MOLDOVA STATE UNIVERSITY
Center for Education and Research
in Mathematics and Computer Science
MRDA/CRDF

Theoretical and Applied Mathematics
Monograph Series

В.И.АРНАУТОВ

Н.Н.МАЛЮТИНА

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

Редактор – М.М.Чебан

Chişinău ∗ 2011

УДК 515.12

Это издание написано на базе цикла лекций по общей топологии, который читался в Приднестровском Государственном Университете для студентов физико-математического факультета в рамках обязательного курса по общей топологии. Оно будет полезно студентам математических специальностей физико-математических факультетов университетов, слушателям магистратуры и аспирантам, которым для проведения исследований необходимы знания по общей топологии.

Authors: *В.И.Арнаутов, профессор, академик АН М*
Н.Н.Малютина, ст. преподаватель

Recommended for publication by Scientific Councils of the Institute of Mathematics add Computer Sciences of ASM

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

В.И.Арнаутов, Н.Н.Малютина

Общая топология. Moldova State University, Center for Education and Research in Mathematics and Computer Science (MRDA/CRDF) – Ch.: CEP USM, 2011. – 108 p.

Bibliogr. p. 104 (5 tit.)

ISBN 978-9975-70-893-7

150 ex.

515.12

ISBN 978-9975-70-691-9

2011

©CERMCS , 2011
©В.И.Арнаутов,
Н.Н.Малютина

ВВЕДЕНИЕ.

Общая топология – это раздел математики, в котором с самых общих позиций изучается такое важное математическое понятие как непрерывность.

Общая топология не только является важным разделом современной математики, но находит широкое применение в других областях математики (алгебре, геометрии, математическом анализе и др.).

Основой этого издания является цикл лекций по курсу топологии, который читался на протяжении нескольких лет студентам физико-математического факультета Приднестровского университета.

В этом издании имеются многочисленные упражнения, которые призваны закрепить изученный материал.

Мы настоятельно рекомендуем всем изучающим этот курс попытаться самим решить эти упражнения, и лишь после этого посмотреть, приведенное в конце этого издания решение этих упражнений. Это позволяет изучающим этот курс, убедиться в правильности полученного ими самими решения этих упражнений.

Это издание будет полезным студентам, изучающим курс общей топологии, учащимся магистратуры и аспирантам, которым в своих исследованиях приходится применять результаты и методы общей топологии.

Все результаты, включенные в это издание, имеются и в других изданиях, в частности в изданиях, которые указаны в разделе “Рекомендуемая литература”, и авторы этого издания не претендуют на авторство изложенных здесь результатов.

1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА, ОТКРЫТЫЕ МНОЖЕСТВА.

1.1. Определение (топологического пространства). Пусть дано непустое множество X. Говорим, что на множестве X задана *топологическая структура* (другими словами - *топология)* τ, если задана непустая совокупность τ подмножеств множества X (элементами совокупности τ являются некоторые подмножества множества X), удовлетворяющая следующим трём аксиомам:

1. X, $\emptyset \in \tau$;

2. Если A, $B \in \tau$, то $A \cap B \in \tau$;

3. Если $S \subseteq \tau$, то $\bigcup\limits_{A \in S} A \in \tau$.

Пара (X, τ), где $X \neq \emptyset$ и τ- топологическая структура на множестве X, называется *топологическим пространством*, а подмножества множества X, которые принадлежат τ, называются *открытыми множествами* в топологическом пространстве (X, τ).

На языке открытых множеств аксиомы определения 1.1 будут выглядеть так:

1. Всё пространство X и пустое множество $\emptyset$ являются открытыми множествами;

2. Пересечение двух открытых множеств является открытым множеством;

3. Объединение любой совокупности открытых множеств является открытым множеством.

1.2. Теорема. *Пусть* (X, τ)*- топологическое пространство и* $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$*.Тогда* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau$*. (т.е. пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством).*

Доказательство. Доказательство проведём методом математической индукции.

Если $n = 1$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{1} A_i = A_1 \in \tau$, т.е. база индукции доказана.

Предположим, что из того, что A_1, $A_2, ..., A_{n-1} \in \tau$ следует, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i \in \tau$ и пусть A_1, $A_2, ..., A_n \in \tau$.

Тогда, по допущению, $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i \in \tau$. Согласно второй аксиоме

определения топологического пространства имеем

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = (\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \bigcap A_n = B \bigcap A_n \in \tau$$

Теорема доказана.

1.3. Упражнения. Доказать, что:

1.3.1. Если $X \neq \emptyset$ и $\tau = \{\emptyset, X\}$, т.е. τ содержит только два подмножества множества X, то τ является топологией на множестве X.

Это топологическое пространство (X, τ) называется *антидискретным пространством*, а топология $\tau = \{\emptyset, X\}$ называется *антидискретной топологией*.

1.3.2. Пусть $X \neq \emptyset$ и $\tau = \{A \,|\, A \subseteq X\}$, т.е. τ состоит из всех подмножеств множества X. Тогда τ является топологией на множестве X.

Это топологическое пространство (X, τ) называется *дискретным пространством*, а топология $\tau = \{A \,|\, A \subseteq X\}$ называется *дискретной топологией*.

1.3.3. Пусть $X = \{a, b\}$. Рассмотрим следующие четыре совокупности подмножеств множества X:

$\tau_1 = \{\emptyset,\ X\}$,
$\tau_2 = \{\emptyset,\ \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$,
$\tau_3 = \{\emptyset,\ \{a, b\}, \{a\}\}$;
$\tau_4 = \{\emptyset,\ \{a, b\}, \{b\}\}$.

Тогда каждая из этих совокупностей является топологией на множестве X.

1.3.4. Пусть $X = \{a, b\}$. Рассмотрим следующие совокупности $\sigma_1 = \{X, \{a\}\}$и $\sigma_2 = \{\emptyset, \{a\}\}$ подмножеств множества X.Показать, что совокупности σ_1 и σ_2 не являются топологиями.

1.3.5. Пусть $X = \{a, b, c\}$ и рассмотрим на X следующие совокупности:

$$\tau_1 = \{\emptyset,\ X, \{a\}, \{a, c\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}.\{b, c\}\} \quad ;$$

$$\tau_2 = \{\emptyset,\ X,\}$$

$$\tau_3 = \{\emptyset,\ X, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\};$$

$$\tau_4 = \{\emptyset,\ X, \{a, c\}, \{a\}, \{c\}\} \quad ;$$

$$\tau_5 = \{\emptyset,\, X, \{c, b\}\,, \{c\}\,, \{b\}\}\,.$$

Тогда каждая из этих совокупностей является топологией на множестве X.

1.3.6. Пусть $X = \{a, b, c\}$. Рассмотрим следующие 2 совокупности: $\sigma_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ и $\sigma_2 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ подмножеств множества X.

Тогда каждая из этих совокупностей не является топологией.

1.3.7. Пусть X – произвольное бесконечное множество и

$$\tau = \{A \subseteq X \mid X \backslash A \text{ – } \textit{конечное}\} \cup \{\emptyset\}\,.$$

Тогда эта совокупность является топологией на множестве X.

1.3.8. Если $\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел, и $\tau_{инт} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A$ – объединение интервалов $\}$, то $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ – топологическое пространство, т.е. совокупность $\tau_{инт}$ является топологией на множестве $\mathbb{R}$.

Эта топология называется *интервальной* топологией, а топологическое пространство $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ называется *пространством действительных чисел с интервальной топологией.*

1.4. Определение. Как обычно, говорим, что на множестве $X \neq \emptyset$ задана *метрика* ρ, если для любой пары элементов $a, b \in X$ определено такое неотрицательное действительное число $\rho\,(a, b)$ (называемое *расстоянием* от a до b), что выполняются следующие условия:

1) $\rho\,(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$;
2) $\rho\,(a, b) = \rho\,(b, a)$ для любых $a.b \in X$;
3) $\rho\,(a, b) \leq \rho\,(a, c) + \rho\,(c, b)$ для любых $a, b, c \in X$.

Пара (X, ρ)- называется *метрическим пространством.*

Например, для множества $\mathbb{R}$ действительных чисел, $\rho\,(a, b) = |b - a|$ является метрикой.

1.5. Теорема. *Если (X, ρ)- метрическое пространство, то совокупность*

$$\tau_\rho = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A\ \exists \varepsilon_x > 0,\ \{y \in X \,|\rho\,(x, y) < \varepsilon_x\} \subseteq A\}$$

является топологией на множестве X.

Эта топология называется *топологией, которая задается метрикой* ρ.

Доказательство. Проверим выполнимость аксиом определения топологического пространства:

Пусть $x \in X$. Возьмем $\varepsilon_x = 1$. Так как $\{y \in X \,|\rho(x,y) < 1\} \subseteq X$, то $X \in \tau_\rho$;

Так как $\emptyset$ не содержит ни каких элементов, то для любого $x \in \emptyset$ имеем, что $\{y \in X \,|\rho(x,y) < 1\} = \emptyset \subseteq \emptyset$, и значит, $\emptyset \in \tau_\rho$. Следовательно, первая аксиома определения 1.1 выполняется.

