ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т. Г. ШЕВЧЕНКО
Физико-технический институт
Физико-математический факультет
Кафедра высшей и прикладной математики и информатики

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО РАЗДЕЛАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические указания

Тирасполь
Издательство Приднестровского Университета
2024

УДК 519.6 (072.8)
ББК В19р30
П69

Составители:
Л. В. Чуйко, канд. пед. наук, доц. каф.
И. И. Журжи, ст. преп.

Рецензенты:
Г. И. Ворническу, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. высшей и прикладной математики и информатики физико-технического института ПГУ им. Т. Г. Шевченко
В. В. Граневский, канд. филос. наук, доц. каф. философии института государственного управления, права и социально-гуманитарных наук ПГУ им. Т. Г. Шевченко.

П69 **Практические занятия по разделам математического анализа:** методические указания [Электронный ресурс] / составители: Л. В. Чуйко, И. И. Журжи. – Тирасполь: Изд-во Приднестр. ун-та, 2024. – 70 с.

Системные требования : CPU (Intel/AMD) 1,5 ГГц / ОЗУ 2 Гб / HDD 450 Мб / 1024*768 / Windows 7 и старше / Internet Explorer 11 / Adobe Acrobat Reader 6 и старше.

Издание представляет собой руководство к проведению практических занятий по разделам математического анализа из курса «Математика», «Элементы высшей математики». Материал разбит на темы, содержащие краткие теоретические сведения, задачи как для аудиторного, так и для самостоятельного решения, а также примеры решения типовых задач. Адресуется студентам инженерных специальностей.

УДК 519.6 (072.8)
ББК В19р30

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т. Г. Шевченко

© Чуйко Л. В., Журжи И. И., составление, 2024

ВВЕДЕНИЕ

Современная вычислительная техника требует от инженеров знаний из различных разделов высшей математики и применения этих знаний к решению различных задач народного хозяйства.

Основной формой обучения студента является аудиторная и самостоятельная работа, которая включает в себя изучение теоретического материала по прочитанным лекциям, по учебникам, выполнение упражнений, решение задач с использованием учебных и методических пособий.

Главной целью данного пособия является пробуждение у студентов активного желания решать предлагаемые по учебному плану задачи по различным темам одного из самых важных разделов высшей математики – математического анализа. Пособие будет полезно для студентов других отделений, изучающих высшую математику.

Как правило, в пособии приводятся несложные задачи. Составители сознательно старались избежать задач повышенной трудности, так как ставили перед собой цель привлечь студента решать основные задачи по высшей математике, дать некоторый минимум, необходимый для усвоения студентом требований вузовской программы по математике. Вместе с тем работа с настоящим пособием не закрывает возможности более углубленного изучения предмета, так как содержит ряд творческих заданий.

Составители

Тема 1.
НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Краткие теоретические сведения

Проинтегрировать функцию $f(x)$ – значит найти ее неопределенный интеграл. К одним из основных методов интегрирования относиться *непосредственное интегрирование*. Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании основных свойств неопределенного интеграла и таблицы простейших интегралов.

Приведем основные свойства неопределенного интеграла:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Неопределенный интеграл от алгебраической суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от слагаемых функций:

$$\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Значение интегралов от основных элементарных функций получаются из формул дифференцирования этих функций.

Приведем **таблицу основных интегралов**, которую следует знать:

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

5. $\int e^x dx = e^x + C;$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C; \end{cases}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C;$

12. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C;$

13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arc}tgx + C, \\ -\operatorname{arc}ctgx + C; \end{cases}$

Пример. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \left(2x^3 - 5x^2 + 7x - 3\right) dx$$

Решение.

Используя свойства 2 и 3 неопределённого интеграла, получаем

$$\int \left(2x^3 - 5x^2 + 7x - 3\right) dx = \int 2x^3 dx - \int 5x^2 dx + \int 7x dx - \int 3 dx =$$

$$= 2\int x^3 dx - 5\int x^2 dx + 7\int x dx - 3\int dx = 2\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} - 3x + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C.$

К первым трем интегралам правой части применили формулу 2, а к четвертому интегралу – формулу 1.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{5x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 7}{x^3} dx$.

При вычислении данного интеграла используем способ непосредственного интегрирования.

$$\int \frac{5x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 7}{x^3} dx = \int \left(\frac{5x^5}{x^3} - \frac{2x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{4x}{x^3} - \frac{7}{x^3} \right) dx =$$

$$= \int \left(5x^2 - 2 + 3\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{7}{x^3} \right) dx = \int 5x^2 dx - 2\int dx + 3\int \frac{dx}{x} + 4\int x^{-2} dx - 7\int x^{-3} dx =$$

$$= 5\frac{x^3}{3} - 2x + 3\ln|x| + 4\frac{x^{-1}}{-1} - 7\frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{5}{3}x^3 - 2x + 3\ln|x| - \frac{4}{x} + \frac{7}{2x^2} + C$$

Ответ: $\frac{5}{3}x^3 - 2x + 3\ln|x| - \frac{4}{x} + \frac{7}{2x^2} + C$.

Аудиторная работа. Найти интегралы 1.1–1.15.

1.1. $\int (2x+1)dx$;

1.2. $\int (x^4 - 3x^2 + x - 5)dx$;

1.3. $\int (x^3+1)^2 dx$;

1.4. $\int x^2(x^2+4)dx$;

1.5. $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{x})dx$;

1.6. $\int \frac{x^3 + 3x + 1}{x} dx$;

1.7. $\int \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x}} dx$;

1.8. $\int 2e^x dx$;

1.9. $\int (a^x + \sin x)dx$;

1.10. $\int \frac{3}{\sqrt{4 - 4x^2}} dx$;

1.11. $\int (2^x + \frac{1}{\sqrt{x}} - 3^x)dx$;

1.12. $\int \frac{x^2+2}{1+x^2} dx$;

1.13. $\int \frac{x^2}{3(1+x^2)} dx$;

1.14. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1} dx$;

1.15. $\int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2+1} dx$.

Самостоятельная работа. Найти интегралы 1.16–1.20.

1.16. $\int e^{4x}dx$;

1.17. $\int \cos 3x dx$;

1.18. $\int \operatorname{tg} 4x dx$;

1.19. $\int \frac{2dx}{3\sqrt{1-x^2}}$;

1.20. $\int (x+1)^3 dx.$

Домашнее задание. Найти интегралы 1.21–1.27.

1.21. $\int (x^2+2)^2 dx$;

1.22. $\int (2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}-\frac{1}{x^4}+7)dx$;

1.23. $\int 10^{-x}dx;$

1.24. $\int (4\cos x-\frac{5}{\sqrt{9-9x^2}})dx$;

1.25. $\int (x^2-1)^2 x^3 dx$;

1.26. $\int (e^{3x}+2x)dx;$

1.27. $\int \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx.$

Тема 2.
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ И СПОСОБОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Краткие теоретические сведения

Если интеграл не табличный, то его можно привести к табличному, сделав замену переменной (подстановку). Например, чаще всего корень обозначают новой переменной t. Затем находят x из подстановки и dx по формуле $d(f(x)) = f'(x)dx$. Найденные выражения подставляют в заданный интеграл и вычисляют его.

Рассмотрим еще один метод интегрирования – *интегрирование по частям*. Формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu \ .$$

Для того чтобы вычислить неопределенный интеграл, применяя формулу интегрирования по частям необходимо в исходном интеграле выделить u и dv. За u необходимо брать то, что становится проще после дифференцирования (нахождения производной), а за dv – оставшуюся часть подинтегрального выражения, т. е. то, от чего можно вычислить интеграл.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx$.

Решение.

Вычислим интеграл, используя метод интегрирования по частям:

$$\int \frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{ll} U = \ln\sin x, & dU = \dfrac{\cos x}{\sin x}dx = ctgxdx \\ dV = \dfrac{dx}{\cos^2 x}, & V = \int d(tgx) = tgx \end{array} \right| =$$

$$= tgx \cdot \ln\sin x - \int tgx \cdot ctgxdx = tgx \cdot \ln\sin x - \int dx = tgx \cdot \ln\sin x - x + C.$$

Ответ: $tgx \cdot \ln\sin x - x + C.$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/2} \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение.

используя метод замены переменной:

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, t = \arcsin x; x = 0, t = 0; x = 1/2, t = \arcsin 1/2 = \dfrac{\pi}{6}. \\ dx = \cos t dt, \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t, \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/6} \frac{e^t}{\cos t}\cos t dt = \int\limits_0^{\pi/6} e^t dt = e^t \Big|_0^{\pi/6} = e^{\pi/6} - e^0 = e^{\frac{\pi}{6}} - 1.$$

Ответ: $e^{\pi/6} - 1.$

Аудиторная работа. Найти интегралы 2.1–2.10.

2.1. $\int (e^{5x} + \cos 2x - \frac{1}{x})dx$;

2.2. $\int (x^3 - 2x^2 + 1)dx$;

2.3. $\int \frac{x^2 + x^4}{x^2}dx$;

2.4. $\int e^x \operatorname{ctg}(e^x)dx$;

2.5. $\int x\sin x dx$;

2.6. $\int \sqrt[3]{3x - 2x}$;

2.7. $\int \frac{2dx}{\sqrt{1+x}}$;

2.8. $\int x\sin x dx$;

2.9. $\int x^4 \ln x dx$;

2.10. $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Самостоятельная работа. Найти интегралы 2.16–2.17.

