ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т. Г. Шевченко.

Физико-математический факультет

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

ТРИГОНОМЕТРИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПО

Методические указания

Тирасполь, 2022

УДК 514.116 (072.32)

ББК В151.05р20

Т676

Составители:

Л.В. Елкина, ст. преп. кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики ПГУ им. Т.Г. Шевченко

И.И. Журжи, ст. преп. кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики ПГУ им. Т.Г. Шевченко

С.В. Костюкова, учитель математики 1 категории, ГОУ «Тираспольское Суворовское военное училище»

Рецензенты:

Н.Г. Леонова, канд. соц. наук, доцент каф. прикладной математики и информатики, физико-математического факультета

А.В. Деткова, канд. пед. наук, доцент каф. ИКТ и С, технического колледжа им. Ю.А. Гагарина, инженерно-технического факультета

ТРИГОНОМЕТРИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПО: методические указания / Сост.: Елкина Л.В., Журжи И.И., Костюкова С.В., Тирасполь, 2022. – 81 с.

Методические указания предназначены для основного, дополнительного и углубленного изучения темы «Тригонометрия» при изучении математики на первом курсе колледжа, а также для учащихся 10-11 классов средних образовательных учреждение и организаций СПО. Методические указания содержат краткую теорию, основные формулы и таблицы по теме «Тригонометрия», а также большое количество разноуровневых заданий, скомпонованные варианты для проведения самостоятельных и контрольных работ, предусмотренных по этой теме.

УДК 514.116 (072.32)

ББК В151.05р20

Т676

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им.Т.Г.Шевченко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика заключает в себе не только истину, но и высочайшую красоту – красоту холодную и строгую, подобную красоте скульптуры.

Бертран Рассел

Методические указания «Тригонометрия» предназначены для учащихся десятых и одиннадцатых классов общеобразовательных школ, студентов первого курса инженерно-технического колледжа им. Ю.А. Гагарина ИТИ, а также остальных техникумов. Пособие включает основной материал темы «Тригонометрия», содержит определения, правила и формулы, которые иллюстрируются большим количеством примеров и практическими указаниями. Методические указания составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины Математика. Количество вариантов самостоятельных и контрольных работ исключает переписывание одного и того же варианта, а решенные примеры в сочетании с другими пособиями по данной теме, окажут большую помощь студентам в их самостоятельной работе, как при выполнении самостоятельных, контрольных работ, так и при подготовке к экзамену.

Пособие также будет интересно всем учащимся, готовящимся к поступлению в высшие учебные заведения.

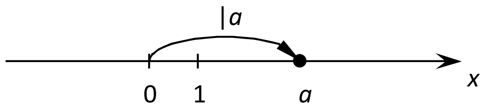
Содержание

Теоретические сведения:

Алгебраические функции — это функции, заданные аналитическим выражением, в записи которого используются алгебраические операции над числами и переменной (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

Например: $y = 2x + 3$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2}$

Числовая прямая — это математическая модель для представления чисел, в которой каждое число соответствует точке на прямой, причем расстояние от точки до начала отсчета равно модулю числа:

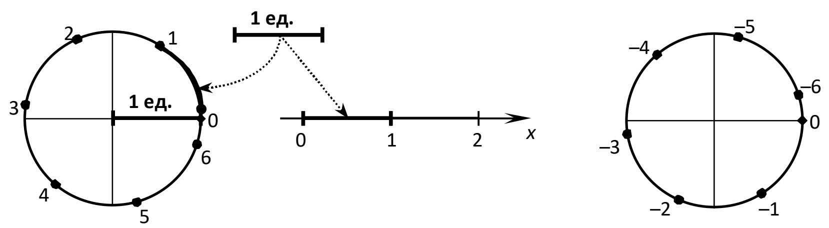


Признаки числовой прямой:

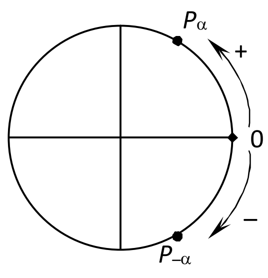
1) начало отсчета;
2) единичный отрезок;
3) положительное направление (стрелка).

Единичная окружность — это окружность, радиус которой принят за единицу измерения.

Числовая окружность — это единичная окружность с установленным соответствием между действительными числами и точками окружности:



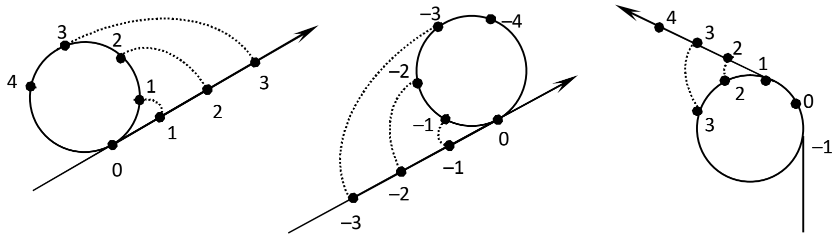
Указанное соответствие можно определить следующим образом: каждому числу α соответствует такая точка P числовой окружности, чтобы дуга $\cup OP$ имела длину $|\alpha|$ и была отложена в положительном направлении если $\alpha > 0$ и в отрицательном, если $\alpha < 0$:



Признаки числовой окружности:

1) начало отсчета – правый конец горизонтального диаметра;
2) единичный отрезок – длина радиуса окружности;
3) положительное направление – против часовой стрелки.

Откладывать можно дуги какой угодно длины. То есть числовую окружность можно рассматривать как окружность радиуса 1, на которую «намотана» числовая прямая:



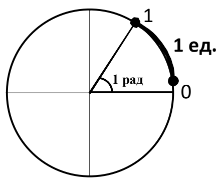
Радианная мера углов и дуг

Угол в 1° — это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна $\frac{1}{360}$ части окружности.

Угол поворота — это угол, полученный вращением луча около его начала O от начального положения OA до конечного положения OB.

Угол в 1 радиан — это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

$\left(1\,рад \approx 57{,}3° \approx 57°17'45''\right)$



Радианная мера угла численно равна пути, который проходит точка по дуге единичной окружности, на которую опирается этот угол: $\frac{\pi}{3}$

Для связи радиан и градусов используют развернутый угол:

$\boxed{\pi\ рад = 180°}$

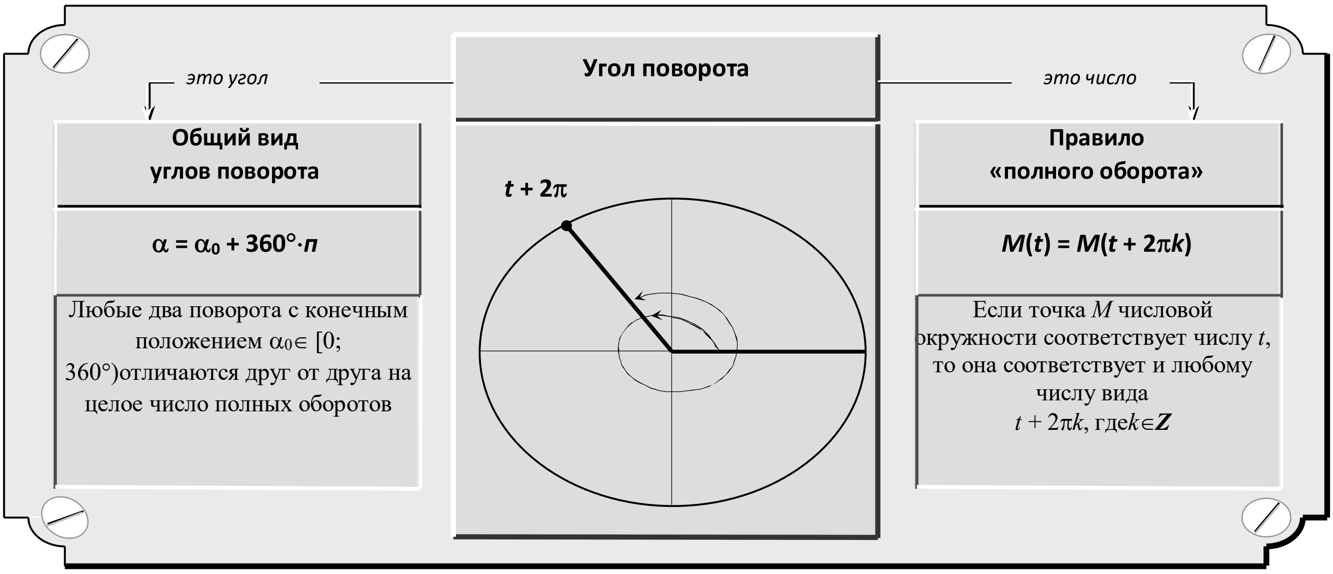
$1° \Rightarrow \frac{\pi}{180}$ $\qquad$ $\pi \Rightarrow 180°$

1.*Говорят: «угол* $\frac{\pi}{3}$ *радиан» или чаще «угол* $\frac{\pi}{3}$*». Обозначение «радиан» или «рад», как правило, опускают.*

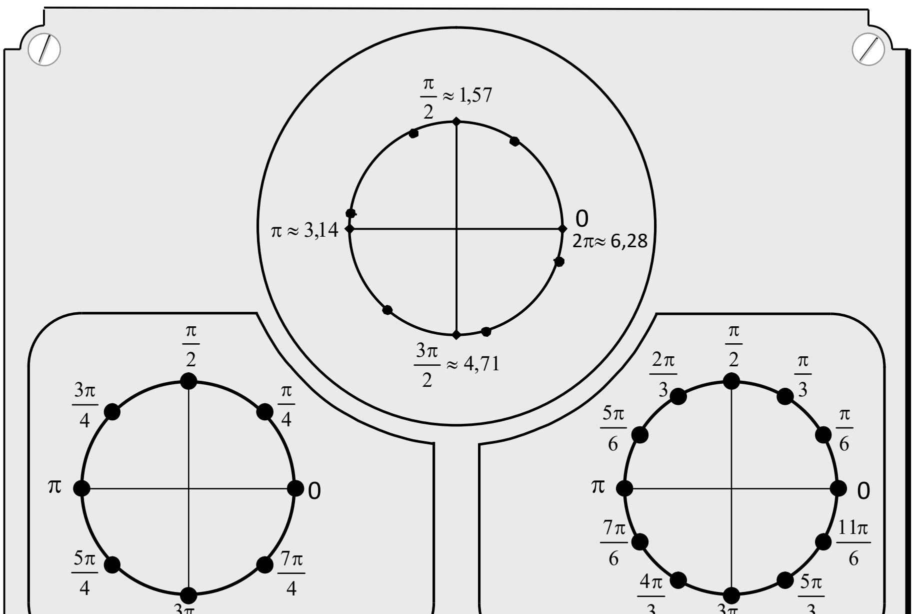
2. *Термин «радианное измерение углов» равносилен термину «числовое измерение углов», т.е. фраза «угол α равен двум радианам» равносильна фразе «угол α равен числу 2» и даже «угол α равен двум». Поэтому вопрос типа «Чему равно $\frac{\pi}{3}$?» некорректен. Нужно спрашивать: «Чему равен угол $\frac{\pi}{3}$?» (60°) или «Чему равно число $\frac{\pi}{3}$?» (≈ 1,05).*

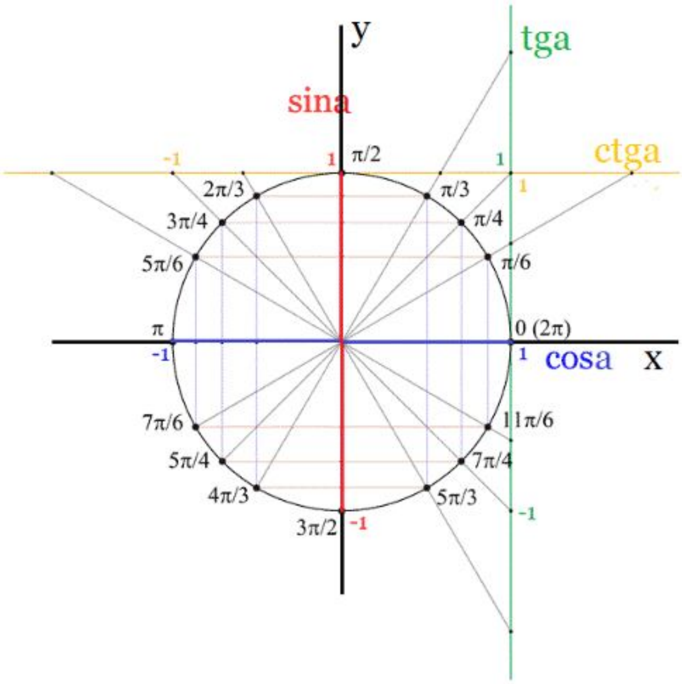
Угол поворота

⟨**Полный**⟩**оборот** — это угол поворота, равный 2π рад (или 360°).



Некоторые положения конечной точки угла поворота:

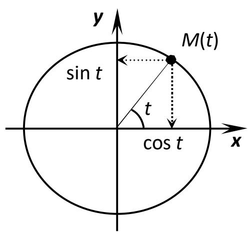




Определение тригонометрических функций

Функция косинус — это функция, которая ставит в соответствие каждому числу *t* абсциссу точки *M*(*t*) координатной окружности.

Функция синус — это функция, которая ставит в соответствие каждому числу *t* ординату точки *M*(*t*) координатной окружности.



$\boxed{\text{Если } M(t) = M(x;\, y)\text{, то } x = \cos t,\quad y = \sin t}$

Таким образом,

$\boxed{\boldsymbol{M(t) = M(\cos t;\, \sin t)}}$

Запись M(t) показывает положение точки M на координатной окружности, а запись M(cost; sint) – положение той же точки на координатной плоскости.

Функция тангенс — это частное от деления функции синус на функцию косинус.

Функция котангенс — это частное от деления функции косинус на функцию синус.

Поскольку деление на нуль невозможно, функции tg*t* и ctg*t* определены не для всех значений аргумента. Тангенс определен лишь для значений аргумента, при которых cos*t*$\neq$ 0, котангенс определен при sin*t*$\neq$ 0:

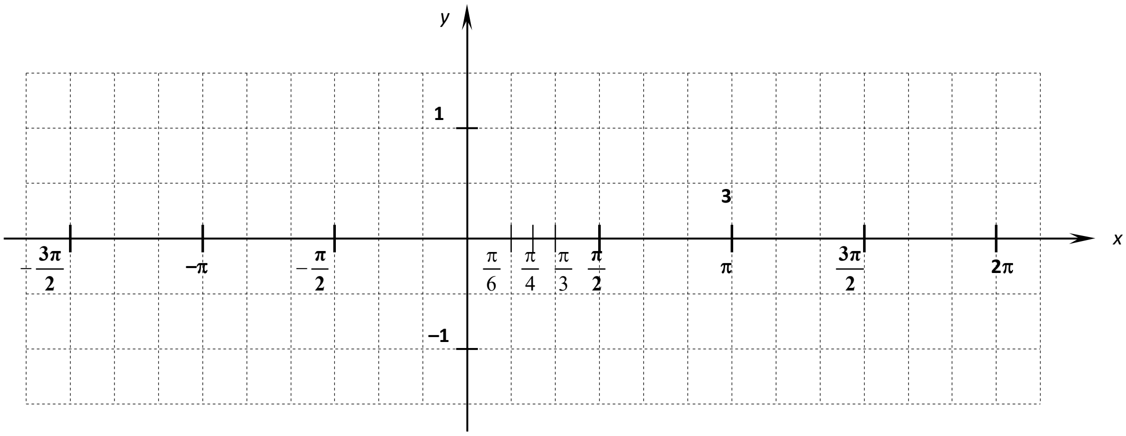
$$tg\ t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \textit{где} \quad t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$$

$$ctg\ t = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \textit{где} \quad t \neq \pi k, \quad k \in Z$$

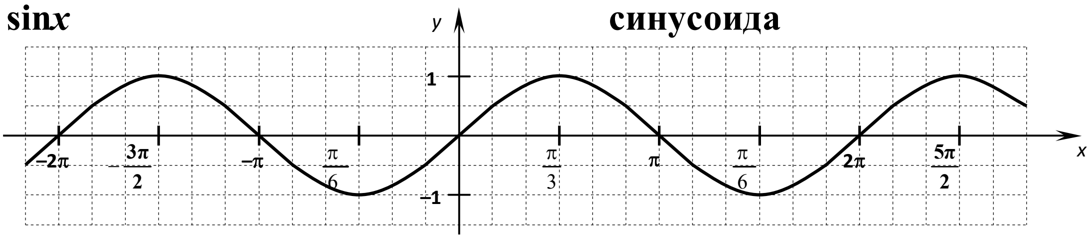
Тригонометрические функции — это общее название функций синус, косинус, тангенс и котангенс.

Графики тригонометрических функций

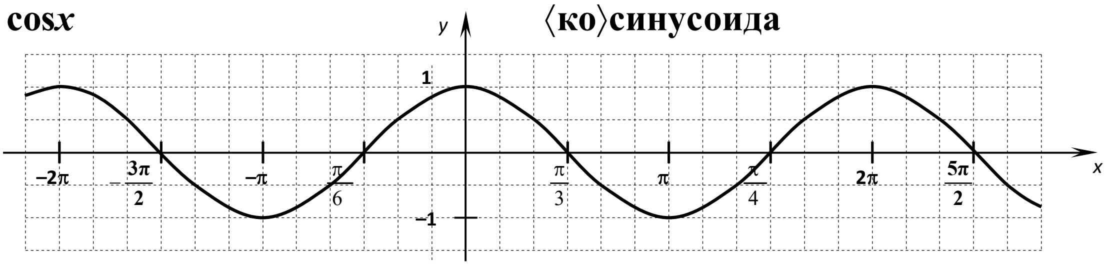
Тригонометрический набор координат:



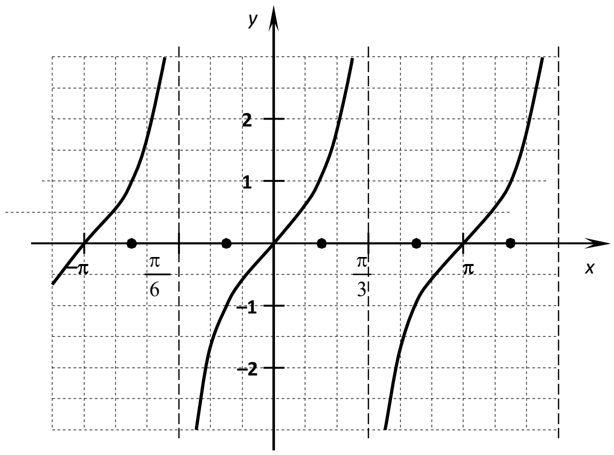
y* = sin*x **синусоида**



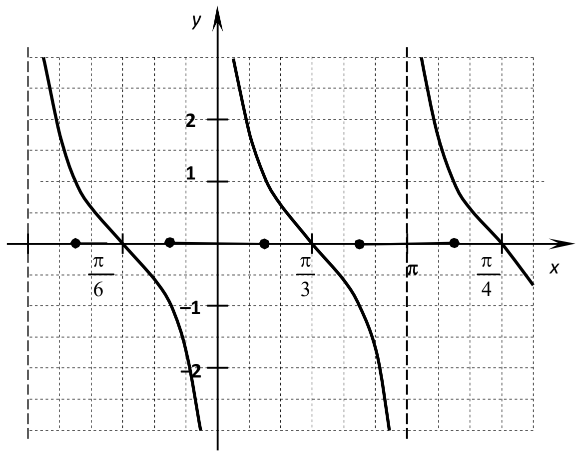
y* = cos*x **⟨ко⟩синусоида**



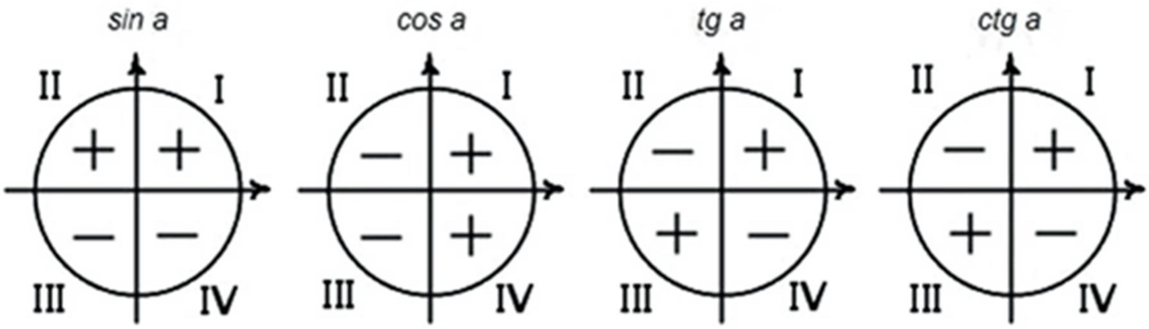
y* = tg*x **тангенсоида**

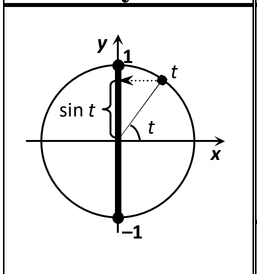
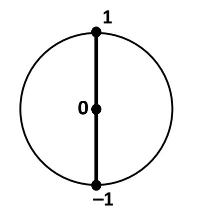
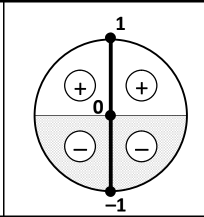
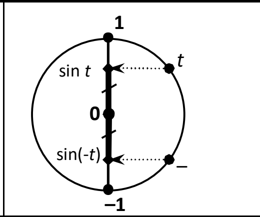


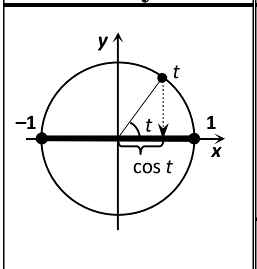
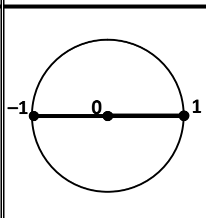
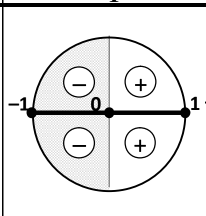
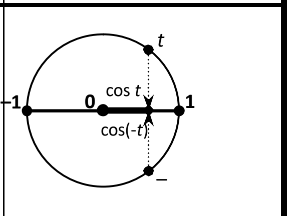
y* = ctg*x **⟨ко⟩тангенсоида**