Пусть теперь $A, B \in \tau_\rho$ и $C = A \cap B$. Если $x \in C$, то $x \in A$ и $x \in B$, и значит существуют такие $\varepsilon_{x,A} > 0$ и $\varepsilon_{x,B} > 0$, что $\{y \in X \,|\rho(x,y) < \varepsilon_{x,A}\} \subseteq A$ и $\{y \in X \,|\rho(x,y) < \varepsilon_{x,B}\} \subseteq B$. Возьмём $\varepsilon_{x,C} = \min\{\varepsilon_{x,A}, \varepsilon_{x,B}\}$. Тогда $\{y \in X \,|\rho(x,y) < \varepsilon_{x,C}\} \subseteq A \cap B = C$, т.е. $C = A \cap B \in \tau_\rho$, и значит, вторая аксиома определения 1.1 выполняется.

Пусть теперь $S \subseteq \tau_\rho$ и $B = \bigcup\limits_{A \in S} A$, проверим, что $B \in \tau_\rho$.

Если $x \in B$, то существует такое множество $A_0 \in S$, что $x \in A_0$. Так как $A_0 \in \tau_\rho$, то существует такое число $\varepsilon_x > 0$, что
$\{y \in X \,|\rho(x,y) < \varepsilon_x\} \subseteq A_0 \subseteq B$, и значит, $B \in \tau_\rho$. Следовательно, τ_ρ является топологией на множестве X.

1.6. Проблема. *Сколько различных топологий можно задать на конечном множестве?*

Хотя формулировка, указанной выше проблемы, является на первый взгляд простой, однако ее решение является очень сложным и до настоящего времени она не решена.

Поэтому представляет интерес получить хотя бы некоторые оценки числа возможных топологий на множестве состоящим из n элементов. Одну из таких оценок, хотя и достаточно грубую, дает следующая теорема.

1.7. Теорема. *Если X – конечное непустое множество и n- число его элементов, то число всех топологий на множестве X не превосходит числа 2^{2^n-2}.*

Доказательство. Пусть Δ – множество всех подмножеств множества X. Тогда Δ имеет 2^n элементов. Если Ω – множество всех подмножеств множества $\Delta \backslash \{X, \emptyset\}$, то число элементов множества Ω равно 2^{2^n-2}.

Так как любая топология τ состоит из подмножеств множества X, то $\tau \subseteq \Delta$, и значит $\tau \backslash \{X, \emptyset\} \in \Omega$.

Поскольку, согласно первой аксиоме определения 1.1, $\{X, \emptyset\} \subseteq \tau$ для любой топологии τ, определенной на множестве X, то для любых топологий τ_1 и τ_2, заданных на множестве X, $\tau_1 \neq \tau_2$ тогда и только тогда

когда $\tau_1\backslash\{X,\emptyset\} \neq \tau_2\backslash\{X,\emptyset\}$, и значит, число различных топологий на множестве X не превосходит числа элементов множества Ω, т.е. не превосходит числа 2^{2^n-2}.

1.8. Следствие. *Если* $X = \{a,b\}$ (т.е. является двухэлементным множеством), *то число всех топологий на нем не превосходит числа* $2^{2^2-2} = 2^2 = 4$. *Поскольку в 1.3.3 указаны 4 различных топологий на множестве* $X = \{a,b\}$, *то этими четырьмя топологиями исчерпываются все топологии на множестве* $X = \{a,b\}$.

1.9. Пример. Пусть $X = \{a,b,c\}$**.** Рассмотрим следующую таблицу, состоящая из 64=2^{2^3-2} совокупностей σ_i подмножеств множества X, и выясним какие из них являются топологиями (в этой таблице указаны только те совокупности, которые содержат $\emptyset$ и X, ибо остальные совокупности не являются топологиями, поскольку для них не выполняется первая аксиома определения 1.1).

N	**Совокупность** σ_i	**Вывод**
1	$\{\emptyset, X\}$	Антидискретная топология
2	$\{\emptyset, X, \{a\}\}$	Является топологией
3	$\{\emptyset, X, \{b\}\}$	Является топологией
4	$\{\emptyset, X, \{c\}\}$	Является топологией
5	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$	Не является топологией
6	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}\}$	Не является топологией
7	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}\}$	Не является топологией
8	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$	Не является топологией
9	$\{\emptyset, X\{a,b\}\}$	является топологией
10	$\{\emptyset, X, \{a\},\{a,b\}\}$	Является топологией
11	$\{\emptyset, X, \{b\},\{a,b\}\}$	Является топологией
12	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a,b\}\}$	Является топологией
13	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$	Является топологией
14	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}\}$	Не является топологией
15	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}\}$	Не является топологией
16	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}\}$	Не является топологией
17	$\{\emptyset, X,\{a,c\}\}$	Является топологией
18	$\{\emptyset, X, \{a\},\{a,c\}\}$	Является топологией
19	$\{\emptyset, X, \{b\},\{a,c\}\}$	Является топологией
20	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a,c\}\}$	Является топологией
21	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,c\}\}$	Не является топологией

N	**Совокупность** σ_i	**Вывод**
22	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$	Является топологией
23	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}\}$	Не является топологией
24	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}\}$	Не является топологией
25	$\{\emptyset, X, \{b, c\}\}$	Является топологией
26	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
27	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
28	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
29	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
30	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
31	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
32	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
33	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Не является топологией
34	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Является топологией
35	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Не является топологией
36	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Не является топология
37	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Является топологией
38	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Является топологией
39	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Не является топологией
40	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	Не является топологией
41	$\{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
42	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
43	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
44	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
45	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
46	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
47	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
48	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
49	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
50	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
51	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
52	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
53	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
54	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
55	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Является топологией
56	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией
57	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	Не является топологией

N	**Совокупность** σ_i	**Вывод**
58	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$	Не является топологией
59	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$	Не является топологией
60	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$	Не является топологией
61	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$	Не является топологией
62	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$	Не является топологией
63	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$	Не является топологией
64	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$	Дискретная топология

1.10. Замечание. Из предыдущей таблицы видно, что на трехэлементном множестве можно задать 29 различных топологий.

1.11. Замечание. Если X содержит больше трех элементов, то для нахождения всех возможных на нем топологий нужно рассмотреть очень большое число совокупностей подмножеств множества X. Так:

– Если X является четырехэлементным множеством, то для нахождения всех возможных топологий нужно рассмотреть $2^{2^4-2} = 2^{14} = 16384$ совокупностей подмножеств множества X;

– Если же X является пятиэлементным множеством, то для нахождения всех возможных топологий нужно рассмотреть $2^{2^5-2} = 2^{30} > 10^8$ совокупностей подмножеств множества X.

Поэтому нужно искать другие методы (кроме полного перебора) построения всех топологий на конечных множествах.

1.12. Замечание. Для бесконечного множества X верна следующая теорема (для ее доказательства нужны знания из теории трансфинитных и кардинальных чисел, поэтому мы не приводим ее доказательства).

1.13. Теорема. Если X – бесконечное множество и m – его мощность, то мощность множества всех топологий, которые возможны на множестве X, равна 2^{2^m}, т.е. равна мощности множества всех совокупностей подмножеств множества X. (Это не означает, что всякая совокупность подмножеств множества X является топологией на множестве X.)

1.14. Определение. Совокупность Ω подмножеств множества X называется *базой топологического пространства* (X, τ), если выполняются следующие условия:

– Любое подмножество из Ω является открытым в (X, τ), т.е. $\Omega \subseteq \tau$;

– Всякое открытое множество топологического пространства (X, τ) является объединением некоторой совокупности подмножеств из Ω.

1.15. Упражнения. Проверить, что следующие совокупности являются базами соответствующих пространств.

1.15.1. В любом топологическом пространстве (X, τ) совокупность τ является базой пространства;

1.15.2. В дискретном пространстве (X, τ) совокупность $\Omega = \{\{x\} | x \in X\}$ является базой пространства;

1.15.3. В множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел с интервальной топологией $\tau_{инт}$ совокупность Ω всех интервалов с рациональными концами является базой топологического пространства $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$;

1.15. 4. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство и τ_ρ – топология, задаваемая метрикой ρ (см. теорема 1.5). Для любого элемента $a \in X$ и произвольного натурального числа n рассмотрим множество $U_{a,n} = \{y \in X | \rho(a, y) < 2^{-n}\}$. Тогда совокупность $\Omega = \{U_{a,k} | a \in X, k \in \mathbb{N}\}$ является базой топологического пространства (X, τ_ρ).

1.16. Теорема. *Если Ω – база топологического пространства (X, τ), то верны следующие утверждения:*

1.16.1..$\Omega \subseteq \tau$ *и* $\bigcup\limits_{U \in \Omega} U = X$;

1.16.2. *Для любых множеств $U, V \in \Omega$ и произвольного элемента $a \in U \bigcap V$ существует такое $W \in \Omega$, что $a \in W \subseteq U \cap V$.*

Доказательство. Утверждение 1.6.1 следует из определения 1.14 и того, что $X \in \tau$.