2.16. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

2.17. $\int xe^{3x} dx$.

Творческое задание. Найти интеграл 2.18.

2.18. $\int e^x \cos x dx$.

Домашнее задание. Найти интегралы 2.11–2.15.

2.11. $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$;

2.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}}$;

2.13. $\int \frac{(1+x^2)^2}{x^2+1} dx$;

2.14. $\int x\sin 2x dx$.

2.15. $\int x^3 \ln x dx$.

Тема 3.
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДРОБЕЙ И ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Краткие теоретические сведения

Интегрирование простейших дробей сводиться к табличным интегралам 2 и 3, возможно с заменой переменной. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен, сводиться к выделению полного квадрата из квадратного трехчлена. При интегрировании неправильной дроби (степень многочлена в числителе, больше степени многочлена в знаменателе) следует выделить целую часть, разделив числитель на знаменатель. Далее дробь следует представить в виде суммы простейших дробей и проинтегрировать, используя свойства интегралов и таблицу интегралов.

Пример. а) Вычислить интеграл $\int \frac{2x^3-5x^2+3x-4}{x^2}dx.$

Решение.

$$\int \frac{2x^3-5x^2+3x-4}{x^2}dx=\int\left(\frac{2x^3}{x^2}-\frac{5x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)dx=\int\left(2x-5+\frac{3}{x}-4x^{-2}\right)dx=$$

$$=\int 2xdx-\int 5dx+\int\frac{3}{x}dx-\int 4x^{-2}dx=2\int x^1dx-5\int dx+3\int\frac{dx}{x}-4\int x^{-2}dx=$$

$$=2\cdot\frac{x^2}{2}-5x+3\ln|x|-4\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C=x^2-5x+3\ln|x|-4\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=$$

$$=x^2-5x+3\ln|x|+4\cdot x^{-1}+C=x^2-5x+3\ln|x|+\frac{4}{x}+C.$$

Ответ: $x^2-5x+3\ln|x|+\dfrac{4}{x}+C.$

б) Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{x^3+7}{x^2+4x-21}dx.$

Дробь $\dfrac{x^3+7}{x^2+4x-21}$, стоящая под интегралом, − неправильная, так как степень ее числителя (третья) выше степени знаменателя (второй). Поэтому прежде всего выделяем целую часть. Для этого делим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{l|l} x^3+7 & x^2+4x-21 \\ \underline{-\;x^3+4x^2-21x} & \overline{x-4} \\ -4x^2+21x+7 & \\ \underline{-\;-4x^2-16x+84} & \\ 37x-77 & \end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{x^3+7}{x^2+4x-21}=x-4+\frac{37x-77}{x^2+4x-21}.$$

Разложим дробь $\dfrac{37x-77}{x^2+4x-21}$ на простейшие дроби. Корни квадратного трёхчлена найдём по теореме Виета: $\left[\begin{array}{l} x=-7; \\ x=3. \end{array}\right.$

Знаменатель дроби $x^2+4x-21=(x+7)(x-3)$, поэтому данная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{37x-77}{x^2+4x-21}=\frac{A}{x+7}+\frac{B}{x-3}.$$

Умножая обе части этого равенства на $(x+7)(x-3)$, получаем

$$37x-77=A(x-3)+B(x+7).$$

Неопределённые коэффициенты A и B определим способом задания частных значений.

Пусть $x=3$, тогда $A\cdot 0+B\cdot 10=37\cdot 3-77\Rightarrow B=3,4$. Пусть $x=7$, тогда $A\cdot(-10)+B\cdot 0=37\cdot(-7)-77\Rightarrow A=33,6$.

Итак,

$$\frac{37x-77}{x^2+4x-21}=\frac{33,6}{x+7}+\frac{3,4}{x-3}.$$

Учитывая эти преобразования, получим

$$\int\frac{x^3+7}{x^2+4x-21}dx=\int\left(x-4+\frac{37x-77}{x^2+4x-21}\right)dx=$$

$$=\int(x-4)dx+\int\frac{37x-77}{(x+7)(x-3)}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+\int\left(\frac{33,6}{x+7}+\frac{3,4}{x-3}\right)dx=\frac{x^2}{2}-4x+33,6\int\frac{d(x+7)}{x+7}+3,4\int\frac{d(x-3)}{x-3}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+33,6\ln|x+7|+3,4\ln|x-3|+C.$$

Ответ: $\frac{x^2}{2}-4x+33,6\ln|x+7|+3,4\ln|x-3|+C.$

Аудиторная работа. Найти интегралы 3.1–3.8.

3.1. $\int\frac{dx}{x+5}$; **3.2.** $\int\frac{dt}{(t-2)^3}$.; **3.3.** $\int\frac{dv}{(2v+7)^5}$;

3.4. $\int\frac{dx}{x^2-x+2}$; **3.5.** $\int\frac{dx}{x^2-7x+10}$; **3.6.** $\int\frac{2x+3}{x^2+x+1}dx$;

3.7. $\int\frac{x^4}{1-x}dx$; **3.8.** $\int\frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}dx.$

Самостоятельная работа. Найти интегралы.

3.9. $\int\frac{3}{x^2+x+1}dx$; **3.10.** $\int\frac{8x+1}{x^2+x-2}dx.$

Домашнее задание. Найти интегралы 3.11–3.15.

3.11. $\int\frac{x^4}{x^2+1}dx$, Ответ: $\frac{1}{3}x^3-x+\operatorname{arctg}x+C$;

3.12. $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1}dx$, Ответ: $x+\ln\left|x^2+1\right|+C$;

3.13. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$, Ответ: $x-2\operatorname{arctg}x+C$;

3.14. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

3.15. $\int \frac{dx}{(x+1)^4}$.

Тема 4.
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Краткие теоретические сведения

При интегрировании тригонометрических функций применяют формулы тригонометрии:

$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\quad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, $\quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

Интегралы вида $\int R(\cos x,\sin x)\,dx$ рационализируются всегда с помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. Тогда производят замену $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Пример. Найти интеграл $\int\dfrac{dx}{\sin x}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left[\sin x=\frac{2t}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2},tgx=t\right]=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{t}=$$

$$=\ln|t|+C=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

Аудиторная работа. Найти интегралы 4.1–4.7.

4.1. $\int\dfrac{dx}{\sin^3 x}$; **4.2.** $\int\dfrac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$; **4.3.** $\int\cos 7x\cos 5x dx$;

4.4. $\int \sin 3x \sin x dx$;

4.5. $\int \sin 6x \cos 2x dx$;

4.6. $\int \frac{dx}{17\sin^2 x - 6\sin x \cos x + 3\cos^2 x}$;

4.7. $\int \frac{dx}{\sin x + 3\cos x + 1}$.

Самостоятельная работа. Найти интегралы 4.8–4.10.

4.8. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$;

4.9. $\int \cos^5 x dx$;

4.10. $\int tg^3 x dx$, Ответ: $\frac{1}{4} tg^4 x - \frac{1}{2} tg^2 x - \ln|\cos x| + C$.

Домашняя работа. Найти интегралы 4.11–4.12.

4.11. $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$, Ответ: $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x) + C$.

4.12. $\int \sin 5x \sin 3x dx$.

Творческое задание. Доказать двумя способами формулу $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.

Тема 5.
ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЕГО СВОЙСТВА, ВЫЧИСЛЕНИЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Краткие теоретические сведения

Определённым интегралом от a до b от функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, называется приращение любой её первообразной $F(x)$ при изменении аргумента x от значения $x=a$ до значения $x=b$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Указанная формула называется формулой Ньютона-Лейбница, a и b – пределы интегрирования. Простейшие свойства определённого интеграла:

1. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx;$

2. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx;$ **3.** $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx;$

4. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

5. Если отрезок интегрирования $[a; b]$ разбит на части $[a, c]$ и $[c, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Если $f(x) \geq 0$, то и $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{36} \sqrt{x}dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{36} \sqrt{x} \cdot dx = \int\limits_0^{36} x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_0^{36} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{36} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{36} = \frac{2}{3} (\sqrt{x})^3 \Big|_0^{36} =$$

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{36})^3 - \frac{2}{3} (\sqrt{0})^3 = 144.$$

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$, двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a,b]$ оси абсцисс, вычисляется по одной из следующих формул:

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a,b]$;

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx,$$

если $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a,b]$.

Если площадь S ограничена двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f_1(x) \leq f_2(x)$ на отрезке $[a,b]$, то

$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, вычисляется по формуле

$$V_{ox} = \pi \int\limits_a^b \left(f(x) \right)^2 dx.$$

Аналогично, *объем тел, вращением вокруг оси Oy* криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x=\varphi(y)$, осью ординат и двумя прямыми $y=c$ и $y=d$ $(c<d)$, вычисляется по формуле

$$V_{oy}=\pi\int_c^d\left(\varphi(y)\right)^2dy.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{1}{4}x^2-1, y=\frac{1}{2}x+5.$$

Решение.

