ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т. Г. Шевченко

Физико-математический факультет
Кафедра прикладной математики и информатики

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

лабораторный практикум

Тирасполь

Издательство Приднестровского Университета

2023

УДК519.86(075,8)
ББК У.в631.0я73
М34

Составители:
Г. В. Спиридонова, канд. тех. наук, доц.
Н. Г. Леонова, канд. соц. наук, доц.
А. В. Коровай, канд. физ.-мат. наук, доц.
В. В. Афонин, ст. преп. кафедры математического анализа и приложений ПГУ им. Т. Г. Шевченко

Рецензенты:
В. В. Граневский, канд. филос. наук, доц. кафедры философии ПГУ им. Т. Г. Шевченко
Л. В. Чуйко, канд. пед. наук, доц. кафедры математического анализа и приложений ПГУ им. Т.Г. Шевченко

М34 **Математические модели в экономике**: лабораторный практикум / составители: Г. В. Спиридонова, Н. Г. Леонова, А. В. Коровай, В. В. Афонин. – Тирасполь : Изд-во Приднестр. ун-та, 2023. – 65 с.

Разработано согласно стандарту ФГОС-3++, учебному плану направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» и основной профессиональной образовательной программы по профилю подготовки «Системное программирование и компьютерные технологии» по дисциплине «Математические модели в экономике». Задания для решения типовых задач на ПК и выполнения лабораторных работ составлены в соответствии с реальными статистическими данными.

Приводятся правила выполнения, оформления и защиты лабораторных работ по курсу «Математические модели в экономике»; методические указания к выполнению лабораторных работ с кратким изложением теоретического материала; варианты заданий; образцы выполнения лабораторных работ на ПК с помощью ПО Excel. Приведенная методика может использоваться также и при проведении практических занятий по дисциплине с помощью калькулятора.

Предназначено для проведения лабораторных работ по дисциплине «Математические модели в экономике» со студентами физико-математического факультета ПГУ им. Т. Г. Шевченко, также может использоваться при проведении занятий студентами других специальностей.

УДК519.86(075,8)
ББК У.в631.0я73

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т. Г. Шевченко

© Г. В. Спиридонова, Н. Г. Леонова, А. В. Коровай,
В. В. Афонин, составление, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 4
ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ЗАЩИТЫ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ 5
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ 6
1.1. Краткие теоретические сведения и методические указания к выполнению лабораторных работ № 1 и № 2 6
1.2. Лабораторная работа № 1 10
1.3. Лабораторная работа № 2 20
2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ 32
2.1. Краткие теоретические сведения и методические указания к выполнению лабораторных работ № 3 и № 4 32
2.2. Лабораторная работа № 3 34
2.3. Лабораторная работа № 4 44
3. МЕЖОТРАСЛЕВОЙ БАЛАНС 52
3.1. Краткие теоретические сведения и методические указания к выполнению лабораторной работы № 5 52
3.2. Лабораторная работа № 5 54
ЛИТЕРАТУРА 61
ПРИЛОЖЕНИЯ.....62

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическое моделирование экономических процессов тесно связано с компьютеризацией экономической науки и ее практическим применением и является одним из прикладных курсов будущих программистов. Изучая этот курс, студенты расширяют и углубляют теоретические знания о качественных и количественных закономерностях экономического развития, овладевают методикой построения и анализа экономических процессов, изучают наиболее характерные математические модели и получают навыки практической работы с ними.

Лабораторный практикум по дисциплине «Математические модели в экономике» предназначен для углубления теоретических знаний студентов по моделированию экономических процессов как на микро-, так и на макроуровне, а также для получения практических навыков построения численных моделей, их реализации с применением компьютерной техники и анализа полученных результатов.

Практикум состоит из трех разделов, соответствующих курсу «Математические модели в экономике», указанных в рабочей программе и в основной профессиональной образовательной программе по профилю подготовки «Системное программирование и компьютерные технологии». В каждом разделе приведены методические указания к выполнению лабораторных работ, содержащие краткие теоретические сведения по темам и методические указания по ходу выполнения лабораторных работ.

Студентам предложены типовые задания, выполнение которых предполагает использование ЭВМ, а также образцы выполнения лабораторных работ, которые предоставляются преподавателю в форме письменных отчетов. В демонстрационных примерах приводится инструментарий по использованию пакетов прикладных программ, с помощью которых студенты могут выполнять наиболее трудные расчеты по предложенным заданиям. Методика расчета, изложенная в лабораторном практикуме, может использоваться для проведения практических занятий по дисциплине с помощью калькулятора.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ЗАЩИТЫ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. Лабораторная работа должна быть выполнена в срок, указанный в учебном графике.

2. На титульном листе должны быть четко написаны: название вуза, кафедры, номер и тема лабораторной работы, Ф.И.О. студента, факультет, курс, группа и Ф.И.О. преподавателя. Образец титульного листа приводится в приложении 3.

3. Лабораторную работу необходимо выполнить в Word и распечатать на листах формата А4, собранных в папку. Все страницы должны быть пронумерованы.

4. Лабораторная работа не проверяется, если студент решил не свой вариант.

5. Все задачи, входящие в вариант, должны быть решены. Перед решением каждой задачи необходимо записать полный текст ее условия. Каждую задачу решать с новой страницы.

6. Если в условие задачи входит параметр N, то условие следует записать с этим параметром, рядом записать численное значение этого параметра, а затем исходные данные варианта. Необходимо объяснять ход решения каждого задания, приводить формулы, применяемые при решении задачи, соблюдать смысловые интервалы, сопровождать решение таблицами, приводить экономическую интерпретацию построенной модели и результатов ее оценки и прогнозов, записать ответ. После решения каждого задания нужно оставлять место для учета возможных замечаний.

7. При получении не допущенной к защите работы студент должен выполнить ее повторно, все доработки должны быть выполнены непосредственно после замечаний. Листы с замечаниями вложить в конец работы. Доработки вне текста выполнения работы не допускаются.

8. После учета всех замечаний работа допускается к защите.

9. При защите работы студент должен:

– изложить смысловое содержание задачи;

– обосновать выбор метода решения, объяснить ход выполнения работы;

– дать экономическую интерпретацию построенной модели;

– оценить качество параметров модели, провести анализ полученных результатов.

10. Зачтенная работа в обязательном порядке предъявляется на зачете, экзамене.

11. Номер варианта лабораторных работ определяет преподаватель.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ

1.1. Краткие теоретические сведения и методические указания к выполнению лабораторных работ № 1 и № 2

При выполнении задания 1 необходимо найти *функции спроса потребителя*:

$$x_1 = f_1(p_1, p_2, p_3, M);$$

$$x_2 = f_2(p_1, p_2, p_3, M);$$

$$x_3 = f_3(p_1, p_2, p_3, M),$$

где x_1, x_2, x_3 – количество приобретаемого блага 1-го, 2-го и 3-го вида, p_1, p_2, p_3 – цены единицы приобретаемых благ 1-го, 2-го и 3-го видов соответственно.

Для этого решим следующую задачу оптимального поведения потребителя. Математическая модель задачи имеет вид:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3} \tag{1.1}$$

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = M \tag{1.2}$$

$$U = F(x_1, x_2, x_3) \to max. \tag{1.3}$$

Левая часть условия (1.2) – стоимость приобретаемых благ, а условие (1.3) означает, что полезность этих благ должна быть максимальной.

Решим задачу методом множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = U(x_1, x_2, x_3) + \lambda(M - x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = M - x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3 = 0 \end{cases}$$

Оптимальный выбор потребителя:

$\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, где x_1^*, x_2^*, x_3^* – оптимальное для потребителя количество благ 1-го, 2-го и 3-го видов соответственно при заданных ценах на блага и доходе.

Проверим, выполняются ли для найденного оптимального решения $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ бюджетное ограничение:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = M.$$

Вычислим реакции потребителя при изменении дохода M и цен p_1, p_2, p_3 в точке оптимума $\overline{X}^*$.

Реакции потребителя при изменении дохода $M : \dfrac{\partial x_i}{\partial M}$.

Если $\dfrac{\partial x_i}{\partial M} > 0$, т. е. при увеличении дохода спрос на i-е благо возрастает, то это благо <u>ценное</u>.

Реакции потребителя на спрос j-го блага при изменении цены на i-е благо: $\dfrac{\partial x_j}{\partial p_i}$.

Если $\dfrac{\partial x_j}{\partial p_i} < 0$ при $i = j$ с увеличением цены на i-е благо спрос на него уменьшается, значит, i-е благо <u>нормальное</u>.

Если $\dfrac{\partial x_j}{\partial p_i} < 0$, т. е. с увеличением цены на i-е благо спрос на j-е благо уменьшается, значит, эти блага <u>взаимодополняемые</u>.

Если $\dfrac{\partial x_j}{\partial p_i} > 0$, т. е. с увеличением цены на i-е благо спрос на j-е благо уменьшается, значит, эти блага <u>взаимозаменяемые</u>.

Вычислим *предельные полезности благ в точке экстремума* $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. Это значения частных производных функции полезности $U(x_1, x_2, x_3)$ по соответствующим аргументам в точке $\overline{X}^*$: $\dfrac{\partial U}{\partial x_1}\left(\overline{X}\right)^*$, $\dfrac{\partial U}{\partial x_2}\left(\overline{X}\right)^*$, $\dfrac{\partial U}{\partial x_3}\left(\overline{X}\right)^*$.

Предельные полезности благ в точке экстремума показывают, сколько приходится единиц дополнительной полезности на 1 дополнительную единицу i-го блага.

Вычислим *нормы замещения благ* в точке оптимума

$$\overline{X}^* : \; n_{i,j} = -\frac{\partial U}{\partial x_j} : \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Нормы замещения показывают, сколько необходимо дополнительно приобрести единиц i-го блага для замещения 1 единицы j-го блага, чтобы удовлетворенность осталась на прежнем уровне.

Вычислим *коэффициенты эластичности по доходу и ценам* при заданных ценах и доходе:

$$E_i^M = \frac{\partial x_i}{\partial M} : \frac{x_i}{M}, \; E_{ij}^p = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} : \frac{x_i}{p_j}.$$

Коэффициенты эластичности по доходу показывают, на сколько процентов изменится спрос на i-е благо при увеличении дохода на 1 %.

Коэффициенты эластичности по ценам показывают, на сколько процентов изменится спрос на i-е благо при росте цены на j-е благо на 1 %.

Правильность и точность расчетов проверяется по формуле:

$$E_1^M + E_{11}^p + E_{12}^p + E_{13}^p = 0.$$

При выполнении задания 2 необходимо построить уравнение множественной регрессии $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + b$.

Для нахождения параметров этого уравнения с помощью метода наименьших квадратов (МНК), построим систему нормальных уравнений, и решим ее методом Крамера.

$$\begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} x_{1i} + b \sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{1i}; \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_{2i} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{2i}; \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + b = \sum_{i=1}^{n} y_i; \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{D_1}{D}; \; a_2 = \frac{D_2}{D}; \; b = \frac{D_3}{D}, \text{ где}$$

$$D = \begin{vmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{2i} x_{1i} & \sum x_{1i} \\ \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{2i} & n \end{vmatrix}; \; D_1 = \begin{vmatrix} \sum x_{1i} y_i & \sum x_{2i} x_{1i} & \sum x_{1i} \\ \sum x_{2i} y_i & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i} \\ \sum y_i & \sum x_{2i} & n \end{vmatrix};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i} y_i & \sum x_{1i} \\ \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{2i} y_i & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum y_i & n \end{vmatrix}; \; D_3 = \begin{vmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{2i} x_{1i} & \sum x_{1i} y_i \\ \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i} y_i \\ \sum x_{1i} & \sum x_{2i} & \sum y_i \end{vmatrix}.$$

Теснота связи между переменными y, x_1, x_2 определяется с помощью индекса множественной корреляции $R_{yx_1x_2}$, который находится по формуле:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{ip}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}}.$$

Индекс (коэффициент) множественной детерминации

$$R^2_{yx_1x_2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{ip}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}$$

показывает, сколько процентов вариации зависимой переменной y объясняется уравнением множественной регрессии.

Проверку значимости линейного уравнения множественной регрессии в целом и индекса (коэффициента) множественной корреляции проведем с помощью F-критерия Фишера. Для этого проверяется гипотеза H_0 – о статистической незначимости уравнения множественной регрессии в целом и показателя тесноты связи – индекса множественной корреляции.

Вычисляется фактическое значение F-критерия Фишера по формуле:

$$F_{\text{факт}} = \frac{R^2_{yx_1x_2}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n - m - 1}{m},$$

где n – число единиц совокупности, m – число параметров при независимых неизвестных. Полученное значение $F_{\text{факт}}$ сравнивается с табличным значением критерия $F_{\text{табл}}$.

Значение $F_{\text{табл}}$ – это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости α (α = 0,05 или 0,01).

Если $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$, гипотеза H_0 – о статистической незначимости линейного уравнения множественной регрессии и индекса множественной корреляции отвергается. Уравнение регрессии статистически значимо и надежно, связь между переменными x_1, x_2 и y сформировалась не случайно, а под влиянием объективно действующих факторов. В противном случае, если $F_{\text{факт}} < F_{\text{табл}}$, гипотеза H_0 – о статистической незначимости уравнения регрессии и индекса корреляции принимается. Уравнение регрессии статистически незначимо и ненадежно, связь между переменными x_1, x_2 и y сформировалась случайно.

Частные F-критерии: Fx_1 и Fx_2 оценивают статистическую значимость присутствия каждой из независимых переменных x_1 и x_2 в уравнении, их значения находятся по формулам:

$$Fx_1 = \frac{R^2_{yx_1x_2} - R^2_{yx_2}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n - m - 1}{1}, \quad Fx_2 = \frac{R^2_{yx_1x_2} - R^2_{yx_1}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n - m - 1}{1}.$$

Полученные значения сравниваются с табличным значением $F_{табл}$. Если $Fx_1 > F_{табл}$, то целесообразно включать в модель фактор x_1 после фактора x_2, в противном случае если $Fx_1 < F_{табл}$, то включать в модель фактор x_1 после фактора x_2 нецелесообразно. Аналогичные выводы получаем для проверки включения фактора x_2 после фактора x_1.

Оценку значимости коэффициентов a_1 и a_2 по t-критерию Стьюдента проводим с помощью вычисления фактических значений t-критерия:

$$t_{a_1} = \sqrt{Fx_1}, \quad t_{a_2} = \sqrt{Fx_2}.$$

Полученные значения сравниваются с табличным значением $t_{табл}$.

Если $t_{a_1} > t_{табл}$, то значение a_1 не случайно отличается от нуля и статистически значимо, в противном случае, если $t_{a_1} < t_{табл}$, то значение a_1 случайно отличается от нуля и статистически незначимо. Аналогичные выводы получаем для проверки значимости значения a_2.

Средняя ошибка аппроксимации, среднее отклонение расчетных значений от фактических: $\overline{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y_i - y_{ip}}{y_i}\right| \cdot 100\ \%$, должна быть не более 10 %.

Для оценки тесноты связи между каждой парой факторов вычисляются коэффициенты парной корреляции: r_{yx_1}, r_{yx_2} и $r_{x_1x_2}$.

$$r_{yx_1} = \frac{Cov(x_1, y)}{\sqrt{Var(x_1) \cdot Var(y)}}; \quad r^2_{yx_1} = \left(r_{yx_1}\right)^2;$$

$$r_{yx_2} = \frac{Cov(x_2, y)}{\sqrt{Var(x_2) \cdot Var(y)}}; \quad r^2_{yx_2} = \left(r_{yx_2}\right)^2;$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{Cov(x_1, x_2)}{\sqrt{Var(x_1) \cdot Var(x_2)}}; \quad r^2_{x_1x_2} = \left(r_{x_1x_2}\right)^2.$$

Для оценки влияния на y значения фактора x_1 при неизменном значении фактора x_2 и значения фактора x_2 при неизменном значении фактора x_1 вычисляются частные коэффициенты (или индексы) корреляции:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_2}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}}, \quad r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_1}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}}.$$

1.2. Лабораторная работа № 1

Задание 1

Дана функция полезности $U(x_1, x_2, x_3)$. Требуется:

1. Решить задачу оптимального поведения потребителя при заданных ценах p_1, p_2, p_3 и доходе M.

2. Найти функцию опроса потребителя и вычислить реакции потребителя при изменении дохода и цен в точке оптимума.

3. Вычислить предельные полезности товаров в точке оптимума.

4. Вычислить норму замещения для 2-го и 3-го товаров в точке оптимума.

5. Вычислить коэффициенты эластичности по доходу и ценам для заданных цен и дохода.

N – номер варианта.

Серия А $U = \alpha x_1 x_2 + \beta x_1 x_3 + \gamma x_2 x_3$,

$p_1 = 130 + N$; $p_2 = 180 + N$; $p_3 = 210 + N$; $M = 6000 + 40N$,

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
α	4	3	4	3	1	2	2	2	1	5
β	1	2	5	6	2	2	1	3	3	1
γ	6	5	7	5	3	4	3	2	4	8

Серия Б $U = \alpha x_1 x_2 + \beta x_1 x_3 + \gamma x_2 x_3$,

$p_1 = 170 + N$; $p_2 = 230 + N$; $p_3 = 150 + N$; $M = 5000 + 50N$,

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
α	3	2	1	1/2	2	1/2	1	3	1/4	2
β	3	4	4	1/4	1	1/2	2	1	1/4	3
γ	4	5	5	2/3	2	3/4	2	3	1/3	3

Образец выполнения задания 1

Дана функция полезности $U(x_1, x_2, x_3)$. Требуется:

1. Решить задачу оптимального поведения при заданных ценах p_1, p_2, p_3 и доходе M.

2. Найти функцию спроса потребителя и вычислить реакции потребителя при изменении дохода и цен в точке оптимума.

3. Вычислить предельные полезности товаров в точке оптимума.

4. Вычислить норму замещения для 2-го 3-го товаров в точке оптимума.

5. Вычислить коэффициенты эластичности по доходу и ценам для заданных цен и дохода.

$$U = 3x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3$$

$p_1 = 136$, $p_2 = 186$, $p_3 = 216$, $M = 6240$.

Решение

1. Решим задачу оптимального поведения потребителя, если цены благ соответственно равны $p_1 = 136$; $p_2 = 186$; $p_3 = 216$ и доход равен $M = 6240$.

Найдем функции спроса потребителя:

$$x_1 = f_1(p_1, p_2, p_3, M);$$
$$x_2 = f_2(p_1, p_2, p_3, M);$$

$$x_3 = f_3(p_1, p_2, p_3, M),$$

где x_1, x_2, x_3 – количество приобретаемого блага 1-го, 2-го и 3-го вида.