Пусть теперь $U, V \in \Omega$ и $a \in U \bigcap V$. Тогда $U, V \in \Omega \subseteq \tau$ и значит $U \cap V \in \tau$. Согласно второму условию определения 1.14, $U \bigcap V$ является объединением некоторой совокупности множеств принадлежащих Ω, и значит $a \in W \subseteq U \cap V$для некоторого $W \in \Omega$.

1.17. Теорема. *Пусть Ω – такая совокупность подмножеств множества X, что верны следующие утверждения:*

1. $\bigcup\limits_{U \in \Omega} U = X$;

2. Для любых $U, V \in \Omega$ и произвольного элемента $a \in U \bigcap V$ существует такое $W \in \Omega$, что $a \in W \subseteq U \cap V$.

Тогда на множествеX существует и притом единственная топология τ такая, что Ω является базой топологического пространства (X, τ).

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа.

Построение топологии. Рассмотрим совокупность τ всех таких подмножеств множества X, каждое из которых является объединением некоторой совокупности подмножеств , принадлежащих Ω. Так как $\emptyset = \bigcup\limits_{U\in\emptyset} U$ и, согласно условию 1 формулировки теоремы, $\bigcup\limits_{U\in\Omega} U = X$, то τ удовлетворяет первой аксиоме определения 1.1.

Пусть теперь $U, U' \in \tau$. Так как каждое из множеств U и U' является объединением некоторой совокупности подмножеств из Ω, то, для любого элемента $a \in U \cap U'$ найдутся такие подмножества $V_a, V'_a \in \Omega$, что $a \in V_a \subseteq U$ и $a \in V'_a \subseteq U'$. Согласно условию 2 формулировки теоремы, для элемента $a \in U \cap U'$ найдется такое подмножество $W_a \in \Omega$, что $a \in W_a \in V_a \cap V'_a \subseteq U \cap U'$. Тогда $U \cap U' = \bigcup\limits_{a\in U\cap U'} \{a\} \subseteq \bigcup\limits_{a\in U\cap U'} W_a \subseteq U \cap U'$, и значит, $U \cap U' = \bigcup\limits_{a\in U\cap U'} W_a$ т.е. $U \cap U' \in \tau$. Следовательно, τ удовлетворяет второй аксиоме определения 1.1.

Если $\{U_\gamma | \gamma \in \Gamma\} \subseteq \tau$, то каждое из подмножеств U_γ является объединением некоторой совокупности подмножеств из Ω. Тогда и множество $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$ можно представить как объединением некоторой совокупности подмножеств из Ω. Следовательно, τ удовлетворяет и третей аксиоме определения 1.1, т.е. τ является топологией на множестве X.

Так как любое множество из τ можно представить как объединение некоторой совокупности подмножеств из Ω, то Ω является базой пространства (X, τ).

Единственность топологии τ. Пусть τ' – любая такая топология на множестве X, что Ω является базой топологического пространства (X, τ').

Если $U \in \tau$, то U является объединением некоторой совокупности подмножеств из Ω (см. выше определение совокупности τ). Так как Ω является базой пространства (X, τ'), то $\Omega \subseteq \tau'$, и поскольку τ' удовлетворяет третей аксиоме определения 1.1, то $U \in \tau'$, и значит, $\tau \subseteq \tau'$.

Если же $W \in \tau'$, то, поскольку Ω является базой топологического пространства (X, τ'), W является объединением некоторой совокупности подмножеств из Ω, и значит (см. определение совокупности τ) $W \in \tau$. Из произвольности W следует, что $\tau' \subseteq \tau$. Следовательно $\tau = \tau'$.

Этим теорема полностью доказана.

2. ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК

2.1. Определение. Пусть (X, τ) – топологическое пространство и $a \in X$. Подмножество U называется *окрестностью точки* a в топологическом пространстве (X, τ), если существует такое множество $V \in \tau$, что $a \in V \subseteq U$.

Замечание. В некоторых учебниках по топологии под окрестностью понимают всякое открытое множество содержащее точку a. Однако это отличие не является существенным.

2.2. Упражнения. Доказать, что:

2.2.1. Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Если $A \in \tau$, то A является окрестностью любой точки $a \in A$, т.е. в любом топологическом пространстве всякое открытое множество является окрестностью любой своей точки.

2.2.2. Если (X, τ) – антидискретное пространство, то множество V является окрестностью точки $a \in X$ тогда и только тогда когда $V = X$.

2.2.3. Пусть (X, τ) – дискретное пространство и $A \subseteq X$. Если $a \in A$, то A – окрестность точки a.

2.2.4. Пусть $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ – топологическое пространство действительных чисел с интервальной топологией $\tau_{инт}$ и $r \in \mathbb{R}$. Рассмотрим интервал $A = (r-1, r+1)$ и $B = \{x \mid x - \textit{рациональное число}, r-1 < x < r+1\}$.

Тогда A является окрестностью точки r, а B не является окрестностью точки r в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$.

2.3. Теорема (Свойства окрестностей точек). *Пусть* (X, τ) *- топологическое пространство, тогда верны следующие утверждения:*

2.3.1. *Если* U*- окрестность точки* a в (X, τ), то $a \in U$*(любая окрестность точки содержит эту точку).*

2.3.2. *Если* U *- окрестность точки* a и $U \subseteq V \subseteq X$, *то* V *– окрестность точки* a*, т.е. множество, содержащее некоторую окрестность точки, само является окрестностью этой точки.*

2.3.3. *Если* U и V *– окрестности точки* a, то и $U \cap V$ *– окрестность точки* a*, и значит, пересечение любого конечного числа окрестностей точки* a *является окрестностью этой точки.*

2.3.4. *Подмножество $U \subseteq X$ тогда и только тогда является открытым, когда оно является окрестностью любой своей точки.*

Доказательство.

Если U- окрестность точки a, то существует такое $W \in \tau$, что $a \in W \subseteq U$, и значит, $a \in U$. Этим утверждение 2.3. 1 доказано.

Пусть теперь $U \subseteq V$ и U – окрестность точки a. Тогда существует такое $W \in \tau$, что
$a \in W \subseteq U \subseteq V$, и значит $V-$ окрестность точки a. Этим утверждение 2.3.2 доказано.

Если U и V – окрестности точки a, то существуют такие $W_1, W_2 \in \tau$, что $a \in W_1 \subseteq U$ и $a \in W_2 \subseteq V$. Тогда $W = W_1 \cap W_2 \in \tau$ и $a \in W \subseteq U \cap V$, т.е. $U \cap V$- окрестность точки a. Этим утверждение 2.3.3 доказано.

Если $U \in \tau$, то, согласно упражнению 2.2.1, U является окрестностью любой своей точки.

Пусть теперь подмножество U является окрестностью любой своей точки. Тогда для любого $a \in U$ существует такое $V_a \in \tau$, что $a \in V_a \subseteq U$. Так как
$U = \bigcup\limits_{a \in U} \{a\} \subseteq \bigcup\limits_{a \in U} V_a \subseteq U$, то $U = \bigcup\limits_{a \in U} V_a$ и согласно аксиоме 3 определение 1.1, получаем, что $U \in \tau$. Этим утверждение 2.3.4 доказано.

2.4. Определение *Пусть* (X, τ) – топологическое пространство и a – некоторый элемент из множества X. Совокупность Ω подмножеств множества X называется *базисом окрестностей точки* a в топологическом пространстве (X, τ), если выполняются следующие условия:

1) Любое $U \in \Omega$ является окрестностью точки a;

2) Для любой окрестности V точки a найдется такое подмножество $U \in \Omega$, что $U \subseteq V$.

2.5. Упражнения. Доказать, что:

2.5.1. Если (X, τ) – антидискретное пространство и $a \in X$, то совокупность $\Omega_a = \{X\}$ является базисом окрестностей точки a.

2.5.2. Если (X, τ) – дискретное пространство и $a \in X$, то $\Omega_a = \{\{a\}\}$ является базисом окрестностей точки a.

2.5.3. Если $X = \{a, b\}$ и $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, то совокупность
$\Omega_a = \{\{a\}\}$ является базисом окрестностей точки a и совокупность
$\Omega' = \{X\}$ является базисом окрестностей точки b, но Ω' не является базисом окрестностей точки a.

2.5. 4. Пусть $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ – топологическое пространство действительных чисел с интервальной топологией, $a \in \mathbb{R}$ и $\Omega = \left\{ \left(a - \frac{1}{2^n}; a + \frac{1}{2^n}\right) | n \in \mathbb{N} \right\}$, тогда совокупность Ω является базисом окрестностей точки a.

2.5. 5. Пусть $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел и

$$\tau = \{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, \mathbb{N} \backslash A \text{ -конечное множество}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Тогда, согласно упражнению 1.3.7, τ является топологией на множестве $\mathbb{N}$.

Доказать, что совокупность

$$\Omega = \{\{n, n+1, n+2, ...\} \cup \{1\} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

является базисом окрестностей точки 1 в постранстве $(\mathbb{N}, \tau)$.

2.6. Теорема. *Если (X, τ) – топологическое пространство, то любая точка $a \in X$ обладает базисом окрестностей, которые являются открытыми множествами.*

Доказательство. Для любой точки $a \in X$ рассмотрим совокупность $\Theta_a = \{U | U \in \tau, \text{ и } a \in U\}$. Тогда для любого $a \in X$ произвольное подмножество $U \in \Theta_a$ является окрестностью точки a (см. упражнение 2.2.1).