Построим фигуру, площадь которой требуется найти (рис. 1).

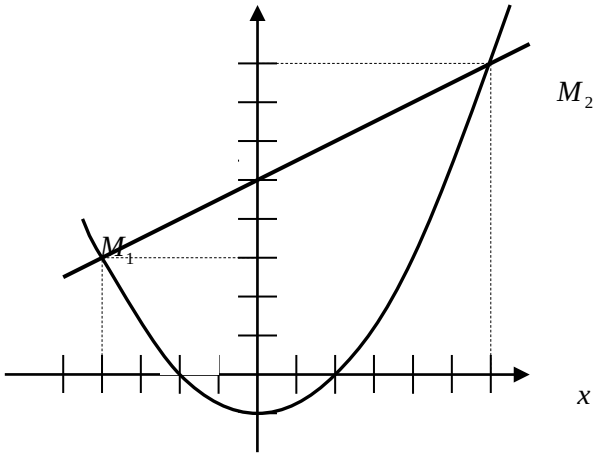

Рис. 1.

Графиком функции $y=\frac{1}{4}x^2-1$ является парабола, ветви которой направлены вверх, так как $a=\frac{1}{4}>0$, а вершина находится в точке $A(x_0,y_0)$, где

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 0\,;\ y_0 = y(x_0) = \frac{1}{4} \cdot 0^2 - 1 = -1.$$

Таким образом, $A(0;-1)$.

Найдём точки пересечения параболы с осью Ox:

$$y = 0\,;\ \frac{1}{4}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 2.\,;$$

Парабола пересекает ось абсцисс в точках $B(-2;0)$ и $C(2;0)$.

Для построения прямой, заданной уравнением $y = \frac{1}{2}x + 5$, достаточно указать координаты двух её точек:

x	0	4
y	5	7

Найдём точку пересечения прямой и параболы. Для этого решим совместно систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \\ y = \frac{1}{2}x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 5, \\ \frac{1}{2}x + 5 = \frac{1}{4}x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 6 = 0, \\ y = \frac{1}{2}x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 24 = 0, \\ y = \frac{1}{2}x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 5, \\ \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -4; \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6; \\ y = 8. \end{cases} \end{array}\right.$$

Итак, прямая пересекает параболу в точках $M_1(-4;3)$ и $M_2(6;8)$. Площадь заштрихованной фигуры AM_1M_2 найдём по формуле $S = \int_{x_1}^{x_2} (f_1(x) - f_2(x))dx$,

где $x_1 = -4$, $x_2 = 6$, $f_1(x) = \frac{1}{2}x + 5$, $f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$,

так как прямая является верхней границей заштрихованной области, а парабола − нижней.

Итак,

$$S=\int_{-4}^{6}\left(\frac{1}{2}x+5-\frac{1}{4}x^2+1\right)dx=\int_{-4}^{6}\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+6\right)dx=$$

$$\left(-\frac{1}{4}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+6x\right)\Big|_{-4}^{6}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{6^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6^2}{2}+6\cdot 6-$$

$$-\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{(-4)^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(-4)^2}{2}+6(-4)\right)=-18+9-36-\left(\frac{16}{3}+4-24\right)=$$

$$=\frac{125}{3}=41\frac{2}{3}(\textit{кв.ед}).$$

Ответ: $41\frac{2}{3}$ кв. ед.

Пример. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями: $y^2=4x-4$ и $y=2x-6$ (рис. 2).

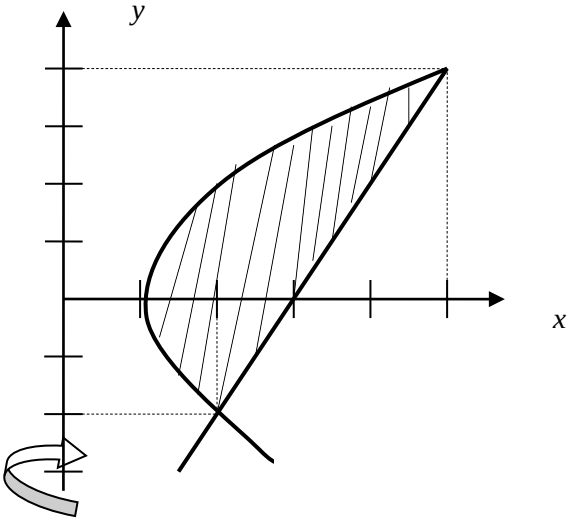

Рис. 2.

Решение.

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, определяется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy,$$

где $x = f^{-1}(y)$.

Выразим x через y в уравнениях заданных кривых:

$$y^2 = 4x - 4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}y^2 + 1; y = 2x - 6 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y + 3.$$

Пределы интегрирования $a = -2$ и $b = 4$ найдём, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - 6, \\ y^2 = 4x - 4. \end{cases}$$

Тогда

$$V = \pi \int_{-2}^{4} \left(\left(\frac{1}{2}y + 3 \right)^2 - \left(\frac{1}{4}y^2 + 1 \right)^2 \right) dy =$$

$$= \pi \int_{-2}^{4} \left(\frac{1}{4}y^2 + 3y + 9 - \frac{1}{16}y^4 - \frac{y^2}{2} - 1 \right) dy =$$

$$dy = \pi \int_{-2}^{4} \left(-\frac{1}{16}y^4 - \frac{y^2}{2} + 3y + 8 \right) dy = \pi \left(-\frac{1}{16}\frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{2 \cdot 3} + 3\frac{y^2}{2} + 8y \right) \Bigg|_{-2}^{4} =$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{16}\frac{4^5}{5} - \frac{4^3}{2 \cdot 3} + 3\frac{4^2}{2} + 8 \cdot 4 + \frac{1}{16}\frac{(-2)^5}{5} + \frac{(-2)^3}{2 \cdot 3} - 3\frac{(-2)^2}{2} - 8 \cdot (-2) \right) =$$

$$= 46{,}8\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $46{,}8\pi$ куб. ед.

Аудиторная работа. Вычислить интегралы 5.1–5.9.

5.1. $\int_{-1}^{1} 2x^3 dx$; **5.2.** $\int_{0}^{2} (2x + 4) dx$; **5.3.** $\int_{0}^{1} (1 + x)^{\frac{1}{2}} dx$;

5.4. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; **5.5.** $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; **5.6.** $\int\limits_{1}^{2} x\ln x dx$;

5.7. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$; Ответ: $\frac{2}{3}$; **5.8.** $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$;

5.9. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3}$;

Самостоятельная работа. Вычислить интегралы 5.10–5.11.

5.10. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$. Ответ: $2-\frac{\pi}{2}$;

5.11. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2}$, Ответ: $0,2\ln\frac{4}{3}$.

Домашняя работа. Вычислить интегралы 5.12–5.16.

5.12. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; **5.13.** $\int\limits_{1}^{3} x\ln x\, dx$; **5.14.** $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{x^2} dx$;

5.15. $\int\limits_{1}^{2} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$; **5.16.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$.

Тема 6.
НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Краткие теоретические сведения

Понятие определенного интеграла было введено для конечного отрезка интегрирования $[a,b]$ и непрерывной функции $f(x)$ в отрезке $[a,b]$. Такие интегралы носят название собственных интегралов. Если же отрезок интегрирования $[a,b]$ не конечен или подынтегральная функция разрывна, то такие интегралы называются несобственными.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$.

Решение:

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to\infty}\int\limits_1^{a}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to\infty}\int\limits_1^{a}x^{-2}=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_1^a=\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^a=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{a}+1\right)=-\frac{1}{\infty}+1=0+1=1.$$

Аудиторная работа. Вычислить интегралы 6.1–6.8.

6.1. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение.

Функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$ непрерывна при $0<x\le 1$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$ поэтому имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2.$$

6.2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$; **6.3.** $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$; **6.4.** $\int_0^\infty e^{-ax}dx$;

6.5. $\int_{-\infty}^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$; **6.6.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$; **6.7.** $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x}dx$;

6.8. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2\left(x+1\right)}$.

Самостоятельная работа. Вычислить интегралы 6.9–6.10.

6.9. $\int \frac{\sin^5 xdx}{\cos^4 x}$; **6.10.** $\int_1^\infty \frac{3xdx}{8-x^2}$.

Домашняя работа. Вычислить интегралы 6.11–6.15.

6.11. $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^6 x}$; **6.12.** $\int \frac{5xdx}{2x^2+4x+3}$;

6.13. $\int \frac{x^5-2x^2+3}{\left(x-2\right)^2}dx$; **6.14.** $\int_{-\infty}^1 \frac{5xdx}{3-4x^2}$;

6.15. $\int_1^2 \frac{8xdx}{4x^2-3}$.

Тема 7.
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Краткие теоретические сведения

Переменная z называется функцией двух переменных x и y, если каждой паре чисел $(x;y)$ из некоторого множества по определенному закону ставится в соответствие одно значение переменной z. При этом x и y называются независимыми переменными или аргументами, z – функцией или зависимой переменной. Множество пар чисел $(x;y)$, для которых определена функция z, называется областью определения этой функции. Множество значений z называется областью изменения функции z. Если каждой паре чисел $(x;y)$ из области определения функции соответствует одно значение z, то функция называется однозначной, в противном случае – многозначной.