Для этого решим следующую задачу оптимального поведения потребителя. Математическая модель задачи имеет вид:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}$$

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = M$$

$$U = 3x_1 x_2 + x_1 x_3 + 4x_2 x_3 \to max.$$

Решим задачу методом множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = U(x_1, x_2, x_3) + \lambda(M - x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3);$$

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 3x_1 x_2 + x_1 x_3 + 4x_2 x_3 + \lambda(M - x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 3x_2 + x_3 - \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 3x_1 + 4x_3 - \lambda p_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = x_1 + 4x_2 - \lambda p_3 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = M - x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 + x_3 = \lambda p_1 \\ 3x_1 + 4x_3 = \lambda p_2 \\ x_1 + 4x_2 = \lambda p_3 \\ x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = M \end{cases}$$

Рассмотрим систему, состоящую из первых трех уравнений, и решим ее методом Крамера относительно x_1, x_2, x_3. Найдем определители.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 + 12 = 24,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda p_1 & 3 & 1 \\ \lambda p_2 & 0 & 4 \\ \lambda p_3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4\lambda p_2 + 12\lambda p_3 - 16\lambda p_1,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & \lambda p_1 & 1 \\ 3 & \lambda p_2 & 4 \\ 1 & \lambda p_3 & 0 \end{vmatrix} = 3\lambda p_3 + 4\lambda p_1 - \lambda p_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & \lambda p_1 \\ 3 & 0 & \lambda p_2 \\ 1 & 4 & \lambda p_3 \end{vmatrix} = 12\lambda p_1 + 3\lambda p_2 - 9\lambda p_3.$$

Тогда:

$$x_1 = \frac{-16\lambda p_1 + 4\lambda p_2 + 12\lambda p_3}{24} = \frac{\lambda(-16p_1 + 4p_2 + 12p_3)}{24},$$

$$x_2 = \frac{4\lambda p_1 - \lambda p_2 + 3\lambda p_3}{24} = \frac{\lambda(4p_1 - p_2 + 3p_3)}{24},$$

$$x_3 = \frac{12\lambda p_1 + 3\lambda p_2 - 9\lambda p_3}{24} = \frac{\lambda(12p_1 + 3p_2 9p_3)}{24}.$$

Подставим эти значения в уравнение: $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = M$.

Получим:

$$\frac{-16\lambda p_1 + 4\lambda p_2 + 12\lambda p_3}{24} \cdot p_1 + \frac{4\lambda p_1 - \lambda p_2 + 3\lambda p_3}{24} \cdot p_2 +$$

$$+ \frac{12\lambda p_1 + 3\lambda p_2 - 9\lambda p_3}{24} \cdot p_3 = M.$$

Преобразуем это уравнение, умножим левую и правую части на 24 и проведем действия:

$$-16\lambda p_1^2 + 4\lambda p_2 p_1 + 12\lambda p_3 p_1 + 4\lambda p_1 p_2 - \lambda p_2^2 + 3\lambda p_3 p_2 +$$

$$+12\lambda p_1 p_3 + 3\lambda p_2 p_3 - 9\lambda p_3^2 = 24M;$$

$$\lambda\left(-16p_1^2 + 4p_2 p_1 + 12p_3 p_1 + 4p_1 p_2 - p_2^2 + 3p_3 p_2 + 12p_1 p_3 + 3p_2 p_3 - 9p_3^2\right) = 24M;$$

$$\lambda = \frac{24M}{-16p_1^2 + 4p_2 p_1 + 12p_3 p_1 + 4p_1 p_2 - p_2^2 + 3p_3 p_2 + 12p_1 p_3 + 3p_2 p_3 - 9p_3^2}.$$

Обозначим

$$V = -16p_1^2 - p_2^2 - 9p_3^2 + 8p_1 p_2 + 24p_1 p_3 + 6p_2 p_3.$$

Тогда $\lambda = \dfrac{24M}{V}$ и функции спроса потребителя принимают вид:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{M}{V}(-16p_1 + 4p_2 + 12p_3) \\ x_2 = \dfrac{M}{V}(4p_1 - p_2 + 3p_3) \\ x_3 = \dfrac{M}{V}(12p_1 + 3p_2 - 9p_3) \end{cases}$$

Найдем оптимальный набор благ потребителя:

$\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, где x_1^*, x_2^*, x_3^* – при заданных ценах на блага и доходе:

$p_1 = 136$; $p_2 = 186$; $p_3 = 216$; $M = 6240$.

$$V = -16 \cdot 136^2 - 186^2 - 9 \cdot 216^2 + 8 \cdot 136 \cdot 186 + 24 \cdot 136 \cdot 216 +$$

$$+ 6 \cdot 186 \cdot 216 = 398012$$

$$x_1^* = \frac{6240}{398012}\left(-16\cdot 136 + 4\cdot 186 + 12\cdot 216\right) \approx 18{,}1863863$$

$$x_2^* = \frac{6240}{398012}\left(4\cdot 136 - 186 + 3\cdot 216\right) \approx 15{,}7719868$$

$$x_3^* = \frac{6240}{398012}\left(12\cdot 136 + 3\cdot 186 - 9\cdot 216\right) \approx 3{,}8567681$$

Проверим, выполняются ли для найденного оптимального решения $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ бюджетное ограничение:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = M\ ;$$

$$18{,}1863863\cdot 136 + 15{,}7719868\cdot 186 + 3{,}8567681\cdot 216 = 6240\ ;$$

$$6240 = 6240.$$

Если речь идет о неделимых благах, то оптимальный выбор потребителя составит $\overline{X}^* = (18; 15; 3)$, т. е. ему необходимо приобрести 1-го блага 18 единиц, 2-го – 15 единиц и 3-го – 3 единицы.

Но так как мы условились, что речь будет идти о делимых благах, то оптимальный выбор потребителя будет:

$\overline{X}^* = (18{,}186; 15{,}772; 3{,}857)$, т. е.

1-го блага – 18,186 единиц,

2-го блага – 15,772 единицы,

3-го блага – 3,857 единиц.

2. Функции спроса потребителя найдены в пункте 1. Вычислим реакции потребителя при изменении дохода M и цен p_1, p_2, p_3 в точке оптимума $\overline{X}^*$.

Реакции потребителя при изменении дохода *M*:

$$\frac{\partial x_1}{\partial M} = \frac{1}{V}\left(-16p_1 + 4p_2 + 12p_3\right) = \frac{1160}{398012} \approx 0{,}0029145\ (>0)$$

Поскольку при увеличении дохода спрос на 1-е благо возрастает, то это благо **ценное**.

$$\frac{\partial x_2}{\partial M} = \frac{1}{V}\left(4p_1 - p_2 + 3p_3\right) = \frac{1006}{398012} \approx 0{,}0025276\ (>0)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial M} = \frac{M}{V}\left(12p_1 + 3p_2 - 9p_3\right) = \frac{246}{398012} \approx 0{,}0006181\ (>0)$$

2-е и 3-е блага также являются **ценными** для потребителя. При этом наиболее ценным является 1-е благо, а наименее ценным – 3-е.

Определим **реакции потребителя при изменении цены на 1-е благо**:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\frac{M}{V^2}\left[\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)'_{p_1}\cdot V-\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)\cdot V'_{p_1}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[-16\cdot V-\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)\cdot\left(-32p_1+8p_2+24p_3\right)\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(-16\cdot 398012-2\cdot 1160^2)\approx -0,3568546<0.$$

С увеличением цены на 1-е благо спрос на него уменьшается, значит, 1-е благо **нормальное**.

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_1}=\frac{M}{V^2}\left[\left(4p_1-p_2+3p_3\right)'_{p_1}\cdot V-\left(4p_1-p_2+3p_3\right)\cdot V'_{p_1}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[4\cdot V-2\left(4p_1-p_2+3p_3\right)\cdot\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(4\cdot 398012-2\cdot 1006\cdot 1160)\approx -0,0292228<0.$$

С ростом цены на 1-е благо спрос на 2-е благо уменьшается, эти блага **взаимодополняемые.**

$$\frac{\partial x_3}{\partial p_1}=\frac{M}{V^2}\left[\left(12p_1+3p_2-9p_3\right)'_{p_1}\cdot V-\left(12p_1+3p_2-9p_3\right)\cdot V'_{p_1}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[12\cdot A-2\cdot\left(12p_1+3p_2-9p_3\right)\cdot\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(12\cdot 398012-2\cdot 246\cdot 1160)\approx -0,1656540>0.$$

С ростом цены на 1-е благо спрос на 3-е благо возрастает, эти блага **взаимозаменяемые.**

Реакции потребителя при изменении цены на 2-е благо:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}=\frac{M}{V^2}\left[\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)'_{p_2}\cdot V-\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)\cdot V'_{p_2}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[4\cdot V-\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)\cdot\left(-2p_2+8p_1+6p_3\right)\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(4\cdot 398012-2\cdot 1160\cdot 1006)\approx -0,0292228<0.$$

С увеличением цены на 2-е благо спрос на 1-е благо падает, эти блага **взаимодополняемые.**

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_2}=\frac{M}{V^2}\left[\left(4p_1-p_2+3p_3\right)'_{p_2}\cdot V-\left(4p_1-p_2+3p_3\right)\cdot V'_{p_2}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[-V-2\cdot\left(4p_1-p_2+3p_3\right)^2\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(-398012-2\cdot 1006^2)\approx -0,0954073<0.$$

С ростом цены на 2-е благо спрос на него падает, 2-е благо нормальное.

$$\frac{\partial x_3}{\partial p_2}=\frac{M}{V^2}\left[\left(12p_1+3p_2-9p_3\right)'_{p_2}\cdot V-\left(12p_1+3p_2-9p_3\right)\cdot V'_{p_2}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[3V-2\cdot\left(12p_1+3p_2-9p_3\right)\cdot\left(4p_1-p_2+3p_3\right)\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(3\cdot 398012-2\cdot 246\cdot 1006)\approx 0,0275373>0.$$

С ростом цены на 2-е благо спрос на 3-е благо растет, 3-е и 2-е блага **взаимозаменяемые.**

Реакции потребителя при изменении цены на 3-е благо:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_3}=\frac{M}{V^2}\left[\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)'_{p_3}\cdot V-\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)\cdot V'_{p_3}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[12V-\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)\cdot\left(-18p_3+24p_1+6p_3\right)\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(12\cdot 398012-2\cdot 1160\cdot 246)\approx 0,1656540>0.$$

С ростом цены на 3-е благо спрос на 1-е благо возрастает, 1-е и 3-е блага **взаимозаменяемые.**

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_3}=\frac{M}{V^2}\left[\left(4p_1-p_2+3p_3\right)'_{p_3}\cdot V-\left(4p_1-p_2+3p_3\right)\cdot V'_{p_3}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[3V-2\left(4p_1-p_2+3p_3\right)\cdot\left(12p_1+3p_2-9p_3\right)\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(3\cdot 398012-2\cdot 1006\cdot 246)\approx 0,0275373>0.$$

С ростом цены на 3-е благо спрос на 2-е благо растет, эти блага **взаимозаменяемые.**

$$\frac{\partial x_3}{\partial p_3}=\frac{M}{V^2}\left[\left(12p_1+3p_2-9p_3\right)'_{p_3}\cdot V-\left(12p_1+3p_2-9p_3\right)\cdot V'_{p_3}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[-9V-2\cdot\left(12p_1+3p_2-9p_3\right)^2\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(-9\cdot 398012-2\cdot 246^2)\approx -0,1458688<0.$$

С ростом цены на 3-е благо спрос на него падает; это благо нормальное.

3. Вычислим **предельные полезности** благ в точке экстремума $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. Это значения частных производных функции полезности $U(x_1, x_2, x_3)$ по соответствующим аргументам в точке $\overline{X}^*$.

$$\overline{X}^* = (18{,}186386; 15{,}771987; 3{,}856768)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 3x_2 + x_3; \qquad \frac{\partial U}{\partial x_1}\left(\overline{X}\right)^* = 3x_2^* + x_3^* = 51{,}172729$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = 3x_1 + 4x_3; \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2}\left(\overline{X}\right)^* = 3x_1^* + 4x_3^* = 69{,}98623$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_3} = 4x_2 + x_1; \qquad \frac{\partial U}{\partial x_3}\left(\overline{X}\right)^* = 4x_2^2 + x_1^* = 81{,}274334$$

На 1 дополнительную единицу 1-го блага приходится 51,172729 единиц дополнительной полезности.

На 1 дополнительную единицу 2-го блага приходится 69,98623 дополнительных единиц полезности.

На 1 дополнительную единицу 3-го блага приходится 81,274334 единиц дополнительной полезности.

4. Вычислим **нормы замещения благ** в точке оптимума $\overline{X}^*$.

Норма замены 1-го блага 2-м:

$$n_{2,1} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} : \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{3x_2^* + x_3^*}{3x_1^* + 4x_3^*} = -\frac{51{,}172729}{69{,}98623} = -0{,}731.$$

Для замещения 1 единицы 1-го блага необходимо дополнительно приобрести 0,731 единиц 2-го блага, чтобы удовлетворенность осталась на прежнем уровне.

Норма замены 1-го блага 3-м:

$$n_{3,1} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} : \frac{\partial U}{\partial x_3} = -\frac{3x_2^* + x_3^*}{4x_2^* + x_1^*} = -\frac{51{,}172729}{81{,}2743334} = -0{,}6298.$$

Для того чтобы удовлетворенность осталась прежней, необходимо 0,63 единицы 3-го блага, чтобы заменить 1 единицу 1-го блага.

Норма замены 2-го блага 1-м:

$$n_{1,2} = -\frac{\partial U}{\partial x_2} : \frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{3x_1^* + 4x_3^*}{3x_2^* + x_3^*} = -\frac{69{,}98623}{51{,}172729} = -1{,}368.$$

Для замещения 1 единицы 2-го блага необходимо дополнительно приобрести 1,368 единиц 1-го блага, чтобы удовлетворенность осталась той же.

Норма замены 2-го блага 3-м:

$$n_{3,2} = -\frac{\partial U}{\partial x_2} : \frac{\partial U}{\partial x_3} = -\frac{3x_1^* + 4x_3^*}{4x_2^* + x_3^*} = -\frac{69{,}98623}{81{,}274334} = -0{,}861.$$

Для замещения 1 единицы 2-го блага необходимо дополнительно приобрести 0,861 единиц 3-го блага, чтобы удовлетворенность не изменилась.

Норма замены 3-го блага 1-м:

$$n_{1,3} = -\frac{\partial U}{\partial x_3} : \frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{4x_2^* + x_1^*}{3x_2^* + x_3^*} = -\frac{81,274334}{51,172729} = -1,588.$$

Для замещения 1 единицы 3-го блага необходимо дополнительно приобрести 1,588 единиц 1-го блага, чтобы удовлетворенность осталась той же.

Норма замены 3-го блага 2-м:

$$n_{2,3} = -\frac{\partial U}{\partial x_3} : \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{4x_2^* + x_1^*}{3x_1^* + 4x_3^*} = -\frac{81,274334}{69,98623} = -1,161.$$

Для замещения 1 единицы 3-го блага необходимо дополнительно приобрести 1,161 единиц 2-го блага, чтобы удовлетворенность не изменилась.

5. Вычислим коэффициенты эластичности по доходу и ценам при заданных ценах и доходе: $p_1 = 136$; $p_2 = 186$; $p_3 = 216$; $M = 6240$.

Для блага 1:

$$E_1^M = \frac{\partial x_1}{\partial M} : \frac{x_1}{M} = \frac{0,0029145 \cdot 6240}{18,1863863} = 1.$$

При увеличении дохода на 1 % спрос на 1-е благо возрастает на 1 %.

Коэффициенты эластичности по ценам:

$$E_{11}^p = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} : \frac{x_1}{p_1} = \frac{-0,3568546 \cdot 136}{18,1863863} = -2,6686020.$$

При росте цены на 1-е благо на 1 % спрос на него уменьшается на 2,669 %.

$$E_{12}^p = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} : \frac{x_1}{p_2} = \frac{-0,0292228 \cdot 186}{18,1863863} = -0,2988737.$$

При росте цены на 2-е благо на 1 % спрос на 1-е благо уменьшается на 0,3 %.

$$E_{13}^p = \frac{\partial x_1}{\partial p_3} : \frac{x_1}{p_3} = \frac{0,1656540 \cdot 216}{18,1863863} = 1,9674757.$$

При росте цены на 3-е благо на 1 % спрос на 1-е благо увеличивается на 1,967 %.

Проверка: $E_1^M + E_{11}^p + E_{12}^p + E_{13}^p = 0.$

$$1 + (-2,6686020) - 0,2988737 + 1,9674757 = 0.$$

(Погрешность возникает в результате округления чисел и работы с этими округленными числами).

Для блага 2:

$$E_2^M = \frac{\partial x_2}{\partial M} : \frac{x_2}{M} = \frac{0,0025276 \cdot 6240}{15,7719868} = 1.$$

При увеличении дохода на 1 % спрос на 2-е благо возрастает на 1 %.

$$E_{21}^p = \frac{\partial x_2}{\partial p_1} : \frac{x_2}{p_1} = \frac{-0,0292228 \cdot 136}{15,77119868} = -0,2519845.$$

При росте цены на 1-е благо на 1 % спрос на 2-е благо уменьшается на 0,25 %.

$$E_{22}^p = \frac{\partial x_2}{\partial p_2} : \frac{x_2}{p_2} = \frac{-0,0954073 \cdot 186}{15,7719868} = -1,1251437.$$

При росте цены на 2-е благо на 1 % спрос на него уменьшается на 1,125 %.

$$E_{23}^p = \frac{\partial x_2}{\partial p_3} : \frac{x_2}{p_3} = \frac{0,0275373 \cdot 216}{15,7719868} = 0,3771282.$$

При росте цены на 3-е благо на 1 % спрос на 2-е благо увеличивается на 0,37 %.

Проверка: $E_2^M + E_{21}^p + E_{22}^p + E_{23}^p = 0.$

1 – 0,2519845 – 1,1251437 + 0,3771282 = 0.

Для блага 3:

$$E_3^M = \frac{\partial x_3}{\partial M} : \frac{x_3}{M} = \frac{0,0006181 \cdot 6240}{3,8567681} = 1$$

При увеличении дохода на 1 % спрос на 3-е благо возрастает на 1 %.

$$E_{31}^p = \frac{\partial x_3}{\partial p_1} : \frac{x_3}{p_1} = \frac{0,1656540 \cdot 136}{3,8567681} = 5,8414064$$

При росте цены на 1-е благо на 1 % спрос на него увеличивается на 5,8 %.

$$E_{32}^p = \frac{\partial x_3}{\partial p_2} : \frac{x_3}{p_2} = \frac{0,0275373 \cdot 186}{3,8567681} = 1,3280396$$

При росте цены на 2-е благо на 1 % спрос на 3-е благо растет на 1,3 %.

$$E_{33}^p = \frac{\partial x_3}{\partial p_3} : \frac{x_3}{p_3} = \frac{-0,1458688 \cdot 216}{3,8567681} = -8,1694460$$

При увеличении цены на 3-е благо на 1 % спрос на него падает на 8,17 %.