Кроме того, если $a \in X$ и V – окрестность точки a, то существует такое $U \in \tau$, что $a \in U \subseteq V$. Тогда $U \in \Theta_a$, и значит, Θ_a является базисом окрестностей точки a.

Этим теорема полностью доказана.

2.7. Теорема. *Пусть (X, τ) – топологическое пространство и для каждого $a \in X$ задан некоторый базис Ω_a окрестностей точки a в пространстве (X, τ). Тогда верны следующие утверждения:*

2.7.1. *Если $a \in X$ и $U, V \in \Omega_a$, то существует такое $W \in \Omega_a$, что $W \subseteq U \cap V$;*

2.7.2. *Если $a \in X$ и $U \in \Omega_a$, то существует $W \in \Omega_a$, такое что U является окрестностью любой точки $x \in W$.*

Доказательство. Если $a \in X$ и $U, V \in \Omega_a$, то $U \cap V$ является окрестностью точки a (см. утверждение 2.3.3). Так как Ω_a является базисом окрестностей точки a, то существует такое $W \in \Omega_a$, что
$W \subseteq U \cap V$.

Этим утверждение 2.7.1 доказано.

Пусть теперь $U \in \Omega_a$. Тогда U является окрестностью точки a, и значит, существует такое $V \in \tau$, что $a \in V \subseteq U$. Так как V является окрестностью точки a и Ω_a является базисом окрестностей точки a, то существует такое $W \in \Omega_a$, что $W \subseteq V$.

Если теперь $x \in W$, то $x \in V \subseteq U$ и поскольку $V \in \tau$, то U будет окрестностью точки x.

Этим теорема полностью доказана.

2.8. Теорема. *Пусть X-произвольное непустое множество и для каждого $a \in X$ задана такая непустая совокупность Θ_a подмножеств множества X, что выполнены следующие условия:*

1. *$a \in U$ для любого $U \in \Theta_a$ и произвольного $a \in X$;*

2. *Если $a \in X$ и $U, V \in \Theta_a$, то существует такое $W \in \Theta_a$, что $W \subseteq U \cap V$;*

3. *Если $a \in X$ и $U \in \Theta_a$, то существует такое $W \in \Theta_a$, что для любой точки $x \in W$ существует такое $V \in \Theta_x$, что $V \subseteq U$.*

Тогда на множестве X существует, и притом единственная топология τ такая, что для любого $a \in X$совокупность Θ_a является базисом окрестностей точки a в топологическом пространстве (X, τ).

Доказательство. Рассмотрим совокупность τ всех таких подмножеств U множества X, каждое из которых удовлетворяют следующему условию:

(*) Для каждого $x \in U$ существует такое $V \in \Theta_x$, что $V \subseteq U$.

Проверим, что совокупность τ является топологией на X и для любого $a \in X$ совокупность Θ_a является базисом окрестностей точки a в топологическом пространстве (X, τ).

Так как $\emptyset$ не содержит никаких элементов, то оно удовлетворяет условию (*), и значит, $\emptyset \in \tau$. Кроме того, для любого $a \in X$ множество Θ_a является непустым и значит, существует $V \in \Theta_a$. Так как $V \subseteq X$, то X удовлетворяет условию (*), и значит, $X \in \tau$.

Следовательно, τ удовлетворяет первой аксиоме определения 1.1.

Пусть теперь $U, V \in \tau$ и $a \in U \cap V$. Тогда существуют такие $U_a \in \Theta_a$ и $V_a \in \Theta_a$, что $U_a \subseteq U$ и $V_a \subseteq V$. Согласно условию 2 формулировки теоремы, существует такое $W_a \in \Theta_a$, что $W_a \subseteq U_a \cap V_a$. Тогда $W_a \subseteq U_a \cap V_a \subseteq U \cap V$, и значит, $U \bigcap V \in \tau$, т.е. τ удовлетворяет второй аксиоме определения 1.1.

Пусть теперь $\{U_\gamma | \gamma \in \Gamma\} \subseteq \tau$ и $a \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$. Тогда $a \in U_{\gamma_0}$ для некоторого $\gamma_0 \in \Gamma$, и значит, существует такое $W \in \Theta_a$, что $W \subseteq U_{\gamma_0} \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$, т.е. $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \in \tau$.

Следовательно, τ удовлетворяет и третей аксиоме определения 1.1.

Значит, τ является топологией на множестве X.

Проверим теперь, что для любого $a \in X$ совокупность Θ_a является базисом окрестностей точки a в топологическом пространстве (X, τ).

Пусть $U \in \Theta_a$. Рассмотрим подмножество $U' = \{x \in U | \exists V \in \Theta_x, \text{ что V} \subseteq \text{U}\}$.

Проверим, что $U' \in \tau$. Если $x \in U'$, то существует такое $V_x \in \Theta_x$, что $V_x \subseteq U$. По условию 3 (см. формулировку теоремы) существует такое $W_x \in \Theta_x$, что для любого $y \in W_x$ существует такое $W'_y \in \Theta_y$, что $W'_y \subseteq V_x$. Так как $W'_y \subseteq V_x \subseteq U$, то $W_x \subseteq \{y \in U | \exists V_y, \text{ что V}_y \subseteq U\} = U'$, и значит, $U' \in \tau$.

Так как $a \in U' \subseteq U$, то U является окрестностью точки a в топологическом пространстве (X, τ), т.е. Θ_a удовлетворяет первому условию определения 2.4.

Пусть теперь $a \in X$ и W- произвольная окрестность точки a в (X, τ). Тогда (см. определение 2.1) существует такое $U \in \tau$, что $a \in U \subseteq W$. Согласно условию (*), существует такое $V_a \in \Theta_a$, что $V_a \subseteq U \subseteq W$, и значит, Θ_a удовлетворяет и второму условию определения 2.4. Следовательно, совокупность Θ_a является базисом окрестностей точки a в топологическом пространстве (X, τ).

Проверим теперь единственность топологии τ.

Пусть τ'- такая топология на множестве X, что для любого $a \in X$ совокупность Θ_a является базисом окрестностей точки a в топологическом пространстве (X, τ').

Если $U \in \tau$, то (см. выше определение τ, условие (*)) для любого $x \in U$ найдется такое $V_x \in \Theta_x$, что $V_x \subseteq U$. Так как Θ_x является базисом окрестностей точки x в топологическом пространстве (X, τ'), то V_x является окрестностью точки x в топологическом пространстве (X, τ'), и согласно утверждению 2.3.2, U является окрестностью точки x в топологическом пространстве (X, τ'). Из произвольности точки x (см. утверждение 2.3.4) следует, что $U \in \tau'$. Следовательно $\tau \subseteq \tau'$.

Если же $U' \in \tau'$, то согласно утверждению 2.3.4, U' является окрестностью любой точки $x \in U'$ в топологическом пространстве (X, τ'). Так как Θ_x является базисом окрестностей точки x в топологическом пространстве (X, τ'), то найдется такое $V_x \in \Theta_x$, что $V_x \subseteq U'$. Тогда из произвольности элемента x следует, что $U' \in \tau$ (см. выше, определение τ, условие (*)). Следовательно $\tau' \subseteq \tau$, и значит, $\tau' = \tau$.

Этим теорема полностью доказана.

3. ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА И ЗАМЫКАНИЕ МНОЖЕСТВ.

3.1. **Определение**. Пусть (X, τ) – топологическое пространство и $A \subseteq X$. Множество A называется *замкнутым* в пространстве (X, τ), если $X \backslash A \in \tau$.

3.2. Упражнения. Доказать, что:

3.2.1. Если (X, τ) – произвольное топологическое пространство, то всё множество X и пустое множество являются замкнутыми множествами в пространстве (X, τ)

3.2.2. Если (X, τ) – антидискретное пространство и A – замкнутое множество в пространстве (X, τ), то либо $A = X$, либо $A = \emptyset$.

3.2.3. Если (X, τ) – дискретное пространство, то любое подмножество $A \subseteq X$ является замкнутым множеством в пространстве (X, τ).

3.2.4. Пусть $X = \{a, b\}$.

– Если $\tau_1 = \{\emptyset, \{a, b\}\}$, то совокупность всех замкнутых множеств совпадает с совокупностью $\{X, \emptyset\}$.

– Если $\tau_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$, то замкнутыми множествами являются все подмножества множества X.

— Если $\tau_3 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$, то совокупность всех замкнутых множеств совпадает с $\{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\}$.

– Если $\tau_4 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\}$, то совокупность всех замкнутых множеств совпадает с $\{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$.

3.2.5. Если $X = \{a, b, c\}$ и $\tau_= \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{a\}, \{a, b\}, \{b\}\}$, то совокупность всех замкнутых множеств совпадает с совокупностью
$\{\emptyset, \{a, b, c\}, \{b, c\}, \{c\}, \{a, c\}\}$.

3.2.6. Пусть $X = \{a, b, c\}$. Для каждой из топологий, указанных в примере 1.9, указать множество всех замкнутых множеств.