Пример. Найти частные производные функции $z = 2x^2 + y^2$.

Решение.

$$z'_x = (2x^2 + y^2)'_x = \left\langle \begin{array}{l} x - \textit{переменная} \\ y - \textit{число, мысленно представим,} \\ \textit{что } y = 5 \Rightarrow z = 2x^2 + 5^2 \Rightarrow z' = 4x \end{array} \right\rangle = 4x.$$

Т.е. $z'_x = 4x$.

$$z'_y = (2x^2 + y^2)'_x = \left\langle \begin{array}{l} y - \textit{переменная} \\ x - \textit{число, мысленно представим,} \\ \textit{что } x = 2 \Rightarrow z = 2 \cdot 2^2 + y^2 \Rightarrow z_y' = 2y \end{array} \right\rangle = 2y.$$

Т.е. $z'_y = 2y.$

Аудиторная работа. Найти частные производные первого порядка функций нескольких переменных 7.1–7.11.

7.1. $z = x^3 y - y^3 x.$ **7.2.** $z = 3x^2 y + 2xy^2.$

7.3. $z = \sin(xy).$ **7.4.** $z = arctg(xy).$

7.5. $z = arctg(xy)$ в точке $(1;1)$; **7.6.** $z = arctg\dfrac{y}{x}.$ в точке $(1;1)$;

7.7. $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1.$ в точке $(3;1)$;

7.8. $u = xy + z^2 + xz - 2.$

7.9. $u = x^2 + y^2 - z^2.$ в точке $(1;1;3)$;

7.10. $z = \ln\left(4 + 4x - y^2\right).$ **7.11.** $u = \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}.$

Найти дифференциал функции первого порядка 7.12-7.15.

7.12. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right).$ **7.13.** $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}.$

7.14. $z = \arcsin\dfrac{y}{x}.$ **7.15.** $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

Самостоятельная работа. Найти все частные производные второго порядка функций 7.16–7.19.

7.16. $z = \sqrt{2xy + y^2}.$ **7.17.** $z = e^{2x} tgy.;$

7.19. $z = x^3 + y^3 + 3xy.$

Домашняя работа. Найти все частные производные второго порядка функций 7.20–7.22.

7.20. $z = 2x^5 y - 4x^2 y^3 + 8x\sqrt{y}.$ **7.21.** $z = 5^x \cdot \sin xy.$

7.22. $z = 4\sqrt{3xy^2 - 7xy^4}.$

Тема 8.
ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ГРАДИЕНТ

Краткие теоретические сведения

Говорят, что задано скалярное поле, если указан закон, в силу которого в каждой точке *M* некоторой области *V* поставлено в соответствие определённое число $U(M)$.

Если выбраны некоторая система координат, то данное скалярное поле эквивалентно заданию функции трёх переменных $U(M)=U(x,y,z)$ в пространстве или заданию функции двух переменных $U(M)=U(x,y)$ на плоскости, в этом случае поле $U(M)$ называется плоским полем.

Множество всех точек *M* из области *V*, в которых выполняется равенство $U(M)=C$, где *C*- некоторая постоянная, называется поверхностью уровня, соответствующей числу С.

Производная скалярного поля *U*(*M*) по направлению *l*, заданную вектором $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$ вычисляется по формуле $U_l'=U_x'\cos\alpha+U_y'\cos\beta+U_z'\cos\gamma$, где

$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|a|},\cos\beta=\dfrac{a_y}{|a|},\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|a|}$, $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ – длина вектора.

Абсолютная величина $|U_l'|$ – определяет скорость изменения скалярного поля в точке *M*, а ее знак – характер его изменения

(возрастание или убывание). *Градиент скалярного поля* $U(M)$ есть вектор, обозначается $gradu$, направленный по нормали к поверхности уровня поля в сторону возрастания поля и численно равный наибольшей производной по направлению. Если в пространстве выбрана некоторая декартовая система координат, то градиент вычисляется по формуле

$$gradu = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \vec{k}.$$

Аудиторная работа.

8.1. Найти градиент скалярного поля $U(M)$

$U = 3x^2y - 3xy^3 + y^4$ в точке $M(1;2)$.

Ответ: $gradU = -12\vec{i} - \vec{j}$.

8.2. Найти производную функции $U = xyz$ в точке $A(5;1;2)$ в направлении от этой точки к точке $B(9;4;14)$.

8.3. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $N(1;2;-1)$. Поверхность задана уравнением: $x^3 - y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0.$

8.4. Даны функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ Найти угол между градиентами этих функций в точке $N(3;4)$.

8.5. Найти производную функции $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точке $A(2;1)$ в направлении, идущем от этой точки к началу координат.

Самостоятельная работа.

8.6. Найти производную поля $U(M) = y^2z - 2xyz + z^2$ в точке $M(3;1;1)$ по направлению вектора l, если l образует с

координатными осями острые углы α,β,γ, причём $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$. Установить характер изменения поля в данном направлении.

Домашняя работа

8.7. В данной точке $M_0(1;0;-1)$ найти уравнения касательной и нормали к поверхности $x^2yz + 2x^2z - 3xyz + 2 = 0$.

8.8. Найти производную поля $U(M) = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ в точке $M_0(0;0;0)$ по направлению, идущему от этой точки к точке $M_0(3;4;0)$.

8.9. Найти градиент скалярного поля $U(M) = 3x^2y - 3xy^3 + y^4$ в точке $M(1;2;0)$.

Тема 9.
УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К ПОВЕРХНОСТИ

Краткие теоретические сведения

Касательной плоскостью α к поверхности F в точке M_0 называется плоскость, в которой расположены касательные к всевозможным кривым, проведённым на поверхности F через M_0. Нормалью n к поверхности называется прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной плоскости. Чтобы написать уравнение касательной плоскости α и нормали n, надо знать вектор $\overrightarrow{N}(A,B,C)$, идущий по нормали. Тогда уравнение плоскости α запишется в виде

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0.$$

Уравнение нормали n запишется в виде

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}.$$

Коэффициенты A,B,C- это частные производные функции F в $M_0(x_0,y_0,z_0)$, т.е. $A=F_x^{'}(M_0)$, $B=F_y^{'}(M_0)$, $C=F_z^{'}(M_0)$.

Пример. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к параболоиду $z=x^2+y^2$ в M_0, где $x_0=1, y_0=-2$.

Решение.

Найдём сначала координату $z_0=x_0^2+y_0^2=1^2+(-2)^2=5\Rightarrow M_0(1;-2;5)$. Уравнения параболоида перепишем в виде

$x^2 + y^2 - z = 0$, т.е. $F = x^2 + y^2 - z$.

Найдём частные производные:

$F_x^{'} = (x^2 + y^2 - z)_x^{'} = 2x + 0 - 0 = 2x,$

$F_y^{'} = (x^2 + y^2 - z)_y^{'} = 0 + 2y - 0 = 2y,$

$F_z^{'} = (x^2 + y^2 - z)_z^{'} = -1.$

Теперь вычислим значения полученных производных в точке M_0, т.е. найдём *A*, *B*, *C*:

$$A = F_x^{'}(M_0) = \left\langle \begin{matrix} \textit{в эту производную} \\ \textit{подставим } x_0 = 1, y_0 = -2, z_0 = 5 \end{matrix} \right\rangle = 2x_0 = 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow A = 2.$$

$$B = F_y^{'}(M_0) = 2y_0 = 2 \cdot (-2) \Rightarrow B = -4.$$

$$C = \underbrace{F_z^{'}(M_0) = -1}_{\substack{\textit{в этой производной не было} \\ \textit{переменных и нечего было подставлять}}} \Rightarrow C = -1.$$

Итак, из (1) $\Rightarrow$ $A = 2, B = -4, C = -1, x_0 = 1, y_0 = -2,\ z_0 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x-1) - 4(y+2) - (z-5) + 0 \Rightarrow 2x - 4y - z - 5 = 0$ – уравнение касательной плоскости.

Из (2) $\Rightarrow$ $\dfrac{x - x_0}{A} = \dfrac{y - y_0}{B} = \dfrac{z - z_0}{C} \Rightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$ – уравнение нормали.

Аудиторная работа. В задачах 9.1–9.4 найти уравнение касательной и нормали к поверхности.

9.1. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0$ в точке M_0 (1; 2; 2).

Ответ: $x - 5y + 2z + 5 = 0$, $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z-2}{2}$.

9.2. $x^2 + 2y^2 - x + 2y + 4z - 13 = 0$ в точке (2; 1; 2).

9.3. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$ в точке (1; 2; 3).

9. 4. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точке (1; 2; 1).

9.5. К поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $2x + 4y + 2z = 0$.

Самостоятельная работа.

9.6. Найти уравнение касательной и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 = 3$ в точке (1; 2; -1).

Домашняя работа.

В задачах 9.7 – 9.9 для данных поверхностей найти уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках.

9.7. $z = 2x^2 - 4y^2$ в точке (2;1;4).

9.8. $z = xy$ в точке (1;1;1).

9.9. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ в точке (3; 4; -7).

9.10. К эллипсоиду $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - y + 2z = 0$.