7. Свойства синуса и косинуса
Знаки основных тригонометрических функций



Линия синусов	Область значений	Знаки по четвертям	Четность – нечетность
			
	$\lvert\sin t\rvert \le 1$		$\sin(-t) = -\sin t$

Линия косинусов	Область значений	Знаки по четвертям	Четность – нечетность
			
	$\lvert\cos t\rvert \le 1$		$\cos(-t) = \cos t$

Область определения

$D(\sin) = \boldsymbol{R}$ $\qquad$ $D(\cos) = \boldsymbol{R}$

Область значений

$E(\sin) = [-1;\ 1]$ $\qquad$ $E(\cos) = [-1;\ 1]$

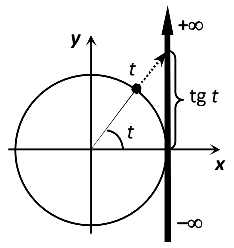
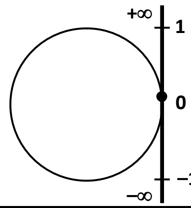
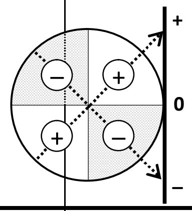
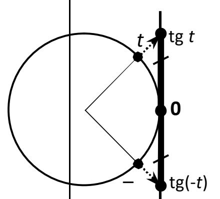
Четность – нечетность

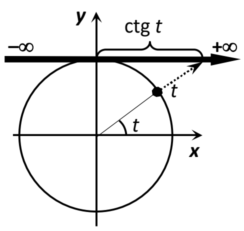
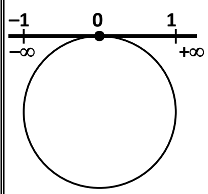
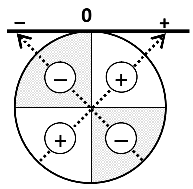
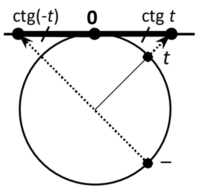
нечетная функция $\qquad$ четная функция

Периодичность

$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ $\qquad$ $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$

8. Свойства тангенса и котангенса

Линия тангенсов	Область значений	Знаки по четвертям	Четность – нечетность
			
	tg $t \in (-\infty; +\infty)$		tg(–t) = –tg t

Линия котангенсов	Область значений	Знаки по четвертям	Четность – нечетность
			
	ctg $t \in (-\infty; +\infty)$		ctg(–t) = –ctg t

Область определения

$D(\mathrm{tg}) = \boldsymbol{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \right\}$ $\qquad$ $D(\mathrm{ctg}) = \boldsymbol{R} \setminus \{ \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \}$

Область значений

E(tg) = (–∞; +∞) $\qquad$ E(ctg) = (–∞; +∞)

Четность – нечетность

нечетная функция $\qquad$ нечетная функция

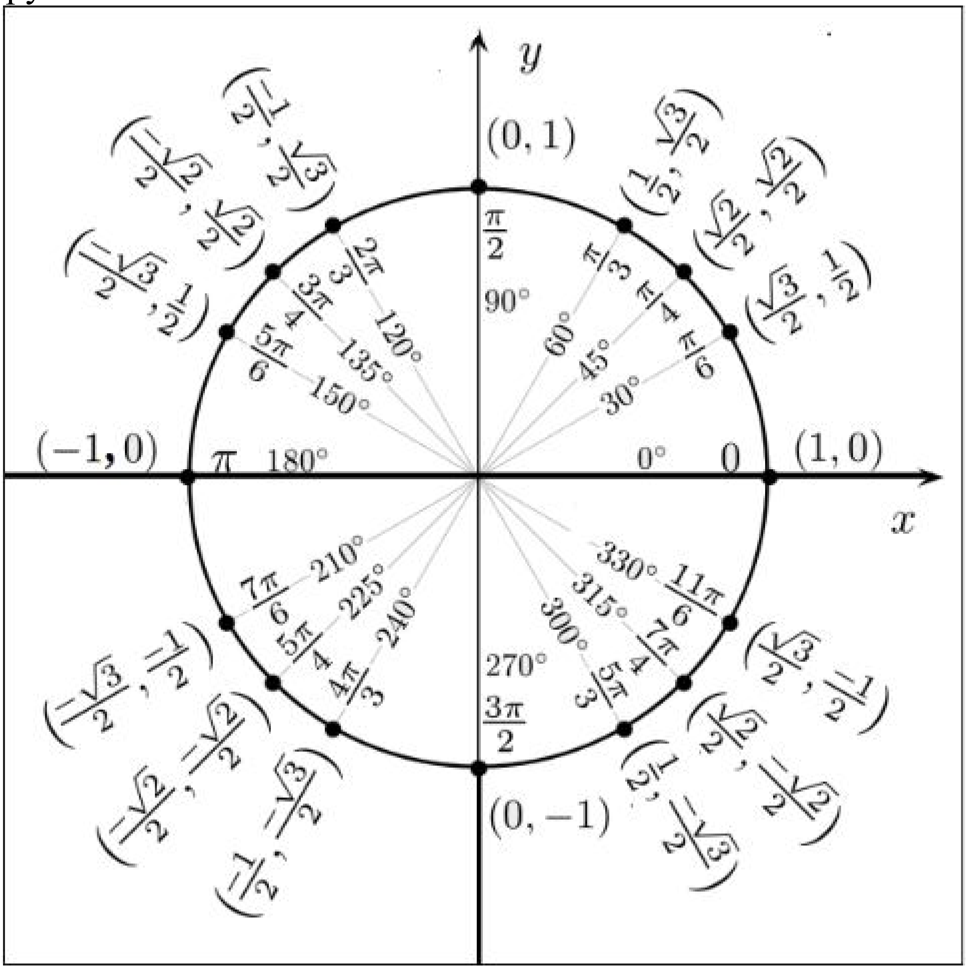
Периодичность

tg(x±π) = tg x $\qquad$ ctg(x±π) = ctg x

9. тригонометрических функций некоторых углов

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	**π**	$\frac{3\pi}{2}$
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
ctg α	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

И на окружности



10. Связь между тригонометрическими функциями одного аргумента

Искомая функция	**Выражение искомой функции через**			
	sin α	*cos α*	*tg α*	*ctg α*
sin $\alpha =$	sin α	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
cos $\alpha =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	cos α	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
tg $\alpha =$	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	tg α	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
ctg $\alpha =$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	ctg α

I. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2. $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha};\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

3. $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha};\ \alpha \neq \pi n,\ n \in Z$

4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1;\ ;\ \alpha \neq \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$

II. Формулы (теоремы) сложения аргументов:

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
5. $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta};\ \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
6. $tg(\alpha - \beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta};\ \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

III. Формулы приведения:

1) функция меняется на кофункцию при переходе через вертикальную ось и не меняется при переходе через горизонтальную;
2) перед приведенной функцией ставится знак приводимой функции, считая α углом первой четверти.

α	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin	−sin α	cos α	cos α	sin α	−sin α	−cos α	−cos α	−sin α	sin α
cos	cos α	sin α	−sin α	−cos α	−cos α	−sin α	sin α	cos α	cos α
tg	−tg α	ctg α	−ctg α	−tg α	tg α	ctg α	−ctg α	−tg α	tg α
ctg	−ctg α	tg α	−tg α	− ctg α	ctg α	tg α	−tg α	−tg α	ctg α

IV. Формулы двойного аргумента:

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2}$

2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

3. $tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$ 4. $ctg 2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$

V. Формулы понижения степени:

1. $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ 2. $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

3. $tg^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ 4. $ctg^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$

VI. Формулы половинного аргумента (знак – по функции в левой части):

1. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ 2. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

3. $tg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

VII. Формулы сумм:

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

5. $tg\alpha \pm tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\ \alpha,\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

6. $ctg\alpha \pm ctg\beta = \dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};\ \alpha,\beta \neq \pi n,\ n \in Z$

VIII. Формулы произведений:

1. $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$

2. $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$

2. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$

IX. Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$1.\ \sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad 2.\ \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z$$

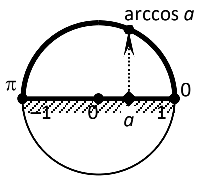
X. Некоторые дополнительные формулы:

1. $a\sin\alpha + b\cos\alpha = A\sin(\alpha+\varphi)$, *где* $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = arctg\frac{b}{a}$

2. $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} \mp \alpha\right)$

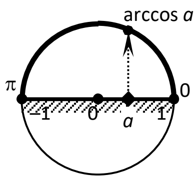
Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа a называется такое число x из интервала $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.



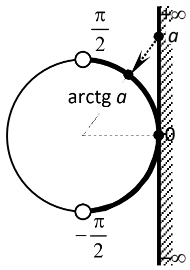
$$\arcsin \overset{[-1;1]}{a} = \overset{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}{x},\quad \sin x = a$$

Арккосинусом числа a называется такое число x из интервала $[0;\pi]$, косинус которого равен a.



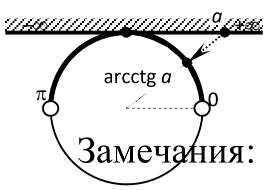
$$\arccos \overset{[-1;1]}{a} = \overset{[0;\pi]}{x},\quad \cos x = a$$

Арктангенсом числа a называется такое число x из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.



$$arctga = \overset{\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)}{x},\quad tgx = a$$

Арккотангенсом числа a называется такое число x из интервала $(0;\pi)$, котангенс которого равен a.



$$arcctga = \overset{(0;\pi)}{x},\quad ctgx = a$$

Замечания: 1. Для отрицательных значений аргумента:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a \qquad arctg(-a) = -arctga$$
$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a \qquad arcctg(-a) = \pi - arcctga$$

2. Из определения аркфункции сразу следует, что:

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\arcsin a) = a\\ \cos(\arccos a) = a\end{array}\right\},\ \textit{где}\ \ a \in [-1;1] \qquad \left.\begin{array}{l}tg(arctga) = a\\ ctg(arcctga) = a\end{array}\right\}$$

11. Простейшие тригонометрические уравнения

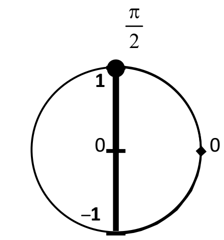
$$\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$$
$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$$
$$tgx = a \Leftrightarrow x = arctga + \pi n,\ n \in Z$$
$$ctgx = a \Leftrightarrow x = arcctga + \pi n,\ n \in Z$$

При $|a| > 1$ уравнения $sinx = a$ и $cosx = a$ корней не имеют!

Если правая часть уравнения — отрицательное число, то следует воспользоваться свойствами соответствующих обратных тригонометрических функций, тогда:

$$\left.\begin{array}{l}\sin x = -a \Leftrightarrow x = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n,\ n \in Z\\ \cos x = -a \Leftrightarrow x = \pm(\pi \arccos a) + 2\pi n,\ n \in Z\end{array}\right\}\ \textit{при}\ |a| \le 1!$$
$$tgx = -a \Leftrightarrow x = -arctga + \pi n,\ n \in Z$$
$$ctgx = -a \Leftrightarrow x = \pi - arcctga + \pi n,\ n \in Z$$

При $a = 1; 0; -1$ решение уравнения записывается в виде ($n \in \boldsymbol{Z}$):

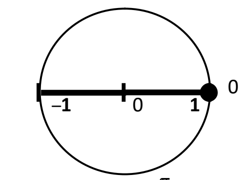


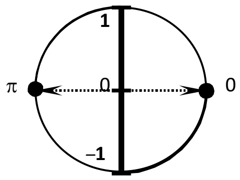
sin *x* = 1

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

cos *x* = 1

$$x = 2\pi n$$



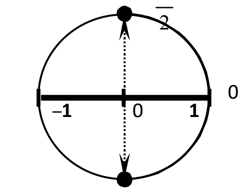


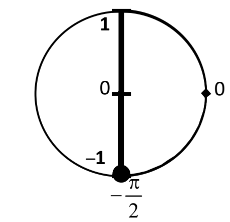
sin *x* = 0

$$x = \pi n$$

cos*x* = 0

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$



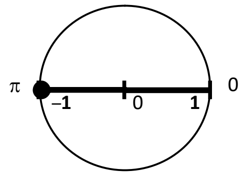


sin *x* = –1

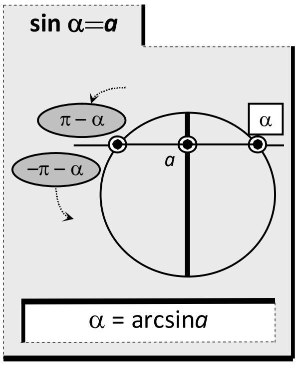
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

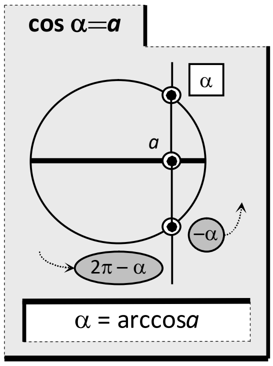
cos*x* = –1

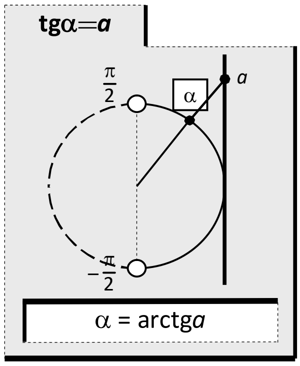
$$x = \pi + 2\pi n$$



12. Простейшие тригонометрические неравенства







Чтобы решить простейшее тригонометрическое неравенство нужно:

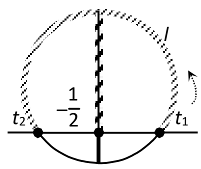
1. Провести прямую к линии соответствующей функции.
2. Выделить дугу, на которой лежат решения неравенства.
3. Найти концы этой дуги, помня, что обход совершается против часовой стрелки от меньшего числа к большему.
4. Прибавить к концам интервала числа, кратные периоду функции.

<u>Пример:</u> Решить неравенство $\sin x \ge -\dfrac{1}{2}$.

Решение.

Все решения, удовлетворяющие заданному неравенству, лежат на дуге l. Найдем ее концы:

$$t_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$$



$$t_2 = \pi - t_1 = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

С учетом периода синуса, запишем ответ:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi m \le x \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi m,\ n \in Z.$$

Ответ: $\left[-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m; \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi m\right],\ n \in Z$

Формулы тройных углов

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} \qquad ctg3\alpha = \frac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}$$

Обратные тригонометрические функции

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$$

Практическая часть:

1**. *Задания по теме: «Радианная мера угла. Вращательное движение».***

1. Выразите в радианах:

1) 1°;	4) 10°;	7) 15°;	10) 30°;
2) 45°;	5) 60°;	8) 70°;	11) 90°;
3) 225°;	6) 240°;	9) 320°;	12) 330°.

2. Переведите из градусной меры в радианную:

1) 120°;	3) 220°;	5) 300°;	7) 765°;
2) 210°;	4) 150°;	6) 315°;	8) 675°.

<u>Пример:</u> Чтобы из градусов перевести в радианы, нужно умножить градусную меру на π и разделить на 180^0.

Переведем 350^0: $350° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{35\pi}{18}$ радиан.

3. Выразите в градусах:

1) $\frac{\pi}{15}$;	4) $\frac{\pi}{12}$;	7) $\frac{\pi}{8}$;	10) $\frac{7\pi}{9}$;
2) $\frac{2\pi}{3}$;	5) $\frac{11\pi}{6}$;	8) 1,5π;	11) 3π;
3) 0,25π;	6) $\frac{21}{4}\pi$;	9) $-\frac{31}{6}\pi$;	12) $\frac{101}{12}\pi$.

4. Переведите из радианной меры в градусную:

1) $\frac{3\pi}{4}$;	3) $\frac{11\pi}{3}$;	5) $\frac{6\pi}{5}$;	7) $\frac{46\pi}{9}$;
2) $\frac{5\pi}{8}$;	4) $\frac{7\pi}{12}$;	6) $\frac{11\pi}{12}$;	8) $\frac{47\pi}{9}$.

<u>Пример:</u> Чтобы из радиан перевести в градусы, нужно умножить радианную меру на 180^0 и разделить на π.

Переведем $\frac{33\pi}{18} = \frac{33\pi}{18} \cdot \frac{180°}{\pi} = 330°$.

5. В какой четверти находится конечная точка поворота на угол:

1) 220°;	3) –160°;	5) 906°;
2) 285°;	4) –290°;	6) 4825°?

<u>Пример:</u> Для определения четверти пользуемся числовой окружностью и темы условиями, что положительный угол откладываем от положительного направления оси ох против часовой стрелки, а отрицательный угол откладывается - по часовой.

Угол -176° – это угол 3 четверти, так как откладывается по часовой стрелке, а угол 176 °– угол 2 четверти.
Угол 744 °– угол первой четверти, так как если отбросить два полных оборота(720°), то получим угол 24°

<u>Пример:</u> Найти сколько в градусах 3,5 рад.

Учитывая, что 1 рад = $\frac{180^\circ}{\pi}$, 3,5 рад = 3,5 $\cdot$ $\frac{180^\circ}{\pi}$ = $\frac{630^\circ}{\pi}$ = 201° .

<u>Пример:</u> Найти радианную меру угла 72°.

Учитывая, что 1° = $\frac{\pi}{180^\circ}$ рад, 72° = 72 $\cdot$ $\frac{\pi}{180^\circ}$ рад = $\frac{2\pi}{5}$ рад $\approx$ 1,3 рад.

6. Представьте в виде $\alpha_0 + 360^\circ \cdot n$ ($\alpha_0 \in [0^\circ; 360^\circ)$, $n \in \boldsymbol{Z}$) углы:
1) 840°; 3) –1700°; 5) 3200°; 7) –2450°;
2) 1200°; 4) –3900°; 6) 3500°; 8) –3100°.

7. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:
1) $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{7\pi}{2}$, 9π, $-\frac{3\pi}{2}$;
2) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$.

8.Отметьте на координатной окружности точки, соответствующие числам:
1) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$, π, 3π;
2) $-\frac{9\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{17\pi}{4}$. $\frac{19\pi}{4}$

9. Какой четверти числовой окружности принадлежит число:
1) $\frac{19\pi}{4}$; 2) $-\frac{37\pi}{6}$; 3) 100?

10. Переведите углы из градусной меры в радианную:
1) 36°; 3) –120°; 5) 870°; 7) –2510°;
2) 265°; 4) –135°; 6) 1020°; 8) –2940°.

11. Найдите радианную меру дуг:
1) 18°; 3) –252°; 5) 1530°;
2) 324°; 4) 828°; 6) –2490°.

12. Чему равна градусная мера углов:

1) $\frac{3\pi}{10}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $-\frac{11\pi}{15}$; 7) $\frac{35\pi}{18}$;

2) $\frac{19\pi}{16}$; 4) $\frac{7\pi}{4}$; 6) $-\frac{17\pi}{12}$; 8) $\frac{13\pi}{45}$?

13. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

1) $\frac{23\pi}{12}$; 3) $\frac{3\pi}{8}$; 5) $-\frac{11\pi}{9}$;

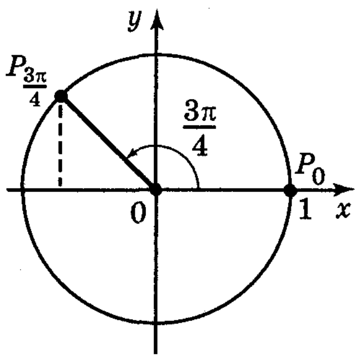
2) $\frac{7\pi}{3}$; 4) $\frac{9\pi}{5}$; 6) $-\frac{13\pi}{6}$.

14.Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

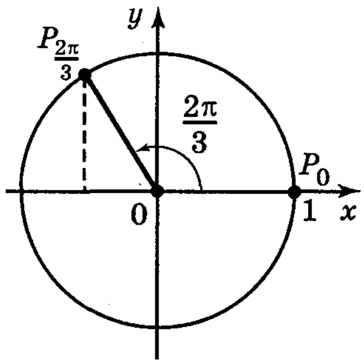
1) $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; -2π;

2) π; $-\frac{2\pi}{3}$; 4) 2π; $\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$.

<u>Пример</u>: Построить на числовой окружности точку, которая соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$



Числу $\frac{2\pi}{3}$



15. На числовой окружности укажите точку, соответствующую числу:

1) 7π; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{25\pi}{4}$; 3) 10π; $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{26\pi}{3}$;

2) 4π; $\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{25\pi}{6}$; 4) 3π; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{16\pi}{3}$.

16. Какой четверти числовой окружности принадлежит точка, соответствующая числу:

1) 6,1;	4) 2,8;	7) 4,8;	10) 31;
2) 5,4;	5) 3,2;	8) 1,4;	11) –17;
3) –4,3;	6) –5,1;	9) –2,8;	12) –95?

<u>Пример:</u> 2,7 радиан переведём в градусы, учитывая, что 1 радиан это ≈ 57°, получим 2,7· 57° ≈ 153,9°, а это угол 2 четверти.

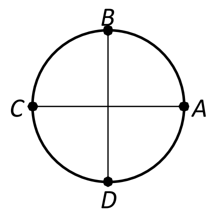
17. Какой четверти принадлежат точки:

1) $\frac{7\pi}{3}$;	3) $\frac{17\pi}{5}$;	5) 4,3;	7) 20;
2) $\frac{19\pi}{4}$;	4) $-\frac{8\pi}{7}$;	6) –3,3;	8) –100?

18. Считая числовую окружность образом беговой дорожки стадиона, отметьте на ней конец дистанции: а) 1500 м; б) 42 км195 м.

19. Дана окружность радиуса 1 см. Чему равна длина: а) всей окружности; б) ее половины; в) ее четверти?

Горизонтальный диаметр *CA* и вертикальный диаметр *DB* разбивают единичную окружность на четыре четверти: *AB* – первая, *BC* – вторая, *CD* – третья, *DA* – четвертая.
Опираясь на эту геометрическую модель, решите задачи № 3, 4, 5, 6, 7, 8.



