\pi n;-\frac{\pi}{3}+\pi\left(2p-m-n\right)\right)$;
$\left(-\frac{\pi}{6}+\pi m;-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi\left(2p-m-n+1\right)\right),p,m,n\in Z$.

66. $arctg10+\pi n,n\in Z$. **67**. $\left(2;3\right)\cup\left(4;+\infty\right)$.

68. $\left(\pi n;2\pi k\pm\frac{\pi}{3}\right),k,n\in Z$. **69**. $\left[\sqrt{6}-1;2)\cup(2;5\right]$. **70**. $\left(2;2,5\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1986, С. 176.
2. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре. – М.: Наука, 2006, С. 273.
3. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986, С. 303.
4. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. – Киров, 1994, С. 52.
5. Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудуницын Ю.П., Шварцбурд С.И. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. – М.: , Просвещение, 1990, С. 48.
6. Мальцев Д.А., Мальцев А.А., Мальцева Л.И. Математика. – М.: Наука, 2011, С. 178.

Учебное издание

ПОДГОТОВКЕ К ПРОФОРИЕНТАЦИОННОЙ ОЛИМПИАДЕ
ПГУ ПО МАТЕМАТИКЕ
Методические рекомендации

Составители
Анна Петровна Зинган
Ольга Федоровна Васильева
Виталий Васильевич Васильев

Издаётся в авторской редакции

Подписано в печать 18.03.2024 г.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 3, 25. Электронное издание. Заказ № 285.

Подготовлено в Изд-ве Приднестр. ун-та. 3300, г. Тирасполь, ул. Мира, 18.
Опубликовано на образовательном портале moodle.spsu.ru