3.3. Теорема. Если X- *бесконечное множество и*

$$\tau = \{A \,|X \backslash A - \textit{ конечное множество}\} \cup \{\emptyset\},$$

то подмножество $F \subseteq X$*является замкнутым множеством в пространстве* (X, τ) *тогда и только тогда, когда* F*- конечное множество, либо* $F = X$.

Необходимость. Пусть F – замкнутое в (X, τ) множество. Тогда $X \backslash F \in \tau$, и значит, либо $X \backslash F = \emptyset$ (в этом случае $F = X$), либо $F = X \backslash (X \backslash F)$ является конечным множеством.

Достаточность. Пусть $F = X$, либо F является конечным множеством.

Если F – конечное множество, то $X \backslash F \in \tau$. Тогда $F = X \backslash (X \backslash F)$ является замкнутым множеством. Если же $F = X$, то (см. 3.2.1) F – замкнутое множество.

3.4. Теорема. *Если* $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$*- пространство действительных чисел с интервальной топологией, то следующие подмножества являются замкнутыми:*

– Любой из полуинтервалов вида $(-\infty, b]$ *и* $[a, \infty)$;

– Любой отрезок $[a, b]$, в частности, $\{a\} = [a, a]$

– Объединение любого конечного числа отрезков.

Доказательство. Так как $(-\infty, b] = \mathbb{R} \backslash (b, \infty) = \mathbb{R} \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (b, b+i)$ и $[a, \infty) = \mathbb{R} \backslash (-\infty, a) = \mathbb{R} \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (a-i, a)$, то любой из указанных полуинтервалов является замкнутым множеством.

Для замкнутости любого отрезка $[a, b]$ достаточно доказать, что дополнение к нему является открытым множеством, т.е. $\mathbb{R} \backslash [a, b]$ является объединением интервалов. Это действительно так, ибо

$$\mathbb{R} \backslash [a, b] = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a-n, a) \right) \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (b, b+n) \right).$$

Так как $\mathbb{R} \backslash [a_i, b_i] \in \tau_{инт}$ для каждого $1 \leq i \leq k$, то согласно теоремы 1.2, $\mathbb{R} \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{k} [a_i, b_i] = \bigcap\limits_{i=1}^{k} (\mathbb{R} \backslash [a_i, b_i]) \in \tau_{инт}$, и значит $\bigcup\limits_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$ является замкнутым множеством.

3.5. Теорема. *Если* (X, ρ)*- метрическое пространство ,* τ_ρ*- топология заданная метрикой* ρ (см. теорему 1.5.) *и* $a \in X$*, то для любого положительного числа* k *множество* $\{x \in X \,|\rho\,(a, x) \leq k\}$ *является замкнутым множеством в топологическом пространстве* (X, τ_ρ).

Доказательство: Пусть $S = \{x \in X \,|\rho\,(a, x) \leq k\}$. Тогда $X \backslash S = \{z | \rho(a, z) > k\}$.

Если b – произвольный элемент из множества $X \backslash S$, то существует такое положительно число ε, что $\rho(a, b) > k + \varepsilon$. Тогда для любого элемента $x \in \{y | \rho(b, y) < \varepsilon\}$ имеем $\rho(a, x) + \rho(x, b) \geq \rho(a, b) > k + \varepsilon$, и значит, $\rho(a, x) > k + \varepsilon - \rho(x, b) > k + \varepsilon - \varepsilon = k$. Значит, $V_b = \{y | \rho(b, y) < \varepsilon\} \subseteq X \backslash S$.Тогда (см. теорему 1.5) $X \backslash S \in \tau_\rho$, т.е. S является замкнутым множеством в топологическом пространстве (X, τ_ρ).

Этим теорема полностью доказана.

3.6. Теорема. *Если* (X, τ) – топологическое пространство, то верны следующие утверждения:

3.6.1. *Если A и B - замкнутые множества, то* $A \cup B$ *является замкнутым множеством;*

3.6. 2. *Если* S *- произвольная совокупность замкнутых множеств, то* $\bigcap\limits_{F \in S} F$ *является замкнутым множеством;*

3.6. 3. *Если* Φ – множество всех замкнутых множеств в топологическом пространстве (X, τ), то $\tau = \{X \backslash F | F \in \Phi\}$ и $\Phi = \{X \backslash F | F \in \tau\}$

Доказательство:

3.6.1. Если A и B – замкнутые множества, то $X \backslash A \in \tau$ и $X \backslash B \in \tau$, причем $X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$, следовательно, согласно второй аксиоме определения топологического пространства, $(X \backslash A) \cap (X \backslash B) \in \tau$, т.е $A \cup B$ – замкнутое множество.

Этим утверждение 3.6.1 доказано.

3.6.2. Пусть теперь S – произвольная совокупность замкнутых множеств. Тогда $X \backslash \left(\bigcap\limits_{F \in S} F \right) = \bigcup\limits_{F \in S} (X \backslash F)$, и согласно третьей аксиоме определения топологического, пространства $\bigcup\limits_{F \in S} (X \backslash F) \in \tau$. Следовательно, $\bigcap\limits_{F \in S} F$ является замкнутым множеством.

3.6.3. Легко следует из определения 3.1.

Этим теорема полностью доказана.

3.7. Упражнение. Доказать, что объединение любого конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

3.8. Теорема. *Пусть* X *– любое непустое множество и* Φ *– такая совокупность подмножеств множества* X, *что выполнены следующие условия:*

1) $\emptyset$ *и* $X \in \Phi$;

2) *Из того, что* A *и* $B \in \Phi$ *следует, что* $A \cup B \in \Phi$;

3) *Если* S *– произвольная совокупность подмножеств из* Φ, *то* $\bigcap\limits_{F \in S} F \in \Phi$.

Тогда на множестве X существует, и притом единственная топология τ такая, что совокупность Φ является множеством всех замкнутых множеств в топологическом пространстве (X, τ).

Доказательство. Рассмотрим совокупность $\tau = \{ X\backslash F \,|F \in \Phi \}$, и проверим, что τ является топологией на множестве X и совокупность Φ является множеством всех замкнутых множеств в топологическом пространстве (X, τ).

Так как $\emptyset = X\backslash X$ и $X = X\backslash\emptyset$, то $\emptyset, X \in \tau$, т.е. τ удовлетворяет первой аксиоме определения 1.1.

Если $A, B \in \tau$, то $A = X\backslash C$ и $B = X\backslash D$ для некоторых $C, D \in \Phi$. Тогда $A \bigcap B = (X\backslash C) \bigcap (X\backslash D) = X\backslash(C \bigcup D) \in \tau$, ибо $A \cup B \in \Phi$ (см. условие 2 в формулировке теоремы). Значит, τ удовлетворяет и второй аксиоме определения 1.1.

Если же $\{U_\gamma | \gamma \in \Gamma\} \subseteq \tau$, то для каждого $\gamma \in \Gamma$, найдется такое $F_\gamma \in \Phi$, что $U_\gamma = X\backslash F_\gamma$. Тогда $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X\backslash F_\gamma = X\backslash(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma) \in \tau$, ибо $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma \in \Phi$ (см. условие 3 в формулировке теоремы). Значит, τ удовлетворяет и третьей аксиоме определения 1.1.

Итак, мы доказали, что τ является топологией на множестве X.

Проверим теперь, что совокупность Φ является множеством всех замкнутых множеств в топологическом пространстве (X, τ).

Если $F \in \Phi$, то $X\backslash F \in \tau$, и значит, F является замкнутым множеством в топологическом пространстве (X, τ), т.е. каждое множество из совокупности Φ является замкнутым в топологическом пространстве (X, τ).

Обратно, если A является замкнутым множеством в топологическом пространстве (X, τ), то $V = X\backslash A \in \tau$, и значит, $V = X\backslash B$ для некоторого $B \in \Phi$. Тогда $A = X\backslash(X\backslash A) = X\backslash V = B \in \Phi$.

Итак, мы доказали, что совокупность Φ является множеством всех замкнутых множеств топологического пространства (X, τ).

Покажем теперь единственность топологии τ.

Пусть τ' – такая топология на множестве X, что совокупность Φ является множеством всех замкнутых множеств топологического пространства (X, τ').

Тогда (см. 3.6.3) $\tau' = \{ X\backslash F \,|F \in \Phi \}$ и поскольку $\tau = \{ X\backslash F \,|F \in \Phi \}$, то $\tau = \tau'$.

Этим теорема полностью доказана.

3.9. Определение. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, $M \subseteq X$ и $a \in X$. Точка a называется *точкой прикосновения к множеству* M в топологическом пространстве (X, τ), если $M \cap V \neq \emptyset$

для любой окрестности V точки a в топологическом пространстве (X, τ).

3.10. Определение. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, и $M \subseteq A \subseteq X$. Если любая точка $a \in A$ является точкой прикосновения к множеству M, то M называется *плотным подмножеством* в множестве A.

Если же $A = X$, то в этом случае множество M называется *всюду плотным подмножеством* в топологическом пространстве (X, τ).

3.11. Упражнения. Доказать, что:

3.11.1. Если $(X, \tau\}$ – топологическое пространство и $M \subseteq X$, то любая точка x из множества M является точкой прикосновения к M.