20. Первая четверть разделена точкой *M* на две равные части, а точками *K* и *P* – на три равные части (точка *P* между *M* и *B*). Чему равна длина дуги: *AM*, *MB*, *AK*, *KP*, *PB*, *AP*, *KM*?

21.Вторая четверть разделена пополам точкой *M*, а третья четверть разделена на три равные части точками *K* и *P* (точка *P* между *K* и *D*). Чему равна длина дуги: *AM*, *BK*, *MP*, *DC*, *KA*, *BP*, *CB*, *BC*?

22. Вторая четверть разделена точкой *M* пополам, а четвертая четверть разделена на три равные части точками *K* и *P* (точка *P* между *K* и *A*). Чему равна длина дуги: *AM*, *AK*, *AP*, *PB*, *MK*, *KM*?

23. Первая четверть разделена на две равные части точкой *M*, а четвертая разделена на три равные части точками *K* и *P* (точка *P* между *K* и *A*). Чему равна длина дуги: *AM*, *BD*, *CK*, *MP*, *DM*, *MK*, *CP*, *PC*?

24. Третья четверть разделена точкой *P* в отношении 1 : 5. Чему равна длина дуги: *CP*, *PD*, *AP*?

25. Первая четверть разделена точкой *M* в отношении 2 : 3. Чему равна длина дуги: *AM*, *MB*, *DM*, *MC*?

2. Задания по теме: «синус, косинус, тангенс и котангенс числа».

1. Вычислите:

1) $2\sin 30° - \operatorname{tg} 45° + \operatorname{ctg} 30°$;

2) $\operatorname{tg} 60° + 2\cos 45° - \sqrt{3}\operatorname{ctg} 45°$;

3) $6\cos 30° - 3\operatorname{tg} 60° + 2\sin 45°$;

4) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 30° + 4\sin 30° - \sqrt{3}\operatorname{ctg} 30°$;

5) $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

6) $2\cos\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{4}$;

7) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 2\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

8) $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - 2\sin\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

9) $2\sin\pi - \cos 0 + \operatorname{tg} 0 + 3\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{3}$;

<u>Пример:</u> Вычислить

$$5\sin 90° + 2\cos 0° - 2\sin 270° + 10\cos 180°$$

Решение: смотрим по таблице значений основных тригонометрических функций:

A	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

$$5\sin 90° + 2\cos 0° - 2\sin 270° + 10\cos 180° = 5\cdot 1 + 2\cdot 1 - 2\cdot(-1) + 10\cdot(-1) = -1$$

2. Найдите значение выражения:

1) $4\cos 60° + 2\sin 45° - 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,30°$;

2) $\sqrt{2}\cos 45° - 3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,60° + 6\cos 30°$;

3) $2\cos\frac{\pi}{6} - 4\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{6}$;

4) $4\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - 2\cos\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{6}$;

5) $3\sin\frac{\pi}{2} + \cos 2\pi - 4\,\mathrm{tg}\,0 + \sin\pi + \cos\frac{\pi}{2}$;

6) 4cos 180° – 3sin 270° + 3sin 360° – ctg 90°.

3. Определить, в какой четверти находится конечная точка поворота на угол α и каковы знаки cosα и sinα, если угол равен:

1) 260°; 3) 565°; 5) –915°; 7) 8760°;

2) 290°; 4) 480°; 6) –825°; 8) 8000°.

4. Определить знак каждого из данных произведений:

1) sin 100°· sin 132°; 5) ctg 300°· sin 222°;

2) cos 210°· sin 115°; 6) sin 118°· cos 118°· tg 118°;

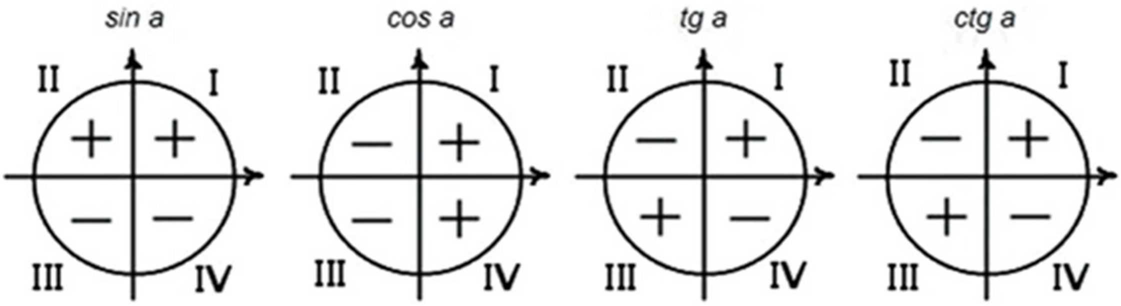
3) cos 285°· cos 316°; 7) sin 2,1 · ctg 2,1 · cos 2,1;

4) tg 112°· sin 165°; 8) cos 123°· tg 123°· sin 312°.

<u>Пример:</u> Определить знак данного произведения:

cos 123°·tg 123°·sin 312°.

Угол $123° \in II$ четверти, а во второй четверти функции косинус и тангенс имеют знак «-», 312° - угол четвертой четверти, синус в ней имеет знак - «-».Таким образом перемножаются три отрицательных значения и получается, что знак произведения - «-»



Значит, окончательно: $123° \cdot tg\ 123° \cdot \sin 312° < 0$

5. Вычислите:

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right);$

2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)ctg\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)tg\left(-\frac{\pi}{4}\right);$

3) $\sin(-\pi)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)+ctg\left(-\frac{\pi}{2}\right).$

6. Найдите значение выражения:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right);$

2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right);$

3) $\cos(-2\pi)+\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+ctg\left(-\frac{\pi}{4}\right)+tg(-\pi).$

7. Найдите значение:

1) cos 2550°;	5) sin(–4005°);	9) cos(–2220°);
2) tg 2205°;	6) tg 3630°;	10) sin(–3555°);
3) sin 3300°;	7) ctg 2100°;	11) tg(–2460°);
4) ctg 2130°;	8) cos(–3210°);	12) ctg(–2115°).

8. Вычислите:

1) sin 2580°;	3) tg(–2835°);	5) ctg(–2565°);

2) $\mathrm{ctg}\, 2190°$; 4) $\sin 2490°$; 6) $\cos(-2820°)$.

9. Определите:

1) $\sin\frac{37\pi}{6}$; 5) $\cos\frac{13\pi}{3}$; 9) $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$;

2) $tg\left(-\frac{37\pi}{3}\right)$; 6) $tg\frac{31\pi}{6}$; 10) $ctg\frac{49\pi}{4}$;

3) $ctg\frac{47\pi}{4}$; 7) $\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$; 11) $\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right)$;

4) $\cos\frac{17\pi}{4}$; 8) $ctg\frac{26\pi}{3}$; 12) $tg\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$.

10. Вычислите:

1) $\cos\frac{19\pi}{3}$; 3) $ctg\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$; 5) $\sin\frac{35\pi}{3}$;

2) $\sin\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$; 4) $\cos\frac{59\pi}{6}$; 6) $tg\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$.

11. Найдите значения тригонометрических функций угла α, если известно, что:

1) $\sin\alpha = \frac{5}{13},\ \ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{3},\ \ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

2) $\cos\alpha = \frac{4}{5},\ \ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; 4) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{12}{5},\ \ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

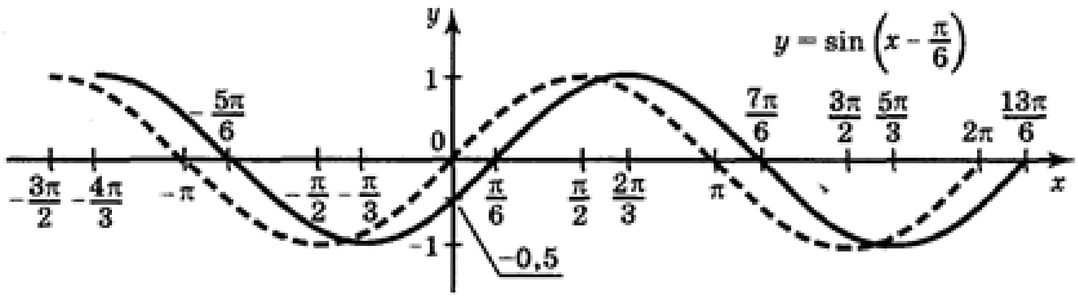
12. По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

1) $\cos\alpha = -0{,}6,\ \ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\alpha = \frac{8}{17},\ \ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Пример: Постройте графики функций:

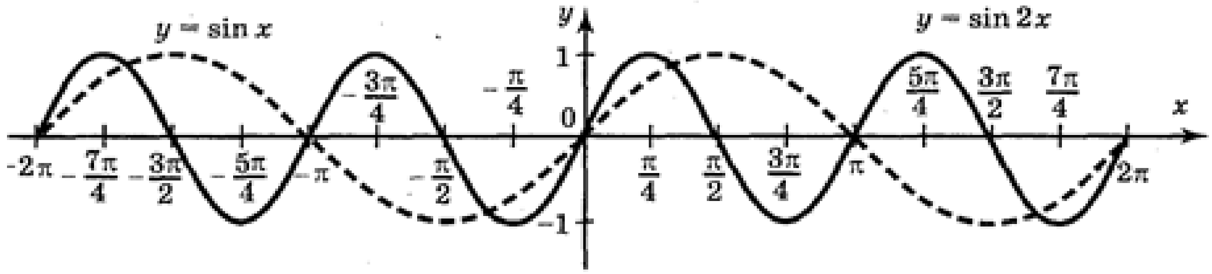
а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

Решение: График данной функции получается из графика функции $y = \sin x$ путем параллельного переноса вдоль оси ох на $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ единиц вправо.



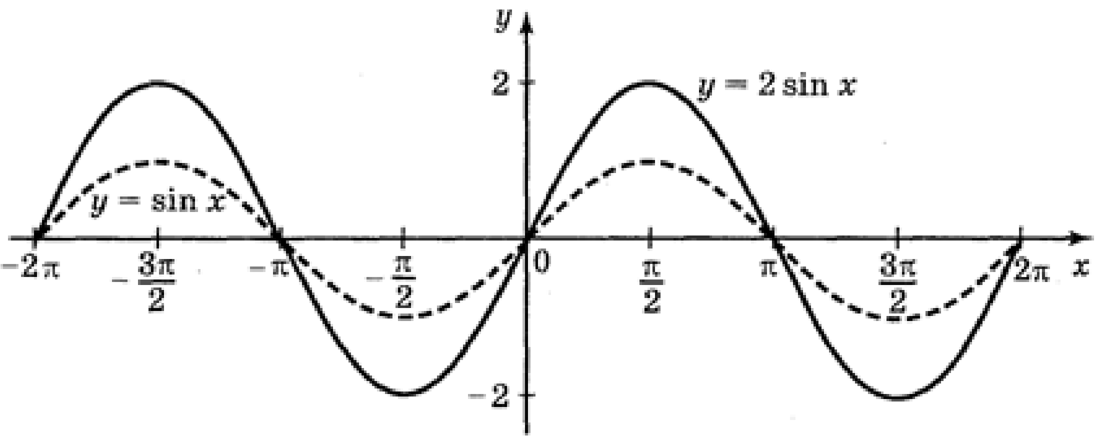
б) $y = \sin 2x$;

Решение: График данной функции получается из графика функции $y = \sin x$ путем растяжения в 2 раза вдоль оси ох.



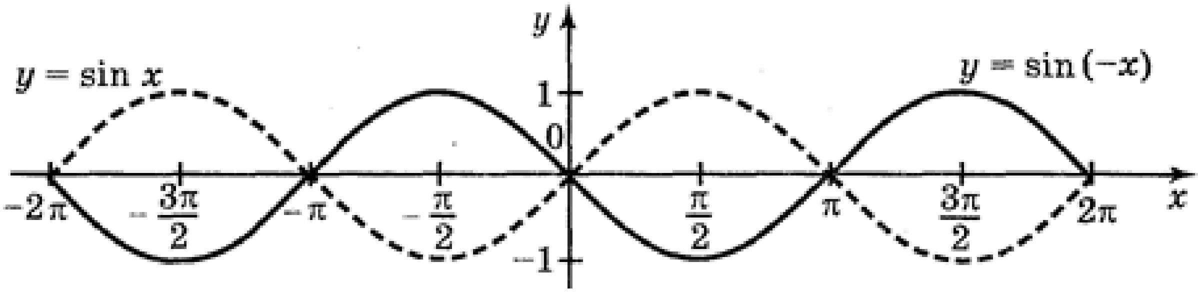
в) $y = 2\sin x$;

Решение: График данной функции получается из графика функции $y = \sin x$ путем растяжения в 2 раза вдоль оси оу.



г) $y = \sin(-x)$.

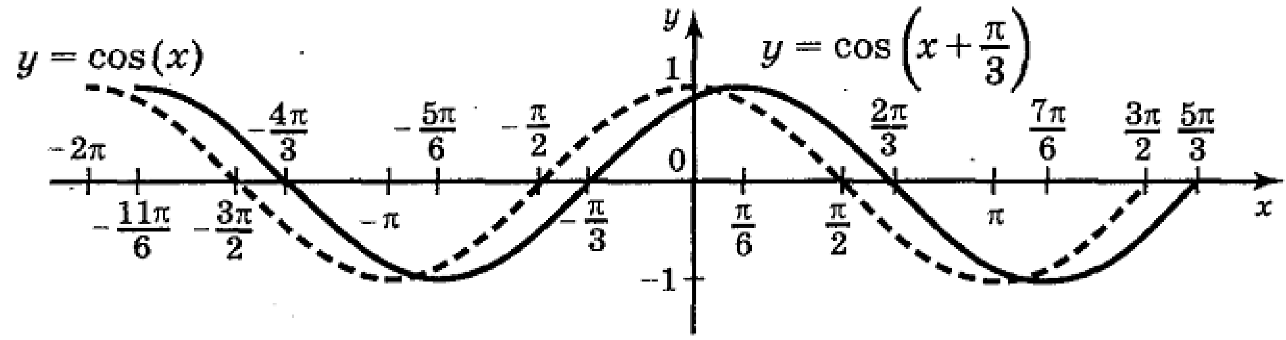
Решение: График данной функции получается из графика функции $y = \sin x$ путем отображения относительно оси ох.



Пример: Постройте графики функций:

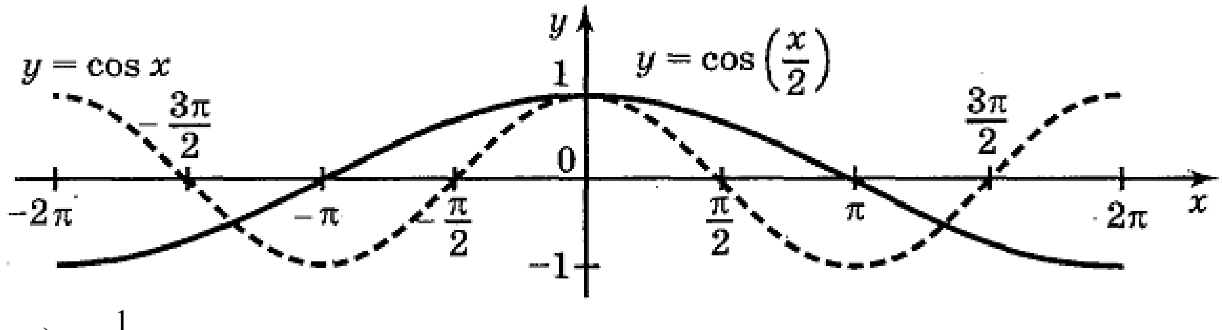
а) $y=cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;

Решение: График данной функции получается из графика функции $y=cos\ x$ путем параллельного переноса вдоль оси ох на $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ единиц влево.



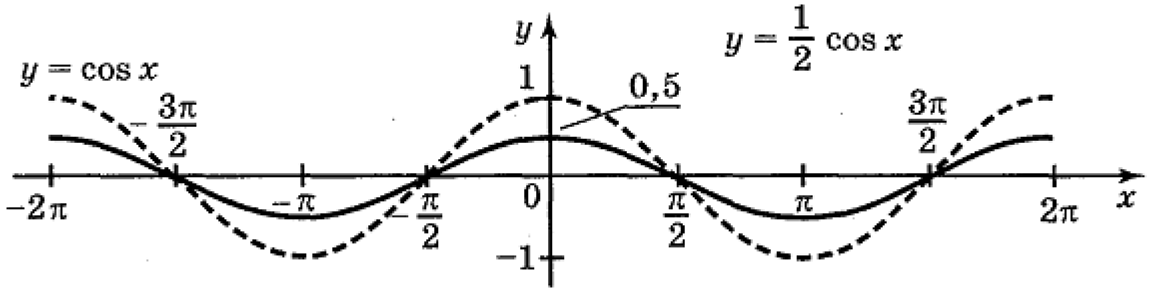
б) $y=cos\frac{x}{2}$;

Решение: График данной функции получается из графика функции $y=cos\ x$ путем растяжения 2 раза вдоль оси ох.



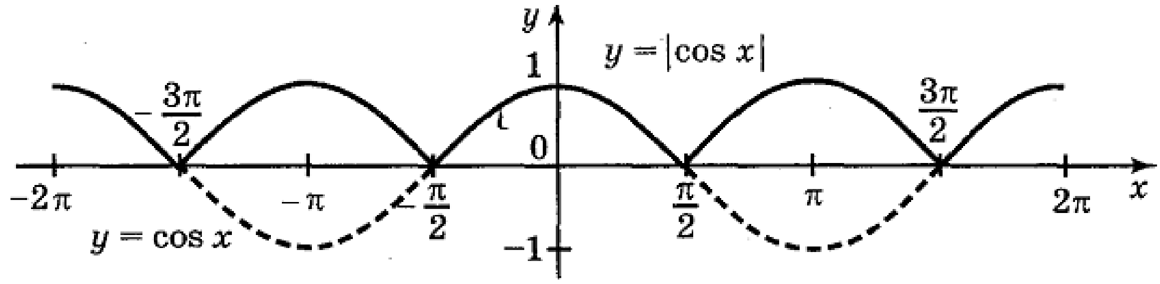
в) $y=\frac{1}{2}cos\ x$;

Решение: График данной функции получается из графика функции $y=cos\ x$ путем сжатия его в 2 раза вдоль оси оу.



г) $y = |\cos x|$.

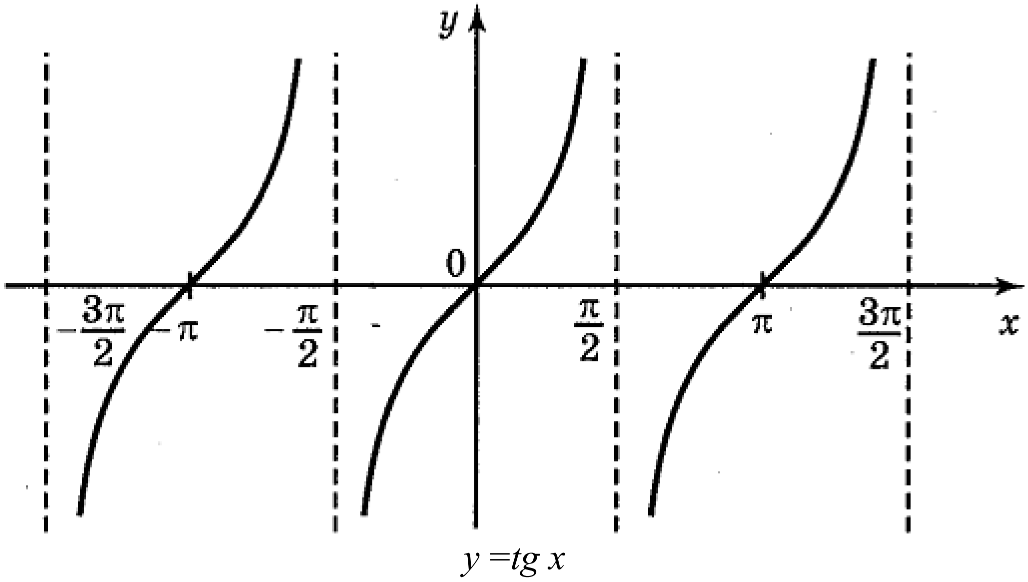
Решение: График данной функции получается из графика функции $y = \cos x$ путем отображения отрицательной части относительно оси ох .



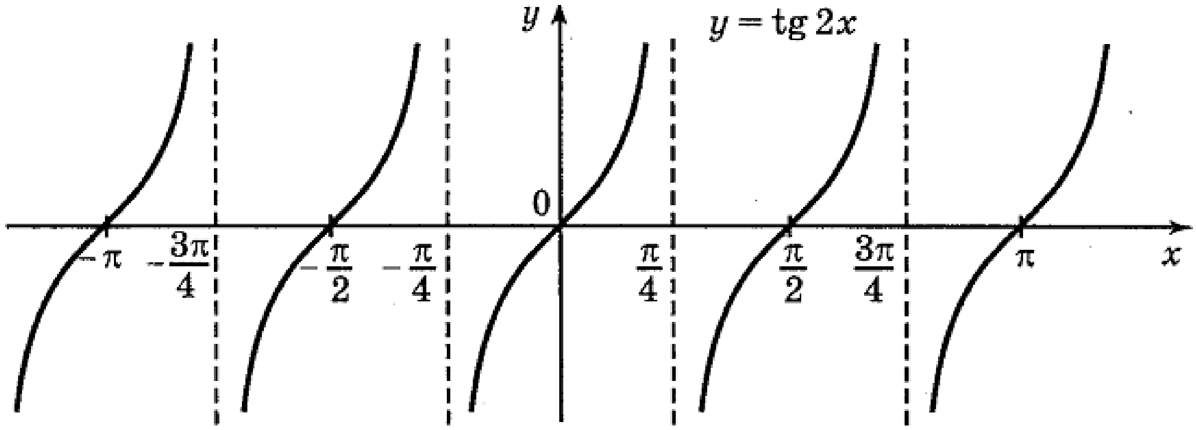
<u>Пример:</u> Постройте графики функций:

а) $y = tg\ 2x$;

Решение: График данной функции получается из графика функции $y = tg\ x$ путем растяжения его в 2 раза вдоль оси оу.