Проверка: $E_3^M + E_{31}^p + E_{32}^p + E_{33}^p = 0.$

1 + 5,8414064 + 1,3280396 – 8,1694460 = 0.

Все расчеты произведены достаточно точно и правильно.

1.3. Лабораторная работа № 2

Задание 2

В табл. 2.1 дана информация о динамике потребления овощей за 12 лет и факторов, оказывающих влияние на объем потребления, индекс цен и среднемесячный доход.

Таблица 2.1

Номер года	Среднемесячный доход на душу населения, тыс. руб.: D = x_1'	Индекс цен, %: J = x_2'	Среднедушевое потребление овощей в месяц, кг: P = y'
1	10	0,1	6,5
2	11,5	0,2	5,1
3	12,2	0,4	5,5
4	12,5	0,3	6,1
5	12,9	0,35	6,3
6	13	0,33	6,8
7	14,3	0,34	7,0
8	15,8	0,45	7,9
9	18	0,48	7,5
10	19	0,5	7,4
11	22,3	0,51	8,1
12	24,5	0,54	8,2

Требуется:

1. Сформировать свой вариант исходных данных по данным таблиц, используя формулы (где N – номер варианта):

$$y = y' + 0{,}1N; \quad x_1 = x_1' + 0{,}1N; \quad x_2 = x_2' + 0{,}1N.$$

2. Построить эконометрическую модель зависимости среднедушевого потребления от размера дохода и индекса цен, построить уравнение множественной регрессии $y = a_1x_1 + a_2x_2 + b$, используя ППП *Excel* надстройки **Анализ данных**, инструменты **Корреляция** и **Регрессия**.

3. Найти линейные коэффициенты парной и множественной корреляции и детерминации, среднюю ошибку аппроксимации.

4. Оценить статистическую значимость уравнения с помощью критерия Фишера.

5. Найти средние коэффициенты эластичности.

6. Осуществить прогноз для $x_{1пр} = 1{,}1x_{1ср}$, $x_{2пр} = 0{,}9x_{2ср}$.

Образец выполнения задания 2

Построить линейную эконометрическую модель множественной регрессии $y = a_1x_1 + a_2x_2 + b$ зависимости среднедушевого потребления овощей в месяц, кг (y) от среднемесячного дохода на душу населения в руб. (x_1) и индекса цен в % (x_2).

В табл. 2.2 дана информация о динамике потребления овощей за 10 лет и факторов, оказывающих влияние на объем потребления, индекс цен и среднемесячный доход.

Требуется:

1. Найти зависимость среднедушевого потребления от размера дохода и индекса цен.

2. Построить матрицу парных коэффициентов корреляции.

3. Найти линейные коэффициенты частной корреляции и линейный коэффициент множественной корреляции.

4. Оценить статистическую значимость уравнения множественной регрессии и его параметров с помощью критериев Фишера и Стьюдента.

5. Осуществить прогнозы значений потребления овощей на следующие 2 года, рассчитав прогнозные значения соответствующих независимых факторов (x_1 и x_2) с учетом определения их средних относительных приростов (САП).

6. Рассчитать средние коэффициенты эластичности потребления овощей в зависимости от дохода и индекса цен.

Таблица 2.2

Номер года, t	Среднемесячный доход на душу населения, руб.: x_1	Индекс цен, %: x_2	Среднедушевое потребление овощей в месяц, кг: y
1	17	122,8	73
2	19,4	134,8	76
3	23	149,8	71
4	25,6	161,8	76
5	19,6	178,8	78
6	34,1	187,8	80
7	36,7	199,8	77
8	44,5	206,8	79
9	43,2	213,8	83
10	46,7	218,8	89

Решение

1. Построим уравнение множественной регрессии $y = a_1x_1 + a_2x_2 + b$.

Зависимость среднедушевого потребления от размера дохода и индекса цен будем искать в виде уравнения множественной регрессии: $y = a_1x_1 + a_2x_2 + b$. Для определения параметров a_1, a_2, b решим методом Крамера систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{1i} + b\sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{1i}; \\ a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_{2i} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{2i}; \\ a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i} + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i} + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Расчеты проведем в таблицах ППП Excel (табл. 2.3).

Таблица 2.3

№	x_1	x_2	y	x_1^2	x_2^2	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot y$	$x_2 \cdot y$	y_p
1	17	122,8	73	289	15079,84	2087,6	1241	8964,4	71,927905
2	19,4	134,8	76	376,36	18171,04	2615,12	1474,4	10244,8	73,227066
3	23	149,8	71	529	22440,04	3445,4	1633	10635,8	74,920113
4	25,6	161,8	76	655,36	26179,24	4142,08	1945,6	12296,8	76,242305
5	19,6	178,8	78	384,16	31969,44	3504,48	1528,8	13946,4	77,000272
6	34,1	187,8	80	1162,81	35268,84	6403,98	2728	15024	79,437183
7	36,7	199,8	77	1346,89	39920,04	7332,66	2825,9	15384,6	80,759376
8	44,5	206,8	79	1980,25	42766,24	9202,6	3515,5	16337,2	82,254248
9	43,2	213,8	83	1866,24	45710,44	9236,16	3585,6	17745,4	82,701157
10	46,7	218,8	89	2180,89	47873,44	10217,96	4156,3	19473,2	83,530376
Сумма	**309,8**	**1775**	**782**	**10770,96**	**325378,6**	**58188,04**	**24634,1**	**140052,6**	**782**
Среднее	30,98	177,5	78,2	1077,096	32537,86	5818,804	2463,41	14005,26	78,2

$$a_1 = \frac{D_1}{D};\ a_2 = \frac{D_2}{D};\ b = \frac{D_3}{D},\ \text{где}$$

$$D = \begin{vmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{1i} \\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{2i} & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10770,96 & 58188,04 & 309,8 \\ 58188,04 & 325378,6 & 1775 \\ 309,8 & 1775 & 10 \end{vmatrix} = 18737997;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \sum x_{1i}y_i & \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{1i} \\ \sum x_{2i}y_i & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i} \\ \sum y_i & \sum x_{2i} & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24634,1 & 58188,04 & 309,8 \\ 140052,6 & 325378,6 & 1775 \\ 782 & 1775 & 10 \end{vmatrix} = 2157881,1;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}y_i & \sum x_{1i} \\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}y_i & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum y_i & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10770,96 & 24634,1 & 309,8 \\ 58188,04 & 140052,6 & 1775 \\ 309,8 & 782 & 10 \end{vmatrix} = 1597062,46;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}y_i \\ \sum x_{1i} & \sum x_{2i} & \sum y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10770,96 & 58188,04 & 24634,1 \\ 58188,04 & 325378,6 & 140052,6 \\ 309,8 & 1775 & 782 \end{vmatrix} = 1114981622.$$

$$a_1 = \frac{2157881,1}{18737997} = 0,11516071 \approx 0,115; \quad a_2 = \frac{1597062,46}{18737997} = 0,08523 \approx 0,085;$$

$$b = \frac{1114981622}{18737997} = 59,50378 \approx 59,504.$$

Уравнение регрессии имеет вид:

$$y_{\text{р}} = 0,115 \cdot x_1 + 0,085 \cdot x_2 + 59,504.$$

Если среднемесячный доход на душу населения увеличится на 1 руб., а индекс цен не изменится, то среднедушевое потребление овощей в месяц увеличится на ≈ 0,115 кг.

Если индекс цен увеличится на 1 %, а среднемесячный доход на душу населения не изменится, то среднедушевое потребление овощей в месяц увеличится на ≈ 0,085 кг.

2. Построим матрицу парных коэффициентов корреляции:

	y	x_1	x_2
y	1	r_{yx_1}	r_{yx_2}
x_1	r_{x_1y}	1	$r_{x_1x_2}$
x_2	r_{x_2y}	$r_{x_2x_1}$	1

Коэффициенты r_{yx_1}, r_{yx_2}, $r_{x_1x_2}$ найдем по формулам, необходимые расчеты проведем с помощью ПО Excel (см. продолжение табл. 2.3):

$$r_{yx_1} = \frac{Cov(y;x_1)}{\sqrt{Var(y) \cdot Var(x_1)}} = \frac{40,774}{\sqrt{23,36 \cdot 117,3356}} = 0,778811 \approx 0,7788,$$

$$r_{yx_2} = \frac{Cov(y;x_2)}{\sqrt{Var(y) \cdot Var(x_2)}} = \frac{124,76}{\sqrt{23,36 \cdot 1031,61}} = 0,803676 \approx 0,8037,$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{Cov(x_1;x_2)}{\sqrt{Var(x_1) \cdot Var(x_2)}} = \frac{319,854}{\sqrt{117,3356 \cdot 1031,61}} = 0,919346 \approx 0,9193.$$

Продолжение таблицы 2.3

$y-y_p$	$(y-y_p)^2$	$(y-y_{cp})^2$	$(x_1-x_{1cp})^2$	$(x_2-x_{2cp})^2$	$(x_1-x_{1\,cp})(x_2-x_{2\,cp})$	$(y-y_{\,cp})(x_1-x_{1\,cp})$	$(y-y_{\,cp})(x_2-x_{2\,cp})$	$\lvert(y-y_p)/y\rvert$
1,072095	1,1493874	27,04	195,4404	2992,09	764,706	72,696	284,44	0,014686
2,772934	7,6891653	4,84	134,0964	1823,29	494,466	25,476	93,94	0,036486
-3,92011	15,367282	51,84	63,6804	767,29	221,046	57,456	199,44	0,055213
-0,24231	0,0587118	4,84	28,9444	246,49	84,466	11,836	34,54	0,003188
0,999728	0,9994567	0,04	129,5044	1,69	-14,794	2,276	-0,26	0,012817
0,562817	0,3167629	3,24	9,7344	106,09	32,136	5,616	18,54	0,007035
-3,75938	14,132905	1,44	32,7184	497,29	127,556	-6,864	-26,76	0,048823
-3,25425	10,590129	0,64	182,7904	858,49	396,136	10,816	23,44	0,041193
0,298843	0,0893069	23,04	149,3284	1317,69	443,586	58,656	174,24	0,003601
5,469624	29,916786	116,64	247,1184	1705,69	649,236	169,776	446,04	0,061456
0	**80,309893**	**233,6**	**1173,356**	**10316,1**	**3198,54**	**407,74**	**1247,6**	**0,284499**
0	8,0309893	23,36	117,3356	1031,61	319,854	40,774	124,76	0,02845
		$Var(y)$	$Var(x_1)$	$Var(x_2)$	$Cov(x_1, x_2)$	$Cov(y, x_1)$	$Cov(y, x_2)$	A_{cp}

Факторы x_1 и x_2 – явно коллинеарны, так как соответствующий парный коэффициент линейной корреляции больше 0,75, связь между ними прямая и тесная.

Матрица парных коэффициентов корреляции будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}7788 & 0{,}8037 \\ 0{,}7788 & 1 & 0{,}9193 \\ 0{,}8037 & 0{,}9193 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем линейный индекс множественной корреляции:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{ip}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{80{,}309893}{233{,}6}} = 0{,}8100665 \approx 0{,}81.$$

Значение индекса близко к единице, следовательно, связь между факторами среднедушевого потребления овощей в месяц (y), среднемесячного дохода на душу населения (x_1) и индекса цен (x_2) тесная.

Рассчитаем коэффициент детерминации:

$R^2_{yx_1x_2} = (R_{yx_1x_2})^2 = 0{,}6562077 \approx 0{,}656$, следовательно, 65,6 % – вариации среднедушевого потребления овощей в месяц (y), объясняется уравнением регрессии.

3. Найдем линейные коэффициенты частной корреляции.

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_2}^2\right) \cdot \left(1 - r_{x_1x_2}^2\right)}} = \frac{0,778811 - 0,803676 \cdot 0,919346}{\sqrt{\left(1 - 0,645896\right) \cdot \left(1 - 0,845198\right)}} =$$

$$= 0,1706499 \approx 0,1706.$$

Полученное значение говорит о незначительном влиянии среднемесячного дохода на душу населения (x_1) на среднедушевое потребление овощей в месяц (y) при неизменном уровне индекса цен (x_2).

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_1}^2\right) \cdot \left(1 - r_{x_1x_2}^2\right)}} = \frac{0,803676 - 0,778811 \cdot 0,919346}{\sqrt{\left(1 - 0,606546\right) \cdot \left(1 - 0,845198\right)}} =$$

$$= 0,355273 \approx 0,3553.$$

Индекс цен (x_2) оказывает большее (но все же умеренное) влияние на среднедушевое потребление овощей в месяц (y) при неизменном уровне среднемесячного дохода на душу населения (x_1).

$$r_{x_2x_1 \cdot y} = \frac{r_{x_1x_2} - r_{yx_1} \cdot r_{yx_2}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_1}^2\right) \cdot \left(1 - r_{yx_2}^2\right)}} = \frac{0,919346 - 0,778811 \cdot 0,803676}{\sqrt{(1 - 0,606546) \cdot \left(1 - 0,645896\right)}} =$$

$$= 0,786138 \approx 0,7861.$$

Межфакторная зависимость x_2 и x_1 значительно выше, чем парная y и x_1: 0,786 больше 0,171. Это приводит к выводу о необходимости исключения фактора x_1 из уравнения множественной регрессии.

4. Оценим статистическую значимость уравнения $y = 0,115 \cdot x_1 + 0,085 \cdot x_2 + 59,504$ и его параметров с помощью критериев Фишера и Стьюдента.

Фактическое значение F-критерия Фишера:

$$F_{\text{факт}} = \frac{R_{yx_1x_2}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} = 6,6805639 \approx 6,681; \quad F_{\text{табл}} = 4,74.$$

Вывод: $F_{\text{факт}} = 6,681 > 4,74 = F_{\text{табл}}$, гипотеза H_0 о статистической незначимости уравнения регрессии в целом и показателя тесноты связи коэффициента корреляции отвергается. Уравнение регрессии в целом статистически значимо, связь между факторами сформировалась неслучайно.

С помощью частных F-критериев Фишера оценим значимость каждого фактора, включенного в модель:

$$F_{x_1} = \frac{R_{yx_1x_2}^2 - R_{yx_2}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{1} = 0,20996423 \approx 0,209 < F_{\text{табл}} = 5,59,$$

$$F_{x_2} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - R^2_{yx_1}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n-m-1}{1} = 1,01115989 \approx 1,011 < F_{\text{табл}} = 5,59.$$

Вывод: дополнительное включение фактора среднемесячного дохода на душу населения (x_1) после фактора индекса цен (x_2), а также дополнительное включение индекса цен (x_2) после среднемесячного дохода на душу населения (x_1) – статистически нецелесообразно.

Оценим параметры уравнения $y = 0{,}115 \cdot x_1 + 0{,}085 \cdot x_2 + 59{,}504$ по критерию Стьюдента:

$$t_{a_1} = \sqrt{Fx_1} = 0,4582185 \approx 0,458 < t_{\text{табл}} = 2,3646;$$

$$t_{a_2} = \sqrt{Fx_2} = 1,0055645 \approx 1,006 < t_{\text{табл}} = 2,3646.$$

Вывод: гипотеза H_0 – о незначимом отличии от нуля коэффициентов регрессии a_1 и a_2 – принимается, коэффициенты регрессии a_1 и a_2 сформировались случайно.

Средняя по модулю ошибка аппроксимации:

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - y_{ip}}{y_i}\right| \cdot 100\ \% = 2,84498561 \approx 2,84 < 10\ \%$$

– точность модели удовлетворительная.

5. Осуществим прогнозы значений потребления овощей на следующие 2 года. Рассчитаем прогнозные значения соответствующих независимых факторов (x_1 и x_2) с учетом определения их средних относительных приростов (САП).

$$\text{САП}(x_1) = \frac{46,7-17}{9} = 3,3; \quad \text{САП}(x_2) = \frac{218,8-122,8}{9} = 10,(6).$$

Для 11 года: $x_{1\text{пр}} = 30,98 + 3,3 = 34,28,$

$$x_{2\text{пр}} = 177,5 + 10,(6) = 188,16667,$$

$$y_{11} = 0,11516071 \cdot 34,28 + 0,08523 \cdot 188,16667 + 59,50378 =$$

$$= 79,489163 \approx 79,49.$$

Согласно прогнозу на 11 год спрос на овощи составит в среднем 79,49 кг в месяц.

Для 12 года: $x_{1\text{пр}} = 30,98 + 2 \cdot 3,3 = 37,58,$

$$x_{2\text{пр}} = 177,5 + 2 \cdot 10,(6) = 198,83333,$$

$$y_{12} = 0,11516071 \cdot 37,58 + 0,08523 \cdot 198,83333 + 59,50378 =$$

$$= 80,778327 \approx 80,78.$$

Согласно прогнозу на 12 год спрос на овощи составит в среднем 81 кг в месяц.

6. Рассчитаем коэффициенты эластичности спроса на овощи в зависимости от дохода и индекса цен.

Коэффициенты эластичности найдем по формулам:

$$E_{yx_1} = a_1 : \frac{\overline{y}}{\overline{x}_1} = 0{,}11516071 : \frac{78{,}2}{30{,}98} = 0{,}045622 \approx 0{,}04.$$

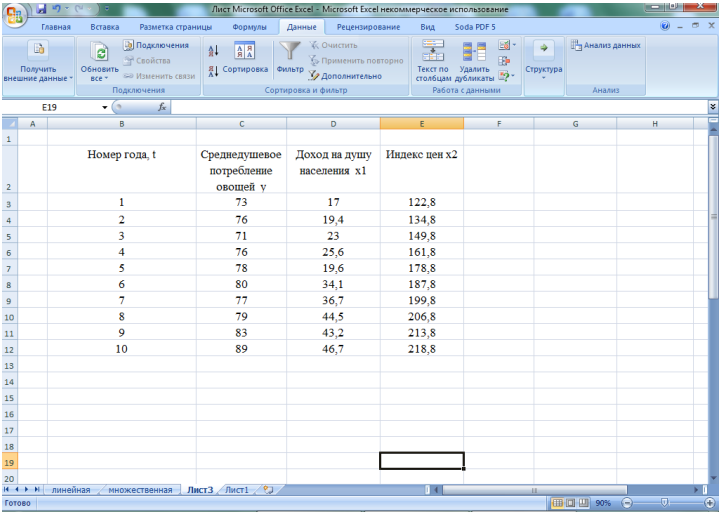
При увеличении среднемесячного дохода на душу населения на 1 % среднедушевое потребление овощей в месяц возрастет в среднем приблизительно на 0,04 %.

$$E_{yx_2} = a_2 : \frac{\overline{y}}{\overline{x}_2} = 0{,}08523 : \frac{78{,}2}{177{,}5} = 0{,}19346 \approx 0{,}19.$$

При увеличении индекса цен на 1 % среднедушевое потребление овощей в месяц возрастет в среднем приблизительно на 0,19 %.