3.11.2. Пусть (X, τ) – дискретное пространство (т.е. все подмножества множества X являются открытыми в (X, τ)) и $M \subseteq X$. Если a – точка прикосновения к M, то $a \in M$.

3.11.3. Если (X, τ) – дискретное пространство, $M \subseteq X$ и $a \in X$, то a является точкой прикосновения к множеству M тогда и только тогда, когда $a \in M$.

3.11.4. Если (X, τ) – антидискретное пространство и $\emptyset \neq M \subseteq X$, то любая точка из множества X является точкой прикосновения к подмножеству M (т.е. любое непустое подмножество является всюду плотным в пространстве (X, τ)).

3.11.5. Если (X, τ) – топологическое пространство и $a \in X$, то a не является точкой прикосновения к пустому множеству (т.е. пустое множество не имеет точек прикосновения).

3.11.6. Пусть $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ – топологическое пространство действительных чисел с интервальной топологией. Если $M = (a, b) \neq \emptyset$, то a и b являются точками прикосновения к M (т.е. любой непустой интервал (a, b) является плотным подмножеством в отрезке $[a, b]$).

3.11.7. Пусть $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ – топологическое пространство действительных чисел с интервальной топологией и $\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел. Тогда любая точка $r \in \mathbb{R}$ является точкой прикосновения к множеству $\mathbb{Q}$, (т.е. $\mathbb{Q}$ является всюду плотным множеством в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$).

3.12. Определение. Пусть (X, τ) – топологическое пространство и $M \subseteq X$. *Замыканием множества* M в топологическом пространстве

(X, τ) называется множество всех точек прикосновения к множеству M.

3.13. Обозначения. Замыкание множества M в (X, τ) будем обозначать через $[M]_{(X,\tau)}$ или через $[M]_X$ или даже просто через $[M]$, если ясно о какой топологии в множестве X идёт речь или если ясно о каком топологическом пространстве идёт речь, соответственно.

3.14. Теорема. (Свойства замыкания). *Если (X, τ)- топологическое пространство, то верны следующие утверждения:*

3.14.1. Если $A \subseteq X$, то $A \subseteq [A]_{(X,\tau)}$;

3.14.2. *Если $A \subseteq B \subseteq X$, то $[A]_{(X,\tau)} \subseteq [B]_{(X,\tau)}$;*

3.14.3. *Если $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$ то $[A \cup B]_{(X,\tau)} = [A]_{(X,\tau)} \cup [B]_{(X,\tau)}$.*

Доказательство. Если $a \in A$, то согласно упражнению 3.11.1, a является точкой прикосновения к множеству A, и значит, $a \in [A]_{(X,\tau)}$. Из произвольности элемента $a \in A$ следует, что $A \subseteq [A]_{(X,\tau)}$. Этим утверждение 3.14.1 доказано.

Пусть теперь $A \subseteq B \subseteq X$ и $c \in [A]_{(X,\tau)}$. Тогда c является точкой прикосновения к множеству A и, следовательно, любая окрестность V точки c имеет с A непустое пересечение. Тогда $\emptyset \neq V \cap A \subseteq V \cap B$, и значит, $V \cap B \neq \emptyset$, т. е c является точкой прикосновения к множеству B. Следовательно, $c \in [B]_{(X,\tau)}$. Из произвольности точки c следует, что $[A]_{(X,\tau)} \subseteq [B]_{(X,\tau)}$. Этим утверждение 3.14.2 доказано.

Так как $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$, то согласно 3.14.2,
$[A]_{(X,\tau)} \subseteq [A \cup B]_{(X,\tau)}$ и $[B]_{(X,\tau)} \subseteq [A \cup B]_{(X,\tau)}$. Тогда
$[A \cup B]_{(X,\tau)} \supseteq [A]_{(X,\tau)} \cup [B]_{(X,\tau)}$.

Пусть теперь $c \in [A \cup B]_{(X,\tau)}$, докажем, что $c \in [A]_{(X,\tau)} \cup [B]_{(X,\tau)}$.

Предположим противное т.е., что $c \notin [A]_{(X,\tau)} \cup [B]_{(X,\tau)}$. Тогда $c \notin [A]_{(X,\tau)}$ и $c \notin [B]_{(X,\tau)}$, и значит, существуют такие окрестности U и V точки c, что $U \cap A = \emptyset$ и $V \cap B = \emptyset$. Так как, согласно утверждению 2.3.3, $W = U \bigcap V$ является окрестностью точки c и

$W \bigcap (A \cup B) = (W \cap A) \cup (W \cap B) \subseteq \quad (U \cap A) \cup (V \cap B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$,
то c не является точкой прикосновения к множеству $A \cup B$.

Получили противоречие с выбором точки c.

Следовательно, $[A \cup B]_{(X,\tau)} \subseteq [A]_{(X,\tau)} \cup [B]_{(X,\tau)}$, и значит,
$[A \cup B]_{(X,\tau)} = [A]_{(X,\tau)} \cup [B]_{(X,\tau)}$.

Этим утверждение 3.14.3 доказано.

3.15. Теорема. *Если (X,τ) – топологическое пространство и $F \subseteq X$, то множество F является замкнутым тогда и только тогда, когда $F = [F]_{(X,\tau)}$.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть F является замкнутым множеством. Тогда, $V = X \backslash F \in \tau$, и значит, V является окрестностью любой точки $x \in V = X \backslash F$. Так как $F \bigcap V = F \bigcap (X \backslash F) = \emptyset$, то любая точка $x \in X \backslash F$ не является точкой прикосновения к множеству F, т.е. $x \notin [F]_{(X,\tau)}$. Значит $F \supseteq [F]_{(X,\tau)}$.

Так как, согласно 3.14.1, $F \subseteq [F]_{(X,\tau)}$, то $F = [F]_{(X,\tau)}$. Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $F \subseteq X$ и $F = [F]_{(X,\tau)}$. Нужно показать, что F – замкнутое множество, т.е. что $X \backslash F \in \tau$. Кроме того, так как $a \notin F = [F]_{(X,\tau)}$ для каждого элемента $a \in X \backslash F$, то a не является точкой прикосновения к множеству F, и значит, существует такая окрестность V точки a, что $F \cap V = \emptyset$. Тогда $V \subseteq X \backslash F$ и, согласно утверждению 2.3.2, $X \backslash F$ будет окрестностью точки a. Из произвольности точки a следует (см. утверждение 2.3.4), что $X \backslash F \in \tau$, и значит, F является замкнутым множеством.

Этим теорема полностью доказана.

3.16. Теорема. *Если (X,τ) – топологическое пространство и $A \subseteq X$, то $[A]_{(X,\tau)}$ является замкнутым множеством (т.е. замыкание любого множества является замкнутым множеством).*

Доказательство. Покажем, что $X \backslash [A]_{(X,\tau)} \in \tau$. В самом деле, если $b \in X \backslash [A]_{(X,\tau)}$, то b не является точкой прикосновения к множеству A, и значит, существует такая окрестность U_b точки b, что $U_b \bigcap A = \emptyset$ и существует такое $V_b \in \tau$, что $b \in V_b \subseteq U_b$. Тогда $V_b \cap A = \emptyset$.

Покажем, что $V_b \cap [A]_{(X,\tau)} = \emptyset$.

Допустим противное, т.е. что $V_b \cap [A]_{(X,\tau)} \neq \emptyset$. Тогда существует такой элемент $c \in V_b \cap [A]_{(X,\tau)}$, и значит, $c \in [A]_{(X,\tau)}$, т.е. c является точкой прикосновения к множеству A. Так как $V_b \in \tau$, то V_b является окрестностью точки c, и значит, $V_b \cap A \neq \emptyset$. Получили противоречие с ранее доказанным что $V_b \cap A = \emptyset$.

Итак, мы доказали, что для любого элемента $b \in X \backslash [A]_{(X,\tau)}$, существует такое $V_b \in \tau$, что $V_b \cap [A]_{(X,\tau)} = \emptyset$, т.е. $V_b \subseteq X \backslash [A]_{(X,\tau)}$. Тогда

$$X \backslash [A]_{(X,\tau)} = \bigcup_{b \in X \backslash [A]_{(X,\tau)}} \{b\} \subseteq \bigcup_{b \in X \backslash [A]_{(X,\tau)}} V_b \subseteq X \backslash [A]_{(X,\tau)},$$

и значит, $X\setminus[A] = \bigcup\limits_{b\in X\setminus[A]_{(X,\tau)}} V_b$. Тогда, согласно третьей аксиоме определения 1.1, $X\setminus[A]_{(X,\tau)} = \bigcup\limits_{b\in X\setminus[A]_{(X,\tau)}} V_b \in \tau$, и значит, $[A]_{(X,\tau)}$ является замкнутым множеством.

Этим теорема полностью доказана.

3.17. Следствие. *Если (X,τ) – топологическое пространство и $A \subseteq X$, то $\Big[[A]_{(X,\tau)}\Big]_{(X,\tau)} = [A]_{(X,\tau)}$.*

В самом деле, согласно теореме 3.16, $[A]_{(X,\tau)}$ является замкнутым множеством в топологическом пространстве (X,τ) и, согласно теореме 3.15, $\Big[[A]_{(X,\tau)}\Big]_{(X,\tau)} = [A]_{(X,\tau)}$.