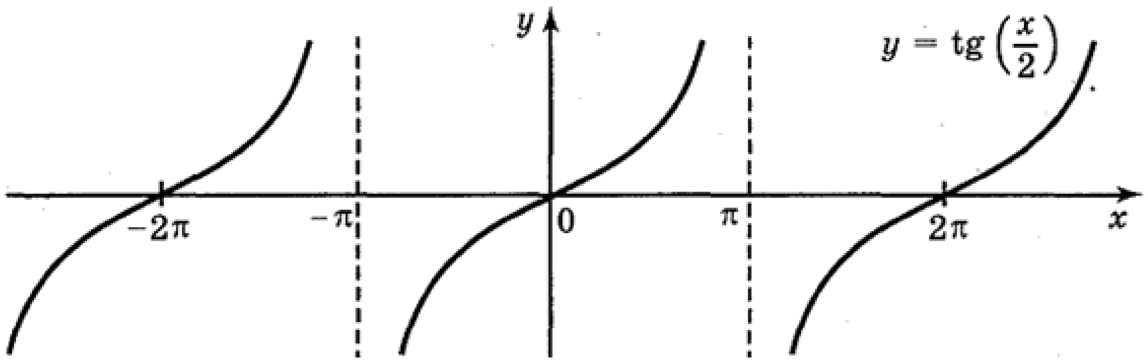


$y = tg\ x$



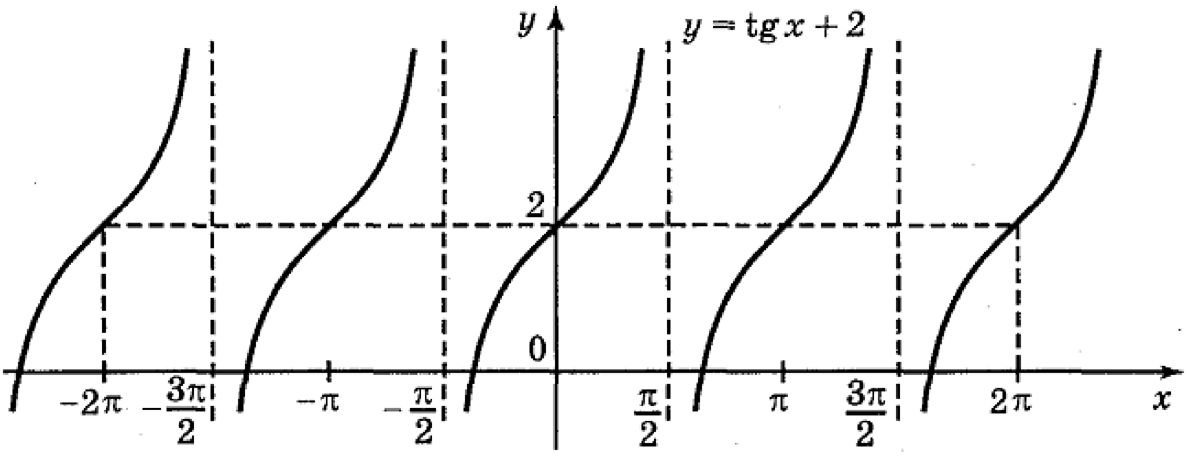
б) $y = tg\frac{x}{2}$;

Решение: График данной функции получается из графика функции $y = tg\ x$ путем растяжения его в 2 раза вдоль оси ох.



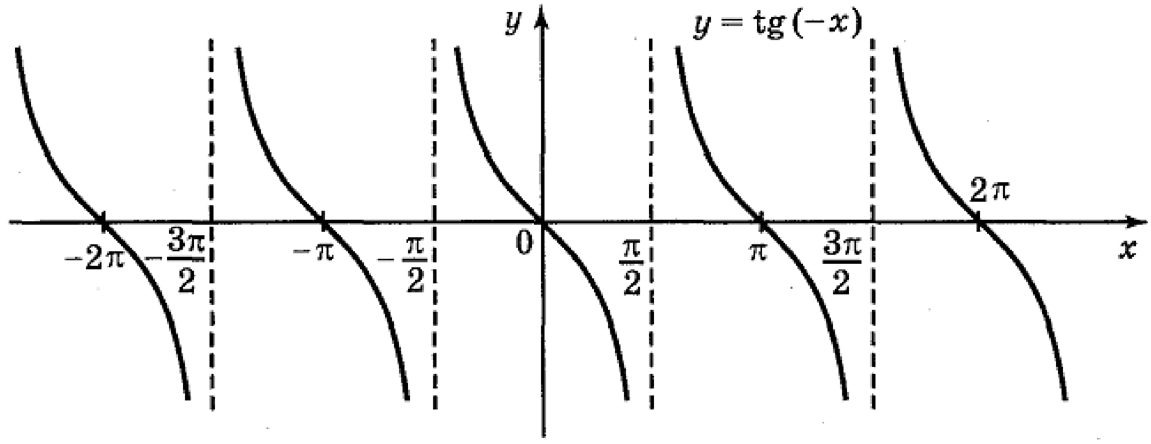
в) $y = tgx + 2$;

Решение: График данной функции получается из графика функции $y = tg\ x$ путем параллельного переноса его на 2 единицы вверх по оси оу.



г) $y = tg\ (-x)$.

Решение: График данной функции получается из графика функции $y = tg\ x$ путем отображения относительно точек х=$\pi + \pi n,\ n \epsilon Z$



3. Задания по теме: «Тождественные преобразования тригонометрических выражений»

1. Упростите выражения (предпочтительно устно):

1) $4\cos^2 3\alpha + 4\sin^2 3\alpha$; 2) $2\sin^2 5\alpha + 2\cos^2 5\alpha$;

3) $1 - \sin^2 3x$; 4) $1 - \cos^2 4\beta$;

5) $\sin^2 7y - 1$; 6) $\cos^2 3t - 1$;

7) $2\sin^2 t - 1$; 8) $1 - 2\cos^2 3\gamma$;

9) $\mathrm{tg}\, 3\beta\ \mathrm{ctg}\, 3\beta$; 10) $\mathrm{ctg}\, 1{,}1 \cdot \mathrm{tg}\, 1{,}1$;

11) $\mathrm{tg}\, \alpha \cos \alpha$; 12) $\sin 2\varphi\ \mathrm{ctg}\, 2\varphi$;

13) $\mathrm{ctg}^2\varphi \sin^2\varphi$; 14) $\mathrm{tg}^2\alpha \cos^2\alpha$;

15) $\mathrm{tg}\, \gamma \cos \gamma \sin \gamma$; 16) $\sin 2\alpha \cos 2\alpha\ \mathrm{ctg}\, 2\alpha$;

17) $(1 - \cos 3\beta)(1 + \cos 3\beta)$; 18) $(1 - \sin 2\varphi)(1 + \sin 2\varphi)$;

19) $(\sin t + 1)(\sin t - 1)$; *20*) $(\cos 5\alpha - 1)(1 + \cos 5\alpha)$;

21) $\sin^2\gamma \cos^2\gamma + \cos^4\gamma$; 22) $\sin^4\varphi + \sin^2\varphi \cos^2\varphi$;

23) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$;

24) $(3\sin t + 4\cos t)^2 + (4\sin t - 3\cos t)^2$.

2. Преобразуйте следующие выражения:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\beta$; 13) $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}^2\alpha$;
2) $\mathrm{tg}\, x\ \mathrm{ctg}\, x - \cos^2 3\alpha$; 14) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha - \cos^4\alpha$;
3) $\mathrm{tg}^2 5\beta + \mathrm{tg}\, t\ \mathrm{ctg}\, t$; 15) $\sin^4\beta + \sin^2\beta \cos^2\beta + \cos^2\beta$;
4) $(1 - \sin^2 3\alpha)\,\mathrm{tg}^2 3\alpha$; 16) $\mathrm{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi - \mathrm{tg}^2\varphi \sin^2\varphi$;
5) $\mathrm{ctg}^2\beta(\cos^2\beta - 1) + 1$; 17) $(\mathrm{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha)\,\mathrm{tg}^2\alpha$;
6) $1 + \cos^2\gamma - \sin^2\gamma$; 18) $\mathrm{ctg}^2 y\,(1 - \cos y)(1 + \cos y)$;

7) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$; 19) $(\mathrm{tg}\,x-1)^2-\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

8) $(\mathrm{tg}\,\beta\cos\beta)^2+(\mathrm{ctg}\,\beta\sin\beta)^2$; 20) $\dfrac{1}{\sin^2 x}-(\mathrm{ctg}\,x+1)^2$;

9) $2-\cos^2\varphi\,\mathrm{tg}^2\varphi-\cos^2\varphi$; 21) $\dfrac{1-\cos^2 7y}{\cos^2 7y}$;

10) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\mathrm{tg}^2\alpha-\cos^2\alpha$; 22) $\dfrac{1-\sin^2 7\alpha}{1-\cos^2 7\alpha}+\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{9}\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi}{9}$;

11) $\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{\sin^2 3\gamma}$; 23) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos 0+\cos x}$;

12) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)$; 24) $\mathrm{tg}\,\gamma\,\dfrac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma-1}$.

3. Упростите выражения:

1) $\sin^2 x-\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\alpha$;
2) $\sin^2 4\alpha+\mathrm{tg}^2\varphi+\cos^2 4\alpha$;
3) $\mathrm{tg}\,3\,\mathrm{ctg}\,3+\mathrm{ctg}^2 x$;
4) $7-4\sin^2\beta-4\cos^2\beta$;
5) $\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\varphi\sin\varphi-1$;
6) $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+tg\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-tg\alpha\right)$;
7) $\dfrac{1}{\cos^2 2t}-\mathrm{tg}^2 2t$;
8) $\dfrac{1}{\sin^2 3x}-\mathrm{ctg}^2 3x-\sin^2\alpha$;
9) $1-\dfrac{1}{\sin^2 2x}$;
10) $\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha+\sin^2\alpha$;
11) $\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x$;
12) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;
13) $\cos^2 t+\mathrm{ctg}^2 t\cos^2 t-\mathrm{ctg}^2 t$;
14) $(\mathrm{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha)\,\mathrm{tg}^2\alpha$;
15) $\dfrac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}\mathrm{ctg}^2\beta$;
16) $\dfrac{1-\cos^2 3x}{1-\sin^2 3x}$;
17) $\dfrac{\cos^2 5\alpha}{2\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin 5\alpha}$;
18) $\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 0}{\sin^2 x-\sin^2\dfrac{\pi}{2}}$.

4. Преобразуйте выражения:

1) $\mathrm{ctg}\,t-\dfrac{\cos t-1}{\sin t}$;
2) $\dfrac{\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin^2\alpha}-\mathrm{ctg}\,\alpha\cos\alpha$;
3) $\sin x+\dfrac{2\cos^2 x-1}{\sin x+\cos x}$;
4) $\dfrac{(\sin t\,\mathrm{ctg}\,t)^2}{\sin^2 t-1}+\cos^2 t$;
7) $\left(\sin^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha\right)\mathrm{ctg}\,\alpha$;
8) $\dfrac{(\sin 2x+\cos 2x)^2-1}{2\sin 2x\,\mathrm{ctg}\,2x}$;
9) $\sin t\cos t\,(\mathrm{tg}\,t+\mathrm{ctg}\,t)$;
10) $\sin t-\cos t\,(\mathrm{tg}\,t+\mathrm{ctg}\,t)$;

5) $2\sin\beta-\dfrac{\cos\beta-\cos^3\beta}{\sin\beta\cos\beta}$;

11) $\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$;

6) $\dfrac{1-2\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi-1}-\cos^2\varphi$;

12) $\dfrac{1}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1-\mathrm{ctg}^2\alpha}$.

5. Замените выражение ему равным:

1) $\cos^2\alpha-\left(\mathrm{ctg}^2\alpha+1\right)\sin^2\alpha$;

7) $\left(\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\mathrm{ctg}\,\alpha$;

2) $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}-\mathrm{tg}\,x$;

8) $\dfrac{1-(\cos 3\alpha-\sin 3\alpha)^2}{2\cos 3\alpha\ \mathrm{tg}3\alpha}$;

3) $\mathrm{tg}^2\alpha+\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\alpha}$;

9) $\dfrac{\sin\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha}{1+\sin\alpha\ \mathrm{tg}\,\alpha}$;

4) $\dfrac{1-2\sin^2\gamma}{\sin\gamma-\cos\gamma}+\cos\gamma$;

10) $\dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$;

5) $\mathrm{ctg}^2 t-\dfrac{1-2\cos^2 t}{1-2\sin^2 t}$;

11) $(1+\mathrm{tg}\,\alpha)^2+(1-\mathrm{tg}\,\alpha)^2$;

6) $\dfrac{\cos\alpha\ \mathrm{tg}\,\alpha}{\sin\alpha-\sin^3\alpha}-1$;

12) $(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha)^2-(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha)^2$.

6. Зная значение одной функции угла α, найдите значения остальных тригонометрических функций этого угла:

1) $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13},\ \ \pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;   2) $\sin\alpha=0{,}6,\ \ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

7. Вычислите остальные три тригонометрические функции, если:

1) $\sin\alpha=-\dfrac{9}{41},\ \ \dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; 2) $\mathrm{ctg}\,\alpha=-\dfrac{7}{24},\ \ \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

8. Упростите выражения:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\beta+1}{1+\mathrm{ctg}\,\beta}$;

7) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\mathrm{tg}\,\alpha$;

2) $\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha}$;

8) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}+\sin\alpha$;

3) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}\cdot\dfrac{1-\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$;

9) $\dfrac{2\sin^2\varphi}{1-\cos\varphi}-2\cos\varphi$;

4) $\dfrac{(\sin t+\cos t)^2-1}{\mathrm{tg}\,t-\sin t\cos t}$;

10) $\dfrac{1}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1}{1-\cos\alpha}$;

5) $\dfrac{\cos^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha}$;

11) $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

6) $\dfrac{2\sin x\cos x-\cos x}{1-\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x}$;

12) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$.

9. Преобразуйте выражения:

1) $\operatorname{ctg}\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\operatorname{tg}\beta$;

3) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;

4) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;

5) $\dfrac{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha\left(4\sin\alpha+1\right)}$;

6) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$;

7) $\operatorname{tg}\gamma\dfrac{1-\operatorname{ctg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\gamma}$;

8) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^2 t+\operatorname{ctg}^2 t+2}$;

9) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 t+1}{\operatorname{tg}^2 t+\operatorname{ctg}^2 t+2}$.

10. Докажите тождество:

1) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

2) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

3) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\left(1+\sin\alpha\right)\left(1+\operatorname{ctg}\alpha\right)$;

4) $\left(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha\right)\left(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\right)=\left(1+\sin\alpha\right)\left(1+\cos\alpha\right)$;

5) $\left(\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right):\left(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-1\right)=\sin\alpha+\cos\alpha$;

6) $\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)^2+\left(\cos x+\dfrac{1}{\cos x}\right)^2=7+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x$.

11. Покажите, что при всех допустимых значениях углов значение выражения не зависит от величины угла:

1) $\sin^2\alpha\left(2+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(2\operatorname{ctg}\alpha+1\right)-5\sin\alpha\cos\alpha$;

2) $\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta$;

3) $\dfrac{\left(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)\left(\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1\right)}{\left(\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+1\right)\left(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1\right)}$;

4) $\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)$;

5) $\dfrac{\cos^4\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$;

6) $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$.

Самостоятельная работа по теме: «Основные тригонометрические формулы»

Вариант 1

1. Вычислите: $3\cos 60° + 2\sin 30°$
2. Найдите значение выражения: $\sqrt{3}tg\dfrac{\pi}{6} - \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}$
3. Упростите выражение: $1 - \sin x \cos x\, tgx$ и найдите его значение при $x = \dfrac{\pi}{3}$
4. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $270° < \alpha < 360°$
5. Упростите выражение: $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x$ и найдите его значение при $x = \dfrac{\pi}{12}$
6. Вычислите: $\sin(-1110°) + 2\text{tg}\left(-\dfrac{33\pi}{12}\right)$
7. Найдите значение выражения: $1 - \text{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

Вариант 2

1. Вычислите: $2\cos 0° - 4\sin 30°$
2. Найдите значение выражения: $\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4} + ctg\dfrac{\pi}{4}$
3. Упростите выражение: $(\sin x + 1)(1 - \sin x)$ и найдите его значение при $x = \dfrac{\pi}{6}$
4. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$ и $180° < \alpha < 270°$
5. Упростите выражение: $\dfrac{2\sin^2 x - 2}{\cos^2 x}$ и найдите его значение при $x = \dfrac{\pi}{8}$
6. Вычислите: $\text{ctg}(-765°) - 2\cos\left(-\dfrac{19\pi}{3}\right)\dfrac{1}{\sqrt{50}}$
7. Найдите значение выражения: $\text{tg}\alpha + 2$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{50}}$ и $0 < \alpha < \pi$

Вариант 3

1. Вычислите: $\cos 180° + 4\text{tg}\, 45°$
2. Найдите значение выражения: $\sqrt{3}ctg\dfrac{\pi}{6} - 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}$

3. Упростите выражение: $1-\sin x\cos x\, ctgx$ и найдите его значение при $x=\dfrac{\pi}{3}$

4. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ и $0° < \alpha < 90°$

5. Упростите выражение: $\dfrac{1}{1+tg^2x}+\dfrac{1}{1+ctg^2x}$ и найдите его значение при $x=-\dfrac{\pi}{12}$

6. Вычислите: $\sin\left(-\dfrac{25\pi}{6}\right)+3\text{ctg}\,(-765°)$

7. Найдите значение выражения: $2+\sin\alpha$, если $\text{ctg}\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$

Вариант 4

1. Вычислите: $2\text{tg}\,45° - \sin 270°$

2. Найдите значение выражения: $3\cos\dfrac{\pi}{2}+\sqrt{27}ctg\dfrac{\pi}{3}$

3. Упростите выражение: $(\cos x + 1)(1 - \cos x)$ и найдите его значение при $x=\dfrac{\pi}{4}$

4. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $90° < \alpha < 180°$

5. Упростите выражение: $\dfrac{\sin^2 x-1}{1-\cos^2 x}+ctg^2x$ и найдите его значение при $x=-\dfrac{\pi}{8}$

6. Вычислите: $\cos(-1500°) - 2\text{tg}\left(-\dfrac{9\pi}{4}\right)$

7. Найдите значение выражения: $\cos\alpha - 1$, если $\text{tg}\alpha=-\dfrac{\sqrt{91}}{3}$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$

Вариант 5

1. Вычислите: $3\sin 180° - 2\text{ctg}\,45°$

2. Найдите значение выражения: $\sqrt{3}tg\dfrac{\pi}{3}+2\cos\pi$

3. Упростите выражение: $1 - (\sin^2 x - 2\cos^2 x)$ и найдите его значение при $x=\dfrac{\pi}{6}$

4. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$ и $90° < \alpha < 180°$

5. Упростите выражение: $\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}$ и найдите его значение при $x=\frac{\pi}{10}$

6. Вычислите: $2\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)+\text{tg}\,(-1125°)$

7. Найдите значение выражения: ctgα – 3, если sinα = $-\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

Вариант 6

1. Вычислите: 5sin 30° + 2cos 180°
2. Найдите значение выражения: $2tg\frac{\pi}{4}-\sqrt{3}ctg\frac{\pi}{3}$
3. Упростите выражение: 1 – (3cos^2x + sin^2x) и найдите его значение при $x=\frac{\pi}{3}$
4. Найдите cosα, если sinα = 0,6 и 0° $<\alpha<$ 90° $x=-\frac{\pi}{10}$
5. Упростите выражение: $\frac{\cos x}{1-\sin x}+\frac{1+\sin x}{\cos x}$ и найдите его значение при $x=-\frac{\pi}{10}$
6. Вычислите: ctg (– 1125°) – $4\sin\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$
7. Найдите значение выражения: 3 – tgα, если cosα = $\frac{5}{\sqrt{61}}$ и $0<\alpha<\pi$

Самостоятельная работа по преобразованию тригонометрических выражений:

Вариант 1.	Вариант 2.
Упростить: 1) $\sin^2 8t+\cos^2 8t+1$ 2) $\frac{1-\sin t}{\cos t}-\frac{\cos t}{1+\sin t}$ 3) $2\cos^2 t-\cos 2t$ 4) $(tgx+ctgx)\sin 2x$	Упростить: 1) $1-\sin^2 3t-\cos^2 3t$ 2) $\frac{\sin t}{1-\cos t}-\frac{1+\cos t}{\sin t}$ 3) $\frac{2\sin^2 t\cdot ctgt}{\sin 2t}$ 4) $\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}-\cos\alpha$
Вариант 3. Упростить:	Вариант 4. Упростить:

1) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\cdot ctg^2\alpha$ 2) $2\sin t+\frac{2\cos^2 t}{1+\sin t}$ 3) $2\sin^2 2\alpha+\cos 4\alpha$ 4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha$	1) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\cdot tg^2\alpha$ 2) $-2\cos t+\frac{2\sin^2 t}{1-\cos t}$ 3) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot tg\alpha}$ 4) $\frac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$
Вариант 5. Упростить: 1) $\frac{2\cos^2 x}{1+\cos 2x}$ *Вычислить*: 2) $4\sin 15^\circ\cos 15^\circ$ 3) $3\sin^2 3\alpha-2\sin(\pi-\alpha)+3\cos^2 3\alpha,\quad при\ \alpha=\frac{\pi}{6}$ 4) $50\sin 2x$, если $\cos x=-\frac{3}{5}$ *и* $-\pi<x<0$	Вариант 6 Упростить: 1) $\frac{1-\cos(\pi-2x)}{1-\sin^2 x}$ *Вычислить*: 2) $2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$ 3) $\sin\alpha\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-2\cos(\pi-\alpha),\ при\ \ \alpha=\frac{\pi}{3}$ 4) $9\sqrt{5}\sin 2x$, если $\sin x=-\frac{2}{3}$ *и* $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$
Вариант 7. Упростить: 1) $\frac{2\sin^2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$ *Вычислить*: 2) $4\sin 165^\circ\cos 165^\circ$ 3) $\sin\alpha\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+2\sin(\pi+\alpha),\ при\ \ \alpha=\frac{\pi}{3}$ 4) $49\sqrt{6}\sin 2x$, если $\cos x=-\frac{5}{7}$ *и* $-\frac{\pi}{2}<x<\pi$	Вариант 8. Упростить: 1) $\frac{1-\cos(2\pi-2\alpha)}{1-\cos^2\alpha}$ *Вычислить*: 2) $\cos 75^\circ\cos 15^\circ$ 3) $\frac{\cos^2(\pi-\alpha)}{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$, *если* $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ 4) $3\cos^2 x-1$, если $\sin^2 x=0{,}2$

4. Задания по теме: «Применение основных тригонометрических формул для упрощения выражений»

1. Вычислите:

1) $\sin 17^\circ\cos 13^\circ+\cos 17^\circ\sin 13^\circ$; 6) $\sin 20^\circ\cos 50^\circ-\cos 20^\circ\sin 50^\circ$;

2) $\sin 9^\circ\cos 99^\circ-\sin 99^\circ\cos 9^\circ$; 7) $\cos 10^\circ\cos 35^\circ-\sin 35^\circ\sin 10^\circ$;

3) $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{7}$; 8) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{11\pi}{12}$;

4) $\sin 15^\circ\sin 15^\circ-\cos 15^\circ\cos 15^\circ$; 9) $\sin 22{,}5^\circ\sin 22{,}5^\circ-\cos 22{,}5^\circ\cos 22{,}5^\circ$;

5) $\dfrac{\sin 20^\circ \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cos 20^\circ}{\cos 10^\circ \cos 5^\circ - \sin 10^\circ \sin 5^\circ} - \operatorname{tg} 15^\circ$; 10) $\dfrac{\cos 18^\circ \cos 28^\circ - \sin 18^\circ \sin 28^\circ}{\sin 34^\circ \sin 12^\circ - \cos 12^\circ \cos 34^\circ}$.