Для нахождения параметров уравнения $y = a_1x_1 + a_2x_2 + b$ и оценки качества построенной модели с помощью ППП Excel с использованием надстройки Анализ данных и инструментов Корреляция и Регрессия выполним следующие шаги.

1) Вводим исходные данные или открываем существующий файл с этими данными (рис. 2.1).



Номер года, t	Среднедушевое потребление овощей y	Доход на душу населения x1	Индекс цен x2
1	73	17	122,8
2	76	19,4	134,8
3	71	23	149,8
4	76	25,6	161,8
5	78	19,6	178,8
6	80	34,1	187,8
7	77	36,7	199,8
8	79	44,5	206,8
9	83	43,2	213,8
10	89	46,7	218,8

Рис. 2.1. Окно Данные

2) В главном меню последовательно выбираем **Данные**, **Анализ данных** (рис. 2.2).

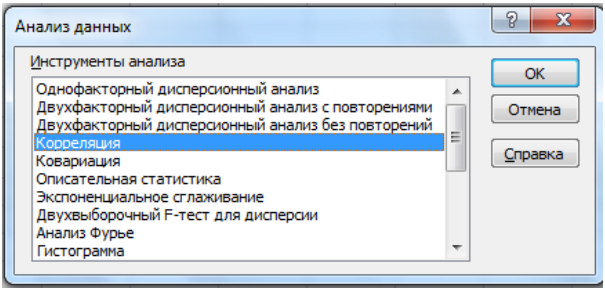


Рис. 2.2. Окно Анализ данных

3) В окне анализа данных выбираем инструмент **Корреляция** и нажимаем OK. В полученном окне **Корреляция** (рис. 2.3) в строке **Входной интервал** указываем значения исходных данных и параметры вывода в **выходном интервале** (рис. 2.4) и нажимаем OK.

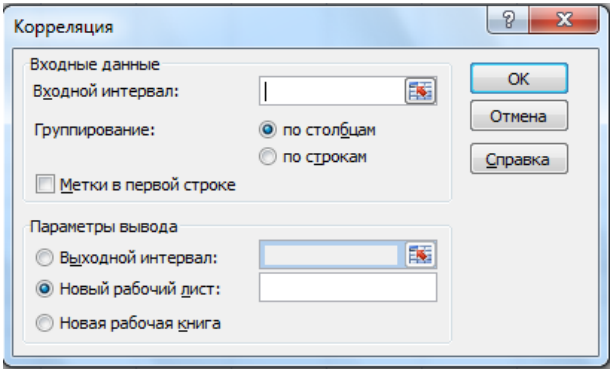


Рис. 2.3. Окно Корреляция

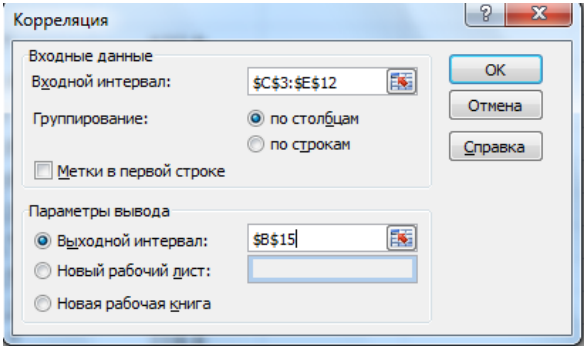
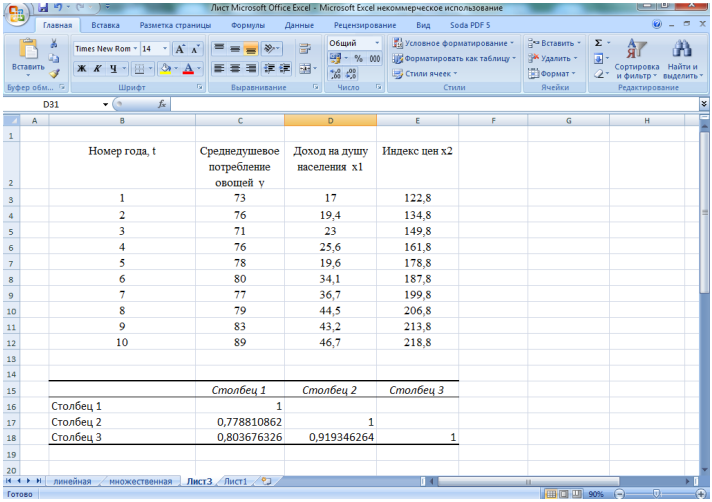


Рис. 2.4. Окно Корреляция

4) Получаем результаты выполнения процедур (рис. 2.5).



Номер года, t	Среднедушевое потребление овощей y	Доход на душу населения x1	Индекс цен x2
1	73	17	122,8
2	76	19,4	134,8
3	71	23	149,8
4	76	25,6	161,8
5	78	19,6	178,8
6	80	34,1	187,8
7	77	36,7	199,8
8	79	44,5	206,8
9	83	43,2	213,8
10	89	46,7	218,8

	Столбец 1	*Столбец 2*	*Столбец 3*
Столбец 1	1		
Столбец 2	0,778810862	1	
Столбец 3	0,803676326	0,919346264	1

Рис. 2.5. Окно Корреляция

5) Для нахождения параметров b, a_1, a_2 и оценки качества построенного уравнения в главном меню последовательно выбираем **Данные**, **Анализ данных**, инструмент **Регрессия**, нажимаем OK (рис. 2.6).

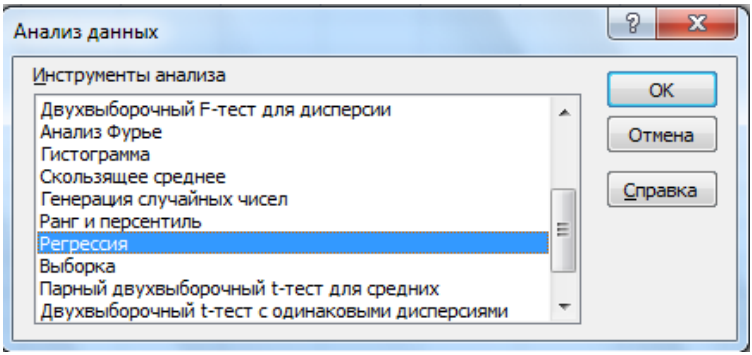


Рис. 2.6. Окно Анализ данных

6) В полученном окне **Регрессия** указываем в строках **входные интервалы** значений y и x и параметры вывода в **выходном интервале** (рис. 2.7) и нажимаем OK.

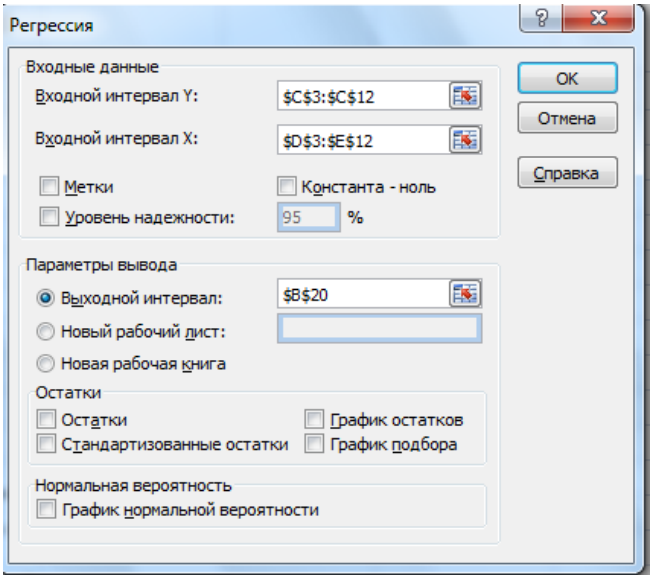
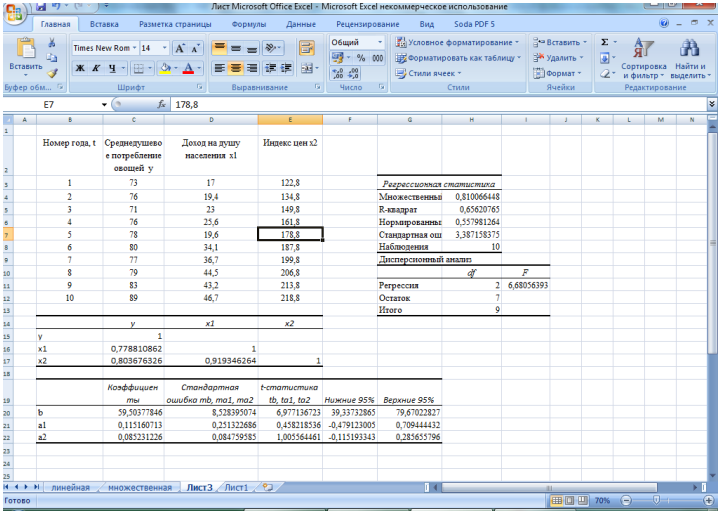


Рис. 2.7. Окно Регрессия

7) Результаты корреляционного и регрессионного анализа выводятся в следующем окне (рис. 2.8).



Номер года, t	Среднедушевое потребление овощей y	Доход на душу населения x1	Индекс цен x2
1	73	17	122,8
2	76	19,4	134,8
3	71	23	149,8
4	76	25,6	161,8
5	78	19,6	178,8
6	80	34,1	187,8
7	77	36,7	199,8
8	79	44,5	206,8
9	83	43,2	213,8
10	89	46,7	218,8

Регрессионная статистика	
Множественный	0,810066448
R-квадрат	0,65620765
Нормированны	0,557981264
Стандартная ош	3,387158375
Наблюдения	10

Дисперсионный анализ

	df	F
Регрессия	2	6,68056393
Остаток	7	
Итого	9	

	y	x1	x2
y	1		
x1	0,778810862	1	
x2	0,803676326	0,919346264	1

	Коэффициенты	Стандартная ошибка mb, ma1, ma2	t-статистика tb, ta1, ta2	Нижние 95%	Верхние 95%
b	59,50377846	8,528395074	6,977136723	39,33732865	79,67022827
a1	0,115160713	0,251322686	0,458218536	-0,479123005	0,709444432
a2	0,085231226	0,084759585	1,005564461	-0,115193343	0,285655796

Рис. 2.8. Окно с результатами

Результаты вычислений параметров уравнений регрессии b, a_1, a_2 и результаты анализа качества полученного уравнения совпадают с результатами, полученными в пункте 1.

Ответ.

По данным табл. 2.1. получено уравнение $y_p = 0{,}115 \cdot x_1 + 0{,}085 \cdot x_2 + 59{,}504$. Связь между факторами среднедушевого потребления овощей в месяц (y), среднемесячного дохода на душу населения (x_1) и индекса цен (x_2) тесная, так как индекс корреляции $\rho_{xy} \approx 0{,}81$ и коэффициент детерминации $R^2_{xy} \approx 0{,}656$, т. е. 65,6 %, вариации среднедушевого потребления овощей в месяц (y) объясняется уравнением регрессии.

Средняя ошибка аппроксимации, среднее отклонение расчетных значений от фактических: $\overline{A} \approx 2{,}84$ % – точность модели удовлетворительная. Согласно прогнозу на 11 год спрос на овощи составит в среднем 79,49 кг в месяц. Согласно прогнозу на 12 год спрос на овощи составит в среднем 81 кг в месяц.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ

2.1. Краткие теоретические сведения и методические указания к выполнению лабораторных работ № 3 и № 4

Между объемом производства продукции и затратами ресурсов существует определенная зависимость, которая определяется технологией производства. Будем предполагать, что производитель производит 1 вид продукции. Объем выпуска продукции обозначим через y, а объемы используемых ресурсов: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Технологическая связь между выпуском продукции задается функцией

$$y = f(\bar{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n); \;\; \bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Эта функция $\left(y = f(\bar{X})\right)$ и называется производственной функцией.

Предполагается, что этот выпуск максимальный из всех возможных при заданном векторе $\bar{X}$.

Если выпускается несколько видов продукции, то задают неявную функцию:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m; x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Свойства производственной функции

1) Если отсутствует хоть один ресурс, необходимый для производства, то производство невозможно, т. е.

$$x_j = 0, \text{ то } f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, x_n) = 0.$$

Такой является функция Кобба – Дугласа:

$$AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, 0 < \alpha < 1$$

и функция типа Кобба – Дугласа:

$$y = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \; A > 0; \; 0 < \alpha_j < 1; \; j = \overline{1,n}$$

2) Производственная функция должна быть возрастающей функцией по каждому аргументу.

Будем считать, что $\frac{\partial f}{\partial x_j} > 0$. Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ называется предельной производительностью j-го ресурса.

3) Коэффициенты эластичности.

$$E_j = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{y}{x_i} \quad (i = \overline{1,n}).$$

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов возрастает выпуск продукции, если ресурс увеличится на 1 %.

4) Функция y строго вогнутая. Для вогнутой функции $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} < 0$, это означает, что предельная производительность $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ – убывающая функция. Это называется законом убывающей эффективности производства. Чем больше добавляется какого-то ресурса, тем меньше его эффективность (чем больше удобрений, тем выше их эффективность до определенного уровня; в некоторый момент их эффективность падает).

5) Предельной нормой замены k-м ресурсом единицы l-го ресурса будем называть число

$$n_{k,l} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_l}}{\frac{\partial f}{\partial x_k}} = -\frac{\partial f}{\partial x_l} : \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Предельная норма показывает, сколько надо единиц k-го ресурса для замены 1-ой единицы ресурса l.

Среди производственных функций можно выделить так называемые однородные производственные функции.

Однородные функции степени k можно представить в следующем виде:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot$$

Используются следующие типовые производственные функции:

1. Линейная производственная функция:

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

2. Производственная функция с постоянными пропорциями:

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, \dots, \frac{x_n}{a_n}\right).$$

3. Производственная функция типа Кобба – Дугласа:

$$y = A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

$$A > 0;\ 0 < \alpha_j < 1;\ j = \overline{1,n}.$$

В задании 4 необходимо построить производственную функцию типа Кобба – Дугласа: $y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$.

Для нахождения параметров этого уравнения предварительно прологарифмируем эту функцию, получим следующее уравнение:

$$\ln y = \ln A + \alpha \cdot \ln x_1 + \beta \cdot \ln x_2.$$

Произведем замену:

$$Y = \ln y, \quad X_1 = \ln x_1, \quad X_2 = \ln x_2,$$

$$b = \ln A, \quad a_1 = \alpha, \quad a_2 = \beta, \quad A = e^b.$$

Получим следующее линейное уравнение: $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + b$. Методика расчета параметров этого уравнения регрессии изложена в пункте 1.1.

2.2. Лабораторная работа № 3

Задание 3

Дана производственная функция Кобба – Дугласа: $y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$. Найти:

1. Степень однородности функции.

2. Функцию издержек.

3. Предельные производительности ресурсов для заданных значений x_1^0 и x_2^0.

4. Коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам и эластичности от расширения масштаба производства.

5. Предельную норму замещения ресурсов для заданных значений $x_1^0 = 20 + N$ и $x_2^0 = 30 + N$; где N – номер варианта.

6. Оптимальный выбор производителя по критерию максимальной прибыли в условиях совершенной конкуренции:

для **серий А:** $p = 30 + 2N$; $q_1 = N$; $q_2 = 5 + N$;

для **серий Б:** $p = 40 + 2N$; $q_1 = 10 + N$; $q_2 = 15 + N$.

7. Функцию спроса на ресурсы и функцию предложения в условиях совершенной конкуренции.

8. Реакции производителя при изменении цен на продукцию и на ресурсы и соответствующие коэффициенты эластичности при ценах, заданных в пункте 6.

Номер задачи	Серия А	Серия Б
1	$y = 3{,}5 \cdot x_1^{0{,}24} \cdot x_2^{0{,}48}$	$y = 2 \cdot x_1^{0{,}5} \cdot x_2^{0{,}35}$
2	$y = 3{,}5 \cdot x_1^{0{,}32} \cdot x_2^{0{,}27}$	$y = 7 \cdot x_1^{0{,}36} \cdot x_2^{0{,}27}$
3	$y = 4{,}5 \cdot x_1^{0{,}25} \cdot x_2^{0{,}35}$	$y = 4 \cdot x_1^{0{,}25} \cdot x_2^{0{,}37}$
4	$y = 7 \cdot x_1^{0{,}38} \cdot x_2^{0{,}26}$	$y = 2 \cdot x_1^{0{,}44} \cdot x_2^{0{,}43}$
5	$y = 2{,}5 \cdot x_1^{0{,}4} \cdot x_2^{0{,}35}$	$y = 10 \cdot x_1^{0{,}18} \cdot x_2^{0{,}43}$
6	$y = 6{,}5 \cdot x_1^{0{,}35} \cdot x_2^{0{,}27}$	$y = 8 \cdot x_1^{0{,}24} \cdot x_2^{0{,}41}$
7	$y = 4{,}5 \cdot x_1^{0{,}25} \cdot x_2^{0{,}34}$	$y = 6 \cdot x_1^{0{,}23} \cdot x_2^{0{,}45}$
8	$y = 4 \cdot x_1^{0{,}3} \cdot x_2^{0{,}4}$	$y = 9 \cdot x_1^{0{,}27} \cdot x_2^{0{,}42}$
9	$y = 3{,}5 \cdot x_1^{0{,}25} \cdot x_2^{0{,}5}$	$y = 7 \cdot x_1^{0{,}32} \cdot x_2^{0{,}48}$
10	$y = 5{,}5 \cdot x_1^{0{,}15} \cdot x_2^{0{,}4}$	$y = 5 \cdot x_1^{0{,}31} \cdot x_2^{0{,}47}$

Образец выполнения задания 3

Дана производственная функции Кобба – Дугласа: $y = A \cdot x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$. Найти:

1. Степень однородности функции.

2. Функцию издержек.

3. Предельные производительности ресурсов для заданных значений x_1^0 и x_2^0.

4. Коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам и эластичности от расширения масштаба производства.

5. Предельную норму замещения ресурсов для заданных значений x_1^0 и x_2^0.