3.18.Теорема. *Пусть (X,τ) – топологическое пространство и $A \subseteq X$. Если Φ_A – совокупность всех таких замкнутых подмножеств $F \subseteq X$, что $A \subseteq F$, то $[A]_{(X,\tau)} = \bigcap\limits_{F\in\Phi_A} F$.*

Доказательство. Так как $[A]_{(X,\tau)}$ – замкнутое множество (см. теорему 3.16.) и $A \subseteq [A]_{(X,\tau)}$, то $[A]_{(X,\tau)} \in \Phi_A$. Тогда $[A]_{(X,\tau)} \supseteq \bigcap\limits_{F\in\Phi_A} F$.

Кроме того, всякое множество $F \in \Phi_A$ является замкнутым множеством и $A \subseteq F$. Тогда $\bigcap\limits_{F\in\Phi_A} F$, как пересечение замкнутых множеств, является замкнутым множеством (см. утверждение 3.6.2) и $A \subseteq \bigcap\limits_{F\in\Phi_A} F$, а потому $[A]_{(X,\tau)} \subseteq \Big[\bigcap\limits_{F\in\Phi_A} F\Big]_{(X,\tau)} = \bigcap\limits_{F\in\Phi_A} F \subseteq [A]_{(X,\tau)}$, и значит, $[A]_{(X,\tau)} = \bigcap\limits_{F\in\Phi_A} F$.

Этим теорема полностью доказана.

3.19. Теорема. *Пусть X – произвольное непустое множество, $\widehat{X}$ – множество всех подмножеств множества X и $\psi : \widehat{X} \to \widehat{X}$ такое отображение (определение отображения множеств см дальше 5.1.1), что выполняются следующие условия:*

1. $\psi(\emptyset) = \emptyset$ *и* $A \subseteq \psi(A)$ *для любого* $A \in \widehat{X}$;
2. *Если* $A, B \in \overleftarrow{X}$, *то* $\psi(A \cup B) = \psi(A) \cup \psi(B)$;
3. $\psi(A) = \psi(\psi(A))$ *для любого* $A \in \widehat{X}$.

Тогда на множестве X существует, и притом единственная топология τ такая, что $[A]_{(X,\tau)} = \psi(A)$ для любого $A \in \widehat{X}$.

Доказательство. Рассмотрим совокупность $\Phi = \{A \subseteq X | \psi(A) = A\}$ и проверим, что она удовлетворяет условиям теоремы 3.8.

Так как $\psi(\emptyset) = \emptyset$, то $\emptyset \in \Phi$. Кроме того, согласно условию 1, $X \subseteq \psi(X) \subseteq X$, и значит, $X = \psi(X)$, т.е. $X \in \Phi$. Следовательно, первое условие теоремы 3.8 выполняется.

Пусть $A, B \in \Phi$. Тогда, учитывая условие 2, получаем, что $\psi(A \cup B) = \psi(A) \cup \psi(B) = A \cup B$, и значит, $A \cup B \in \Phi$, т.е. второе условие теоремы 3.8 выполняется.

Пусть теперь $S = \{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ – произвольная совокупность подмножеств из совокупности Φ и $A = \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. Тогда $\psi(A) \subseteq \psi(A) \cup \psi(A_\gamma) = \psi(A \cup A_\gamma) = \psi(A_\gamma) = A_\gamma$ для любого $\gamma \in \Gamma$, и значит, $\psi(A) \subseteq \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = A$. Так как, согласно условию 1, $A \subseteq \psi(A)$, то $A = \psi(A)$, и значит, $A \in \Phi$.

Этим доказано, что совокупность Φ удовлетворяет и третьему условию теоремы 3.8, и значит, на множестве X существует, и притом единственная топология τ такая, что совокупность Φ является множеством всех замкнутых множеств в топологическом пространстве (X, τ).

Проверим теперь, что $[A]_{(X,\tau)} = \psi(A)$ для любого $A \subseteq X$.

В самом деле, так как, согласно условию 3, $\psi(\psi(A)) = \psi(A)$, то $\psi(A) \in \Phi$, и значит, $\psi(A)$ является замкнутым множеством в топологическом пространстве (X, τ) и, поскольку, согласно условию 1, $A \subseteq \psi(A)$, то по теореме 3.18, $[A]_{(X,\tau)} \subseteq \psi(A)$.

Кроме того, так как $[A]_{(X,\tau)}$ является замкнутым множеством в (X, τ), то $[A]_{(X,\tau)} \in \Phi$, и значит, $\psi([A]_{(x,\tau)}) = [A]_{(x,\tau)}$. Согласно утверждению 3.14.1, $A \subseteq [A]_{(X,\tau)}$ и так как, согласно условию 2, $\psi(A) \cup \psi([A]_{(X,\tau)}) = \psi(A \cup [A]_{(X,\tau)}) = \psi([A]_{(X,\tau)})$, то $\psi(A) \subseteq \psi([A]_{(x,\tau)}) = [A]_{(X,\tau)}$. Тогда $[A]_{(X,\tau)} = \psi(A)$.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить единственность топологии τ.

Пусть τ' – такая топология на множестве X, что $[A]_{(X,\tau')} = \psi(A)$ для любого $A \subseteq X$ и Φ' – совокупность всех замкнутых множеств в топологическом пространстве (X, τ').

Если $F \in \Phi$', то $F = [F]_{(X,\tau')} = \psi(F) = F$, и значит, $F \in \Phi$ т.е. Φ' $\subseteq \Phi$.

Пусть теперь $F \in \Phi$. Тогда $F = \psi(F) = [F]_{(X,\tau')}$, и согласно теореме 3.15, $F \in \Phi$'. Из произвольности F следует, что $\Phi \subseteq \Phi$', и значит, $\Phi = \Phi$'.

Так как, согласно теореме 3.18, топология τ определяется единственным образом совокупностью всех замкнутых множеств, то $\tau = \tau'$.

3.20. Определение. Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Подмножество $A \subseteq X$ называется *открыто-замкнутым* множеством в топологическом пространстве (X, τ), если A является одновременно и открытым и замкнутым множеством.

3.21. Упражнения. Доказать, что:

3.21.1. Если (X, τ) – топологическое пространство, то в нём $\emptyset$ и X являются открыто-замкнутыми множествами;

3.21.2. В антидискретном пространстве (X, τ) множество A является открыто-замкнутым тогда и только тогда, когда $A = \emptyset$, либо $A = X$;

3.21.3. В дискретном пространстве (X, τ) любое подмножество $A \subseteq X$ является открыто-замкнутым;

3.21.4. Если $X = \{a, b\}$ и $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, то совокупность $\{X, \emptyset\}$ будет множеством всех открыто-замкнутых множеств;

3.21.5. Если $X = \{a, b, c\}$ и $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, то совокупность $\{X, \emptyset\}$ будет множеством всех открыто-замкнутых множеств.

3.22. Упражнение. Для $X = \{a, b, c\}$ и каждой из топологий, указанной в упражнении 1.9, указать множество всех открыто-замкнутых множеств.

3.23. Теорема. *Если $\{(a_\gamma, b_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ – некоторая совокупность интервалов во множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел, каждый из которых содержит число d (т.е. $\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma) \neq \emptyset$), то $S = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma)$ является интервалом (возможно бесконечным интервалом).*

Доказательство. Пусть $a = \inf\{a_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ и $b = \sup\{b_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ (здесь может быть $a = -\infty$ или $b = \infty$). Покажем, что $S = (a, b)$.

Пусть $c \in (a, b)$. Тогда $a < c < b$. Если $c \leq d$, то существует такое γ_0, что $a_{\gamma_0} < c$. Тогда $a_{\gamma_0} < c \leq d < b_{\gamma_0}$, и значит, $c \in (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0}) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma)$.

Аналогично, если $c \geq d$, то существует такое γ_1, что $c < b_{\gamma_1}$. Тогда $a_{\gamma_1} < d \leq c < b_{\gamma_1}$, и значит $c \in (a_{\gamma_1}, b_{\gamma_1}) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma)$. Из произвольности числа c следует, что $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma) \supseteq (a, b)$.

Пусть теперь $c \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma)$. Тогда найдется такой элемент $\gamma_0, \in \Gamma$, что $c \in (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0})$, и значит, $a \leq a_{\gamma_0} < c < b_{\gamma_0} \leq b$, т.е. $c \in (a, b)$. Следовательно, $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma) \subseteq (a, b)$, и значит $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma) = (a, b)$.

Этим теорема полностью доказана.

3.24. Теорема. *Если* $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$*- топологическое пространство действительных чисел с интервальной топологией и* A *– открыто-замкнутое множество в нем, то* $A = \emptyset$ *или* $A = \mathbb{R}$.

Доказательство. Допустим противное, т.е. что в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ имеется открыто-замкнутое множество A, отличное от пустого множества и от всего $\mathbb{R}$.

Выберем некоторый элемент $d \in A$ и рассмотрим совокупность $\Delta = \{(a_\gamma, b_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ всех таких интервалов (a_γ, b_γ), которые содержат элемент d и содержатся во множестве A.