2. Найдите значение выражения:

1) $\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cos 10^\circ$; 6) $\cos 109^\circ \cos 49^\circ + \sin 109^\circ \sin 49^\circ$;

2) $\sin 50^\circ \cos 20^\circ - \cos 50^\circ \sin 20^\circ$; 7) $\cos 71^\circ \sin 11^\circ - \sin 71^\circ \cos 11^\circ$;

3) $\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{20} + \cos\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{\pi}{20}$; 8) $\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{\pi}{5} - \sin\dfrac{2\pi}{15}\sin\dfrac{\pi}{5}$;

4) $\dfrac{\sin 37^\circ \cos 7^\circ - \cos 37^\circ \sin 7^\circ}{\cos 47^\circ \cos 17^\circ + \sin 17^\circ \sin 47^\circ}$; 9) $\dfrac{\operatorname{tg} 31^\circ + \operatorname{tg} 14^\circ}{1 - \operatorname{tg} 31^\circ \operatorname{tg} 14^\circ}$;

5) $\dfrac{\sin 0{,}3\pi \cos(-2{,}8\pi) + \cos 0{,}3\pi \sin(-2{,}8\pi)}{\cos 0{,}3\pi \cos 2{,}3\pi - \sin 0{,}3\pi \sin(-2{,}3\pi)}$; 10) $\dfrac{\operatorname{tg} 74^\circ - \operatorname{tg} 14^\circ}{1 + \operatorname{tg} 74^\circ \operatorname{tg} 14^\circ}$.

3. Упростите выражения:

1) $\dfrac{\sin(2\alpha + \varphi) + \sin(2\alpha - \varphi)}{\sin(2\alpha + \varphi) - \sin(2\alpha - \varphi)}$; 4) $\dfrac{\cos(3x + a) + \sin 3x \sin a}{\cos(3x - a) - \sin 3x \sin a}$;

2) $\dfrac{\sin(5\varphi + \beta) - \sin\beta \cos 5\varphi}{\sin(5\varphi - \beta) + \sin\beta \cos 5\varphi}$; 5) $\dfrac{\cos(\alpha - 3\beta) - \sin 3\beta \sin\alpha}{\cos(3\beta + \alpha) + \sin\alpha \sin 3\beta}$;

3) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}$; 6) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)}$.

4. Упростите следующие выражения:

1) $\dfrac{\sin(3a + 2b) - \sin(2b - 3a)}{\cos(2b + 3a) + \cos(2b - 3a)}$; 3) $\dfrac{\sin(45^\circ - \alpha) + \cos(45^\circ - \alpha)}{\sin(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ - \alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha - 2\beta) + 2\cos\alpha \sin 2\beta}{2\cos\alpha \cos 2\beta - \cos(\alpha - 2\beta)}$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} 7\alpha}{1 - \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} 7\alpha}$.

5. Дано:

1. $\operatorname{tg}\alpha = 3$; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{2}$. Найти: а) tg (α + β); б) tg (α – β).

2. $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\cos\beta = -\dfrac{4}{5}$; $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$. Найти sin (α – β).

3. $\cos\alpha = \dfrac{7}{25}$; $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$; $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Найти tg (α – β).

4. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$, $\sin\gamma = \frac{7}{25}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Найти $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$.

9. Упростите выражения:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}+\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

10. Замените тригонометрической функцией угла α:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 5) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 9) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

2) $\mathrm{ctg}\,(\pi + \alpha)$; 6) $\mathrm{tg}\,(180° - \alpha)$; 10) $\cos\,(90° - \alpha)$;

3) $\cos\,(2\pi - \alpha)$; 7) $\sin\,(180° + \alpha)$; 11) $\sin\,(270° - \alpha)$;

4) $\sin\,(2\pi + \alpha)$; 8) $\mathrm{ctg}\,(360° - \alpha)$; 12) $\mathrm{tg}\,(270° + \alpha)$.

11. Упростите выражение:

1) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $\mathrm{tg}\,(\alpha - 2\pi)$.

12. Преобразуйте выражение:

1) $\sin^2(\pi+\alpha)$; 2) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

13. Приведите к тригонометрической функции угла α:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; 9) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;

2) $\mathrm{tg}\,(\pi + \alpha)$; 6) $\mathrm{ctg}\,(\pi - \alpha)$; 10) $\cos\,(\alpha - \pi)$;

3) $\cos\,(2\pi + \alpha)$; 7) $\sin\,(\pi + \alpha)$; 11) $\mathrm{ctg}\,(\alpha - 360°)$;

4) $\mathrm{tg}\,(90° - \alpha)$; 8) $\cos\,(90° + \alpha)$; 12) $\mathrm{tg}\,(-\alpha + 270°)$.

14. Вычислите:

1) $\cos 73° \sin 103° + \cos 17° \sin 13°$; 6) $\cos 73° \sin 107° + \sin 73° \sin 197°$;

2) $\sin 170° \cos 20° + \sin 20° \cos 350°$; 7) $\cos 109° \cos 49° + \cos 41° \sin 71°$;

3) $\cos 118° \cos 28° - \cos 152° \sin 28°$; 8) $\sin 7° \cos 217° + \cos 7° \cos 53°$;

4) $\cos 5° \cos 40° - \sin 140° \sin 175°$; 9) $\sin 22° \cos 203° + \cos 22° \cos 113°$;

5) $\dfrac{\cos 34^\circ \cos 154^\circ + \sin 386^\circ \sin 34^\circ}{\sin 53^\circ \cos 8^\circ - \cos 53^\circ \sin 172^\circ}$; 10) $\dfrac{\cos 378^\circ \sin 27^\circ + \cos 27^\circ \sin 18^\circ}{\sin 158^\circ \sin 52^\circ + \cos 52^\circ \cos 22^\circ}$.

15. Найдитезначениевыражения:

1) $\sin 49^\circ \cos 11^\circ + \cos 229^\circ \cos 101^\circ$; 5) $\cos 11^\circ \sin 236^\circ - \sin 214^\circ \sin 11^\circ$;

2) $\sin 43^\circ \cos 13^\circ + \cos 103^\circ \sin 47^\circ$; 6) $\sin 175^\circ \cos 140^\circ - \sin 85^\circ \cos 50^\circ$;

3) $\dfrac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \sin 66^\circ}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \cos 51^\circ \sin 69^\circ}$; 7) $\dfrac{\cos 54^\circ \cos 7^\circ - \cos 36^\circ \sin 7^\circ}{\sin 73^\circ \cos 44^\circ - \cos 73^\circ \cos 46^\circ}$;

4) $\dfrac{\operatorname{ctg} 78^\circ - \operatorname{ctg} 303^\circ}{1 + \operatorname{tg}(-192^\circ) \operatorname{ctg} 237^\circ}$; 8) $\dfrac{\operatorname{tg} 225^\circ - \operatorname{ctg} 81^\circ \operatorname{ctg} 69^\circ}{\operatorname{ctg} 261^\circ + \operatorname{tg} 201^\circ}$.

16. Упростите выражения:

1) $\cos(3\pi - \beta) + \operatorname{ctg}(3{,}5\pi - \beta) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \beta\right)\operatorname{ctg}(\pi + \beta)$;

2) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)\sin\alpha + \cos^2(3\pi + \alpha) + \operatorname{tg}(5\pi + \alpha)\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \beta\right)} - \dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \beta\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(2\pi - \beta) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha)}$.

17. Преобразуйте выражения:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\pi + \alpha)$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \beta\right)\operatorname{ctg}(\pi - \beta) - \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right)\operatorname{tg}(2\pi + \beta)$;

3) $\dfrac{\cos(\pi + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} - \dfrac{\cos(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(2\pi - \alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

18. Вычислите:

1) $\operatorname{tg} 420^\circ + 2\cos 870^\circ - 2\cos 1410^\circ$;

2) $\operatorname{ctg} 585^\circ - 2\cos 1080^\circ + \sqrt{2}\sin 1125^\circ$;

3) $3\operatorname{tg} 930^\circ + \sin 1200^\circ - \cos 1770^\circ$.

19. Найдите значение выражения:

1) $3\operatorname{tg} 570^\circ - 2\cos 1350^\circ + 2\sin 1200^\circ$;

2) $\operatorname{ctg} 510° - 2\cos 765° - \sqrt{3}\operatorname{tg} 855°$;

3) $2\sin 750° + \sin 1230° + \operatorname{ctg} 1395°$.

20. Преобразуйте в синус, косинус или тангенс некоторого угла выражение:

1) $2 \sin \varphi \cos \varphi$;
2) $2 \sin 12° \cos 12°$;
3) $2 \cos 105° \sin 105°$;
4) $4 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\varphi$;
5) $7\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{6}\cos\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}$;
6) $8 \cos 2x \cos 4x \cos 8x$;
7) $\cos^2 70° - \sin^2 70°$;
8) $\cos^2 112{,}5° - \sin^2 67{,}5°$;
9) $\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$;
10) $\sin^2 3x - \cos^2 3x$;
11) $\cos^2\frac{5\beta}{2} - \sin^2\frac{5\beta}{2}$;
12) $\sin^2\frac{3\pi}{8} - \cos^2\frac{3\pi}{8}$.

21. Упростите выражение:

1) $2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi$;
2) $2 \cos 72° \sin 72°$;
3) $3 \sin \beta \cos \beta \cos 2\beta$;
4) $16 \cos 3x \cos 6x \cos 12x$;
5) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$;
6) $\cos^2 22{,}5° - \sin^2 22{,}5°$;
7) $\cos^2 5\alpha - \sin^2 5\alpha$;
8) $\sin^2\frac{\pi}{12} - \cos^2\frac{\pi}{12}$.

22. Применить формулы двойного угла к следующим выражениям:

1) $\sin 80°$;
2) $\sin 4\varphi$;
3) $\sin 15y$;
4) $\frac{\sin 66°}{2\sin 33°}$;
5) $\cos 46°$;
6) $\cos 6\beta$;
7) $\cos 13x$;
8) $\frac{\cos 20°}{\sin 10° + \cos 10°}$;
9) $\operatorname{tg} 72°$;
10) $\operatorname{tg} 8\gamma$;
11) $\operatorname{tg} 11\varphi$;
12) $\frac{2\operatorname{tg} 70°}{1 - \operatorname{tg}^2 70°}$.

23. Применить формулы двойного угла к следующим выражениям:

1) $\sin 42°$;
2) $\sin 10\alpha$;
3) $\frac{\sin 50°}{\cos 25°}$;
4) $\cos 38°$;
5) $\cos 12\beta$;
6) $\frac{\cos 18° - \sin 18°}{\cos 36°}$;
7) $\operatorname{tg} 54°$;
8) $\operatorname{tg} 14\gamma$;
9) $\frac{2\operatorname{tg} 10°}{1 - \operatorname{tg}^2 10°}$.

Вычислите:

24. а) $\sin 15°$; б) $\cos 75°$.

25. а) $\cos 15°$; б) $\sin 75°$.

26. 1) $\cos 20° \cos 40° \cos 80°$;

2) $\sin\frac{7\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{\pi}{18}$;

3) $\cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$.

27. Дано: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}\, 2\alpha$.

28. Дано: $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}\, 2\alpha$.

29. Упростите выражения:

1) $2\cos^2 x\,\mathrm{tg} x$;
2) $\cos 6\gamma + \sin^2 3\gamma$;
3) $\cos 2\beta - 2\cos^2\beta$;
4) $1 + \cos 2\alpha$;
5) $8\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos 4\alpha$;
6) $1 + 2\cos^2 t - \cos 2t$;
7) $4\sin^4 x + \sin^2 2x$;
8) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$.

30. Упростите выражения:

1) $0{,}5\sin 2\beta\,\mathrm{ctg}\,\beta$;
2) $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$;
3) $\cos^2 4\beta - \cos 8\beta$;
5) $\cos^2 2x - 4\sin^2 x\cos^2 x$;
6) $2\sin^2 4\alpha + \cos 8\alpha + 1$;
7) $4\sin^4 x + \sin^2 2x$.

31. Преобразуйте выражение:

1) $\sin 2t\,\mathrm{ctg} t - 1$;
2) $\frac{\sin^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin 2\alpha}$;
3) $\frac{\cos 2t - \cos^2 t}{1 - \cos^2 t}$;
4) $\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$;
5) $\frac{1-\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}$;
7) $\mathrm{ctg}\beta(1 - \cos 2\beta)$;
8) $\frac{1+\sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$;
9) $(\mathrm{tg}\, t + \mathrm{ctg}\, t)\sin 2t$;
10) $\frac{2}{\mathrm{tg}\, t - \mathrm{ctg}\, t}$;
11) $\frac{1-\cos 2x + \sin 2x}{1+\cos 2x + \sin 2x}$;

6) $\dfrac{\sin 2\beta}{1+\cos 2\beta}$; 12) $\left(\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}+\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}\right)\sin 2\beta$.

32. Преобразуйте произведение в сумму:

1) $\sin 42°\cos 12°$; 5) $\cos 23°\cos 27°$;

2) $\cos 42° \cos 18°$; 6) $2 \sin 18° \sin 22°$;

3) $2 \sin 42° \sin 3°$; 7) $\sin 40° \cos 56°$;

4) $2\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{10}$; 8) $2\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{3\pi}{10}$.

33. Замените произведение тригонометрических функций суммой:

1) $\cos 52° \cos 22°$; 5) $\cos 50° \cos 58°$;

2) $2 \sin 52° \cos 8°$; 6) $\sin 31° \cos 41°$;

3) $\sin 52°\sin 7°$; 7) $2 \sin 24°\sin 44°$;

4) $2\cos\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{4}$; 8) $2\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{14}$.

34. Упростите выражения:

1) $\cos 3\alpha \cos \alpha - \cos 7\alpha \cos 5\alpha$; 3) $\sin 4\beta \cos 3\beta - \sin 5\beta \cos 2\beta$;

2) $\cos 3\alpha \cos \alpha - \sin 3\alpha \sin \alpha$; 4) $\sin 4\beta \cos 3\beta - \cos 4\beta \sin 3\beta$.

Пример: Упросить выражение

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

Пример: Вычислить:

а) $2\sin15°\cos15°=\sin2\cdot 15^0 = sin30^0 = 0{,}5$

б) $\cos^2 15° - \sin^2 15°= \cos2\cdot 15^0 = cos30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\dfrac{2tg15^o}{1-tg^2 15^o} = tg\, 2\cdot 15^0 = tg\ 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

Пример: Вычислить:

а) $2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1=cos\,\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

Использовали формулу: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

б) $1-2\sin^2\dfrac{\pi}{12}=cos2\cdot 15^0 = cos30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

Использовали формулу: $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15°=\frac{\sqrt{3}}{2}+1-cos2\cdot 15^0=\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

Использовали формулу: $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos^2 15°=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1+cos2\cdot 15^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=1.$

Использовали формулу: $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

Пример: Пусть $\cos\alpha = 0,6$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найти

а) $\sin\frac{\alpha}{2}$; б) $\cos\frac{\alpha}{2}$; в) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Решение: из формулы основной тригонометрической единицы найдем:
$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$
$0,36+\sin^2\alpha=1$
$\sin^2\alpha=1-0,36$
$\sin^2\alpha=0,64$
$\sin\alpha=\pm\sqrt{0,64}=\pm 0,8$

Так как по условию α угол первой четверти, а у синуса в первой четверти знак плюс, то $\sin\alpha=0,8$

Вычислим а) $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-0,6}{2}}=\sqrt{0,2}$;

б) $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+0,6}{2}}=\sqrt{0,8}$;

в) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{0,2}}{\sqrt{0,8}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

Пример: Упростить

а) $\frac{1+cos2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$
$=\frac{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=2\cos\alpha$.

б) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=$
$=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha}=tg\alpha$.

5.Задания по теме: «Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств»

<u>Пример:</u> Вычислить arcsin $\frac{1}{2}$.

$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, так как $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

<u>Пример:</u> Вычислить $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, так как $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Вычислить:

а) arcsin 0; б) arcsin 1; в) arcsin (-1);

г) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; е) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

<u>Пример:</u> Вычислить arccos $\frac{1}{2}$.

$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, так как $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$.

<u>Пример:</u> Вычислить $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$, так как $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$.

2. Вычислить: а) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) arccos 0;

г) arccos (-1); д) arccos1; е) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

<u>Пример:</u> Вычислить *arctg* $\sqrt{3}$

arctg $\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ *, так как tg* $\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ *и ,* $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

<u>Пример:</u> Вычислить *arctg (-1)*

arctg(-1) = $-\frac{\pi}{4}$,так как $tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ и $-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

3.Вычислить

а) *arctg* $\frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) *arctg* 0;

в) *arctg* 1;

г) $arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

д) *arctg* (-$\sqrt{3}$).

Пример: Вычислить $arcctg\ \sqrt{3}$

$arcctg\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, так как $ctg\ \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$.

Пример: Вычислить *arcctg* (-$\sqrt{3}$)

$arcctg\ \left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$, так как $ctg\ \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ и $\frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$.

4. Вычислить:
   а) *arcctg* 1;
   б) $arcctg\ \frac{1}{\sqrt{3}}$;
   в) *arcctg* 0;
   г) *arcctg* (-1);
   д) $arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

5. С помощью тригонометрической окружности решите уравнения:

1) $\sin 6x = \frac{1}{2}$; 3) $\cos\frac{x}{5} = -\frac{1}{2}$; 5) $\sin\frac{x}{3} = 0$;

2) $\sin\frac{3x}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\frac{4x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\cos 3x = -1$.

6. Используя единичную окружность, решите уравнения:

1) $\sin\frac{x}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos 6x = \frac{1}{2}$; 5) $\sin 3x = 1$;

2) $\sin\frac{2x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos\frac{x}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\cos\frac{4x}{5} = 0$.

Пример: Решить уравнение $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение: Согласно формуле $cost = a$ тогда $t = \pm arccosa + 2\pi n,\ n \in Z$ получим:

$$x = \pm arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Поскольку $arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, то имеем: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Пример: Решить уравнение $cosx = \sqrt{2}$.

Решение: так как $\sqrt{2} > 1$, то уравнение не имеет корней.

Пример: Решить уравнение $cosx = 0{,}37$.

Решение: Согласно формуле $cost = a$ тогда $t = \pm arccosa + 2\pi n$, $n \in Z$ получим:

$$x = arccos\ 0{,}37 + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Пример: Решить уравнение $cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: Согласно формуле $cost = a$, тогда $t = \pm arccosa + 2\pi n$, $n \in Z$ получим:

$x = \pm arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$.

Поскольку $arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, то

$x = \pm\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Пример: Решить уравнение $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение: Согласно формуле $sin\ t = a$ тогда $t = (-1)^k\ arcsin\ a + \pi k$, $k \in Z$ получим:

$x = (-1)^n\ arcsin\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

Поскольку $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то $x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Пример: Решить уравнение $sinx = -\frac{1}{2}$.

Решение: Согласно формуле $sin\ t = a$ тогда $t = (-1)^k\ arcsin\ a + \pi k$, $k \in Z$ получим:

$x = (-1)^n\ arcsin\ \left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z$.

Поскольку $arcsin\ \left(-\frac{1}{2}\right) = -\ \frac{\pi}{6}$, то $x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in Z$;

$x = (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in Z$.

Пример: Решить уравнение $\sin x = \sqrt{2} - 1$.

Решение: Согласно формуле $\sin t = a$ тогда $t = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$ получим:

$x = (-1)^n \arcsin(\sqrt{2} - 1) + \pi n,\ n \in Z$.

Значение $\arcsin(\sqrt{2} - 1)$ найдем с помощью калькулятора:

$\arcsin(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}427$, тогда $x \approx (-1)^n \cdot 0{,}427 + \pi n,\ n \in Z$.

Пример: Решить уравнение $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$.

Решение: Согласно формуле $\mathrm{tg}t = a$ тогда $t = \mathrm{arctg}a + \pi k$, $k \in Z$ получим:

$x = \mathrm{arctg}\sqrt{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Поскольку $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, то получим: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

Пример: Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 2.$

Решение: Согласно формуле $\operatorname{tg} t = a$ тогда $t = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$ получим:

$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z.$

Значение arctg 2 можно найти с помощью калькулятора

$\operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}1$, тогда $x \approx 1{,}1 + \pi n,\ n \in Z.$

Пример: Решить уравнение $\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0.$

Решение: Преобразуем уравнение

$\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0;$

$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3};$

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Согласно формуле $\operatorname{tg} t = a$ тогда $t = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$ получим:

$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Пример: Решить уравнение $\sin^2 x + 4\cos x = 2{,}75.$

Решение:

Заменив, $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, получим:

$$1 - \cos^2 x + 4\cos x - 2{,}75 = 0,$$

$$-\cos^2 x + 4\cos x - 1{,}75 = 0,$$

$$\cos^2 x - 4\cos x + 1{,}75 = 0.$$

Пусть $\cos x = t$, тогда $t^2 - 4t + 1{,}75 = 0.$

Решая квадратное уравнение, получим корни:

$t_1 = \frac{1}{2}$. $t_2 = \frac{7}{2} > 1.$

Поскольку $t_2 > 1$, то $\cos x = \frac{7}{2}$ — решений не имеет.