6. Оптимальный выбор производителя по критерию максимальной прибыли в условиях совершенной конкуренции.

$$P = 100 - 1 = 99;\ q_1 = 10 + 1 = 11;\ q_2 = 7 + 1 = 8.$$

7. Реакции производителя при изменении цен на продукцию и на ресурсы и соответствующие коэффициенты эластичности при ценах, заданных в пункте 6.

$$x_1^0 = 20 + 1 = 21, \quad x_2^0 = 30 + 1 = 31, \quad y = 2,5 \cdot x_1^{0,55} x_2^{0,3}.$$

Решение

1. Определим степень однородности функции. Сумма коэффициентов эластичности однородной функции равна показателю однородности, т. е.

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_n = k.$$

В нашем случае

$$E_1 + E_2 = k.$$

Найдем коэффициенты однородности заданной производственной функции $y = 2,5 \cdot x_1^{0,55} x_2^{0,3}$.

$$E_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \div \frac{y}{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y} = \frac{2,5 \cdot x_1^{0,55-1} \cdot 0,55 \cdot x_2^{0,3} \cdot x_1}{2,5 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{0,3}} = 0,55;$$

$$E_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} \div \frac{y}{x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y} = \frac{2,5 \cdot x_1^{0,55} \cdot 0,3 \cdot x_2^{0,3-1} \cdot x_2}{2,5 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{0,3}} = 0,3;$$

$$k = 0,55 + 0,3 = 0,85.$$

Степень однородности данной производственной функции $k = 0,85$.

2. Найдем функцию издержек $C(y)$. Это функция $C(y) = \min z$, где $z = q_1 x_1 + q_2 x_2$, т. е. решим задачу:

$$\begin{cases} z = q_1 x_1 + q_2 x_2 \to \min, \\ y_0 = 2,5 \cdot x_1^{0,55} x_2^{0,3}, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Условный экстремум найдем методом множителей Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = q_1 x_1 + q_2 x_2 y_0 + \lambda(y_0 - 2,5 \cdot x_1^{0,55} x_2^{0,3}).$$

Необходимым условием экстремума функции нескольких переменных является равенство нулю всех ее частных производных.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = q_1 - 2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{-0,45} x_2^{0,3} \cdot \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = q_2 - 2,5 \cdot 0,3 \cdot x_1^{0,55} x_2^{-0,7} \cdot \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = y_0 - 2,5 \cdot x_1^{0,55} x_2^{0,3} = 0. \end{cases}$$

Преобразуем полученную систему уравнений с неизвестными x_1, x_2 и λ.

$$\begin{cases} q_1 = 2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{-0,45} x_2^{0,3} \cdot \lambda = \dfrac{2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{0,55} x_2^{0,3} \cdot \lambda}{x_1} = \lambda \cdot \dfrac{0,55 \cdot y_0}{x_1}, \\ q_2 = 2,5 \cdot 0,3 \cdot x_1^{0,55} x_2^{-0,7} \cdot \lambda = \dfrac{2,5 \cdot 0,3 \cdot x_1^{0,55} x_2^{0,3} \cdot \lambda}{x_2} = \lambda \cdot \dfrac{0,3 \cdot y_0}{x_2}, \\ y_0 = 2,5 \cdot x_1^{0,55} x_2^{0,3}. \end{cases}$$

Подставим выражения для x_1 и x_2 в третье уравнение системы:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \cdot \dfrac{0,55 \cdot y_0}{q_1}; \\ x_2 = \lambda \cdot \dfrac{0,3 \cdot y_0}{q_2}; \\ y_0 = 2,5 \cdot \left(\lambda \cdot \dfrac{0,55 \cdot y_0}{q_1} \right)^{0,55} \cdot \left(\lambda \cdot \dfrac{0,3 \cdot y_0}{q_2} \right)^{0,3}. \end{cases}$$

Упростим последнее равенство

$$y_0 = 2,5 \cdot \left(\lambda \cdot \frac{0,55 \cdot y_0}{q_1} \right)^{0,55} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{0,3 \cdot y_0}{q_2} \right)^{0,3} =$$

$$= 2,5 \cdot \lambda^{0,55} \cdot \frac{0,55^{0,55} \cdot y_0^{\,0,55}}{q_1^{\,0,55}} \cdot \lambda^{0,3} \cdot \frac{0,3^{0,3} \cdot y_0^{\,0,3}}{q_2^{\,0,3}} =$$

$$= 2,5 \cdot \lambda^{0,85} \cdot \frac{y_0^{\,0,85} \cdot 0,55^{0,55} \cdot 0,3^{0,3}}{q_1^{\,0,55} \cdot q_2^{\,0,3}}.$$

Найдем λ из уравнения $y_0 = 2,5 \cdot \lambda^{0,85} \cdot \dfrac{y_0^{\,0,85} \cdot 0,55^{0,55} \cdot 0,3^{0,3}}{q_1^{\,0,55} \cdot q_2^{\,0,3}}$.

Получим:

$$\lambda = \left(y_0 \cdot \frac{q_1^{0,55} \cdot q_2^{0,3}}{0,55^{0,55} \cdot 0,3^{0,3} \cdot 2,5 \cdot y_0^{0,85}} \right)^{\frac{1}{0,85}} = \frac{1}{y_0} \cdot \left(\frac{q_1^{0,55} \cdot q_2^{0,3} \cdot y_0}{2,5 \cdot 0,55^{0,55} \cdot 0,3^{0,3}} \right)^{\frac{1}{0,85}} =$$

$$= \frac{1}{y_0} \cdot \frac{q_1^{0,647059} \cdot q_2^{0,352941} \cdot y_0^{1,1764705}}{2,5^{1,1764705} \cdot 0,55^{0,647059} \cdot 0,3^{0,352941}} = \frac{q_1^{0,647059} \cdot q_2^{0,352941} \cdot y_0^{0,1764705}}{1,3050245}.$$

Подставляем $\lambda = \dfrac{q_1^{0,647059} \cdot q_2^{0,352941} \cdot y_0^{0,1764705}}{1,3050245}$ в выражения для x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \cdot \dfrac{0,55 \cdot y_0}{q_1} = \dfrac{q_1^{0,647059} \cdot q_2^{0,352941} \cdot y_0^{0,1764705}}{1,3050245} \cdot \dfrac{0,55 \cdot y_0}{q_1}; \\ x_2 = \lambda \cdot \dfrac{0,3 \cdot y_0}{q_2} = \dfrac{q_1^{0,647059} \cdot q_2^{0,352941} \cdot y_0^{0,176470\text{ر}}}{1,3050245} \cdot \dfrac{0,3 \cdot y_0}{q_2}. \end{cases}$$

Итак, оптимальный набор ресурсов по критерию минимизации издержек, обеспечивающий заданный выпуск продукции y_0:

$$\begin{cases} x_1^* = 0,421448 \cdot \dfrac{y_0^{1,1764705} \cdot q_2^{0,352941}}{q_1^{0,352941}}; \\ x_2^* = 0,229881 \dfrac{y_0^{1,1764705} \cdot q_1^{0,647059}}{q_2^{0,647059}}. \end{cases}$$

Тогда минимальные затраты:

$$z_{\min} = q_1 \cdot x_1^* + q_2 \cdot x_2^* =$$

$$= q_1 \cdot 0,421448 \cdot \frac{y_0^{1,1764705} \cdot q_2^{0,352941}}{q_1^{0,352941}} + q_2 \cdot 0,229881 \frac{y_0^{1,1764705} \cdot q_1^{0,647059}}{q_2^{0,647059}} =$$

$$= 0,651329 \cdot y_0^{1,1764705} \cdot q_1^{0,647059} \cdot q_2^{0,352941}.$$

Таким образом, функция издержек производства имеет вид:

$$C(y) = 0,651329 \cdot y^{1,1764705} \cdot q_1^{0,647059} \cdot q_2^{0,352941}.$$

3. Найдем предельные производительности ресурсов для заданных значений $x_1^0 = 21$ и $x_2^0 = 31$, т. е. в точке $X_0 = (21, 31)$.

Предельная производительность 1-го ресурса:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{0,55-1} \cdot x_2^{0,3} = 1,375 \cdot x_1^{-0,45} \cdot x_2^{0,3};$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{X_0} = 1,375 \cdot 21^{-0,45} \cdot 31^{0,3} = 0,9788418.$$

На одну единицу дополнительно использованного ресурса 1-го вида приходится 0,9788418 единиц дополнительно выпущенной продукции.

Предельная производительность 2-го ресурса:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2,5 \cdot 0,3 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{0,3-1} = 0,75 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{-0,7};$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|_{X_0} = 0,75 \cdot 21^{0,55} \cdot 31^{-0,7} = 0,3616834.$$

На одну единицу дополнительно использованного ресурса 1-го вида приходится 0,3616834 единиц дополнительно выпущенной продукции.

4. Найдем коэффициенты производительности выпуска по ресурсам и эластичности от расширения масштабов производства.

Коэффициенты эластичности выпуска продукции по 1-му ресурсу:

$$E_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \div \frac{y}{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y} = \frac{2,5 \cdot x_1^{0,55-1} \cdot 0,55 \cdot x_2^{0,3} \cdot x_1}{2,5 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{0,3}} = 0,55.$$

При увеличении объема использования ресурса 1-го вида на 1 % выпуск продукции увеличивается на 0,55 %.

Коэффициенты эластичности выпуска продукции по 2-му ресурсу:

$$E_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} \div \frac{y}{x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y} = \frac{2,5 \cdot x_1^{0,55} \cdot 0,3 \cdot x_2^{0,3-1} \cdot x_2}{2,5 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{0,3}} = 0,3.$$

При увеличении объема использования ресурса 2-го вида на 1 % выпуск продукции возрастает на 0,3 %.

Общая эластичность от расширения масштабов производства:

$$E = E_1 + E_2 = 0,55 + 0,3 = 0,85 < 1.$$

Так как $E < 1$, то имеет место случай убывающей эффективности от расширения масштабов производства. В результате увеличения использования ресурсов каждого вида на 1 % в целом выпуск продукции возрастает на 0,85 %.

5. Найдем предельные нормы замещения ресурсов для заданных значений:

$$x_1^0 = 21; \quad x_2^0 = 31.$$

Норма замены первого ресурса вторым:

$$n_{2,1} = -\frac{\partial y}{\partial x_1} : \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{0,55-1} \cdot x_2^{0,3}}{2,5 \cdot 0,3 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{0,3-1}} =$$

$$= -\frac{1,375}{0,75} \cdot \frac{x_2}{x_1} = -\frac{1,375}{0,75} \cdot \frac{31}{21} = -2,706349.$$

Для замены одной единицы ресурса первого вида требуется 2,7063 единиц ресурса второго вида, чтобы выпуск продукции остался на прежнем уровне.

Норма замены второго ресурса первым:

$$n_{1,2} = -\frac{\partial y}{\partial x_2} : \frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{2,5 \cdot 0,3 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{0,3-1}}{2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{0,55-1} \cdot x_2^{0,3}} =$$

$$= -\frac{0,75}{1,375} \cdot \frac{x_1}{x_2} = -\frac{0,75}{1,375} \cdot \frac{21}{31} = -0,369501.$$

Чтобы освободить единицу ресурса 2-го вида, при условии, что выпуск продукции не изменился, необходимо дополнительно использовать 0,3695 единиц ресурса 1-го вида.

6. Найдем оптимальный выбор производителя по критерию максимальной прибыли в условиях совершенной конкуренции при заданных ценах на продукцию и ресурсы: $p = 99$, $q_1 = 11$, $q_2 = 8$.

Модель оптимального выбора производителя в условиях совершенной конкуренции имеет вид:

$$\Pi = p \cdot y - \sum_{j=1}^{n} q_i x_i, \quad \text{где} \quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$q_j > 0, \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

В нашем случае

$$\Pi = p \cdot y - (q_1 x_1 + q_2 x_2) \to \max, \quad \text{где} \quad y = 2,5 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{0,3},$$

$$q_1 > 0, \quad q_2 > 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Или , где $\Pi = p \cdot 2,5 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{0,3} - q_1 x_1 - q_2 x_2 \to \max,$

$$\text{где} \quad q_1 > 0, \quad q_2 > 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Необходимым условием экстремума функции нескольких переменных является равенство нулю всех ее частных производных.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_1} = p \cdot 2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{-0,45} \cdot x_2^{0,3} - q_1 = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_2} = p \cdot 2,5 \cdot 0,3 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{-0,7} - q_2 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем полученную систему уравнений с неизвестными x_1 и x_2.

$$\begin{cases} q_1 = p \cdot 2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{-0,45} \cdot x_2^{0,3}, \\ q_2 = p \cdot 2,5 \cdot 0,3 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{-0,7}. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе.

$$\begin{cases} \dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{p \cdot 2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{-0,45} \cdot x_2^{0,3}}{p \cdot 2,5 \cdot 0,3 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{-0,7}} \\ q_1 = p \cdot 2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{-0,45} \cdot x_2^{0,3} \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{0,3 \cdot x_1 q_1}{0,55 \cdot q_2} \\ q_1 = p \cdot 2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{-0,45} \cdot x_2^{0,3}. \end{cases}$$

Подставим x_2 во второе уравнение системы

$$q_1 = p \cdot 2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{-0,45} \cdot \left(\frac{0,3 x_1 q_1}{0,55 q_2} \right)^{0,3} = p \cdot 2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{-0,45} \cdot \frac{0,3^{0,3} x_1^{0,3} q_1^{0,3}}{0,55^{0,3} q_2^{0,3}} =$$

$$= p \cdot 2,5 \cdot 0,55 \cdot x_1^{-0,15} \cdot 0,3^{0,3} \cdot 0,55^{-0,3} \cdot q_1^{0,3} \cdot q_2^{-0,3} =$$

$$= p \cdot 2,5 \cdot 0,3^{0,3} \cdot 0,55^{0,7} \cdot q_1^{0,3} \cdot q_2^{-0,3} \cdot x_1^{-0,15}.$$

Откуда $x_1^{0,15} = p \cdot 2,5 \cdot 0,3^{0,3} \cdot 0,55^{0,7} \cdot q_1^{-0,7} \cdot q_2^{-0,3}$

$$x_1 = \left(\frac{p \cdot 2,5 \cdot 0,3^{0,3} \cdot 0,55^{0,7}}{q_1^{0,7} \cdot q_2^{0,3}} \right)^{\frac{1}{0,15}} = \frac{p^{\frac{20}{3}} \cdot 2,5^{\frac{20}{3}} \cdot 0,3^2 \cdot 0,55^{\frac{14}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}} \cdot q_2^2} = \frac{2,486195 \cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}} \cdot q_2^2}.$$

Итак, $x_1^* = \dfrac{2,486195 \cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}} \cdot q_2^2}$.

Тогда $x_2^* = \dfrac{0,3 \cdot x_1^* \cdot q_1}{0,55 \cdot q_2} = \dfrac{0,3 \cdot q_1}{0,55 \cdot q_2} \cdot \dfrac{2,486195 \cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}} \cdot q_2^2} = \dfrac{1,356106 \cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{11}{3}} \cdot q_2^3}$.

Функции спроса на ресурсы имеют вид

$$x_1^* = \frac{2,486195 \cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}} \cdot q_2^2} \quad ; \quad x_2^* = \frac{1,356106 \cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{11}{3}} \cdot q_2^3}.$$

Подставив в эти функции значения $q_1 = 11$, $q_2 = 8$, $p = 99$, найдем оптимальный выбор производителя по критерию максимизации прибыли в условиях совершенной конкуренции:

$$x_1^* = \frac{2,486195 \cdot 99^{\frac{20}{3}}}{11^{\frac{14}{3}} \cdot 8^2} = 10808298,11;$$

$$x_2^* = \frac{1,356106 \cdot 99^{\frac{20}{3}}}{11^{\frac{11}{3}} \cdot 8^3} = 8106221,41.$$

При этом будет выпушено продукции

$$y^* = 2,5 \cdot \left(x_1^*\right)^{0,55} \cdot \left(x_2^*\right)^{0,3} = 2,5 \cdot 10808298,11^{0,55} \cdot 8106221,41^{0,3} = 2183494,304$$

и максимальная прибыль составит

$$\Pi^* = p \cdot y^* - q_1 \cdot x_1^* - q_2 \cdot x_2^* =$$

$$= 99 \cdot 2183494,3 - 11 \cdot 10808298,11 - 8 \cdot 8106221,41 = 32424889,06.$$

7. Функции спроса на ресурсы имеют вид

$$x_1 = \frac{2,486195 \cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}} \cdot q_2^2}; \quad x_2 = \frac{1,356106 \cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{11}{3}} \cdot q_2^3}.$$

Функция предложения продукции

$$y = 2,5 \cdot x_1^{0,55} \cdot x_2^{0,3} = 2,5 \cdot \left(\frac{2,486195 \cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}} \cdot q_2^2} \right)^{0,55} \left(\frac{1,356106 \cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{11}{3}} \cdot q_2^3} \right)^{0,3} =$$

$$= \frac{4,520354 \cdot p^{\frac{17}{3}}}{q_1^{\frac{11}{3}} \cdot q_2^2}.$$

8. Найдем реакции производителя при изменении цен на продукцию и на ресурсы и коэффициенты эластичности при ценах $p = 99$, $q_1 = 11$, $q_2 = 8$.

Реакция производителя при изменении цены продукции.

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p} = \frac{2,486195 \cdot \frac{20}{3} \cdot p^{\frac{20}{3}-1}}{q_1^{\frac{14}{3}} \cdot q_2^2} = \frac{49,723900 \cdot 99^{\frac{17}{3}}}{3 \cdot 11^{\frac{14}{3}} \cdot 8^2} = 727831,5224 (> 0).$$

Так как $\frac{\partial x_1^*}{\partial p} > 0$, то при росте цены продукции спрос на 1-й фактор производства возрастает, т. е. этот ресурс (фактор) является ценным.

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial p} = \frac{1,356106 \cdot \frac{20}{3} \cdot p^{\frac{20}{3}-1}}{q_1^{\frac{11}{3}} \cdot q_2^3} = \frac{27,12212 \cdot 99^{\frac{17}{3}}}{3 \cdot 11^{\frac{11}{3}} \cdot 8^3} = 545873,495 \quad (> 0).$$

Так как $\frac{\partial x_2^*}{\partial p} > 0$, то при росте цен на продукцию спрос на 2-й фактор производства возрастает, т. е. этот ресурс (фактор) является ценным.

$$\frac{\partial y^*}{\partial p} = \frac{4,520354 \cdot \frac{17}{3} \cdot p^{\frac{17}{3}-1}}{q_1^{\frac{11}{3}} \cdot q_2^2} = \frac{76,84602 \cdot 99^{\frac{14}{3}}}{3 \cdot 11^{\frac{11}{3}} \cdot 8^2} = 124981,1554 \quad (> 0).$$

При росте цены продукции объем ее выпуска увеличивается.