Тема 10.
ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Краткие теоретические сведения

Если дифференцируемая функция $Z = f\left(x; y\right)$ имеет экстремум в точке $P_0\left(x_0; y_0\right)$, то ее частные производные равны нулю (или не существуют), т.е.

$$\begin{cases} Z'_x = 0, \\ Z'_y = 0. \end{cases}$$

Точка $P_0\left(x_0; y_0\right)$ (в ней частная производная обращается в нуль), называется *критической*. Таким образом, если функция имеет экстремум в некоторой точке, то он может быть только в критической точке. Найдём в точке P_0 производные второго порядков и примем следующие обозначения:

$$A = \left(Z''_{xx}\right)_{\substack{x=x0 \\ y=y0}}, \quad B = \left(Z''_{xy}\right)_{\substack{x=x0 \\ y=y0}}, \quad C = \left(Z''_{yy}\right)_{\substack{x=x0 \\ y=y0}}.$$

Составим число $\Delta = AC - B^2$. Если:

1. $\Delta > 0$, то функция $Z = f\left(x; y\right)$ в точке P_0 имеет экстремум:

max при $A < 0$; min при $A > 0$;

2. $\Delta < 0$, то функция $Z = f\left(x; y\right)$ в точке P_0 экстремума не имеет;

3. $\Delta = 0$, то заключение об экстремуме сделать невозможно (в этом случае требуется дополнительное исследование).

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$Z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$.

Решение.

$$Z'_x = \left(xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8\right)'_x = y \cdot 1 - 2x - 0 + 1 + 0 - 0 = y - 2x + 1,$$

$$Z'_y = \left(xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8\right)'_y = x \cdot 1 - 0 - 4y + 0 + 10 - 0 = x - 4y + 10.$$

1. Приравниваем частные производные к нулю и решаем систему:

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ x - 4y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = -1 \\ x - 4y = -10 \,|\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = -1 \\ 2x - 8y = -20 \end{cases} + \Rightarrow$$

$$-7y = -21 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x - 4 \cdot 3 + 10 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Итак, получим точку $P_0(2;3)$ – критическая точка, в ней может быть (а может и нет) экстремум.

2. $Z''_{xx} = \left(Z'_x\right)'_x = \left(y - 2x + 1\right)'_x = 0 - 2 + 0 = -2,$

$$Z''_{xy} = \left(Z'_x\right)'_y = \left(y - 2x + 1\right)'_y = 1 - 0 + 0 = 1,$$

$$Z''_{yy} = \left(Z'_y\right)'_y = \left(x - 4y + 10\right)'_y = 0 - 4 + 0 = -4.$$

Как видим частные производные второго порядка получились числами (так будет не всегда). Поэтому подставлять $x_0 = 2,\ y_0 = 3$ в эти производные не нужно. Тогда:

$$A = \left(Z''_{xx}\right) = -2, \quad B = \left(Z''_{xy}\right) = 1, \quad C = \left(Z''_{yy}\right) = -4$$

3. $\Delta = AC - B^2 = -2 \cdot (-4) - 1^2 = 7 > 0$, согласно теореме 2, делаем вывод, что в точке $P_0(2;3)$ экстремум есть, а т.к. $A = -2 < 0$, то точка $P_0(2;3)$ – точка максимума.

4. $Z_{\max} = Z\left(2;3\right) = \left(Z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8\right) =$

$$= 2 \cdot 3 - 2^2 - 2 \cdot 3^2 + 2 + 10 \cdot 3 - 8 = 8.$$

5. *Ответ:* $Z_{\max} = Z\left(2;3\right) = 8.$

Аудиторная работа. $Z_{\max} = Z(2;3) = 8.$

В задачах 10.1–10.4 исследовать функцию на экстремум.

10.1. $Z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

10. 2. $Z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$

10.3. $Z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$

10.4. $Z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4.$

10.5. Экспериментально установлено, что издержки от выпуска x единиц изделий первого вида и y единиц изделий второго вида выражаются в виде функции $Z = \frac{x}{y} + \frac{1}{x} + y + 7.$ Найти минимальные издержки. Записать смысловой ответ задачи.

Самостоятельная работа.

10.6. Экспериментально установлено, что прибыль от выпуска x единиц изделий первого вида и y единиц изделий второго вида выражаются в виде функции $Z = 96xy - x^3 - 64y^3 + 1033.$ Найти максимальную прибыль. Записать смысловой ответ задачи.

Домашнее задание.

10.7. Исследовать на экстремум функцию $Z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + 4x + 7y^5.$

10.8. Исследовать на экстремум функцию $Z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$

Тема 11.
НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Краткие теоретические сведения

Если точка $P_0\left(x_0;y_0\right)$ лежит внутри области D, то в ней функция имеет абсолютный максимум (минимум). Но функция $Z=f\left(x;y\right)$ может достигать абсолютного экстремума и на границе области. Поэтому для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции $Z=f\left(x;y\right)$ в области D необходимо найти:

1. значения функции в критических точках внутри области;
2. наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области;
3. сравнить полученные числа и выбрать наибольшее (наименьшее) из них.

Аудиторная работа.

11.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z=x^2y\left(2-x-y\right)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0,\ y=0,\ x+y=0.$

11.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z=x^2-xy+2y^2+3x+2y+1$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0,\ y=0,\ x+y+5=0.$

11.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике с вершинами $A(1;-3)$, $B(1;2)$, $C(4;2)$, D $(4;-3)$.ограниченном прямыми $x = 0,\ y = 0,\ x + y + 5 = 0.$

11.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z = xy\left(x + y + 1\right)$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = \dfrac{1}{x},\ y = -\dfrac{3}{2},\ x = 1,\ x = 2.$

Самостоятельная работа.

11.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2;\ -1 \le y \le 2.$

Домашняя работа.

11.6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z = x^3 + y^3 - xy - x - y$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $x \ge 0, y \ge 0, x + y - 2 \le 0$.

11.7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

Тема 12.
ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО И ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛОВ

Краткие теоретические сведения

Двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ выражает геометрически объём цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $Z = f(x;y)$, снизу областью D плоскости XOY и цилиндрической поверхностью.

Вычисление двойного интеграла сводится к нахождению повторного интеграла, начиная с внутреннего: $\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x;y)dy$.

*Аудиторная работа***.** Вычислить двойные интегралы 12.1–12.6.

12.1. $\iint\limits_D xydxdy \qquad D: 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 2.$

12.2. $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy \qquad D: 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1.$

12.3. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy \quad D: 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1.$

12.4. $\iint\limits_D x^2ydxdy, \quad D: 0 \le x \le 1;\ 2 \le y \le 3.$

12.5. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy.$

12.6. $\int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{x}^{2x} \frac{y}{x} dy$.

12.7. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $z = 0; y + z = 2$; и цилиндром $y = x^2$.

Вычислить тройные интегралы 12.8–12.9.

12.8. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{2} dy \int\limits_{0}^{3} dz$.

12.9. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{x}^{b} dy \int\limits_{0}^{c} (x + y + z) dz$.

Самостоятельная работа. Вычислить интегралы в заданиях 12.10–12.11.

12.10. $\iint\limits_{D} x^2 y^3 dxdy$, $D: 1 \le x \le 2, y = 0, y = x^2$.

12.11. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{x} dy \int\limits_{0}^{xy} x^3 y^3 z dz$. Ответ: $\frac{a^{11}}{110}$.

*Домашняя работа***.** Вычислить интегралы в заданиях 12.12–12.15.

12.12. $\iint\limits_{D} \left(y^2 + 2y\right) dxdy$, $D: x = 3; x = 4;$ $y = 1; y = 2.$ Ответ: $\frac{16}{3}$.

12.13. $\int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y+1}} dx$. Ответ: $2\sqrt{3}$.

12.14. $\iiint\limits_{V} x^2 y^2 z \, dxdydz$, V: $x = 1, x = 3, y = 0, y = 2, z = 2, z = 5$.

Ответ: $\frac{728}{3}$.

12.15. $\iint\limits_{D} e^x dxdy$, где область D ограничена прямыми $x = 0, y = 1, y = 2$ и кривой $x = \ln y$.

Тема 13.
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

Краткие теоретические сведения

Алгоритм нахождения криволинейного интеграла:

1. Строим дугу, по которой идёт интегрирование; определяем нижний и верхний предел интегрирования.

2. Находим y'; если дуга задана параметрически, то $x'(t)$ и $y'(t)$; если в полярной системе координат, то ρ' .

3.Вычисляем ds по одной из формул: $ds=\sqrt{1+(y')^2}dx$; $ds=\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(y)\right]^2}dt$, $ds=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\phi$.

4. В подынтегральное выражение подставляем функцию $y(x)$; $x(t)$ и $y(t)$ или $(\rho(\phi))$.

5. Вычисляем определённый интеграл.

*Аудиторная работа***.** Вычислить интегралы 13.1–13.4.

13.1. $\int\limits_L \frac{ds}{x-y}$, где $L: y=\frac{1}{2}x-2$

от точки A (0; -2) до точки B (4; 0).

13.2. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^n ds$, где L окружность $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t. \end{cases}$

Ответ: $2\pi a^{2n+1}$.