Поскольку $t_1 = \frac{1}{2}$, то $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Пример: Решить уравнение $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4.$

Решение:

tg x + 3ctg x = – 4, tg x + $\frac{3}{tgx}$ = 4.

Пусть tg x = t, тогда $t + \frac{3}{t} = 4$, $t^2 - 4t + 3 = 0$, $t_1 = 1$ і $t_2 = 3$.

получим: 1) tg$x$ = 1, тогда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

2) tg x = 3, тогда x = arctg 3 + $\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, arctg3 + $\pi n,\ n \in Z.$

<u>Пример:</u> Решить уравнение $1 + \cos x - 2\cos\frac{x}{2} = 0.$

Решение:

Применяя формулу $1 + \cos x = 2\cos\frac{x}{2}$, получим:

$$2\cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} = 0,$$

$$2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - 1\right) = 0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя – бы один из множителей равен нулю. Поэтому:

1) $\cos\frac{x}{2} = 0$; $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$

2) $\cos\frac{x}{2} = 1$; $\frac{x}{2} = 2\pi n,\ n \in Z;$ $x = 4\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\pi + 2\pi n$, $4\pi n$, $n \in Z.$

<u>Пример:</u> Решить уравнение $\sin 2x - \sin x = 0.$

Решение:

$\sin 2x - \sin x = 0$

$2\sin\frac{2x - x}{2}\cos\frac{2x + x}{2} = 0;$

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0.$

Откуда

1) $\sin\frac{x}{2} = 0$; $\frac{x}{2} = \pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in Z.$

2) $\cos\frac{3x}{2} = 0$, $\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z.$

Ответ: $2\pi n$ і $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z.$

<u>Пример:</u> Решить уравнение $\cos^2 x - 2\cos x \sin x = 0.$

Решение: Делить обе части на $\cos^2 x$ нельзя, потомучто уравнение $\cos^2 x = 0$ является решением данного уравнения. Решим его вынесением общего множителя за скобки**:**

$$\cos^2 x - 2\cos x \sin x = 0$$

$$\cos x\,(\cos x - 2\sin x) = 0$$

Откуда $\cos x = 0$ или $\cos x - 2\sin x = 0$.

1) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

2) $\cos x - 2\sin x = 0$;

$\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{2\sin x}{\cos x} = 0$;

$1 - 2\operatorname{tg} x = 0$;

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$;

$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

<u>**Пример:**</u> Решить уравнение $\frac{2\sin^2 x - 3\sin x}{1 + \cos x} = 0$.

Решение: Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю:

$$\begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x = 0 \\ 1 + \cos x \neq 0 \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы:

$$2\sin^2 x - 3\sin x = 0;$$

$$\sin x(2\sin x - 3) = 0,$$

откуда $\sin x = 0$ или $2\sin x - 3 = 0$;

1) $\sin x = 0$; $x = \pi n,\ n \in Z$;

2) $2\sin x = 3$; $\sin x = \frac{3}{2}$ — не имеет решений.

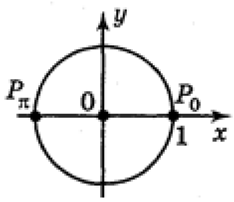
Другое условие $1 + \cos x \neq 0$ выполняется, если $\cos x \neq -1$, или $x \neq \pi + \pi k,\ k \in Z.$

Поэтому первоначальная состема равносильна системе:

$$\begin{cases} x = \pi k, n \in Z; \\ x \neq \pi + \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

На единичную окружность нанесем числа $x = \pi n,\ n \in Z$

Выберем только те, которые удовлетворяют условию $x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z.$



Это числа $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $2\pi n, n \in Z$.

Пример: Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = 1, & (1) \\ \sin x + \cos y = 0. & (2) \end{cases}$$

Решение:

Сложив и отняв (1) и (2) уравнения, получим

$$\begin{cases} 2\sin x = 1, \\ 2\cos y = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos y = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z, \\ y = \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $x = (-1) \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;\ y = \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2nk,\ k \in Z.$

Пример: Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = \pi, \\ cosx - \cos y = 1; \end{cases}.$$

Решение:

Из первого уравнения находим $y = \pi - x$.

Тогда:

$\cos x - cos(\pi - x) = 1$,

$\cos x + cos\ x = 1$,

$2\cos x = 1$,

$\cos x = \dfrac{1}{2}$,

$x = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Теперь находим:

$y = \pi - \left(\pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = \pm \dfrac{\pi}{3} + (1 - 2n)\pi,\ n \in Z.$

Ответ: $x = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $y = \pm \dfrac{\pi}{3} + (1 - 2n)\pi$, где $n \in Z$.

Пример: Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \sin(x-y)=0.\end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \sin(x-y)=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=\pi k, & k\in Z,\\ x-y=\pi n, & n\in Z;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=\pi(k+n), & n\in Z, k\in Z,\\ 2y=\pi(k-n), & n\in Z, k\in Z.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}(k+n), & n,k\in Z,\\ y=\dfrac{\pi}{2}(k-n), & n,k\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}(k+n)$, $y=\dfrac{\pi}{2}\ (k-n)$, где n, k$\in$ Z.

<u>Пример:</u> Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}cosx\cos y=\dfrac{3}{4},\\ \sin x\sin y=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases}cosx\cos y=\dfrac{3}{4},\\ \sin x\sin y=-\dfrac{1}{4}.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}cosx\cos y+\sin x\sin y=\dfrac{1}{2},\\ \cos x\cos y-\sin x\sin y=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}cos(x-y)=\dfrac{1}{2},\\ \cos(x+y)=1;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x-y=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z,\\ x+y=2\pi n, n\in Z.\end{cases}$$

Тогда 1) $\begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z,\\ x+y=2\pi n, n\in Z.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi(n+k),\\ 2y=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi(n-k),\end{cases}$ *где* $n,k\in Z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi(n+k),\\ y=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi(n-k),\end{cases} \text{где}\quad n,k\in Z$$

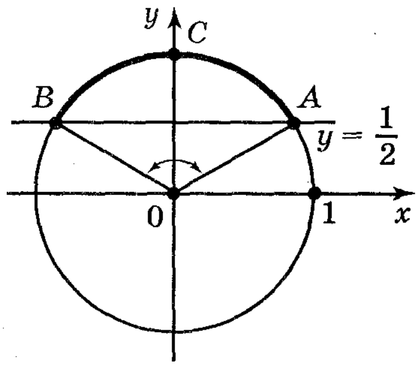
2) $\begin{cases}x-y=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z,\\ x+y=2\pi n, n\in Z.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi(n+k),\\ 2y=\dfrac{\pi}{3}+2\pi(n-k),\end{cases}$ *где* $n,k\in Z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi(n+k),\\ y=\dfrac{\pi}{6}+2\pi(n-k),\end{cases} \text{где}\quad n,k\in Z$$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi(n+k);-\dfrac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{6}+\pi(n+k);\dfrac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, *n, k*$\in$Z.

Пример: Решить неравенство $\sin t \geq \frac{1}{2}$.

Решение: Строим окружность и прямую $y = \frac{1}{2}$, которая пересекает единичную окружность точках А и B. Находим на единичной окружности точки, значения ординаткоторых не меньше $\frac{1}{2}$.



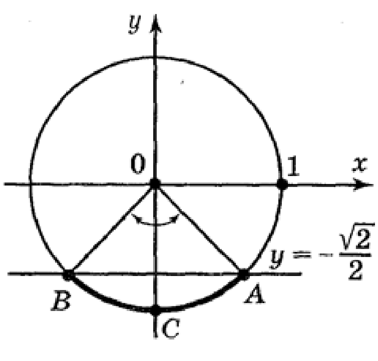
Этими точками будут точки дуги *ACB,* где А $=P_{\frac{\pi}{6}}$, В $=P_{\frac{5\pi}{6}}$.Поэтому, решением неравенства будут все значения t из отрезка $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$. Учитывая, что период функции $\sin t$ равняется 2π, получаем решение неравенства:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

Пример: Решить неравенство $\sin t \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: Строим окружность и прямую $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, которая пересекает единичную окружность точках А и B. Находим на единичной окружности точки, значения ординаткоторых не больше $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, где А=$P_{-\frac{\pi}{4}}$, В=$P_{-\frac{3\pi}{4}}$.



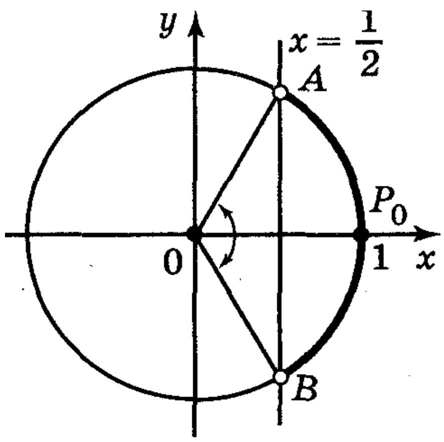
Поэтому, решением неравенства будут все значения t из отрезка $\left[-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$

Учитывая, что период функции sin$t$ равняется 2π, получаем решение неравенства: $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le t\le -\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$

Ответ: $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; -\frac{\pi}{4}+2\pi n\right], n\in Z$.

<u>Пример:</u> Решить неравенство $cos t > \frac{1}{2}$.

Решение: Строим окружностьи прямую $x = \frac{1}{2}$, которая пересекает единичную окружность точках А и B. Находим на единичной окружности точки, значения абсцисс которых больше чем $\frac{1}{2}$, эти точки лежат на дуге AP_0B, где $A = P_{\frac{\pi}{3}}$, $B = P_{-\frac{\pi}{3}}$.



Поэтому, решением неравенства будут все значенияtиз интервала$\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$.

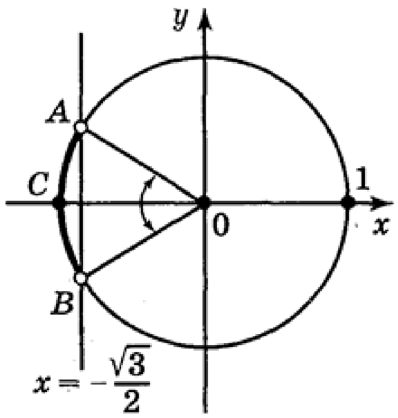
Учитывая периодичноость, получим:

$$-\frac{\pi}{3}+2\pi n<t<\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right), n\in Z$

<u>Пример:</u> Решить неравенство cost<$-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение: Строим окружность и прямую $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,которая пересекает единичную окружность точках А и B. Находим на единичной окружности точки, значения абсцисс которых меньше чем $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, эти точки лежат на дуге АСВ, где А = $P_{\frac{5\pi}{6}}$, В = $P_{\frac{7\pi}{6}}$.



Поэтому, решением неравенства будут все значения t из интервала $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right)$.

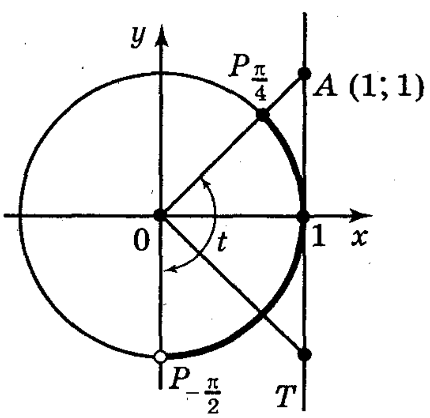
Учитывая периодичноость, получим:

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z$.

<u>Пример:</u> Решить неравенство $tg\ t \le 1$.

Решение: Строим окружность и линию тангенсов. На линии тангенсов обозначим число 1. Если t является решением неравенства, то ордината точки Т, равная tg$t$,должна быть не больше 1.



Множество таких точек T — луч AT. Множество точек P_t,которые соответствуют точкам АТ, — это дуга $P_{-\frac{\pi}{2}}P_{\frac{\pi}{4}}$, выделенная на рисунке. (Обратите внимание точка $P_{\frac{\pi}{4}}$ принадлежит, а точка $P_{-\frac{\pi}{2}}$ не принадлежит множеству решений неравенства). Поэтому, решением неравенства будут все значения *t* из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$.

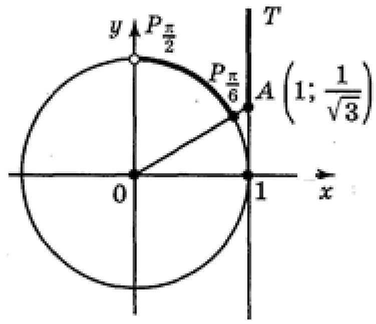
Учитывая что период функции tg*t* равняется π,, получим:

$-\frac{\pi}{2}+\pi n < t \leq \frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in$ Z.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, де$n \in$ Z.

<u>Пример:</u> Решить неравенство tgt>$\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение: Строим окружность и линию тангенсов. На линии тангенсов обозначим число $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и множество значений тангенсов не меньших $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (луч*AT).*



Решением неравенства будут все значения *t* из промежутка $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$.

Учитывая что периодфункции tg*t*равняется π,, получим:

$\frac{\pi}{6}+\pi n \leq t < \frac{\pi}{2}+\pi n$, де $n \in Z$.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, де *n* є Z.

<u>Пример:</u> Решить неравенство*ctgt*≥ -$\frac{1}{\sqrt{3}}$.

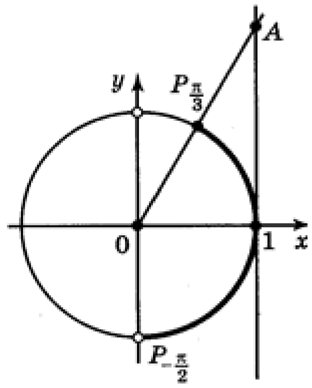
Решение: Учитывая, чтоctgt = tg$\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$, получим:

ctgt = - tg$\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$,

тогда получаем неравенство

-tg $\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \geq$ - $\frac{1}{\sqrt{3}}$ или tg $\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \leq \sqrt{3}$.

Решим его по рисунку:



$-\frac{\pi}{2}+\pi n < t-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in$ Z; $\pi n < t \le \frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in$ Z.

Ответ: $\left(\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, де $n\in Z$.

Задание для самостоятельной работы:

1 вариант	2 вариант
1. Решите уравнения:	**1. Решите уравнения:**
а) $\sin(2x-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$	**а)** $\sin(3x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
б) $\cos(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	**б)** $\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$
в) $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	**в)** $tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
г) $\sin 6x = \frac{9}{8}$	**г)** $\cos 3x = -\frac{5}{3}$
д) $\cos(4x+\frac{\pi}{3}) = -1$	**д)** $\sin(4x-\frac{\pi}{3}) = 0$
е) $tg(3x+\frac{\pi}{6}) = 1$	**е)** $tg(2x-\frac{\pi}{6}) = -1$
ж) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$	**ж)** $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$
з) $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$	**з)** $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$
2. Решите неравенства	**2. Решите неравенства**
а) $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $\cos\left(\frac{x}{3}\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$	**а)** $\sin x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\cos 4x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$
3 вариант	**4 вариант**
1. Решите уравнения:	**1. Решите уравнения:**

а) $\sin(2x-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\cos(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ **в)** $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ **г)** $\sin 2x=\frac{4}{3}$ **д)** $\cos(4x-\frac{\pi}{3})=1$ **е)** $tg(2x-\frac{\pi}{6})=-1$ **ж)** $2\cos^2 x+3\cos x-2=0$ **з)** $\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x\sin x=0$ **2. Решите неравенства** **а)** $\sin 2x\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\cos\left(\frac{x}{4}\right)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$	**а)** $\sin(2x+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $\cos(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ **в)** $tg\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ **г)** $\cos 4x=-\frac{8}{3}$ **д)** $\sin(7x+\frac{\pi}{3})=-1$ **е)** $tg(2x+\frac{\pi}{6})=1$ **ж)** $2\sin^2 x+\sin x-1=0$ **з)** $\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x\sin x=0$ **2. Решите неравенства** **а)** $\sin 3x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\cos\frac{x}{2}\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$
5 вариант **1. Решите уравнения:** **а)** $\sin(5x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ **б)** $\cos(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **в)** $tg\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ **г)** $\sin 3x=-2.3$ **д)** $\cos(5x-\frac{\pi}{3})=0$ **е)** $tg(6x+\frac{\pi}{3})=-1$ **ж)** $2ctg^2 x+3ctgx-2=0$ **з)** $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x=0$	**6 вариант** **1. Решите уравнения:** **а)** $\sin(5x-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $\cos(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **в)** $tg\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$ **г)** $\cos 3x=1.3$ **д)** $\sin(4x-\frac{\pi}{3})=1$ **е)** $tg(2x+\frac{\pi}{4})=1$ **ж)** $2ctg^2 x+ctgx-1=0$ **з)** $\cos^2 x+2\sin x\cos x=0$

2. Решите неравенства **а)** $\sin 4x \geq -\frac{1}{2}$ **б)** $\cos\left(\frac{x}{9}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2. Решите неравенства** **а)** $\sin 3x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\cos(\frac{x}{2}) \leq -\frac{1}{2}$
7 вариант **1. Решите уравнения:** **а)** $\sin(3x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $\cos(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **в)** $tg\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ **г)** $\sin\frac{x}{3} = \frac{6}{5}$ **д)** $\cos(5x + \frac{\pi}{4}) = 0$ **е)** $tg(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6}) = 1$ **ж)** $2tg^2 x + 3tgx - 2 = 0$ **з)** $\cos^2 x - 2\cos x \sin x = 0$ **2. Решите неравенства** **а)** $\sin(\frac{x}{2}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\cos 3x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$	**8 вариант** **1. Решите уравнения:** **а)** $\sin(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ **в)** $tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **г)** $\cos(\frac{x}{5}) = -\frac{7}{4}$ **д)** $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = 0$ **е)** $tg(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{3}) = -1$ **ж)** $2tg^2 x + tgx - 1 = 0$ **з)** $\sin^2 x + 2\cos x \sin x = 0$ **2. Решите неравенства** **а)** $\sin(\frac{x}{3}) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $\cos 6x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
9 вариант **1. Решите уравнения:** **а)** $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$ **б)** $\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **в)** $tg\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	**10 вариант** **1. Решите уравнения:** **а)** $\cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $\sin(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$ **в)** $tg\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

г) $\cos 6x = -\frac{9}{8}$ **д)** $\sin(4x - \frac{\pi}{3}) = 1$ **е)** $tg(3x - \frac{\pi}{6}) = -1$ **ж)** $-4\sin^2 x - 6\sin x + 4 = 0$ **з)** $2\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$ **2. Решите неравенства** **а)** $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $\cos\left(\frac{x}{3}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$	**г)** $\sin 3x = \frac{5}{3}$ **д)** $\cos(4x - \frac{\pi}{3}) = 0$ **е)** $tg(3x + \frac{\pi}{6}) = 1$ **а)** $-4\cos^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ **б)** $2\sin^2 x - \sin x \cos x = 0$ **2. Решите неравенства** **а)** $\sin x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\cos 4x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$
11 вариант **1. Решите уравнения:** **а)** $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ **в)** $tg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ **г)** $\cos 2x = -\frac{4}{3}$ **д)** $\sin(4x - \frac{\pi}{3}) = 0$ **е)** $tg(x - \frac{\pi}{6}) = 1$ **ж)** $4\cos^2 x + 6\cos x - 4 = 0$ **з)** $2\cos^2 x - \cos x \sin x = 0$ **2. Решите неравенства** **а)** $\sin 2x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\cos\left(\frac{x}{4}\right) \le \frac{\sqrt{3}}{2}$	**12 вариант** **1. Решите уравнения:** **а)** $\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $\sin(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ **в)** $tg\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **г)** $\sin 4x = -\frac{8}{3}$ **д)** $\cos(7x - \frac{\pi}{3}) = -1$ **е)** $tg(2x - \frac{\pi}{6}) = 1$ **а)** $-4\sin^2 x - 2\sin x + 2 = 0$ **б)** $2\sin^2 x + \cos x \sin x = 0$ **2. Решите неравенства** **а)** $\sin 3x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\cos\frac{x}{2} \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$
13 вариант **1. Решите уравнения:** **а)** $\cos(5x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$	**14 вариант** **1. Решите уравнения:**

б) $\sin(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **в)** $tg\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ **г)** $\cos 3x=-1.6$ **д)** $\sin(5x-\frac{\pi}{3})=1$ **е)** $tg(6x-\frac{\pi}{3})=0$ **ж)** $-2ctg^2x-3ctgx+2=0$ **з)** $2\sin^2x-3\sin x\cos x=0$ **2. Решите неравенства** **а)** $\sin 4x\le-\frac{1}{2}$ **б)** $\cos\left(\frac{x}{9}\right)\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$	**а)** $\cos(5x-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $\sin(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **в)** $tg\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$ **г)** $\sin 3x=5.3$ **д)** $\cos(4x-\frac{\pi}{3})=-1$ **е)** $tg(2x+\frac{\pi}{4})=0$ **ж)** $-2ctg^2x-ctgx+1=0$ **з)** $2\cos^2x+3\sin x\cos x=0$ **2. Решите неравенства** **а)** $\sin 3x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\cos(\frac{x}{2})\ge-\frac{1}{2}$
15 вариант **1. Решите уравнения:** **а)** $\cos(3x+\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $\sin(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **в)** $tg\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}$ **г)** $\cos\frac{x}{3}=-\frac{6}{5}$ **д)** $\sin(5x+\frac{\pi}{4})=-1$ **е)** $tg(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6})=0$ **ж)** $-2tg^2x-3tgx+2=0$ **з)** $2\cos^2x-4\cos x\sin x=0$ **2. Решите неравенства**	**16 вариант** **1. Решите уравнения:** **а)** $\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ **в)** $tg\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ **г)** $\sin(\frac{x}{5})=\frac{7}{4}$ **д)** $\cos(3x-\frac{\pi}{3})=1$ **е)** $tg(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{3})=0$ **ж)** $-2tg^2x-tgx+1=0$ **з)** $2\sin^2x+4\cos x\sin x=0$ **2. Решите неравенства**