Реакция производителя при изменении цен на факторы производства.

$$\frac{\partial y^*}{\partial q_1} = 4,520354 \cdot P^{\frac{17}{3}} \cdot (-\frac{11}{3}) \cdot q_1^{-\frac{11}{3}-1} \cdot q_2^{-2} =$$

$$= -\frac{4,520354 \cdot 11 \cdot 99^{\frac{17}{3}}}{3 \cdot 11^{\frac{14}{3}} \cdot 8^2} = -727831,4346 \quad (<0);$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial q_2} = 4,520354 \cdot P^{\frac{17}{3}} \cdot (-2) \cdot q_1^{-\frac{11}{3}} \cdot q_2^{-2-1} =$$

$$= -\frac{4,520354 \cdot 2 \cdot 99^{\frac{17}{3}}}{11^{\frac{11}{3}} \cdot 8^3} = -545873,576 \quad (<0).$$

При увеличении цен на факторы производства выпуск продукции уменьшается.

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial q_1} = 2,486195 \cdot \left(-\frac{14}{3}\right) \cdot q_1^{-\frac{14}{3}-1} \cdot q_2^{-2} \cdot P^{\frac{20}{3}} =$$

$$= 2,486195 \cdot \left(-\frac{14}{3}\right) \cdot 11^{-\frac{17}{3}} \cdot 8^{-2} \cdot 99^{\frac{20}{3}} = -4585338,591 \ (<0);$$

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial q_2} = 1,356106 \cdot P^{\frac{20}{3}} \cdot q_1^{-\frac{11}{3}} \cdot (-3) \cdot q_2^{-4} =$$

$$= \frac{1,356106 \cdot 99^{\frac{20}{3}} \cdot (-3)}{11^{\frac{11}{3}} \cdot 8^4} = -3039833,028 \quad (<0).$$

Т. е. с ростом цен на факторы производства спрос на каждый из них падает.

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial q_2} = 2,486195 \cdot P^{\frac{20}{3}} \cdot q_1^{-\frac{14}{3}} \cdot (-2) \cdot q_2^{-3} = \frac{2,486195 \cdot (-2) \cdot 99^{\frac{20}{3}}}{11^{\frac{14}{3}} \cdot 8^3} =$$

$$= -2702074,527 \ (<0);$$

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial q_1} = 1,356106 \cdot P^{\frac{20}{3}} \cdot \left(-\frac{11}{3}\right) \cdot q_1^{-\frac{11}{3}-1} \cdot q_2^{-3} =$$

$$= 1,356106 \cdot 99^{\frac{20}{3}} \cdot \left(-\frac{11}{3}\right) \cdot 11^{-\frac{14}{3}} \cdot 8^{-3} = -2702073,802 \quad (<0).$$

Значит, 1-й и 2-й факторы производства взаимодополняемы (так как с ростом цены на 2-й фактор производства спрос на 1-й фактор производства уменьшается и наоборот).

Определим коэффициенты эластичности по ценам на продукцию и на ресурсы.

Для функции спроса на первый фактор производства:

$$E_1^p = \frac{\partial x_1^*}{\partial p} : \frac{x_1^*}{p} = \frac{\partial x_1^*}{\partial p} \cdot \frac{p}{x_1^*} = 727831{,}5224 \cdot \frac{99}{10808298{,}11} = 6{,}66666667.$$

При увеличении цены продукции на 1 % спрос на первый фактор производства возрастает на 6,666667 %.

$$E_1^{q_1} = \frac{\partial x_1^*}{\partial q_1} : \frac{x_1^*}{q_1} = \frac{\partial x_1^*}{\partial q_1} \cdot \frac{q_1}{x_1^*} = -4585338{,}591 \cdot \frac{11}{10808298{,}11} = -4{,}666666667.$$

При увеличении цены первого фактора производства на 1 % спрос на него уменьшается на 4,666667 %.

$$E_1^{q_2} = \frac{\partial x_1^*}{\partial q_2} : \frac{x_1^*}{q_2} = \frac{\partial x_1^*}{\partial q_2} \cdot \frac{q_2}{x_1^*} = -2702074{,}527 \cdot \frac{8}{10808298{,}11} = -2.$$

При увеличении цены второго фактора производства на 1 % спрос на первый фактор производства падает на 2 %.

Проверим основное свойство коэффициентов эластичности функции спроса на первый фактор производства. Эта функция однородная нулевой степени. Поэтому сумма всех ее коэффициентов эластичности равна нулю. Действительно,

$$E_1^p + E_1^{q_1} + E_1^{q_2} = 6{,}666667 - 4{,}666667 - 2 = 0.$$

Для функции спроса на второй фактор производства:

$$E_2^p = \frac{\partial x_2^*}{\partial p} : \frac{x_2^*}{p} = \frac{\partial x_2^*}{\partial P} \cdot \frac{p}{x_2^*} = 545873{,}495 \cdot \frac{99}{8106221{,}407} = 6{,}666666667.$$

При увеличении цены продукции на 1 % спрос на второй фактор производства возрастает на 6,666667 %.

$$E_2^{q_1} = \frac{\partial x_2^*}{\partial q_1} : \frac{x_2^*}{q_1} = \frac{\partial x_2^*}{\partial q_1} \cdot \frac{q_1}{x_2^*} = -2702073{,}802 \cdot \frac{11}{8106221{,}407} = -3{,}666666667.$$

При увеличении цены первого фактора производства на 1 % спрос на второй фактор производства уменьшается на 3,666667 %.

$$E_2^{q_2} = \frac{\partial x_2^*}{\partial q_2} : \frac{x_2^*}{q_2} = \frac{\partial x_2^*}{\partial q_2} \cdot \frac{q_2}{x_2^*} = -3039833{,}028 \cdot \frac{8}{8106221{,}407} = -3.$$

При увеличении цены второго фактора производства на 1 % спрос на него уменьшается на 3 %.

Проверим основное свойство коэффициентов эластичности функции спроса на второй фактор производства.

$$E_2^p + E_2^{q_1} + E_2^{q_2} = 6{,}666667 - 3{,}666667 - 3 = 0.$$

Для функции предложения продукции:

При увеличении цены продукции на 1 % спрос на нее возрастает на 5,666667 %.

$$E_y^{q_1} = \frac{\partial y^*}{\partial q_1} : \frac{y^*}{q_1} = \frac{\partial y^*}{\partial q_1} \cdot \frac{q_1}{y^*} = -727831{,}4346 \cdot \frac{11}{2183494{,}304} = -3{,}666666667.$$

При увеличении цены первого фактора производства на 1 % спрос на продукцию уменьшается на 3,666667 %.

$$E_y^{q_2} = \frac{\partial y^*}{\partial q_2} : \frac{y^*}{q_2} = \frac{\partial y^*}{\partial q_2} \cdot \frac{q_2}{y^*} = -545873{,}576 \cdot \frac{8}{2183494{,}304} = -2.$$

При увеличении цены второго фактора производства на 1 % спрос на продукцию уменьшается на 2 %.

Проверим основное свойство коэффициентов эластичности функции предложения продукции.

$$E_y^p + E_y^{q_1} + E_y^{q_2} = 5{,}666667 - 3{,}666667 - 2 = 0.$$

2.3. Лабораторная работа № 4

Задание 4

В задаче с исходными данными требуется:

1. Сформировать свой вариант исходных данных по данным таблицы 4.1, используя формулы:

$y = y' + 0{,}1N$; $x_1 = x_1' + 0{,}1N$; $x_2 = x_2' + 0{,}1N$ (где N – номер варианта).

2. Построить производственную функцию – эконометрическую модель, уравнение множественной регрессии $y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$ – зависимости объема выпускаемой продукции y от затрат объемов ресурсов 1-го и 2-го видов x_1 и x_2, используя ПО Excel, надстройки **Анализ данных**, инструменты **Корреляция** и **Регрессия**.

3. Найти вид уравнения в логарифмической и естественной форме, дать интерпретацию параметров уравнения.

4. Вычислить коэффициенты парной корреляции, индексы множественной корреляции и детерминации.

5. Оценить модель с помощью критерия Фишера; найти среднюю ошибку аппроксимации; везде приводить экономическую интерпретацию результатов, записать смысловой ответ.

Таблица 4.1

№	y'	x_1'	x_2'
1	18,31	31,80	48,45
2	18,81	33,75	50,10
3	19,35	35,70	51,90

№	y'	x_1'	x_2'
4	20,41	41,25	54,34
5	21,11	43,20	57,90
6	20,20	39,45	54,95
7	20,53	44,55	53,70
8	21,45	46,35	59,17
9	21,75	45,60	61,20
10	20,48	45,30	57,96
11	20,74	47,33	58,12
12	21,41	44,51	59,54
13	22,30	49,81	60,25
14	22,54	50,62	61,41
15	23,00	52,44	63,51
16	23,30	56,85	62,13
17	23,48	57,12	64,12
18	22,57	56,51	64,54
19	23,02	60,12	65,16
20	24,01	60,15	66,22

Образец выполнения задания 4

По данным, приведенным в таблице, построить производственную функцию типа Кобба – Дугласа $y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$.

Требуется найти:

1. Вид уравнения в логарифмической и естественной форме, дать интерпретацию параметров уравнения регрессии, считая, что y – объем выпускаемой продукции, а x_1 и x_2 затраты ресурсов 1-го и 2-го видов.

2. Коэффициенты парной корреляции.

3. Индексы множественной корреляции и детерминации.

4. Оценить модель с помощью критерия Фишера. Найти среднюю ошибку аппроксимации.

5. Дать экономическую интерпретацию уравнения.

Таблица 4.2

№	y	x_1	x_2
1	75,3	27,81	43,3
2	78,3	29,61	44,3
3	81,3	33,4	45,3
4	84,3	35,45	47,3
5	88,3	32,45	44,3

6	92,3	36,45	48,3
7	96,5	37,45	49,3
8	97,8	40,45	47,3
9	100,2	39,5	49,7
10	103,3	40,2	50,2

Решение

1. Построим модель типа Кобба – Дугласа: $y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$.

Логарифмируем эту функцию, получим линейное уравнение в логарифмической форме:

$$\ln y = \ln A + \alpha \cdot \ln x_1 + \beta \cdot \ln x_2.$$

Обозначим:

$$Y = \ln y,\ X_1 = \ln x_1,\ X_2 = \ln x_2,\ b = \ln A,\ a_1 = \alpha,\ a_2 = \beta,\ A = e^b.$$

Получим следующее линейное уравнение:

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + b.$$

Параметры уравнения найдем аналогично описанному в п. 6.1, решая методом Крамера систему нормальных уравнений.

$$\begin{cases} a_1 \sum X_{i1}^2 + a_2 \sum X_{i1} X_{i2} + b \sum X_{i1} = \sum Y_i X_{i1}, \\ a_1 \sum X_{i1} X_{i2} + a_2 \sum X_{i2}^2 + b \sum X_{i2} = \sum Y_i X_{i2}, \\ a_1 \sum X_{i1} + a_2 \sum X_{i2} + bn = \sum Y_i. \end{cases}$$

Необходимые расчеты проводим с помощью ПО Excel (табл. 4.3).

Таблица 4.3

№	x_1	x_2	y	$X_1 = \ln x_1$	$X_2 = \ln x_2$	$Y = \ln y$	X_1^2	X_2^2
1	27,81	43,3	75,3	3,3253957	3,7681526	4,3214801	11,058256	14,198974
2	29,61	44,3	78,3	3,3881121	3,7909847	4,3605476	11,479304	14,371565
3	33,4	45,3	81,3	3,5085559	3,813307	4,398146	12,309965	14,541311
4	35,45	47,3	84,3	3,5681233	3,8565103	4,4343819	12,731504	14,872672
5	32,45	44,3	88,3	3,4797004	3,7909847	4,4807401	12,108315	14,371565
6	36,45	48,3	92,3	3,5959415	3,8774316	4,5250441	12,930795	15,034476
7	37,45	49,3	96,5	3,6230067	3,8979241	4,569543	13,126178	15,193812
8	40,45	47,3	97,8	3,7000666	3,8565103	4,5829246	13,690493	14,872672
9	39,5	49,7	100,2	3,6763007	3,9060049	4,6071682	13,515187	15,256875
10	40,2	50,2	103,3	3,693867	3,916015	4,6376374	13,644653	15,335174
сумма	352,77	469,3	**897,6**	**35,55907**	**38,473825**	**44,917613**	**126,59465**	**148,04909**
среднее	35,277	46,93	**89,76**	**3,555907**	**3,8473825**	**4,4917613**	**12,659465**	**14,804909**

Продолжение таблицы 4.3

$X_1 * X_2$	$Y * X_1$	$Y * X_2$	$y_р$	$Y_р$	$(x_1 - x_{1ср})$ ^2	$(x_2 - x_{2ср})$ ^2	$(y - y_{ср})$ ^2
12,530598	14,370631	16,283997	74,511662	4,31095566	55,756089	13,1769	209,0916
12,844281	14,774024	16,530769	78,311024	4,36068838	32,114889	6,9169	131,3316
13,379201	15,431141	16,771481	85,377755	4,44708559	3,523129	2,6569	71,5716

X_1*X_2	$Y*X_1$	$Y*X_2$	y_p	Y_p	$(x_1-x_{1ср})$ ^2	$(x_2-x_{2ср})$ ^2	$(y-y_{ср})$ ^2
13,760504	15,822421	17,101239	90,326401	4,50342979	0,029929	0,1369	29,8116
13,191491	15,591633	16,986417	83,029952	4,41920141	7,991929	6,9169	2,1316
13,943017	16,271794	17,545549	92,76396	4,53005821	1,375929	1,8769	6,4516
14,122205	16,555485	17,811732	95,204203	4,55602409	4,721929	5,6169	45,4276
14,269345	16,957126	17,674096	98,270559	4,58772448	26,759929	0,1369	64,6416
14,359649	16,937336	17,995622	98,839045	4,59349272	17,833729	7,6729	108,9936
14,465239	17,130816	18,161058	100,37897	4,6089527	24,235929	10,6929	183,3316
136,86553	**159,84241**	**172,86196**	**897,01353**	**44,917613**	**174,34341**	**55,801**	**852,784**
13,686553	**15,984241**	**17,286196**	**89,701353**	**4,4917613**	**17,434341**	**5,5801**	**85,2784**
					var (x_1)	var (x_2)	var (y)

$$a_1 = \frac{D_1}{D}; \quad a_2 = \frac{D_2}{D}; \quad b = \frac{D_3}{D},$$

где $$D = \begin{vmatrix} \sum X_{1i}^2 & \sum X_{2i}X_{1i} & \sum X_{1i} \\ \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 126,594649 & 136,86553 & 35,559069 \\ 136,86553 & 148,049094 & 38,4738252 \\ 35,559069 & 38,4738252 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 0,0067632 \approx 0,0068;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{2i}X_{1i} & \sum X_{1i} \\ \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i} \\ \sum Y_i & \sum X_{2i} & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 159,842407 & 136,86553 & 35,559069 \\ 172,861959 & 148,049094 & 38,4738252 \\ 44,917613 & 38,4738252 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 0,0043208 \approx 0,0043;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i} \\ \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum Y_i & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 126,594649 & 159,842407 & 35,559069 \\ 136,86553 & 172,861959 & 38,4738252 \\ 35,559069 & 44,917613 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 0,002863 \approx 0,0029;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \sum X_{1i}^2 & \sum X_{2i}X_{1i} & \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}YY_i \\ \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & \sum Y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 126,594649 & 136,86553 & 159,842407 \\ 136,86553 & 148,049094 & 172,861959 \\ 35,559069 & 38,4738252 & 44,917613 \end{vmatrix} =$$

$$= 0,0039995 \approx 0,0040.$$

$$a_1 = \frac{0,0043208}{0,0067632} = 0,6388701 \approx 0,639;$$

$$a_2 = \frac{0,002863}{0,0067632} = 0,4233106 \approx 0,423;$$

$$b = \frac{0,0039995}{0,0067632} = 0,5913607 \approx 0,591.$$

Получаем линейное уравнение:

$$Y = 0,639\ X_1 + 0,423\ X_2 + 0,591.$$

Найдем A:

$$A = e^{0,5913607} = 1,8064447 \approx 1,806.$$

Уравнение в истинной форме имеет вид:

$$y_p = 1,806 \cdot x_1^{0,639} \cdot x_2^{0,423}.$$

Если y – объем выпускаемой продукции, x_1 – затраты ресурсов 1-го вида, а x_2 – затраты ресурсов 2-го вида: α = 0,639, значит с увеличением затрат ресурсов 1-го вида на 1 % выпуск продукции увеличивается на 0,639 %; β = 0,423, значит с увеличением затрат ресурсов 2-го вида на 1% выпуск продукции увеличивается на 0,423 %.

2. Построим матрицу парных коэффициентов корреляции:

	y	x_1	x_2
y	1	r_{yx_1}	r_{yx_2}
x_1	r_{yx_1}	1	$r_{x_1x_2}$
x_2	r_{yx_2}	$r_{x_1x_2}$	1

Коэффициенты: r_{yx_1}, r_{yx_2}, $r_{x_1x_2}$, найдем по формулам:

$$r_{yx_1} = \frac{Cov(y;x_1)}{\sqrt{Var(y)\cdot Var(x_1)}} = \frac{36,19408}{\sqrt{85,2784\cdot 17,43434}} = 0,938675 \approx 0,939.$$

$$r_{yx_2} = \frac{Cov(y;x_2)}{\sqrt{Var(y)\cdot Var(x_2)}} = \frac{19,3862}{\sqrt{85,2784\cdot 5,5801}} = 0,888694 \approx 0,889.$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{Cov(x_1;x_2)}{\sqrt{Var(x_1)\cdot Var(x_2)}} = \frac{8,90349}{\sqrt{17,434341\cdot 5,5801}} = 0,9026856 \approx 0,903.$$

Продолжение таблицы.4.3

x_1-x_{1cp}	x_2-x_{2cp}	$y-y_{cp}$	$(x_1-x_{1cp})(y-y_{cp})$	$(x_2-x_{2cp})(y-y_{cp})$	$(x_1-x_{1cp})(x_2-x_{2cp})$	$y-y_p$	$(y-y_p)$^2	$\lvert y-y_p/y\rvert$
-7,467	-3,63	-14,46	107,97282	52,4898	27,10521	0,788338	0,621476	0,010469
-5,667	-2,63	-11,46	64,94382	30,1398	14,90421	-0,01102	0,000122	0,000141
-1,877	-1,63	-8,46	15,87942	13,7898	3,05951	-4,07776	16,62809	0,050157
0,173	0,37	-5,46	-0,94458	-2,0202	0,06401	-6,0264	36,31751	0,071488
-2,827	-2,63	-1,46	4,12742	3,8398	7,43501	5,270048	27,77341	0,059683
1,173	1,37	2,54	2,97942	3,4798	1,60701	-0,46396	0,215259	0,005027
2,173	2,37	6,74	14,64602	15,9738	5,15001	1,295797	1,67909	0,013428
5,173	0,37	8,04	41,59092	2,9748	1,91401	-0,47056	0,221426	0,004811
4,223	2,77	10,44	44,08812	28,9188	11,69771	1,360955	1,852199	0,013582

x_1-x_{1cp}	x_2-x_{2cp}	y-y_{cp}	$(x_1$-$x_{1\,cp})(y$-$y_{cp})$	$(x_2$-$x_{2\,cp})(y$-$y_{cp})$	$(x_1$-$x_{1\,cp})(x_2$-$x_{2\,cp})$	y-y_p	$(y$-$y_p)$^2	$\lvert y$-$y_p/y\rvert$
4,923	3,27	13,54	66,65742	44,2758	16,09821	2,921033	8,532432	0,028277
0	**0**	**0**	**361,9408**	**193,862**	**89,0349**	**0,586471**	**93,84101**	**0,257064**
			36,19408	**19,3862**	**8,90349**	**0,058647**	**9,384101**	**0,025706**
			Cov(y, x_1)	*Cov(y, x_2)*	*Cov(x_1, x_2)*			

Факторы y и x_1, y и x_2, x_1 и x_2 – коллинеарны, так как соответствующие парные коэффициенты линейной корреляции больше 0,75, связь между переменными прямая и тесная.