13.3. $\int\limits_L y^2 ds$, где L арка циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(t - \cos t), \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{256}{15} a^3$.

13.4. $\int\limits_L \dfrac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$,

где L – отрезок прямой, соединяющей точки O (0; 0) и A (1; 2).

Решение.

Запишем уравнение прямой $L: y = 2x$. Находим $ds = \sqrt{1 + 2^2}\, dx = \sqrt{5} dx$. При движении от О к А x меняется от 0 до 1. Тогда

$$\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5} ds}{\sqrt{x^2 + 4x^2 + 4}} = \sqrt{5} \int\limits_0^1 \frac{ds}{\sqrt{5\left(x^2 + \frac{4}{5}\right)}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \int\limits_0^1 \frac{ds}{\sqrt{x^2 + \frac{4}{5}}} =$$

$$= \ln\left| x + \sqrt{x^2 + \frac{4}{5}} \right|\Bigg|_0^1 = \ln\left|1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right| - \ln\left|\frac{3}{\sqrt{5}}\right| = \ln\frac{\sqrt{5} + 3}{2}$$

Домашняя работа. Вычислить интегралы 13.5–13.6.

13.5. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2 + z^2\right) ds$, где L – дуга кривой $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $\left(0 \le t \le 2\pi\right)$

13.6. $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$, где L – дуга кривой $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{a^3}{3}$

Тема 14.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЕННЫМИ И РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Краткие теоретические сведения

Дифференциальным уравнением называется равенство, связывающее независимую переменную, её функцию и производные различных порядков этой функции.

Наивысший из указанных порядков производных называется порядком дифференциального уравнения. Например, уравнения

$2xy' - 3y^2 = 0, 5y'' + 2x^2 y = 0$, $y^{(V)} = 3x^2$ – есть дифференциальные уравнения соответственно 1-го, 2-го, 5-го порядков.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $F(x, y, y') = 0$, где x аргумент, y – неизвестная функция, y' – производная от y по x, F – функция. В частном случае уравнение (1) может не содержать x или y (или обе эти переменные).

Чаще всего рассматриваются уравнения, разрешённые относительно y':

$$y' = f(x, y).$$

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в дифференциальное

уравнение вместо y (при этом вместо y' подставляется $\varphi'(x)$), обращает заданное уравнение в тождество.

Например, непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что функция x^2 является решением уравнения $xy' - 2y = 0$. Однако, решением указанного дифференциального уравнения является не только x^2, но и любая функция вида Cx^2, где C – постоянная величина. Такое решение уравнения является общим его решением.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая функция $\varphi(x,C)$ двух аргументов x и C, которая при любом постоянном C является решением уравнения.

Решения $\varphi(x,C_0)$, которые получаются из общего решения $\varphi(x,C)$ при конкретном численном значении $C = C_0$, называются частными решениями дифференциального уравнения. $\varphi(x,C)$

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

называется уравнением с *разделёнными переменными*. Оно решается интегрированием: $M(x)dx + N(y)dy = 0$

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

называется уравнением с *разделяющимися переменными*. Для решения таких уравнений необходимо отделить переменные, разделив уравнение на $M_2(x)$ и $N_1(y)$, а затем уравнение нужно проинтегрировать. Уравнение решается при условии $M_2(x) \neq 0$, $N_1(y) \neq 0$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' - x^2 = 0$.

Решение.

Заменяя y' на $\frac{dy}{dx}$ и умножая на dx, получим

$dy - x^2 dx = 0$.

Интегрируем $\int dy - \int x^2 dx = C$ и находим $y - \frac{x^3}{3} = C$ или $y = \frac{x^3}{3} + C$ – общее решение уравнения. $y' - x^2 = 0$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $2x + \frac{y'}{y} = 0$.

Решение.

Заменяем $y' = \frac{dy}{dx}$, и, умножая на dx, имеем $2xdx + \frac{dy}{y} = 0$. После интегрирования получаем: $x^2 + \ln y = C$. Отсюда $\ln y = C - x^2$ или $y = e^{C - x^2}$. Это равенство можно переписать в виде $y = e^C e^{-x^2}$. Обозначим e^C через C_1, а затем снова вместо C_1 будем писать C. Это даст общее решение нашего дифференциального уравнения в виде $y = Ce^{-x^2}$.

Аудиторная работа.

14.1. Проверить, является ли функция $y = \ln\left(x^3 + 2\right) + C$ общим решением дифференциального уравнения $y' = \frac{3x}{x^3 + 2}$.

14.2. Проверить, является ли функция $y = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x + C$ общим решением дифференциального уравнения $y' = x^3 - 2x^2 + 1$.

14.3. Доказать, что функция $y = x^2 - 4x$ является решением уравнения $xdy - ydx = x^2 dx$.

Решить дифференциальные уравнения 14.4–14.8.

14.4. $x^2\left(y^3+5\right)dx+\left(x^3+5\right)y^2dy=0$.

14.5. $dz+rtg\phi d\phi=0$. Найти частное решение при $r=2$, $\phi=\dfrac{\pi}{3}$.

14.6. $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$

14.7. $xydx+\left(1+y^2\right)y\sqrt{1+x^2}dy=0$

14.8. $y'=5\sqrt{y}$

Самостоятельная работа. Решить дифференциальные уравнения 14.9–14.15.

14.9. $\sin x\cdot\sin ydx+\cos y\cdot\cos xdy=0$.

14.10. $y^2\left(x+1\right)dx+x^2\left(1-y\right)dy=0$

Домашнее задание. Решить дифференциальные уравнения 14.11–14.15.

14.11. $x+xy+yy'\left(1+x\right)=0$.

14.12. $\sin x\cdot\sin ydx+\cos x\cdot\cos ydy=0$.

14.13. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}y'=0$.

14.14. $tgydx-x\cdot\ln xdy=0$.

14.15. $y'+y^2=1$.

Тема 15.
ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Краткие теоретические сведения

Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ – это однородная функция.

Способ решения: делается подстановка $u = \frac{y}{x}$, выражается $y = ux$, а затем $y' = u + xu'$ или $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$.

Подставляя y и y' в заданное уравнение, получают уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $2x^2dy = \left(x^2 + y^2\right)dx$.

Решение.

Разделив обе части заданного уравнения на x^2dx, получим уравнение, правая часть которого есть функция отношения $\frac{y}{x}$:

$$2\frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Положив в нем $y = ux$ и $y' = x'u + u$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$2xu' + 2u = 1 + u^2 \Rightarrow 2x\frac{du}{dx} = u^2 - 2u + 1 \Rightarrow \frac{du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя и подставляя $\frac{y}{x}$ вместо u, получим общий интеграл исходного уравнения $2\int\frac{du}{(u-1)^2} = \int\frac{dx}{x}$ Интегрируя, получаем

$$2\int(u-1)^{-2}\,d(u-1) = \ln|x| + \ln C \Rightarrow -\frac{2}{u-1} = \ln C|x| \Rightarrow \frac{2}{u-\frac{y}{x}} = \ln C|x|.$$

Выражая отсюда y, можно получить общее решение в виде

$$\frac{2x}{x-y} = \ln C|x| \Rightarrow \frac{2}{\ln C|x|} = x - y \Rightarrow y = x - \frac{2x}{\ln C|x|}$$

Или окончательно

$$y = x\left(1 - \frac{2}{\ln C|x|}\right).$$

Аудиторная работа. Решить дифференциальные уравнения 15.1–15.8.

15.1. $y' + \frac{x^2+y^2}{xy} = 0$.

15.2. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2-y^2}$.

15.3. $2x^2dy = (x^2+y^2)dx$.

15.4. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

15.5. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

15.6. $y^2 + x^2y' = xyy'$.

15.7. $y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y}$.

15.8. $(2x-y+4)dy + (x-2y+5)dx = 0.$

Творческое задание.

15.9. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент времени. Количество бактерий утроилось в течение 5 ч. Найти зависимость количества бактерий от времени.

Самостоятельная работа. Решить дифференциальные уравнения 15.10–5.12.

15.10. $\sqrt[4]{x^4 + 2y^2x^2} = C$.

15.11. $\dfrac{x^2}{2y^2} + \ln|y| = C$.

15.12. $\dfrac{2x}{x-y} = \ln|x| + C$.

Домашняя работа. Решить дифференциальные уравнения.

15.13. $(x+3y)dx - (3x-y)dy = 0$

15.14. $xy' - y = y(\ln y - \ln x)$.

15.15. $xdy - ydx = x\sin^2\dfrac{y}{x}dx$.

Тема 16.
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Краткие теоретические сведения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и её производной. Такое уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x) \text{ или } y'+P(x)\cdot y=Q(x)$$

Способ решения: обозначаем $y=uv$, находим $y'=u'v+uv'$ Подставляем

y и y' в данное уравнение, группируем второе и третье слагаемое и выносим за скобку u, а выражение в скобках приравниваем к нулю. Решая два дифференциальных уравнения с разделяющими переменными, находим u и v а затем – y.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'-\frac{2xy}{x^2+3}=\left(x^2+3\right)\cos x$.

Решение.

Представим неизвестное решение y заданного дифференциального уравнения в виде $y=uv$.

Тогда

$y'=u'v+uv'$.