а) $\sin(\frac{x}{2}) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ **б)** $\cos 3x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$	**а)** $\sin(\frac{x}{3}) \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **б)** $\cos 6x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

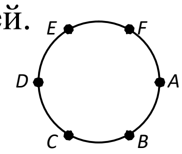
6.Задания по теме: «Тригонометрические уравнения»

ВАРИАНТ 1	**ВАРИАНТ 2**	**ВАРИАНТ 3**
Решите тригонометрические уравнения: **1**. $2\sin^2 x - 5\sin x - 7 = 0$ **2**. $12\sin^2 x + 20\cos x - 19 = 0$ **3**. $3\sin^2 x + 14\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ **4**. $7\text{tg}\, x - 10\text{ctg}\, x + 9 = 0$ **5**. $5\sin 2x - 14\cos^2 x + 2 = 0$ **6**. $9\cos 2x - 4\cos^2 x = 11\sin 2x + 9$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $10\cos^2 x - 17\cos x + 6 = 0$ **2**. $2\cos^2 x + 5\sin x + 5 = 0$ **3**. $6\sin^2 x + 13\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ **4**. $5\text{tg}\, x - 4\text{ctg}\, x + 8 = 0$ **5**. $6\cos^2 x + 13\sin 2x = -10$ **6**. $2\sin^2 x + 6\sin 2x = 7(1 + \cos 2x)$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $3\sin^2 x - 7\sin x + 4 = 0$ **2**. $6\sin^2 x - 11\cos x - 10 = 0$ **3**. $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$ **4**. $4\,\text{tg}\, x - 12\text{ctg}\, x + 13 = 0$ **5**. $5 - 8\cos^2 x = \sin 2x$ **6**. $7\sin 2x + 9\cos 2x = -7$
ВАРИАНТ 4	**ВАРИАНТ 5**	**ВАРИАНТ 6**
Решите тригонометрические уравнения: **1**. $10\cos^2 x + 17\cos x + 6 = 0$ **2**. $3\cos^2 x + 10\sin x - 10 = 0$ **3**. $2\sin^2 x + 9\sin x\cos x + 10\cos^2 x = 0$ **4**. $3\,\text{tg}\, x - 12\text{ctg}\, x + 5 = 0$ **5**. $10\sin^2 x - 3\sin 2x = 8$ **6**. $11\sin 2x - 6\cos^2 x + 8\cos 2x = 8$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $10\sin^2 x + 11\sin x - 8 = 0$ **2**. $4\sin^2 x - 11\cos x - 11 = 0$ **3**. $4\sin^2 x + 9\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ **4**. $3\,\text{tg}\, x - 8\text{ctg}\, x + 10 = 0$ **5**. $3\sin 2x + 8\sin^2 x = 7$ **6**. $10\sin^2 x + 11\sin 2x + 6\cos 2x = -6$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $3\cos^2 x - 10\cos x + 7 = 0$ **2**. $6\cos^2 x + 7\sin x - 1 = 0$ **3**. $3\sin^2 x + 10\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$ **4**. $6\,\text{tg}\, x - 14\text{ctg}\, x + 5 = 0$ **5**. $6\sin^2 x + 7\sin 2x + 4 = 0$ **6**. $7 = 7\sin 2x - 9\cos 2x$
ВАРИАНТ 7	**ВАРИАНТ 8**	**ВАРИАНТ 9**
Решите тригонометрические уравнения: **1**. $6\sin^2 x - 7\sin x - 5 = 0$ **2**. $3\sin^2 x + 10\cos x - 10 = 0$ **3**. $2\sin^2 x + 11\sin x\cos x + 14\cos^2 x = 0$ **4**. $3\,\text{tg}\, x - 5\text{ctg}\, x + 14 = 0$ **5**. $10\sin^2 x - \sin 2x = 8\cos^2 x$ **6**. $1 - 6\cos^2 x = 2\sin 2x + \cos 2x$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $3\cos^2 x - 5\cos x - 8 = 0$ **2**. $8\cos^2 x - 14\sin x + 1 = 0$ **3**. $5\sin^2 x + 14\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ **4**. $2\,\text{tg}\, x - 9\text{ctg}\, x + 3 = 0$ **5**. $\sin^2 x - 5\cos^2 x = 2\sin 2x$ **6**. $5\cos 2x + 5 = 8\sin 2x - 6\sin^2 x$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $6\sin^2 x + 11\sin x + 4 = 0$ **2**. $4\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$ **3**. $3\sin^2 x + 11\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$ **4**. $5\,\text{tg}\, x - 8\text{ctg}\, x + 6 = 0$ **5**. $\sin 2x + 1 = 4\cos^2 x$ **6**. $14\cos^2 x + 3 = 3\cos 2x - 10\sin 2x$
ВАРИАНТ 10	**ВАРИАНТ 11**	**ВАРИАНТ 12**
Решите тригонометрические уравнения: **1**. $4\cos^2 x + \cos x - 5 = 0$ **2**. $10\cos^2 x - 1\sin x - 16 = 0$ **3**. $\sin^2 x + 6\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ **4**. $3\,\text{tg}\, x - 6\text{ctg}\, x + 7 = 0$ **5**. $2\cos^2 x - 11\sin 2x = 12$ **6**. $2\sin^2 x - 3\sin 2x - 4\cos 2x = 4$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $10\sin^2 x - 17\sin x + 6 = 0$ **2**. $5\sin^2 x - 12\cos x - 12 = 0$ **3**. $2\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ **4**. $7\text{tg}\, x - 12\text{ctg}\, x + 8 = 0$ **5**. $3 + \sin 2x = 8\cos^2 x$ **6**. $2\sin 2x + 3\cos 2x = -2$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $2\cos^2 x - 5\cos x - 7 = 0$ **2**. $12\cos^2 x + 20\sin x - 19 = 0$ **3**. $5\sin^2 x + 12\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$ **4**. $2\,\text{tg}\, x - 6\text{ctg}\, x + 11 = 0$ **5**. $22\sin^2 x - 9\sin 2x = 20$ **6**. $14\cos^2 x - 2\cos 2x = 9\sin 2x - 2$
ВАРИАНТ 13	**ВАРИАНТ 14**	**ВАРИАНТ 15**
Решите тригонометрические уравнения: **1**. $4\sin^2 x + \sin x - 5 = 0$ **2**. $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$ **3**. $4\sin^2 x + 11\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$ **4**. $5\,\text{tg}\, x - 6\text{ctg}\, x + 13 = 0$ **5**. $3 - 4\sin^2 x = \sin 2x$ **6**. $10\sin 2x + 3\cos 2x = -3 - 14\sin^2 x$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $8\cos^2 x - 10\cos x - 7 = 0$ **2**. $4\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$ **3**. $3\sin^2 x + 10\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ **4**. $2\,\text{tg}\, x - 12\text{ctg}\, x + 5 = 0$ **5**. $14\sin^2 x - 11\sin 2x = 18$ **6**. $2\sin 2x - 3\cos 2x = 2$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $3\sin^2 x - 5\sin x - 8 = 0$ **2**. $10\sin^2 x + 17\cos x - 16 = 0$ **3**. $\sin^2 x + 8\sin x\cos x + 12\cos^2 x = 0$ **4**. $4\,\text{tg}\, x - 9\text{ctg}\, x + 9 = 0$ **5**. $14\sin^2 x - 4\cos^2 x = 5\sin 2x$ **6**. $1 - 5\sin 2x - \cos 2x = 12\cos^2 x$
ВАРИАНТ 16	**ВАРИАНТ 17**	**ВАРИАНТ 18**
Решите тригонометрические	Решите тригонометрические	Решите тригонометрические

уравнения: **1**. $8\cos^2x + 14\cos x - 9 = 0$ **2**. $3\cos^2x + 5\sin x + 5 = 0$ **3**. $2\sin^2x + 11\sin x\cos x + 5\cos^2x = 0$ **4**. $5\,\mathrm{tg}\,x - 3\,\mathrm{ctg}\,x + 14 = 0$ **5**. $2\sin^2x - 7\sin 2x = 16\cos^2x$ **6**. $14\sin^2x + 4\cos 2x = 11\sin 2x - 4$	уравнения: **1**. $12\cos^2x - 20\cos x + 7 = 0$ **2**. $5\cos^2x - 12\sin x - 12 = 0$ **3**. $3\sin^2x+13\sin x\cos x+12\cos^2x=0$ **4**. $5\,\mathrm{tg}\,x - 6\,\mathrm{ctg}\,x + 7 = 0$ **5**. $\sin^2x + 2\sin 2x = 5\cos^2x$ **6**. $13\sin 2x - 3\cos 2x = -13$	уравнения: **1**. $3\sin^2x - 10\sin x + 7 = 0$ **2**. $8\sin^2x + 10\cos x - 1 = 0$ **3**. $4\sin^2x+13\sin x\cos x+10\cos^2x=0$ **4**. $3\,\mathrm{tg}\,x - 3\,\mathrm{ctg}\,x + 8 = 0$ **5**. $\sin 2x + 4\cos^2x = 1$ **6**. $10\cos^2x - 9\sin 2x = 4\cos 2x - 4$
ВАРИАНТ 19	**ВАРИАНТ 20**	**ВАРИАНТ 21**
Решите тригонометрические уравнения: **1**. $6\cos^2x - 7\cos x - 5 = 0$ **2**. $3\cos^2x + 7\sin x - 7 = 0$ **3**. $3\sin^2x + 7\sin x\cos x + 2\cos^2x = 0$ **4**. $2\,\mathrm{tg}\,x - 4\,\mathrm{ctg}\,x + 7 = 0$ **5**. $\sin 2x - 22\cos^2x + 10 = 0$ **6**. $2\sin^2x - 3\sin 2x - 4\cos 2x = 4$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $5\sin^2x + 12\sin x + 7 = 0$ **2**. $10\sin^2x - 11\cos x - 2 = 0$ **3**. $4\sin^2x + 13\sin x\cos x + 3\cos^2x = 0$ **4**. $6\,\mathrm{tg}\,x - 10\,\mathrm{ctg}\,x + 7 = 0$ **5**. $14\cos^2x + 5\sin 2x = 2$ **6**. $4\sin 2x = 4 - \cos 2x$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $6\cos^2x + 11\cos x + 4 = 0$ **2**. $2\cos^2x - 3\sin x + 3 = 0$ **3**. $2\sin^2x + 7\sin x\cos x + 6\cos^2x = 0$ **4**. $4\,\mathrm{tg}\,x - 3\,\mathrm{ctg}\,x + 11 = 0$ **5**. $9\sin 2x + 22\sin^2x = 20$ **6**. $8\sin^2x+7\sin2x+3\cos2x+3=0$
ВАРИАНТ 22	**ВАРИАНТ 23**	**ВАРИАНТ 24**
Решите тригонометрические уравнения: **1**. $2\sin^2x + 3\sin x - 5 = 0$ **2**. $10\sin^2x - 17\cos x - 16 = 0$ **3**. $5\sin^2x + 13\sin x\cos x + 6\cos^2x = 0$ **4**. $3\,\mathrm{tg}\,x - 14\,\mathrm{ctg}\,x + 1 = 0$ **5**. $10\sin^2x + 13\sin 2x + 8 = 0$ **6**. $6\cos^2x + \cos 2x = 1 + 2\sin 2x$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $10\cos^2x + 11\cos x - 8 = 0$ **2**. $4\cos^2x - 11\sin x - 11 = 0$ **3**. $3\sin^2x + 8\sin x\cos x + 4\cos^2x = 0$ **4**. $5\,\mathrm{tg}\,x - 12\,\mathrm{ctg}\,x + 11 = 0$ **5**. $5\sin 2x + 22\sin^2x = 16$ **6**. $2\sin^2x - 10\cos 2x = 9\sin 2x + 10$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $4\sin^2x + 11\sin x + 7 = 0$ **2**. $8\sin^2x - 14\cos x + 1 = 0$ **3**. $2\sin^2x + 9\sin x\cos x + 9\cos^2x = 0$ **4**. $6\,\mathrm{tg}\,x - 2\,\mathrm{ctg}\,x + 11 = 0$ **5**. $8\sin^2x - 7 = 3\sin 2x$ **6**. $11\sin 2x = 11 - \cos 2x$
ВАРИАНТ 25	**ВАРИАНТ 26**	**ВАРИАНТ 27**
Решите тригонометрические уравнения: **1**. $2\cos^2x + 3\cos x - 5 = 0$ **2**. $6\cos^2x - 11\sin x - 10 = 0$ **3**. $\sin^2x + 7\sin x\cos x + 12\cos^2x = 0$ **4**. $7\,\mathrm{tg}\,x - 8\,\mathrm{ctg}\,x + 10 = 0$ **5**. $9\cos^2x - \sin^2x= 4\sin 2x$ **6**. $7\sin 2x + 3\cos 2x + 7 = 0$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $10\sin^2x + 17\sin x + 6 = 0$ **2**. $3\sin^2x + 7\cos x - 7 = 0$ **3**. $3\sin^2x+11\sin x\cos x+ 10\cos^2x=0$ **4**. $5\,\mathrm{tg}\,x - 9\,\mathrm{ctg}\,x + 12 = 0$ **5**. $3\sin^2x + 5\sin 2x + 7\cos^2x = 0$ **6**. $12\cos^2x + \cos 2x = 5\sin 2x + 1$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $5\cos^2x + 12\cos x + 7 = 0$ **2**. $10\cos^2x + 17\sin x - 16 = 0$ **3**. $2\sin^2x + 9\sin x\cos x + 4\cos^2x = 0$ **4**. $4\,\mathrm{tg}\,x - 6\,\mathrm{ctg}\,x + 5 = 0$ **5**. $8\sin^2x + 3\sin 2x = 14\cos^2x$ **6**. $2\sin^2x - 7\cos 2x = 6\sin 2x + 7$
ВАРИАНТ 28	**ВАРИАНТ 29**	**ВАРИАНТ 30**
Решите тригонометрические уравнения: **1**. $12\sin^2x - 20\sin x + 7 = 0$ **2**. $3\sin^2x + 5\cos x + 5 = 0$ **3**. $3\sin^2x+ 13\sin x\cos x+14\cos^2x=0$ **4**. $3\,\mathrm{tg}\,x - 4\,\mathrm{ctg}\,x + 11 = 0$ **5**. $8\cos^2x + 7\sin 2x + 6\sin^2x = 0$ **6**. $1 - \cos 2x = 18\cos^2x - 8\sin 2x$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $4\cos^2x + 11\cos x + 7 = 0$ **2**. $10\cos^2x - 11\sin x - 2 = 0$ **3**. $2\sin^2x + 13\sin x\cos x + 6\cos^2x = 0$ **4**. $3\,\mathrm{tg}\,x - 2\,\mathrm{ctg}\,x + 5 = 0$ **5**. $7\sin 2x + 2 = 18\cos^2x$ **6**. $13\sin 2x + 13 = -5\cos 2x$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $8\sin^2x + 14\sin x - 9 = 0$ **2**. $2\sin^2x + 5\cos x + 5 = 0$ **3**. $\sin^2x + 9\sin x\cos x + 14\cos^2x = 0$ **4**. $2\,\mathrm{tg}\,x - 5\,\mathrm{ctg}\,x + 9 = 0$ **5**. $7\sin^2x + 5\sin 2x + 3\cos^2x = 0$ **6**. $2\sin^2x + 9\sin 2x = 10\cos 2x + 10$
ВАРИАНТ 31	**ВАРИАНТ 32**	
Решите тригонометрические уравнения: **1**. $3\cos^2x - 7\cos x + 4 = 0$ **2**. $8\cos^2x + 10\sin x - 1 = 0$ **3**. $3\sin^2x + 13\sin x\cos x + 4\cos^2x = 0$ **4**. $5\,\mathrm{tg}\,x - 14\,\mathrm{ctg}\,x + 3 = 0$ **5**. $7\sin 2x = 22\sin^2x - 4$ **6**. $\cos 2x + 8\sin 2x = 1 - 18\cos^2x$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $8\sin^2x - 10\sin x - 7 = 0$ **2**. $2\sin^2x - 3\cos x + 3 = 0$ **3**. $2\sin^2x+11\sin x\cos x+12\cos^2x=0$ **4**. $4\,\mathrm{tg}\,x - 14\,\mathrm{ctg}\,x + 1 = 0$ **5**. $4\sin 2x + 10\cos^2x = 1$ **6**. $11\sin 2x - 7\cos 2x = 11$	

7. Задания повышенной сложности:

1. Окружность разделена на шесть равных частей. Выразить в градусах и радианах сумму дуг:



   1) $\cup AECBF + \cup EAB + \cup DCB$;
   2) $\cup AFE + \cup EDC + \cup CD + \cup BD + \cup DCBA$.

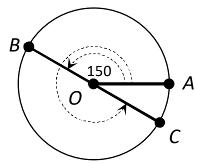
2. Угол A трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) на 70° меньше угла B и на 10° больше угла D. Найдите радианную меру каждого из углов трапеции.

3. Перечертите в тетрадь и заполните таблицу:

1°		3°		5°		9°		12°		18°		30°		45°		90°	
	$\frac{\pi}{90}$		$\frac{\pi}{45}$		$\frac{\pi}{30}$		$\frac{\pi}{18}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{9}$		$\frac{\pi}{5}$		$\frac{\pi}{3}$		π

4. Один из углов треугольника больше другого на 20° и меньше третьего на 50°. Найдите радианную меру каждого из углов этого треугольника.

5. Записать общий вид углов для случаев, когда конечный радиус их занимает положение: 1) OB; 2) OC и найти несколько частных значений этих углов.



6. Запишите три числа, которые изображаются на окружности той же точкой, что и $\frac{17\pi}{3}$.

7. Часы отстали на 18 минут. На какой угол надо повернуть минутную стрелку, чтобы часы показывали верное время?

8. Как расположены на числовой окружности точки, соответствующие числам:

   1) tи $-t$;
   2) tи$t + 2\pi k$, $k \in Z$;
   3) tи$t + \pi$;
   4) $t - \pi$ии $t + \pi$?

9. Ведро в колодце поднимается на 2 м, если рукоятка ворота повернута на пять полных оборотов по часовой стрелке. На какой угол надо повернуть рукоятку ворота, чтобы ведро: 1) поднялось на 1,5 м? 2) опустилось на 1,25 м?

10. (Устно). Существуют ли числа α, β и γ, для которых:

    1) $\sin\alpha = -0{,}5,\quad \cos\beta = \sqrt{3},\quad \operatorname{tg}\gamma = -2{,}5$;

2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cos\beta = -2{,}2$, $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}31$;

3) $\sin\alpha = 1{,}3$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{4}$, $\operatorname{tg}\gamma = 5{,}2$?

11. Оцените выражение, т.е. укажите его наименьшее и наибольшее значение:

1) $1 + 2\sin\alpha$; 4) $2\sin x + 3$; 7) $1 - 4\cos^2 x$;

2) $4\sin\alpha + 1$; 5) $2\cos^2\alpha$; 8) $4 + \cos(\alpha - 15°)$;

3) $1 - 3\cos\alpha$; 6) $5 + 2\cos^2 x$; 9) $2 - \sin(\alpha - \beta)$.

12. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения:

1) $3\sin x - 1$; 3) $2\cos x - 3$; 5) $10 - 9\sin^2 x$;

2) $2 + 3\cos x$; 4) $5 - 4\sin x$; 6) $\sin^2 x - 5$.

13. Какой знак имеет произведение $\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi$, если число φ равно:

1) 4,1; 2) $-240°$; 3) $\frac{7\pi}{6}$?

14. Тангенсы трех острых углов соответственно равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$. Докажите, что первый угол равен сумме двух других углов.

15. Синусы острых углов треугольника соответственно равны $\frac{20}{29}$ и $\frac{3}{5}$. Найдите косинус внешнего угла треугольника, не смежного с двумя данными.

16. Выполните преобразование:

1) $\frac{2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$; 5) $\operatorname{tg}\alpha\,(1 + \cos 2\alpha)$;

2) $\frac{\sin 2t - 2\sin t}{\cos t - 1}$; 6) $\frac{(\sin\beta + \cos\beta)^2}{1 + \sin 2\beta}$;

3) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$; 7) $\frac{2}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t}$;

4) $\frac{1 + \cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}$; 8) $\left(\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}\right)\sin 2\alpha$.

17. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}1° \cdot \operatorname{tg}2° \cdot \operatorname{tg}3° \times \ldots \times \operatorname{tg}87° \cdot \operatorname{tg}88° \cdot \operatorname{tg}89°$;

2) $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2$.

(*Указание*: представьте $3 = 2 + 1$, $1 = 2 - 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $2 = 2 \cdot 1$).

18. Упростите выражения:

1) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$; 5) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

2) $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$; 6) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

19. Преобразуйте следующие выражения:

1) $\sin^2\alpha\left(1+\dfrac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(1-\dfrac{1}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right)$;

2) $\dfrac{\cos^2 2\alpha-4\cos^2\alpha+3}{\cos^2 2\alpha+4\cos^2\alpha-1}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-6}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2}$.

20. Вычислите без помощи калькулятора или таблиц:

1) $(\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}555^\circ)(\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}195^\circ)$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}615^\circ-\operatorname{tg}555^\circ}{\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}735^\circ}$.

Вычислите:

21. $\sin\left(2\alpha+\dfrac{5\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{3}$.

22. $\cos\left(2\alpha+\dfrac{7\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{2}{3}$.

23. tg $(4x-y)$, если $\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{5}$, $\operatorname{tg}y=\dfrac{1}{239}$.

24. $(\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha)\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$.

25. Упростите выражение $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}+2\alpha\right)$.

24. Найдите значение выражения:

1) $\sin^2\dfrac{\pi}{13}+\sin^2\dfrac{11\pi}{26}$; 2) $\cos^2\dfrac{3\pi}{34}+\cos^2\dfrac{7\pi}{17}$.

26. Без помощи таблиц или калькулятора вычислите:

$\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\sin^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}$.

27. Вычислите:

$\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}$.

28. Известно, что $\sin\alpha=\dfrac{336}{625}$, где $\dfrac{5\pi}{4}<\alpha<3\pi$. Вычислите $\sin\dfrac{\alpha}{4}$.