Матрица парных коэффициентов корреляции имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}939 & 0{,}889 \\ 0{,}939 & 1 & 0{,}903 \\ 0{,}889 & 0{,}903 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Рассчитаем индексы множественной корреляции и детерминации:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\sum\left(y_i - y_{ip}\right)^2}{\sum\left(y_i - \overline{y}\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{93{,}84101}{852{,}784}} = 0{,}9433765 \approx 0{,}943;$$

$$R^2_{yx_1x_2} = (R_{yx_1x_2})^2 = 0{,}8899592 \approx 0{,}890.$$

Оба индекса близки к единице, что говорит о достаточно тесной связи между выпуском продукции (y) и затратами ресурсов 1-го и 2-го видов (x_1 и x_2). Значение коэффициента детерминации $R^2_{yx_1x_2} \approx 0{,}890$, 89 % вариации переменной y объясняется уравнением регрессии.

4. Оценим статистическую значимость уравнения с помощью критерия Фишера и найдем среднюю ошибку аппроксимации.

Фактическое значение F-критерия Фишера:

$$F_{\text{факт}} = \frac{R^2_{yx_1x_2}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n - m - 1}{m} \approx 28{,}31; \quad F_{\text{табл}} = 4{,}74.$$

Вывод: $F_{\text{факт}} \approx 28{,}31 > 4{,}74 = F_{\text{табл}}$, гипотеза H_0 о статистической незначимости уравнения регрессии в целом и показателя тесноты связи коэффициента корреляции отвергается. Уравнение регрессии в целом статистически значимо, связь между факторами сформировалась неслучайно.

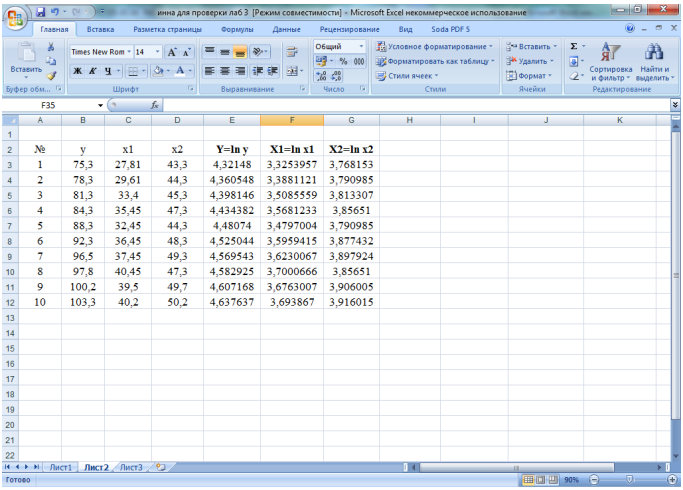
$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y_i - y_p}{y_i}\right| \cdot 100\,\% = 2{,}5706359\,\% \approx 2{,}6\,\% \; -$$

– точность модели удовлетворительная.

Для нахождения параметров уравнения $y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$ и оценки качества построенной модели с помощью ПО Excel с использованием над-

стройки **Анализ данных** и инструментов **Корреляция** и **Регрессия** выполним следующие шаги.

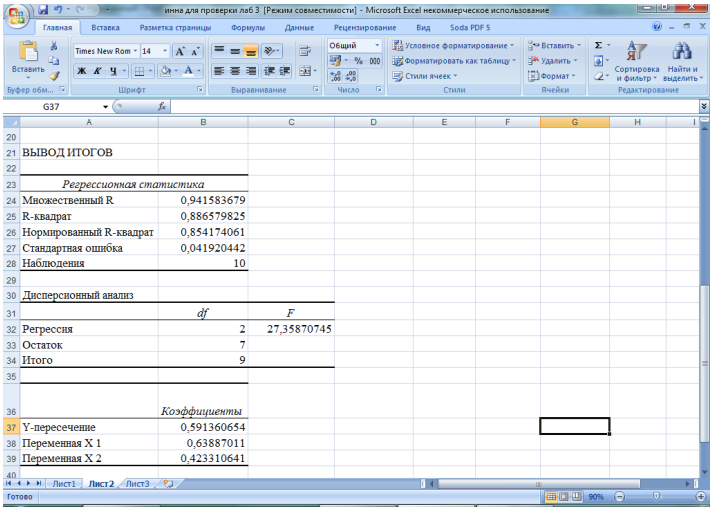
1) Вводим исходные данные или открываем существующий файл с этими данными (рис. 4.1).



№	y	x1	x2	Y=ln y	X1=ln x1	X2=ln x2
1	75,3	27,81	43,3	4,32148	3,3253957	3,768153
2	78,3	29,61	44,3	4,360548	3,3881121	3,790985
3	81,3	33,4	45,3	4,398146	3,5085559	3,813307
4	84,3	35,45	47,3	4,434382	3,5681233	3,85651
5	88,3	32,45	44,3	4,48074	3,4797004	3,790985
6	92,3	36,45	48,3	4,525044	3,5959415	3,877432
7	96,5	37,45	49,3	4,569543	3,6230067	3,897924
8	97,8	40,45	47,3	4,582925	3,7000666	3,85651
9	100,2	39,5	49,7	4,607168	3,6763007	3,906005
10	103,3	40,2	50,2	4,637637	3,693867	3,916015

Рис. 4.1. Окно ввода данных

2) Выполняем все процедуры, описанные при нахождении параметров линейной модели и получаем следующую таблицу расчетов (рис. 4.2).



ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,941583679
R-квадрат	0,886579825
Нормированный R-квадрат	0,854174061
Стандартная ошибка	0,041920442
Наблюдения	10

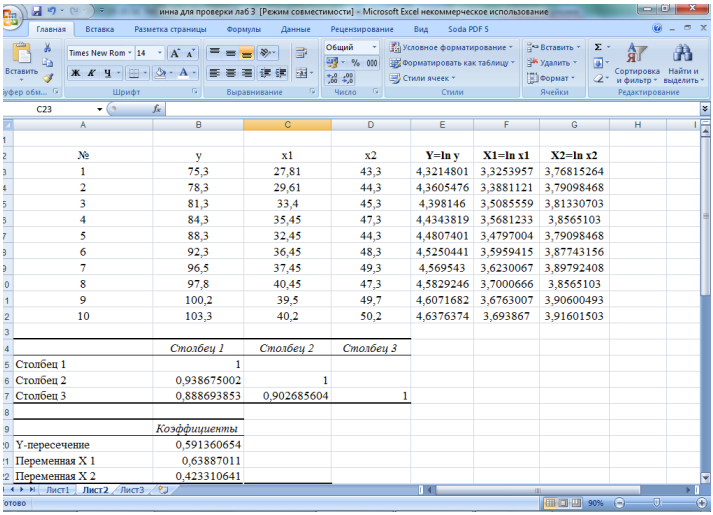
Дисперсионный анализ

	df	*F*
Регрессия	2	27,35870745
Остаток	7	
Итого	9	

	Коэффициенты
Y-пересечение	0,591360654
Переменная X 1	0,63887011
Переменная X 2	0,423310641

Рис. 4.2. Окно анализа данных – **Регрессия**

3) Полученные результаты с учетом корректировки приводим в табл. (рис. 4.3)



№	y	x1	x2	Y=ln y	X1=ln x1	X2=ln x2
1	75,3	27,81	43,3	4,3214801	3,3253957	3,76815264
2	78,3	29,61	44,3	4,3605476	3,3881121	3,79098468
3	81,3	33,4	45,3	4,398146	3,5085559	3,81330703
4	84,3	35,45	47,3	4,4343819	3,5681233	3,8565103
5	88,3	32,45	44,3	4,4807401	3,4797004	3,79098468
6	92,3	36,45	48,3	4,5250441	3,5959415	3,87743156
7	96,5	37,45	49,3	4,569543	3,6230067	3,89792408
8	97,8	40,45	47,3	4,5829246	3,7000666	3,8565103
9	100,2	39,5	49,7	4,6071682	3,6763007	3,90600493
10	103,3	40,2	50,2	4,6376374	3,693867	3,91601503

	Столбец 1	*Столбец 2*	*Столбец 3*
Столбец 1	1		
Столбец 2	0,938675002	1	
Столбец 3	0,888693853	0,902685604	1

	Коэффициенты
Y-пересечение	0,591360654
Переменная X 1	0,63887011
Переменная X 2	0,423310641

Рис. 4.3. Окно анализа данных – **Регрессия**

Результаты вычислений параметров уравнений регрессии b, a_1, a_2 и корреляционной матрицы полностью совпадают с результатами, приведенными в п. 1.1. Построение модели в истиной форме и ее оценка проведены в п. 1.1.

Ответ. По данным табл. 4.1. получено уравнение

$$y_p = 1{,}806 \cdot x_1^{0{,}639} \cdot x_2^{0{,}423}.$$

Оба индекса корреляции и детерминации больше 0,75, что говорит о достаточно тесной связи между объемом выпускаемой продукции (y) и затратами ресурсов 1-го (x_1) и 2-го (x_2) видов. Значение коэффициента детерминации $R^2_{yx_1x_2} \approx 0{,}89$, т. е. 89 % вариации объема выпускаемой продукции (y) объясняется уравнением регрессии. Уравнение статистически значимо и надежно.

Средняя ошибка аппроксимации, среднее отклонение расчетных значений от фактических: $\overline{A} \approx 2{,}6$ % – точность модели удовлетворительная.

3. МЕЖОТРАСЛЕВОЙ БАЛАНС

3.1. Краткие теоретические сведения и методические указания к выполнению лабораторной работы № 5

Межотраслевым потоком называется количество продукции i-ой отрасли, направляемое для использования в j-ю отрасль. Межотраслевые потоки обозначаются x_{ij} и образуют квадратную матрицу $|x_{ij}|$ размерности $n \cdot n$. Элементы, стоящие на главной диагонали, x_{ij}, называются внутриотраслевым потреблением.

С другой стороны, эти же числа, x_{ij}, показывают, сколько продукции i-ой отрасли использовала j-ая отрасль. В этом случае они представляют собой отдельные статьи материальных затрат j-ой отрасли.

Промежуточной продукцией отрасли называется продукция, направляемая для потребления в отрасли материального производства.

Используя вышеприведенные обозначения, ее можно представить в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}.$$

Конечной продукцией отрасли называется продукция, выходящая из сферы материального производства и направляемая на конечное потребление – личное и общественное, накопление, возмещение выбытия и износа основных производственных фондов, экспорт и т. п. Она обозначается y_i.

Валовой продукцией отрасли называется сумма промежуточной и конечной продукции отрасли за год. Валовая продукция обычно выражается в стоимостной форме. Обозначается она X_i или X_j, в зависимости от того, в какой роли выступает отрасль – производителя или потребителя.

Из определения следует *первое балансовое соотношение*:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i = X_i, \qquad (i = \overline{1-n}).$$

Материальными затратами отрасли называется сумма стоимостей, израсходованных в данной отрасли продуктов остальных отраслей.

Используя введенные обозначения, их можно представить в виде: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$.

Чистой продукцией отрасли (z_j) называется сумма оплаты труда (v_j) и чистого дохода (m_j) отрасли: $z_j = v_j + m_j$.

Исходя из стоимости чистого дохода, можно записать:

$$m_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} - v_j, \qquad (j = \overline{1-n}),$$

т. е. чистый доход получается вычитанием из валовой продукции материальных затрат и затрат на оплату труда. Отсюда следует *второе балансовое соотношение*:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + v_j + m_j, \quad (j = \overline{1-n}),$$

или

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j, \quad j = \overline{1-n}).$$

Прямые затраты живого труда на единицу j-го вида продукта составят:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Коэффициенты t_j называются коэффициентами прямых затрат труда или коэффициентами прямой трудоемкости.

Полные затраты труда определим как сумму прямых затрат живого труда и затрат овеществленного труда, перенесенных на продукт через израсходованные средства производства.

Полные трудовые затраты равны:

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i + t_j, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Полная трудоемкость (т. е. коэффициенты T_j) показывает, во что в среднем обходится обществу производство той или иной продукции.

На основе коэффициентов трудоемкости при разработке плановых межотраслевых балансов обеспечиваются планируемые объемы производства с трудовыми ресурсами общества. При плановых уровнях производства x_j и коэффициентах прямой трудоемкости t_j общая потребность в затратах труда составляет:

$$L = \sum t_j x_j + L_{\text{доп}},$$

где $L_{\text{доп}}$ – дополнительные затраты труда в материальном производстве (не пропорциональные объему продукции), а также трудовые затраты в непроизводственной сфере.

Коэффициенты прямых затрат труда t_{kj} определяются по формуле

$$(t_{kj})_{m \times n} = \frac{L_{kj}}{x_j}, \qquad k = \overline{1,m}; \qquad j = \overline{1,n}.$$

Полные трудовые затраты T_{kj}, труды k-ой группы на единицу j-го продукта равны:

$$T_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_{ki} + t_{kj}, \quad j = \overline{1,n}, \qquad k = \overline{1,m}.$$

Если известна матрица полных материальных затрат b_{ij}, то показатели полных материальных затрат:

$$T_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} T_{ki}, \quad j = \overline{1,n}, \qquad k = \overline{1,m}.$$

Коэффициенты T_{ij} позволяют определить потребность нормального хозяйства в трудовых ресурсах той или иной группы.

Коэффициенты прямой фондоемкости продукции j-ой отрасли равны:

$$f_j = \frac{\Phi_j}{x_j}.$$

Этот коэффициент показывает величину производственных фондов, непосредственно занятых в производстве в данной отрасли на единицу годовой продукции.

F_j – величина полных затрат фондов для выпуска 1 единицы конечной продукции j-ой отрасли. Для каждого j-го значения выполняется равенство:

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_i + f_j, \; j = \overline{1,n}.$$

Коэффициенты полной фондоемкости для всех отраслей можно выразить при помощи коэффициентов полных материальных затрат b_{ij}:

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_i, \; j = \overline{1,n}.$$

Значения Φ_{ij} – отражают объем фондов k-ой группы, занятых в j-ой отрасли. Коэффициенты прямой фондоемкости образуют матрицу с элементами:

$$(f_{kj})_{m \times n} = \frac{\Phi_{kj}}{x_j}, \qquad k = \overline{1,m}; \qquad j = \overline{1,n}.$$

Коэффициенты фондоемкости позволяют увязать планируемый выпуск продукции с производственными мощностями. Потребность Φ_k в фондах k-ой группы на весь плановый объем производства составляет:

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^{n} f_{kj} x_j, \quad k = \overline{1,m}.$$

Величина Φ_k сравнивается с реально возможным среднегодовым наличием фондов в плановом периоде.

3.2. Лабораторная работа № 5

Задание 5

На основе отчетного межотраслевого баланса народного хозяйства (табл. 5.1) найти:

1. Отчетные коэффициенты прямых и полных материальных затрат, дать их экономическую характеристику.

2. Плановые объемы валовой продукции.

3. Плановые объемы межотраслевых потоков и чистую продукцию отраслей.

4. Коэффициенты прямой и полной трудоемкости.

5. Коэффициенты прямой и полной фондоемкости.

6. Затраты труда и фондов на плановый период.

7. Построить схему МОБ на плановый период.

На плановый период коэффициенты прямых материальных затрат не меняются.

Таблица 5.1

Потребляющие отрасли / ***Производящие отрасли***	***Промышленность***	***Строительство***	***Сельское хозяйство***	***Конечная продукция***	***Валовая продукция***	***Плановые объемы конеч. прод.***
Промышленность	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	X_1	$y_{1пл.}$
Строительство	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	X_2	$y_{2пл.}$
Сельское хозяйство	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	X_3	$y_{3пл.}$
Затраты труда	L_1	L_2	L_3			
Стоимость производственных фондов	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$			
Валовая продукция	X_1	X_2	X_3			

№	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_1	y_2	y_3	X_1	X_2	X_3	$y_{1пл}$	$y_{2пл}$	$y_{3пл}$
В.1	11	32	19	25	12	19	13	24	11	141	110	135	200	150	180	135	110	120
В.2	12	34	54	29	14	47	42	39	14	123	78	132	223	168	227	150	110	135
В.3	14	54	73	39	15	77	32	33	16	121	138	125	262	269	206	200	210	150
В.4	10	20	18	15	5	20	20	20	8	152	110	132	200	150	180	20	50	80
В.5	19	39	45	27	16	34	28	35	17	93	87	82	196	164	162	100	150	175
В.6	23	49	54	69	24	77	42	36	22	103	98	132	229	268	232	150	200	200
В.7	17	38	34	29	12	49	47	34	19	133	158	142	222	248	242	200	300	150
В.8	7	18	24	21	9	19	27	24	11	83	58	62	132	107	124	160	120	130
В.9	13	39	44	22	12	45	49	33	11	123	138	122	219	217	215	120	180	110
В.10	21	68	74	49	22	77	34	43	19	183	128	142	346	276	238	290	310	175
В.11	14	28	34	25	10	39	27	44	9	87	58	42	163	132	122	125	130	115
В.12	10	30	18	20	10	9	15	25	10	142	111	130	200	150	180	135	110	125
В.13	20	25	18	10	15	15	15	20	10	137	110	135	200	150	180	120	200	150
В.14	10	20	26	20	15	5	15	10	18	144	110	137	200	150	180	150	200	200
В.15	12	16	4	8	32	10	4	5	6	18	90	15	50	140	30	20	120	45
В.16	15	20	6	10	5	4	3	5	15	80	131	200	121	150	223	130	140	180
В.17	5	20	5	10	5	4	6	15	5	70	106	224	100	125	250	80	150	180
В.18	5	4	5	3	2	1	1	3	2	111	115	114	125	121	120	75	90	60
В.19	30	10	14	10	18	12	25	10	13	146	110	132	200	150	180	180	170	150
В.20	10	12	5	7	5	8	4	2	10	10	10	24	37	30	40	40	36	20

№	L_1	L_2	L_3	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$
В.1	150	180	140	200	225	180
В.2	150	140	60	210	215	170
В.3	60	140	80	200	175	150
В.4	120	130	150	180	160	150
В.5	140	150	100	200	210	190
В.6	170	120	110	210	200	180
В.7	100	60	80	175	120	140

№	L_1	L_2	L_3	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$
В.8	120	65	90	150	140	120
В.9	140	80	70	200	100	90
В.10	130	140	180	200	150	110
В.11	50	60	70	80	90	100
В.12	77	72	65	100	105	95
В.13	150	180	100	155	145	205
В.14	120	110	110	190	180	150
В.15	85	70	70	110	105	95
В.16	140	120	100	200	215	190
В.17	200	170	150	180	135	145
В.18	70	60	100	150	140	200
В.19	130	140	110	180	200	150
В.20	190	180	170	185	155	115

Образец выполнения задания 5

На основе отчетного межотраслевого баланса народного хозяйства (табл. 5.2) рассчитать:

1. Коэффициенты прямых и полных материальных затрат, дать их экономическую характеристику.