После подстановки получим

$$u'v+uv'-\frac{2x}{x^2+3}uv=\left(x^2+3\right)\cos x$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{2xv}{x^2+3}\right) = \left(x^2+3\right)\cos x$$

Теперь мы используем свое право выбора v, взяв его таким, чтобы коэффициент при u (т.е. выражение, стоящее в скобках) был равен нулю

$$v' - \frac{2xv}{x^2+3} = 0.$$

Относительно v последнее уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Заменяя v' на $\frac{dv}{dx}$ и умножая на dx, видим, что разделение переменных достигается делением на v, что дает

$$\frac{dv}{v} - \frac{2xdx}{x^2+3} = 0$$

Интегрируя, находим

$$\ln v - \ln\left(x^2+3\right) = C$$

Поскольку в качестве v можно взять любое из частных решений дифференциального уравнения, выберем такое, для которого $C = 0$, что приводит к виду

$$\ln v = \ln\left(x^2+3\right),$$

откуда $v = x^2 + 3$.

Подставляя найденное значение v в уравнение

$$u'v = \left(x^2+3\right)\cos x$$

и, учитывая найденное v, приходим к уравнению для

$$u'\left(x^2+3\right) = \left(x^2+3\right)\cos x.$$

Отсюда

$u' = \cos x$ и, стало быть,

$u = \sin x + C$.

Учитывая найденные u и v получаем общее решение заданного дифференциального уравнения $y=(\sin x+C)(x^2+3)$.

Решить дифференциальные уравнения 16.1–16.8.

16.1. $y'+y=e^{-x}$

16.2. $y'-4y=\cos x$. Ответ: $y=\frac{1}{17}\left(21e^{4x}+\sin x-4\cos x\right)$.

16.3. $y'+ytgx=\cos x$ Ответ: $y=C\cos x+\sin x\cos x$

16.4. $y'-\frac{1}{x+2}y=x^2+4x+5$.

Ответ: $y=C(x+2)+\frac{(x+2)^2}{2}+(x+2)\ln(x+2)$.

16.5. $y'+2xy=2x^2e^{x^2}$. Ответ: $y=Ce^{-2x}+2x-1$.

16.6. $y'+2y=4x$. Ответ: $y=Ce^{-2x}+2x-1$.

16.7. $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$. Ответ: $y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$.

16.8. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)$. Ответ: $y=(arctgx+c)(1+x^2)$.

Творческое задание.

16.9. Решить уравнение $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$.

Ответ: $2y^2(x+c)=e^{x^2}$.

16.10. В вертикальном воздушном столбе давление на каждом уровне обусловлено давлением вышележащих слоёв. Найти зависимость давления от высоты, если известно, что на уровне моря оно равно 1 кг на 1 см^2, а на высоте 500 м – 0,92 кг на 1см^2. Ответ: $p=p^{-0.00017h}$.

Домашняя работа. Решить дифференциальные уравнения 16.11–16.14.

16.11. $\left(xy^2+x\right)dx+\left(y-x^2y\right)dy=0$.

16.12. $xyy'=1-x^2$.

16.13. $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$.

16.14. $y'tgx-y=a$, ответ: $y=e^{-x^2}\left(\dfrac{2}{3}x^2+c\right)$.

16.15. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'-ytgx=\sec x$ с начальным условием $y\left(0\right)=0$.

16.16. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'+y-e^x=0$ с начальным решением $y\left(a\right)=b$.

Тема 17.
УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Краткие теоретические сведения

Рассматривают следующие виды дифференциальных уравнений, допускающие понижение порядка:

1) Уравнение вида: $y'' + py' + qy = 0$.

Способ решения: уравнение последовательно интегрируется столько раз, каков его порядок.

2) Уравнение имеет вид: $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x; \frac{dy}{dx}\right)$ или $y'' = f\left(x; y\right)$.

Способ решения: применяют подстановку $y' = p$, тогда $y'' = p$, где $p = p\left(x\right)$.

3) Уравнение вида $y'' = f\left(y; y'\right)$.

Способ решения*:* применяют подстановку $y' \cdot p$, где $p = p\left(y\right)$. Тогда $y'' = y' \cdot p$.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $1 + y'^2 = 2yy''$, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(1\right) = 1$, $y'\left(1\right) = 1$.

Решение.

Данное уравнение не содержит явно x Полагаем $y' = p$, и считаем функцию p зависящей от y, т. е. $p = p(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} = pp'$$

и после подстановки y и y' в исходное уравнение получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными для функции p, аргументом в котором является y

$$1+p^2=2ypp' \Rightarrow \frac{1+p^2}{p}=2y\frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{2pdp}{1+p^2}.$$

Интегрируя, приходим к уравнению

$$\ln C_1+\ln|y|=\ln\left(1+p^2\right),$$

откуда $\qquad 1+p^2=C_1y.$

Из начального условия $y'=p=1$ при $x=1$ определяем первую константу $C_1=2$. Тогда

$$1+p^2=2y \Rightarrow p^2=2y-1 \Rightarrow p=\sqrt{2y-1}$$

а так как $y'=p$ то $y'=\sqrt{2y-1}$ или $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{2y-1}$.

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{1}{2}\int\frac{2dy}{\sqrt{2y-1}}=\int dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int\left(2y-1\right)^{-1/2}d\left(2y-1\right)=x+C_2 \Rightarrow \sqrt{2y-1}=x+C_2.$$

Получено общее решение. Используя начальное условие $y=1$ при $x=1$, определим константу C_2. Имеем $\sqrt{2-1}=1+C_2$, а значит, $C_2=0$. В результате, можно определить частное решение исходного уравнения

$$\sqrt{2y-1}=x \text{ или } y=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right).$$

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=\dfrac{24}{\left(x+2\right)^5}$, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(0\right)=1,\ y'\left(0\right)=2$

Решение.

Данное уравнение необходимо просто проинтегрировать последовательно два раза. Имеем

$$y' = \int \frac{24dx}{(x+2)^5} = 24\int (x+2)^{-5}\,dx = 24\frac{(x+2)^{-4}}{-4} + C_1 = -\frac{6}{(x+2)^4} + C_1$$

$$y = \int \left(-\frac{6}{(x+2)^4} + C_1 \right) dx = \frac{2}{(x+2)^3} + C_1 x + C_2 .$$

Подставив последовательно в полученные равенства начальные условия, определим C_1 и C_2

$$\begin{cases} 2 = -\dfrac{6}{2^4} + C_1, \\ 1 = \dfrac{2}{2^3} + C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{19}{8}, \\ C_2 = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Тогда частным решением данного уравнения будет функция

$$y = \frac{2}{(x+2)^3} + \frac{19}{8}x + \frac{3}{4} .$$

Аудиторная работа. Решить дифференциальные уравнения 17.1.–17.8.

17. 1. $y'' = \dfrac{24}{(x+2)^3}$. **17.2.** $y'' = 4\cos 2x$.

17.3. $y'' = x + \sin x$. **17.4.** $y'' = arctgx$.

17.5. $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

17.6. $y'' \cdot y' = 2y$ при $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

17.7. $y'' - y'ctgx = \sin x$.

17.8. $y^3 \cdot y'' = 3$ при $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

Творческое задание.

17.9. Кривая удовлетворяет уравнению $\frac{d^2y}{dx^2} = x + 3$. Найти её уравнение, если известно, что она проходит через точку (2; 4) и в этой точке её угловой коэффициент равен 3.

Домашняя работа. Решить дифференциальные уравнения 17.10–17.13.

17.10. $y'' = 4\cos 2x$.

17.11. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

17.12. $\left(1 + x^2\right) y'' + \left(y'\right)^2 + 1 = 0$.

17.13. $2yy'' = 1 + y'^2$.

Тема 18.
УРАВНЕНИЯ
В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Краткие теоретические сведения

Уравнением в полных дифференциалах называется дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

левая часть которого есть полный дифференциал (это обстоятельство имеет место тогда и только тогда, когда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$).

Для решения данного дифференциального уравнения достаточно найти первообразную $F(x,y)$ левой части уравнения. Тогда тождество

$$F(x,y) = C$$

будет общим интегралом дифференциального уравнения.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $\left(3x^2y + y^2\right)dx + \left(x^3 + 2xy + 10y\right)dy = 0$.

Решение.

Здесь $P = 3x^2y + y^2$, $Q = x^3 + 2xy + 10y$. Значит, $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и левая часть нашего уравнения есть полный дифференциал. Первообразная имеет вид

$$F(x,y) = \int\left(3x^2y + y^2\right)dx = x^3y + xy^2 + \varphi(y),$$

Где $\varphi(y)$ находится из условия $F'_y = Q$, т. е. $x^3 + 2xy + \varphi'(y) = x^3 + 2xy + 10y$.

Отсюда $\varphi'(y) = 10y$ и $\varphi(y) = 5y^2 + C$. Так как нас интересует какая-нибудь одна первообразная, то можно положить, например, $C = 0$, что дает $F(x, y) = x^3y + xy^2 + 5y^2$. Поэтому общий интеграл исходного дифференциального уравнения есть $x^3y + xy^2 + 5y^2 = C$.

Аудиторная работа. Решить дифференциальные уравнения 18.1.–18.4.