30. Вычислите $\sin\dfrac{\pi}{8}=\sin 22{,}5^\circ$.

31. В равнобедренном треугольнике косинус угла при вершине равен $\dfrac{5}{13}$. Найдите синус угла при основании.

32. Преобразуйте сумму в произведение и упростите результат, если это возможно:

1) $\sin 50° + \sin 20°$; 4) $\cos 160° + \cos 80°$; 7) $\cos 3\alpha - \cos 5\alpha$;

2) $\cos 28° - \cos 12°$; 5) $\sin 83° - \sin 23°$; 8) $\sin 10° + \cos 40°$;

3) $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}$ 6) $\sin\frac{\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}$; 9) $\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{\pi}{12}$.

33. Замените сумму произведением:

1) $\cos 40° - \cos 10°$; 4) $\cos 37° + \cos 23°$; 7) $\cos 20° - \cos 70°$;

2) $\sin 42° - \sin 26°$; 5) $\sin 130° + \sin 110°$; 8) $\sin\beta - \sin 3\beta$;

3) $\sin\frac{5\pi}{24}+\sin\frac{7\pi}{24}$; 6) $\sin\frac{\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}$; 9) $\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{10}$.

34. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$; 5) $\frac{\sin 3\alpha+\sin 7\alpha+\sin 11\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 7\alpha+\cos 11\alpha}$;

2) $\frac{\cos x-\cos 3x}{\sin x+\sin 3x}$; 6) $\frac{\cos 4\alpha-\cos 6\alpha-\cos 10\alpha+\cos 8\alpha}{\cos 8\alpha-\cos 6\alpha}$;

3) $\frac{\sin 2\beta-\sin 3\beta}{\cos 2\beta-\cos 3\beta}$; 7) $\frac{\cos\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 5\alpha}{\sin 5\alpha-2\cos 3\alpha-\sin\alpha}$;

4) $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha}$; 8) $\frac{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin\alpha+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 3\alpha}$.

35. Докажите тождество:

$$\frac{\cos^2 3x+\cos^2 4x-\sin^2 5x-\sin^2 6x}{\sin^2 3x-\sin^2 5x+\sin^2 4x-\sin^2 6x}=-\operatorname{ctg} 2x\operatorname{ctg} 9x.$$

36. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin 5\gamma+\sin 3\gamma}{\sin 5\gamma-\sin 3\gamma}$; 5) $\frac{\sin 7\alpha+\sin 5\alpha+\sin 3\alpha}{\cos 7\alpha+\cos 5\alpha+\cos 3\alpha}$;

2) $\frac{\cos 2\alpha-\cos 8\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 8\alpha}$; 6) $\frac{\cos 6\alpha-\cos 4\alpha+\cos 2\alpha-\cos 8\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}$;

3) $\frac{\sin x-\sin 2x}{\cos x-\cos 2x}$; 7) $\frac{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos\alpha}$;

4) $\frac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha}{\sin 2\alpha-\cos\alpha}$; 8) $\frac{\cos\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha+\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha+\sin\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}$.

37. Вычислите:

1) $\cos 95° + \cos 94° + \cos 93° + \cos 85° + \cos 86° + \cos 87°$;

2) $\operatorname{tg} 9° - \operatorname{tg} 27° - \operatorname{tg} 63° + \operatorname{tg} 81°$;

3) $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$.

38. Преобразуйте выражение:

$$\frac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}\cdot\frac{\cos 8\alpha-\cos 9\alpha-\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}{\sin 8\alpha-\sin 9\alpha-\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}.$$

39. Тангенсы двух углов треугольника равны соответственно 1,5 и 5. Найдите третий угол треугольника.

40. Преобразуйте выражения:

1) $\cos 7\varphi \cos 3\varphi + \sin 8\varphi \sin 2\varphi$; 2) $\cos 7\varphi \cos 3\varphi + \sin 7\varphi \sin 3\varphi$.

41. Проверь теравенства:

1) $\cos 50^\circ + 2\sin 40^\circ \sin 10^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $2\cos 40^\circ \cos 10^\circ - \cos 50^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $2\sin 25^\circ \cos 5^\circ - \sin 20^\circ = \dfrac{1}{2}$; 5) $\sin 20^\circ + 2\cos 25^\circ \sin 5^\circ = \dfrac{1}{2}$;

3) $\sin 5\alpha - 2\cos 4\alpha \sin \alpha = \sin 3\alpha$; 6) $\cos 3\alpha - 2\sin 2\alpha \sin 5\alpha = \cos 7\alpha$.

42. Вычислите:

1) $\mathrm{tg}\, 15^\circ + \mathrm{tg}\, 75^\circ$; 5) $\sin^4 \dfrac{3\pi}{8} - \cos^4 \dfrac{3\pi}{8}$;

2) $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cos 2$; 6) $\sin^4 \dfrac{3\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{3\pi}{8}$;

3) $\mathrm{tg}\, 41^\circ\, \mathrm{tg}\, 43^\circ\, \mathrm{tg}\, 45^\circ\, \mathrm{tg}\, 47^\circ\, \mathrm{tg}\, 49^\circ$; 7) $\sin^6 \dfrac{3\pi}{8} + \cos^6 \dfrac{3\pi}{8}$;

4) $\mathrm{tg}\, 20^\circ \mathrm{tg}\, 40^\circ \mathrm{tg}\, 50^\circ \mathrm{tg}\, 70^\circ$; 8) $\cos^8 \dfrac{\pi}{8} - \sin^8 \dfrac{\pi}{8}$.

43. Вычислите значение выражения

$\dfrac{\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha}{\cos 8\alpha}$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

44. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит один из его катетов на отрезки 3 см и 4 см. Вычислите косинусы острых углов треугольника.

45. В квадрат со стороной *a* вписан другой квадрат так, что вершины второго квадрата лежат на сторонах первого, а сторона второго квадрата образует угол α со сторонами первого. Найдите сторону вписанного квадрата.

46. Пусть α, β и γ – углы некоторого треугольника. Докажите, что для них выполняются следующие соотношения:

1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$;

2) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$;

3) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$;

4) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$;

5) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}\,\beta\ \mathrm{tg}\,\gamma$;

6) $\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\gamma = \mathrm{ctg}\,\alpha\ \mathrm{ctg}\,\beta\ \mathrm{ctg}\,\gamma$;

7) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

8) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = -1 + 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

9) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{ctg}\beta\ \operatorname{ctg}\gamma$;

10) $\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma + \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma + \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma = \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$;

11) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma = 1$;

12) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma = 1$;

13) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

14) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

15) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$;

16) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$;

17) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$.

Примеры контрольных работ:
Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Центр окружности единичного радиуса совпадает с началом координат плоскости xOy. Принадлежат ли дуге $P_1\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $P_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ точки $M_1(-1; 0)$, M_2 (0; -1), $M_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $M_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$?
2. Вычислите: $\sin\frac{13\pi}{6}$; $\cos(405^\circ)$; $tg\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; $ctg\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.
3. Вычислите $ctg(t-3\pi)$; $\sin(t+2\pi)$; $tg(t-\pi)$, если $\cos(t+2\pi) = -\frac{12}{13}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$.
4. Решите неравенство: а) $\cos t > \frac{1}{2}$; б) $\sin t \le \frac{1}{2}$.
5. Постройте график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.
6. Исследуйте функцию на четность и периодичность; укажите основной период, если он существует:

а) $y = \sin x + \cos x$; б) $y = x^2 + |\sin x|$.

Вариант 2

1. Центр окружности единичного радиуса совпадает с началом координат плоскости xOy. Принадлежат ли дуге $P_1\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ $P_2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ точки $M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, M_2 (0; 1), $M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_4\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$?
2. Вычислите: $\sin 420^\circ$; $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$; $tg\left(\frac{31\pi}{3}\right)$; $ctg(-330^\circ)$.
3. Вычислите $\cos(t+4\pi)$; $ctg(t-3\pi)$; $tg(t)$, если $\sin(t+2\pi) = -\frac{3}{5}$, $-\frac{\pi}{2} < t < 0$.
4. Решите неравенство: а) $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos t \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. Постройте график функции $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - 1$.
6. Исследуйте функцию на четность и периодичность; укажите основной период, если он существует:

а) $y = \sin x + ctgx$; б) $y = x^2 + \sin x$.

Вариант 3

1. Центр окружности единичного радиуса совпадает с началом координат плоскости xOy. Принадлежат ли дуге $P_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $P_2\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ точки M_1 (1; 0), M_2 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$, $M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$?
2. Вычислите: $\sin 315^\circ$; $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$; $tg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; $ctg\left(\frac{29\pi}{2}\right)$.
3. Вычислите $\cos(t-2\pi)$; $\sin(-t+4\pi\pi)$; $tg(t-\pi)$, если $ctg(t+\pi)=3$, $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$.
4. Решите неравенство: а) $\sin t \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. Постройте график функции $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+1$.
6. Исследуйте функцию на четность и периодичность; укажите основной период, если он существует:

а) $y=\cos x+|ctgx|$; б) $y=x^3+x^5+\sin 2x$.

Вариант 4

1. Центр окружности единичного радиуса совпадает с началом координат плоскости XOY. Принадлежат ли дуге $P_1\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ $P_2(\pi)$ точки M_1 (1; 0), M_2 $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_3(-1;0)$, $M_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$?
2. Вычислите: $\sin\left(-\frac{49\pi}{2}\right)$; $\cos\left(-\frac{19\pi}{2}\right)$; $tg\left(\frac{7\pi}{6}\right)$; $ctg(225^\circ)$.
3. Вычислите: $\cos(t-2\pi)$; $ctg(-t)$; $\sin(t)$, если $tg(t)=-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\pi}{2}<t<\pi$.
4. Решите неравенство: а) $\sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos t > -\frac{1}{2}$.
5. Постройте график функции $y=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+x\right)-1$.
6. Исследуйте функцию на четность и периодичность; укажите основной период, если он существует:

а) $y=\sin 2x+\cos x$; б) $y=\frac{x^4}{3}+\sin x$.

Вариант 5

1. Центр окружности единичного радиуса совпадает с началом координат плоскости XOY. Принадлежат ли дуге $P_1\left(\frac{5\pi}{3}\right)\ P_2\left(\frac{9\pi}{4}\right)$ точки M_1 (-1; 0), $M_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$, $M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, M_4 (0; 1)?
2. Вычислите: $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$; $\cos\left(420^\circ\right)$; $tg\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; $ctg\left(\frac{34\pi}{3}\right)$.
3. Вычислите: $\cos(t+6\pi)$; $tg(t-3\pi)$; $\sin(t)$, если $ctg^2(t)=\frac{4}{9}$, $\frac{\pi}{2}<t<\pi$.
4. Решите неравенство: а) $\sin 2t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. Постройте график функции $y=-\cos\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)+2$.
6. Исследуйте функцию на четность и периодичность; укажите основной период, если он существует:

а) $y=|tgx|+\cos x$; б) $y=\frac{\cos x}{x}+\sin 3x+x^3$

Вариант 6

1. Центр окружности единичного радиуса совпадает с началом координат плоскости XOY. Принадлежат ли дуге $P_1\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\ P_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ точки $M_1\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, M_4 (-1; 0) ?
2. Вычислите: $\sin\left(315^\circ\right)$; $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$; $tg\left(-240^\circ\right)$; $ctg\left(-\frac{40\pi}{3}\right)$.
3. Вычислите: $\cos(t-4\pi)$; $ctg(t+3\pi)$; $\sin(t+2\pi)$, если $tg^2(t)=49$, $\frac{\pi}{2}<t<\pi$.
4. Решите неравенство: а) $\cos 3t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. Постройте график функции $y=-\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-2$.
6. Исследуйте функцию на четность и периодичность; укажите основной период, если он существует:

а) $y=|\sin x|+\cos x$; б) $y=tgx+x^3+5$

Контрольная работа №2

Вариант 1

1. Вычислите: а) $5\arccos\frac{1}{2}+3\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $\sin\left(4\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-2arctg\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
2. Постройте график функции $y=2\sin 3x$.
3. Решите уравнение: а) $6\sin^2 x+5\cos x-7=0$;

   б) $2\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$.
4. Найдите корни уравнения $\sin(3x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $[-2\pi;\,\pi)$.
5. Постройте график функции $y=\arcsin(x+1)-1$.
6. Решите систему неравенств: а) $\begin{cases}\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos x\ge-\frac{1}{2};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\cos x\ge 0,\\ \sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

Вариант 2

1. Вычислите: а) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $\sin\left(2\arccos\left(\frac{1}{2}\right)+3arctg\sqrt{3}\right)$.
2. Постройте график функции $y=\frac{1}{2}\cos 3x$.
3. Решите уравнение: а) $2\sin x-3\cos^2 x+2=0$;

   б) $5\sin^2 x-3\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.
4. Найдите корни уравнения $\cos(4x+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащие промежутку $[-\pi;\,\pi)$.
5. Постройте график функции $y=\arccos(x-1)+1$.
6. Решите систему неравенств: а) $\begin{cases}\sin x\le 0,\\ \sin x>-\frac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\cos x>-\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x<\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

Вариант 3

1. Вычислите: а) $\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-4\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $tg\left(5arctg\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Постройте график функции $y=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x$.

3. Решите уравнение: а) $3\sin^2 2x+2\sin 2x-1=0$;

б) $4\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$.

4. Найдите корни уравнения $\sin(\frac{4x}{3}+\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $[-2\pi;\, 2\pi)$.

5. Постройте график функции $y=2\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

6. Решите систему неравенств: а) $\begin{cases}\sin x\le\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos x>-\frac{1}{7};\end{cases}$ б) $\begin{cases}ctgx>-1,\\ \cos x\le\frac{3}{5}.\end{cases}$

Вариант 4

1. Вычислите: а) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1}{3}\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $ctg\left(2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

2. Постройте график функции $y=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}x$.

3. Решите уравнения: а) $6\sin^2 2x-\sin 2x-1=0$;

б) $\sin^2 x-2\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$.

4. Найдите корни уравнения $\cos(\frac{4x}{3}-\frac{3\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащие промежутку $[-2\pi;\, 2\pi)$.

5. Постройте график функции $y=\frac{1}{3}\arccos(x+1)$.

6. Решите систему неравенств: а) $\begin{cases}\cos x\le\frac{1}{2},\\ \sin x>-\frac{2}{3};\end{cases}$ б) $\begin{cases}tgx\le\sqrt{3},\\ \sin x>\frac{1}{3}.\end{cases}$

Вариант 5

1. Вычислите: а) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sin\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $tg\left(\frac{1}{2}arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}-3\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

2. Постройте график функции $y=\frac{1}{3}\sin 3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$.

3. Решите уравнения: а) $4\sin^2 x + \cos x - \frac{7}{2} = 0;$

б) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2.$

4. Найдите корни уравнения $\sin(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие промежутку $[-2; 9)$.

5. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}arctg(x-1)$.

6. Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} \sin x \ge \frac{1}{3}, \\ \cos x < \frac{7}{8}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ tg^2 x + ctg^2 x > 2. \end{cases}$

Вариант 6

1. Вычислите: а) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \cos\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$; б) $ctg\left(\frac{1}{4}arctg\sqrt{3} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

2. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$.

3. Решите уравнение: а) $36\sin^2 x + 36\cos x - 29 = 0;$

б) $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = -2.$

4. Найдите корни уравнения $\sin(\frac{4x}{5} + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $[-8; 12)$.

5. Постройте график функции $y = 2arcctg(x+1)$.

6. Решите систему неравенств: а) $\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \cos x \ge -\frac{1}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{1}{tg^2 x} + \frac{1}{ctg^2 x} \ge 2. \end{cases}$

Контрольная работа №3

Вариант 1

1. Доказите тождество:

а) $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = tg^2 x$, б) $\cos x + \cos 2x + \cos 6x + \cos 7x = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\cos 4x$.

2. Упростите выражение $\frac{\sin x}{tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)(1+\sin x)}$.

3. Вычислите $2\sin 3x\cos 5x - \sin 8x,$ *если* $\sin x - \cos x = 0{,}9$.

4. Найдите $\cos^2\frac{x}{2},$ *если* $tg\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}},\ x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

5. Найдите корни уравнения $\sin 8x\cos 2x = \sin 7x\cos 3x,$ принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

6. Решите уравнение: а) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}$; б) $\sin 2x + 2ctgx = 3$.

8. Вычислите $tg\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$.

Вариант 2

1. Докажите тождество:

а) $\frac{\cos 2x+\sin^2 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}ctgx$, б) $\sin 9x + \sin 10x + \sin 11x + \sin 12x = 4\cos\frac{x}{2}\cos x\sin\frac{21x}{2}$.

2. Упростите выражение $1+\frac{\cos 4x}{tg\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)}$.

3. Вычислите $2\sin 5x\cos 3x - \sin 8x,$ *если* $\sin x + \cos x = \sqrt{0{,}6}$.

4. Найдите $\sin^2\frac{x}{2},$ *если* $ctg\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = 2\sqrt{6},\ x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

5. Найдите корни уравнения $\sin 10x\sin 2x = \sin 8x\sin 4x,$

принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

6. Решите уравнение: а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

б) $\sin 2x + tgx = 2$.

7. Вычислите $ctg\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)+arcctg(-1)\right)$.

Вариант 3

1. Докажите тождество:

а) $\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{2\sin x+\sin 2x}=tg^2\dfrac{x}{2}$, б) $\cos 2x-\cos 3x-\cos 4x+\cos 5x=-4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{7x}{2}\sin x$.

2. Упростите выражение $tg\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-tg\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. Вычислите $2\sin 3x\sin 2x+\cos 5x$, *если* $\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{0{,}6}$.

4. Найдите $ctg2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$, *если* $\sin x=-\dfrac{15}{17}$, $x\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

5. Найдите корни уравнения $\sin 5x+\sin x=\sqrt{3}\cos 2x$, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

6. Решите уравнение: а) $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{3}$; б) $1+\cos x=ctg\dfrac{x}{2}$.

7. Вычислите $\sin\left(arctg\dfrac{1}{2}-arcctg\left(-\sqrt{3}\right)\right)$.

Вариант 4

1. Докажите тождество:

а) $\cos 2x+tg^2x\cos 2x-1=-tg^2x$,

б) $\sin 4x-\sin 5x-\sin 6x+\sin 7x=-4\sin\dfrac{x}{2}\sin x\sin\dfrac{11x}{2}$.

2. Упростите выражение $tg\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)+tg\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. Вычислите $2\cos 3x\cos 4x-\cos 7x$, *если* $\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{0{,}8}$.

4. Найдите $tg2x$, *если* $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\dfrac{12}{13}$, $x\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

5. Найдите корни уравнения $\cos 5x-\cos 9x+\sqrt{3}\sin 2x=0$, принадлежащие промежутку $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

6. Решите уравнение: а) $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=1$; б) $2+\cos x=2tg\dfrac{x}{2}$.

7. Вычислите $\cos\left(arctg\dfrac{1}{\sqrt{3}}+arcctg(-3)\right)$.

Вариант 5

1. Докажите тождество:

а) $\dfrac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}=ctg\dfrac{x}{2}$, б) $\dfrac{\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x}{\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x}=ctg 4x$.

2. Упростите выражение $tg\left(x-\dfrac{5\pi}{4}\right)\cdot 2\sin^2\left(x+\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

3. Вычислите $2\cos 5x\sin 7x-\sin 12x$, *если* $\sin x-\cos x=0{,}4$.

4. Найдите $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$, *если* $tg\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)=-\sqrt{2}$, $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

5. Найдите корни уравнения $\cos 8x+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)=3\sin(4\pi+5x)$, принадлежащие промежутку $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

6. Решите уравнение: а) $2\sin x=2\cos x+\sqrt{6}$; б) $1-\cos\dfrac{x}{2}=tg\dfrac{x}{4}$.

7. Вычислите: $\cos\left(arctg(-\dfrac{3}{4})+arcctg\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

Вариант 6

1. Докажите тождество:

а) $\dfrac{1+2\cos x+\cos 2x}{1+\cos 2x-2\cos x}=-ctg^2\dfrac{x}{2}$, б) $\dfrac{\sin 2x-\sin 3x+\sin 4x}{\cos 2x-\cos 3x+\cos 4x}=tg 3x$.

2. Упростите выражение $ctg\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{5\pi}{4}\right)\cdot\left(1-\sin(3x-\pi)\right)$.

3. Вычислите $2\sin 5x\cos 7x-\sin 12x$, *если* $\sin x+\cos x=0{,}3$.

4. Найдите $\cos\left(\dfrac{x}{2}-4\pi\right)$, *если* $ctg\left(\dfrac{5\pi}{2}+x\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $x\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

5. Найдите корни уравнения $\sin 8x+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)=3\sin 5x$, принадлежащие промежутку $[0;\pi]$.

6. Решите уравнение: а) $\sqrt{2}\sin x=2-\sqrt{2}\cos x$; б) $2\left(tg\dfrac{x}{2}-1\right)=\cos x$.

7. Вычислите $\sin\left(arcctg\left(-\dfrac{4}{3}\right)+\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

Литература

1. Алимов Ш.А. Алгебра и начала анализа 10-11. Учебник - М.: Просвещение, 2001.
   анализа 10-11 // Учебник- М.: Мнемозина, 2003.
2. Башмаков Алгебра и начала анализа 10-11. Учебник - М.: Просвещение, 1992.
3. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. - М.: Наука, 1978.
4. Калинин С.И. Задачи и упражнения по началам математического анализа. - Киров: ВГПУ, 1997.
5. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа 10-11. Учебник - М.: Просвещение, 1999.
6. Мордкович А.Г. Алгебра и начала 2. Крамор В.С. Тригонометрические функции. - М.: Просвещение, 1979.
7. Панчишкин А.А. Тригонометрические функции в задачах - М.: Наука, 1986.
8. Письменный Д.Т. Математика для старшеклассников. М.: АЙРИС РОЛЬФ, 1996.
9. Раббот Ж. Тригонометрические уравнения// Квант. 1972- №5- с. 36-38.

Учебно–методическое издание

ТРИГОНОМЕТРИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПО

Методические указания

Составители:

Елкина Лариса Владимировна,

Журжи Инна Ивановна

Костюкова Светлана Владимировна

Усл. печ. л. 4.