2. Коэффициенты прямой и полной фондоемкости производства продукции.

3. Коэффициенты прямой и полной трудоемкости продукции.

4. Плановые объемы валовой продукции.

5. Плановые объемы чистой продукции.

6. Необходимое количество труда и производственных фондов для выполнения плана.

7. Построить схему МОБ на плановый период.

Предполагается, что на плановый период коэффициенты прямых материальных затрат, коэффициенты прямой трудоемкости и фондоемкости совпадают с соответствующими показателями отчетного периода.

Таблица 5.2

Производящая отрасль	***Потребляющая отрасль***			***Конечная продукция***	***Валовая продукция***	***Плановые значения конечной продукции***
	Промышленность	***Сельское хозяйство***	***Строительство***			
Промышленность	$x_{11} = 20$	$x_{12} = 10$	$x_{13} = 10$	$Y_1 = 160$	$X_1 = 200$	$Y_1^{пл} = 100$
Сельское хозяйство	$x_{21} = 30$	$x_{22} = 15$	$x_{23} = 0$	$Y_2 = 135$	$X_2 = 180$	$Y_2^{пл} = 100$
Строительство	$x_{31} = 20$	$x_{32} = 0$	$x_{33} = 15$	$Y_3 = 85$	$X_3 = 120$	$Y_3^{пл} = 50$
Стоимость основных производственных фондов	$Ф_1 = 150$	$Ф_2 = 140$	$Ф_3 = 120$	—	—	—
Затраты труда	$L_1 = 120$	$L_2 = 65$	$L_3 = 90$	—	—	—
Валовая продукция	$X_1 = 200$	$X_2 = 180$	$X_3 = 120$	—	—	—

Решение

1. Найдем коэффициенты прямых материальных затрат: $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j}$ $(i,\ j = \overline{1,3})$

$a_{11} = \dfrac{x_{11}}{X_1} = \dfrac{20}{200} = 0{,}1;$ $\quad a_{21} = \dfrac{x_{21}}{X_1} = \dfrac{30}{200} = 0{,}15;$ $\quad a_{31} = \dfrac{x_{31}}{X_1} = \dfrac{20}{200} = 0{,}1;$

$a_{12} = \dfrac{x_{12}}{X_2} = \dfrac{10}{180} \approx 0{,}055556;$ $\quad a_{22} = \dfrac{x_{22}}{X_2} = \dfrac{15}{180} = 0{,}083333;$ $\quad a_{32} = \dfrac{x_{32}}{X_2} = \dfrac{0}{180} = 0;$

$a_{13} = \dfrac{x_{13}}{X_3} = \dfrac{10}{120} = 0{,}083333;$ $\quad a_{23} = \dfrac{x_{23}}{X_3} = \dfrac{0}{120} = 0;$ $\quad a_{33} = \dfrac{x_{33}}{X_3} = \dfrac{15}{120} = 0{,}125.$

Матрица коэффициентов прямых материальных затрат имеет вид:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}055556 & 0{,}083333 \\ 0{,}15 & 0{,}083333 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}125 \end{pmatrix},$$

a_{ij} – количество продукции i-й отрасли, которое надо затратить в j-й отрасли для выпуска единицы валовой продукции j-й отрасли.

Чтобы в промышленности произвести единицу ее валовой продукции надо затратить 0,1 единицы продукции промышленности, 0,15 единицы продукции сельского хозяйства и 0,1 единицы продукции строительства.

Чтобы в сельском хозяйстве произвести единицу его валовой продукции надо затратить 0,0(5) единицы продукции промышленности, 0,08(3) единицы продукции сельского хозяйства и 0 единиц продукции строительства.

Чтобы в строительстве произвести единицу его валовой продукции надо затратить 0,08(3) единицы продукции промышленности, 0 единиц продукции сельского хозяйства и 0,125 единицы продукции строительства.

Найдем коэффициенты полных материальных затрат $b_{ij}(i, j = \overline{1,3})$, которые образуют матрицу полных материальных затрат $B = (E - A)^{-1}$.

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}055556 & 0{,}083333 \\ 0{,}15 & 0{,}083333 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}055556 & -0{,}083333 \\ -0{,}15 & 0{,}916667 & 0 \\ -0{,}1 & 0 & 0{,}875 \end{pmatrix}.$$

$E - A$			E		
0,9	– 0,055556	– 0,083333	1	0	0
– 0,15	0,916667	0	0	1	0
– 0,1	0	0,875	0	0	1
1	– 0,061728	– 0,092593	1,111111	0	0
0	0,907407	– 0,013889	0,166667	1	0
0	– 0,006173	0,865741	0,111111	0	1
1	0	– 0,093537	1,122449	0,068027	0
0	1	– 0,015306	0,183673	1,102041	0
0	0	0,865646	0,112245	0,006803	1

$E-A$			E		
1	0	0	1,134578	0,068762	0,108055
0	1	0	0,185658	1,102161	0,017682
0	0	1	0,129666	0,007859	1,155206
E			$B=(E-A)^{-1}$		

Матрица полных материальных затрат имеет вид:

$$B=(b_{ij})=\begin{pmatrix}1{,}134578 & 0{,}068762 & 0{,}108055\\ 0{,}185658 & 1{,}102161 & 0{,}017682\\ 0{,}129666 & 0{,}007859 & 1{,}155206\end{pmatrix}.$$

b_{11} = 1,134578 – это количество продукции промышленности, которую надо затратить в промышленности для выпуска единицы ее конечной продукции; b_{23} = 0,017682 – это количество продукции сельского хозяйства, которую надо затратить в строительстве для выпуска единицы конечной продукции строительства.

2. Вычислим коэффициенты прямой f_j и полной F_j фондоемкости по формулам:

$$f_j=\frac{\Phi_j}{X_j};\ j=\overline{1,3};\ F_j=\sum_{i=1}^{3}f_i\cdot b_{ij},\ j=\overline{1,3}.$$

$$f_1=\frac{150}{200}=0{,}75;\qquad f_2=\frac{140}{180}=0{,}777778;\qquad f_3=\frac{120}{120}=1.$$

Эти коэффициенты показывают количество фондов, приходящихся на единицу валовой продукции отрасли.

Обозначим: $f=(f_1,f_2,f_3)=(0{,}75;\ 0{,}777778;\ 1)$; $F=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{pmatrix}$, тогда $F=f\cdot B$.

$$F=(0{,}75;\ 0{,}777778;\ 1)\cdot\begin{pmatrix}1{,}134578 & 0{,}068762 & 0{,}108055\\ 0{,}185658 & 1{,}102161 & 0{,}017682\\ 0{,}129666 & 0{,}007859 & 1{,}155206\end{pmatrix}.$$

F_1 = 0,75 · 1,134578 + 0,777778 · 0,185658 + 1 · 0,129666 = 1,125000,
F_2 = 0,75 · 0,068762 + 0,777778 · 1,102161 + 1 · 0,007859 = 0,916667,
F_3 = 0,75 · 0,108055 + 0,777778 · 0,017682 + 1 · 1,155206 = 1,250000.

Эти коэффициенты показывают количество фондов, приходящихся на единицу конечной продукции соответствующей отрасли.

3. Вычислим коэффициенты прямой t_j и полной T_j трудоемкости, аналогично тому, как находили коэффициенты прямой и полной фондоемкости.

$$t_j=\frac{L_j}{X_j};\ j=\overline{1,3};\ t_1=\frac{120}{200}=0{,}6;\ t_2=\frac{65}{180}=0{,}361111;\ t_3=\frac{90}{120}=0{,}75.$$

Эти коэффициенты показывают количество труда, приходящегося на единицу валовой продукции. Например: $t_2 = 0{,}361111$ – это количество труда, приходящееся на единицу валовой продукции сельского хозяйства.

Коэффициенты полной трудоемкости: $T = t \cdot B$, где $t = (t_1, t_2, t_3) = (0{,}6;$ $0{,}361111;\ 0{,}75)$, $= (0{,}6;\ 0{,}361111;\ 0{,}75) \cdot \begin{pmatrix} 1{,}134578 & 0{,}068762 & 0{,}108055 \\ 0{,}185658 & 1{,}102161 & 0{,}017682 \\ 0{,}129666 & 0{,}007859 & 1{,}155206 \end{pmatrix}$.

$T_1 = 0{,}6 \cdot 1{,}134578 + 0{,}361111 \cdot 0{,}185658 + 0{,}75 \cdot 0{,}129666 = 0{,}845039,$
$T_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}068762 + 0{,}361111 \cdot 1{,}102161 + 0{,}75 \cdot 0{,}007859 = 0{,}445154,$
$T_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}108055 + 0{,}361111 \cdot 0{,}017682 + 0{,}75 \cdot 1{,}155206 = 0{,}937623.$

Эти коэффициенты показывают количество труда, приходящегося на единицу конечной продукции соответствующей отрасли.

4. Найдем плановые объемы валовой продукции по формуле: $X^{\text{пл}} = B \cdot Y^{\text{пл}}$;

$$X^{\text{пл}} = \begin{pmatrix} X_1^{\text{пл}} \\ X_2^{\text{пл}} \\ X_3^{\text{пл}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}134578 & 0{,}068762 & 0{,}108055 \\ 0{,}185658 & 1{,}102161 & 0{,}017682 \\ 0{,}129666 & 0{,}007859 & 1{,}155206 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

$X_1^{\text{пл}} = 1{,}134578 \cdot 100 + 0{,}068762 \cdot 100 + 0{,}108055 \cdot 50 = 125{,}736739 \approx 125{,}737,$
$X_2^{\text{пл}} = 0{,}185658 \cdot 100 + 1{,}102161 \cdot 100 + 0{,}017682 \cdot 50 = 129{,}666012 \approx 129{,}666,$
$X_3^{\text{пл}} = 0{,}129666 \cdot 100 + 0{,}007859 \cdot 100 + 1{,}155206 \cdot 50 = 71{,}512770 \approx 71{,}513.$

Чтобы обеспечить на плановый период выпуск 100 единиц конечной продукции в промышленности, 100 единиц конечной продукции в сельском хозяйстве и 50 единиц конечной продукции в строительстве, необходимо произвести в промышленности 125,737 единиц валовой продукции, в сельском хозяйстве 129,666 единиц валовой продукции и в строительстве 71,513 единиц валовой продукции.

5. Плановые объемы межотраслевых потоков найдем по формуле:

$$x_{ij}^{\text{пл}} = a_{ij} \cdot X_j^{\text{пл}},\ i, j = \overline{1,3}.$$

$x_{11}^{\text{пл}} = a_{11} \cdot X_1^{\text{пл}} = 0{,}1 \cdot 125{,}736739 = 12{,}573674 \approx 12{,}574,$
$x_{12}^{\text{пл}} = a_{12} \cdot X_2^{\text{пл}} = 0{,}055556 \cdot 129{,}666012 = 7{,}203667 \approx 7{,}204,$
$x_{13}^{\text{пл}} = a_{13} \cdot X_3^{\text{пл}} = 0{,}083333 \cdot 71{,}512770 = 5{,}959398 \approx 5{,}959,\ldots$

Плановые объемы чистой продукции найдем по формуле:

$$W_j^{\text{пл}} = X_j^{\text{пл}} - \sum_{i=1}^{3} x_{ij}^{\text{пл}}.$$

$W_1^{\text{пл}} = X_1^{\text{пл}} - (x_{11}^{\text{пл}} + x_{21}^{\text{пл}} + x_{31}^{\text{пл}}) = 125{,}737 - (12{,}574 + 18{,}861 + 12{,}574) = 81{,}728,$
$W_2^{\text{пл}} = X_2^{\text{пл}} - (x_{12}^{\text{пл}} + x_{22}^{\text{пл}} + x_{32}^{\text{пл}}) = 129{,}666 - (7{,}204 + 10{,}805 + 0) = 111{,}657,$
$W_3^{\text{пл}} = X_3^{\text{пл}} - (x_{13}^{\text{пл}} + x_{23}^{\text{пл}} + x_{33}^{\text{пл}}) = 71{,}513 - (5{,}959 + 0 + 8{,}939) = 56{,}615.$

6. Найдем количество труда и фондов, необходимое для выполнения плана.

а) Необходимое количество труда: $L_j^{пл} = t_j \cdot X_j^{пл}, j = \overline{1,3}$.

$$L_1^{пл} = t_1 \cdot X_1^{пл} = 0{,}6 \cdot 125{,}736739 = 75{,}442043,$$
$$L_2^{пл} = t_2 \cdot X_2^{пл} = 0{,}361111 \cdot 129{,}666012 = 46{,}823838,$$
$$L_3^{пл} = t_3 \cdot X_3^{пл} = 0{,}75 \cdot 71{,}512770 = 53{,}634578.$$

б) Необходимое количество фондов: $\Phi_j^{пл} = f_j \cdot X_j^{пл}, j = \overline{1,3}$.

$$\Phi_1^{пл} = f_1 \cdot X_1^{пл} = 0{,}75 \cdot 125{,}736739 = 94{,}302554,$$
$$\Phi_2^{пл} = f_2 \cdot X_2^{пл} = 0{,}777778 \cdot 129{,}666012 = 100{,}851343,$$
$$\Phi_3^{пл} = f_3 \cdot X_3^{пл} = 1 \cdot 71{,}512770 = 71{,}512770.$$

7. Построим схему межотраслевого баланса (МОБ) на плановый период, округлим плановые показатели таким образом, чтобы в таблице был полный баланс.

Таблица 5.3

Потребл. отрасль / ***Производ. отрасль***	***Промышленность***	***Сельское хозяйство***	***Строительство***	***Конечная продукция***	***Валовая продукция***
Промышленность	$x_{11}^{пл} = 12{,}574$	$x_{12}^{пл} = 7{,}204$	$x_{13}^{пл} = 5{,}959$	$Y_1^{пл} = 100$	$X_1^{пл} = 125{,}737$
Сельское хозяйство	$x_{21}^{пл} = 18{,}861$	$x_{22}^{пл} = 10{,}805$	$x_{23}^{пл} = 0$	$Y_2^{пл} = 100$	$X_2^{пл} = 129{,}666$
Строительство	$x_{31}^{пл} = 12{,}574$	$x_{32}^{пл} = 0$	$x_{33}^{пл} = 8{,}939$	$Y_3^{пл} = 50$	$X_3^{пл} = 71{,}513$
Чистая продукция	$W_1^{пл} = 81{,}728$	$W_2^{пл} = 111{,}657$	$W_3^{пл} = 56{,}615$		
Затраты труда	$L_1^{пл} = 75{,}442$	$L_2^{пл} = 46{,}824$	$L_3^{пл} = 53{,}635$		
Стоимость основных производственных фондов	$\Phi_1^{пл} = 94{,}303$	$\Phi_2^{пл} = 100{,}851$	$\Phi_3^{пл} = 71{,}513$		
Валовая продукция	$X_1^{пл} = 125{,}737$	$X_2^{пл} = 129{,}666$	$X_3^{пл} = 71{,}513$		

ЛИТЕРАТУРА

1. Экономико-математические методы и модели / Н. И. Холод, А. В. Кузнецов, Я. Н. Жихар [и др.]; под редакцией А. В. Кузнецова. – Минск : БГЭУ, 1999. – Текст : непосредственный.

2. Эконометрика : учебник для бакалавриата и магистратуры / И. И. Елисеева [и др.]; под редакцией И. И. Елисеевой. – Москва : Юрайт, 2015. – Текст : непосредственный.

3. Эконометрика : учебник / под редакцией И. И. Елисеевой. – Москва : Финансы и статистика, 2007. – Текст : непосредственный.

4. Практикум по эконометрике : учебное пособие / И. И. Елисеева, С. В. Курышева, Н. М. Гордеенко [и др.]; под редакцией И. И. Елисеевой. – Москва : Финансы и статистика, 2005. – Текст : непосредственный.

5. Доугерти, К. Введение в эконометрику : перевод с английского / К. Доугерти. – Москва : ИНФРА-М, 1999. – Текст : непосредственный.

6. Эконометрика : лабораторный практикум / Г. В. Спиридонова, П. В. Макаров, Н. В. Семенова [и др.]. – [изд-е 2, перераб. и доп.]. – Тирасполь : Изд-во Приднестр. ун-та, 2016. – Текст : непосредственный.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений F-критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$

$k_1 = m; \quad k_2 = n - m - 1$

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51

45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1

Приложение 2

Критические значения *t*-критерия Стьюдента

Число степеней свободы *d.f.*	α			Число степеней свободы *d.f.*	α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

Приложение 3

Государственное образовательное учреждение высшего образования
ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им Т. Г. ШЕВЧЕНКО

Физико-математический факультет
Кафедра прикладной математики и информатики

Лабораторная работа № _

по дисциплине
«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОНОМИКЕ»

Тема: «_____»

Вариант №____

Выполнил:
студент _____гр. ФМФ
Ф.И.О._____

Проверил:
_____

Тирасполь, 202_г.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ
лабораторный практикум

Составители:
Галина Васильевна Спиридонова
Наталья Григорьевна Леонова
Александр Валерьевич Коровай
Виталий Валерьевич Афонин

Издается в авторской редакции

Редакторы: ??
Компьютерная верстка: *Запорожан Ю. А.*

Подписано в печать ??.??.2023. Формат 60×90/16.
Объем 4,0 п. л. Тираж ?? экз. Заказ № 1362.