18.1. $e^{-y}dx + \left(1 - xe^{-y}\right)dy = 0$.

18.2. $\dfrac{2x}{y^2}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

18.3. $\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y^3 - x^2y\right)dy = 0$.

18.4. $\left(x^2 + y\right)dx + xdy = 0$.

Домашняя работа.

Решить дифференциальные уравнения 18.5–18.8.

18.5. $xe^{-y} + y = C$.

18.6. $\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{1}{y} = C$.

18.7. $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$.

18.8. $x - \dfrac{y}{x} = C, \quad \mu = \dfrac{1}{x^2}$.

Тема 19.
ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Краткие теоретические сведения

Дифференциальное уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$ называется *однородным линейным* уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Способ решения: составляют характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ и находят его корни k_1 и k_2, причем если

а) $k_1 \neq k_2$, то решение уравнения: $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$.

б) $k_1 = k_2 = k$, то решение уравнения: $y = e^{kx}\left(c_1 + c_2 x\right)$.

в) $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, то решение уравнения: $y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right)$.

Аудиторная работа.

Найти общие решения дифференциальных уравнений 19.1–19.8.

19.1. $2y'' + 5y' + 2y = 0$

19.2. $y'' - 2y' + y = 0$

19.3. $y'' + 6y' + 13y = 0$

19.4. $y'' - 4y = 0$

19.5. $y'' + 3y' = 0$

19.6. $y'' - 5y' + 6y = 0$

19.7. $y'' - y' - 2y = 0$

19.8. $y'' - 6y' + 34y = 0$

Домашняя работа.

19.9. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$, проходящую через точку (0; 1) и касающуюся в этой точке прямой

$y = x + 1$.

19.10. Найти частное решение однородного линейного уравнения

$y'' - 3y' + 2y = 0$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Тема 20.
ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Краткие теоретические сведения

Неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида $y'' + py' + qy = f(x)$, где $f(x)$-непрерывная функция, p и q-действительные числа.

Способ решения*:* искомое решение представляют в виде суммы

$$y = \overline{y} + Y,$$

где $\overline{y}$- общее решение уравнения однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$, Y – частное решение данного уравнения. Чтобы найти частное решение Y используется метод неопределённых коэффициентов. Вид частного решения зависит от правой части заданного уравнения следующим образом:

1) Если $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени, то $Y = Q_n(x) \cdot x^r$, где $Q_n(x)$- многочлен n-й степени с неизвестными коэффициентами, r –число корней характеристического уравнения, равных нулю.

2) Если $f(x) = e^x P_n(x)$, тогда $У = Y = Q_n(x) \cdot x^r e^{\alpha x}$, где

r – число корней характеристического уравнения, равных α.

3) Если $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$, где a, b, β – известные числа, то $Y = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x^r$, где A, B – неизвестные числа, r – число корней характеристического уравнения, равных β.

Аудиторная работа. Найти общие решения дифференциальных уравнений 20.1–20.5.

20.1. $y'' - 7y' + 12y = 5.$

20.2. $y'' - 6y' + 8y = 10.$

20.3. $y'' + 4y = 8.$

20.4. $y'' + 2y' - 3y = 4e^{-x}.$

20.5. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 5\dfrac{dx}{dt} + 4x = 8.$

Самостоятельная работа. Найти общие решения дифференциальных уравнений 20.6–20.7.

20.6. $y'' - 7y' + 12y = 5e^{3x}.$

20.7. $y'' - 4y' = 2e^{4t}.$

Творческое задание. Найти общие решения дифференциального уравнения.

20.8. $\dfrac{d^2r}{d\phi^2} - 6\dfrac{dr}{d\phi} + 9r = 4e^{3\phi}.$

Домашняя работа. Найти общие решения дифференциальных уравнений 20.10–20.12.

20.10. $y'' - 2y' - 8y = -8x^2 + 4x + 7.$

20.11. $y'' + 2y' + y = 3\cos x + 8\sin x.$

20.12. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin nx.$

Тема 21.
СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Краткие теоретические сведения

Системы двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – непрерывные функции.

Решение этой системы сводят к решению одного уравнения, порядок которого равен числу уравнений, входящих в систему. Чтобы этого добиться, дифференцируют первое уравнение по t. Далее выражают из первого уравнения системы y. В уравнение, полученное после дифференцирования, подставляют y и $\dfrac{dy}{dt}$ из второго уравнения системы. После преобразований получают в общем случае неоднородное уравнение первого порядка и решая его, находят x и y.

Пример. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

Решение.

Аргументом функций x и y считаем переменную t. Первое уравнение системы продифференцируем по t

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Подставим из второго уравнения системы значение производной

$$\frac{dy}{dt} = x + 2y$$

Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + x + 2y.$$

Из первого уравнения заданной системы выражаем y

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x,$$

и подставляем в последнее уравнение. Имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + x + 2\left(\frac{dx}{dt} - 2x\right) \text{ или } x'' - 4x' + 3x = 0.$$

Получили линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 3 = 0.$$

корнями которого являются $k_1 = 3$, $k_2 = 1$, а значит, общее решение

$$x = C_1e^{3t} + C_2e^t.$$

Дифференцируя по t, получаем

$$\frac{dx}{dt} = 3C_1e^{3t} + C_2e^t.$$

Тогда можно найти y,

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x = 3C_1e^{3t} + C_2e^t - 2C_1e^{3t} - 2C_2e^t \text{ или } y = C_1e^{3t} - C_2e^t.$$

Итак,

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{t}, \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{t}. \end{cases}$$

– общее решение заданной системы дифференциальных уравнений.

Аудиторная работа. Найти общие решения систем дифференциальных уравнений 21.1–21.5.

21.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} + 4x + 5y = 0. \end{cases}$

21.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

21.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

21.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dx} = x - 2y - z, \\ \dfrac{dy}{dx} = -x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = x - z. \end{cases}$

21.5. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2z + y. \end{cases}$

Творческое задание.

Система уравнений описывает движение снаряда с учётом сопротивления среды:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -k\dfrac{dx}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -k\dfrac{dy}{dt} - g. \end{cases}$$

Начальные условия, $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = v_{ox}$, $y'(0) = v_{oy}$, k и g – постоянные числа. Найти решение системы.

Домашняя работа. Найти общие решения систем дифференциальных уравнений.

21.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

21.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Н. Г. Сборник задач по курсу математического анализа. – М., 1985.

2. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике. – М., 1997.

3. Завало С. Т. Практикум по решению задач. – Киев, 1971.

4. Белоусова В. И., Ермакова Г. М. Высшая математика. – Екатеринбург, 2016.

5. Демидович Б. П., Кудрявцев В. А., Краткий курс высшей математики. – М., 2001.

6. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. – М., 1967.

7. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. – М., 1963.

8. Бермант А. Ф., Араманович И. Г., Краткий курс математического анализа для ВТУЗов. – М., 1966.

9. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях. – М., 1978.

10. Герасимович А. И., Рысюк Н. А., Математический анализ. – Минск, 1989.

11. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. – М., 1991.

12. Сборник задач по курсу высшей математики / под редакцией Г. И. Кручковича. – М., 1973.

13. Подольский В. А. Сборник задач по высшей математике. – М., 1974.

14. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков, 1973.

Оглавление

Введение **3**

Тема 1. Непосредственное интегрирование 4
Тема 2. Интегрирование по частям
и способом замены переменной 8
Тема 3. Интегрирование элементарных дробей
и дробно-рациональных функций 11
Тема 4. Интегрирование тригонометрических функций 15
Тема 5. Определённый интеграл, его свойства,
вычисление и приложения 17
Тема 6. Несобственные интегралы 24
Тема 7. Функции нескольких переменных. Частные производные
и полный дифференциал функции 26
Тема 8. Производная по направлению и градиент 28
Тема 9. Уравнение касательной и нормали к поверхности 31
Тема 10. Экстремум функции нескольких переменных 34
Тема 11. Наибольшее и наименьшее значения функции
нескольких переменных 37
Тема 12. Вычисление двойного и тройного интегралов 39
Тема 13. Криволинейные интегралы первого рода 41
Тема 14. Дифференциальные уравнения первого порядка
с разделенными и разделяющимися переменными 43
Тема 15. Однородные дифференциальные уравнения
первого порядка 47
Тема 16. Линейные дифференциальные уравнения
первого порядка 50

Тема 17. Уравнения высших порядков,
допускающие понижение порядка 54
Тема 18. Уравнения в полных дифференциалах 58
Тема 19. Линейные однородные дифференциальные уравнения
второго порядка с постоянными коэффициентами 60
Тема 20. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения
второго порядка с постоянными коэффициентами 62
Тема 21. Системы дифференциальных уравнений с двумя
неизвестными 64

Литература 68

Учебное издание

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО РАЗДЕЛАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
Методические указания

Составители:
Чуйко Людмила Владимировна,
Журжи Инна Ивановна

Компьютерная верстка: *И. И. Головачук*
Издается в авторской редакции

ИЛ № 06150. Сер. АЮ от 21.02.02.
Подписано в печать 01.02.24. Формат 60x90/16.
Уч.-изд. л. 4,4. Электронное издание. Заказ № 255.