Тогда, согласно теореме 3.23, объединение всех этих интервалов является интервалом (a, b), где $a = \inf\{a_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ и $b = \sup\{b_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ (здесь может быть $a = -\infty$ или $b = \infty$). Так как $A \neq \mathbb{R}$, то либо $a \neq -\infty$, либо $b \neq \infty$.

Если $a \neq -\infty$, то, согласно упражнению 3.11.6, число a является точкой прикосновения к интервалу (a, b), и поскольку $(a, b) = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma, b_\gamma) \subseteq A$, то a является точкой прикосновения и к множеству A.

Так как A является замкнутым множеством в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$, то $a \in A$. Тогда, из открытости множества A следует, что $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Так как $a = \inf\{a_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$, то $a - \varepsilon < a \leq a_{\gamma_0} < a + \varepsilon$ для некоторого $\gamma_0 \in \Gamma$. Тогда $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0}) \neq \emptyset$, и значит (см. теорему 3.23), $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cup (a_{\gamma_0}, b_{\gamma_0})$ является интервалом, содержащим точку d и содержащимся в A. Получили противоречие с определением числа a. Значит $a = -\infty$.

Аналогично доказывается, что $b = \infty$.

Получили противоречие с тем, что, либо $a \neq -\infty$, либо $b \neq \infty$.

Этим теорема полностью доказана.

4. ПОДПРОСТРАНСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА.

4.1. Теорема. *Пусть* (X,τ) *– топологическое пространство и* $A \subseteq X$. *Если* $\tau|_A = \{A \cap U \,|U \in \tau\}$, *то* $(A, \tau|_A)$ *– топологическое пространство.*

Доказательство. Для совокупности $\tau|_A$ проверим выполнимость трёх аксиом определения топологического пространства (см. определение 1.1)

Так как $\emptyset = \emptyset \cap A$ и $A = X \cap A$, то $\emptyset \in \tau|_A$ и $A \in \tau|_A$, т.е. $\tau|_A$ удовлетворяет первой аксиоме определения 1.1.

Если $B, C \in \tau|_A$, то существуют такие $\widehat{B} \in \tau$ и $\widehat{C} \in \tau$, что $B = A \cap \widehat{B}$ и $C = \widehat{C} \cap A$. Тогда $\widehat{B} \cap \widehat{C} \in \tau$, и значит,
$B \cap C = \left(\widehat{B} \cap A\right) \cap \left(\widehat{C} \cap A\right) = \left(\widehat{B} \cap \widehat{C}\right) \cap A \in \tau|_A$, т.е. $\tau|_A$ удовлетворяет второй аксиоме определения 1.1.

Если теперь $\{B_\gamma \,|\gamma \in \Gamma\} \subseteq \tau|_A$, то для каждого $\gamma \in \Gamma$ существует такое $\widehat{B}_\gamma \in \tau$, что $B_\gamma = \widehat{B}_\gamma \cap A$. Тогда
$\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} (A \cap \widehat{B}_\gamma) = A \cap \left(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \widehat{B}_\gamma\right)$, и так как $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \widehat{B}_\gamma \in \tau$, то
$\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma = A \cap (\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \widehat{B}_\gamma) \in \tau|_A$.

Значит, $(A, \tau|_A)$ является топологическим пространством.

4.2. Определение. Если (X,τ) – топологическое пространство и $A \subseteq X$, то $(A, \tau|_A)$ называется *подпространством топологического пространства* (X,τ).

4.3. Упражнения. Пусть (X,τ) – топологическое пространство и $A \subseteq X$. Доказать, что:

4.3.1. Если (X,τ) – дискретное пространство, то и $(A, \tau|_A)$ является дискретным пространством;

4.3.2. Если (X,τ) – антидискретное пространство, то $(A, \tau|_A)$ будет антидискретным пространством;

4.3.3. Если $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ – пространство действительных чисел с интервальной топологией и $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, то $(\mathbb{Z}, \tau_{инт}|_{\mathbb{Z}})$ – дискретное пространство.

4.4. Теорема. *Пусть* (X,τ)*- топологическое пространство и* $A \subseteq X$. *Подмножество* $F \subseteq A$ *будет замкнутым в* $(A,\tau|_A)$ *тогда и только тогда, когда существует такое замкнутое в* (X,τ) *подмножество* B, *что* $F = A \cap B$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть подмножество $F \subseteq A$ является замкнутым в $(A,\tau|_A)$. Тогда $A\backslash F \in \tau|_A$, и значит, существует такое $V \in \tau$, что $A\backslash F = A \cap V$. Тогда $B = X\backslash V$ является замкнутым множеством в (X,τ), причем

$$A \cap B = A \cap (X\backslash V) = (A \cap X) \setminus (A \cap V) = A\backslash (A \cap V) = A\backslash (A\backslash F) = F,$$

т.е. $F = A \cap B$.

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $F = A \cap B$, где B замкнутое подмножество в пространстве (X,τ). Тогда $X\backslash B = U \in \tau$, и значит, $(X\backslash B) \cap A \in \tau|_A$. Так как $(X\backslash B) \cap A = (X \cap A) \setminus (B \cap A) = A\backslash F$, то F является замкнутым множеством в пространстве $(A,\tau|_A)$.

4.5. Теорема. *Пусть* (X,τ) *– топологическое пространство, и* $A \subseteq X$. *Если* $a \in A$, *то подмножество* $U \subseteq A$ *является окрестностью точки* a *в подпространстве* $(A,\tau|_A)$ *тогда и тогда, когда существует такая окрестность* $\widehat{V}$ *точки* a *в пространстве* (X,τ) , *что* $U = A \cap \widehat{V}$.

Доказательство.

Необходимость. Если U является окрестностью точки a в $(A,\tau|_A)$, то существует такое множество $W \in \tau|_A$, что $a \in W \subseteq U$. Тогда существует такое множество $V \in \tau$, что $W = V \cap A$. Рассмотрим множество $\widehat{V} = V \cup U$. Тогда, $a \in V \subseteq \widehat{V}$, и значит, $\widehat{V}$ является окрестностью точки a в пространстве (X,τ), причем
$A \cap \widehat{V} = A \cap (V \cup U) = (A \cap V) \cup (A \cap U) = W \cup U = U$.

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $U = A \cap \widehat{V}$, где $\widehat{V}$ – окрестность точки a в пространстве (X,τ). Тогда, существует такое множество $W \in \tau$, что $a \in W \subseteq \widehat{V}$. Так как $a \in A$, то $a \in W \cap A \subseteq \widehat{V} \cap A = U$. Поскольку $W \cap A \in \tau|_A$, то U является окрестностью точки a в $(A,\tau|_A)$.

Этим теорема полностью доказана.

4.6. Теорема. *Пусть* (X,τ) *– топологическое пространство и* $A \subseteq X$. *Если* $B \subseteq A$, *то* $[B]_{(A,\tau|_A)} = A \cap [B]_{(X,\tau)}$.

Доказательство. Пусть $b \in [B]_{(A,\tau|_A)}$. Тогда b является точкой прикосновения к множеству B в топологическом пространстве $(A,\tau|_A)$. Если U – окрестность точки b в (X,τ), то, согласно теореме 4.5, $U \cap A$ является окрестностью точки b в $(A,\tau|_A)$ и, значит, $(U \cap A) \cap B \neq \emptyset$. Тогда $U \cap B \supseteq (U \cap A) \cap B$, и значит, $U \cap B \neq \emptyset$.

Из произвольности окрестности U следует, что b является точкой прикосновения к множеству B в пространстве (X,τ) , т.е. $b \in [B]_{(X,\tau)}$. Так как $b \in [B]_{(A,\tau|_A)} \subseteq A$, то $b \in A \cap [B]_{(X,\tau)}$. Из произвольности элемента b следует, что $[B]_{(A,\tau|_A)} \subseteq A \cap [B]_{(X,\tau)}$.

Пусть теперь $b \in A \cap [B]_{(X,\tau)}$. Тогда $b \in A$. Проверим, что b является точкой прикосновения к множеству B в топологическом пространстве $(A,\tau|_A)$. Если U – окрестность точки b в $(A,\tau|_A)$, то существует такая окрестность V точки b в (X,τ) , что $U = A \cap V$(см. теорему 4.5). Так как b – точка прикосновения к B в (X,τ) , то $V \cap B \neq \emptyset$. Но $B \subseteq A$, значит,

$$\emptyset \neq V \cap B = \quad (B \cap A) \cap V = B \cap (A \cap V) = B \cap U,$$

т.е. $U \cap B \neq \emptyset$. Следовательно, любая окрестность точки b в пространстве $(A,\tau|_A)$ имеет с множеством B непустое пересечение, т.е. b – точка прикосновения к множеству B в пространстве $(A,\tau|_A)$, и значит, $b \in [B]_{(A,\tau|_A)}$. Из произвольности точки b следует, что $[B]_{(A,\tau|_A)} \supseteq A \cap [B]_{(X,\tau)}$, и значит, $[B]_{(A,\tau|_A)} = A \cap [B]_{(X,\tau)}$.

Этим теорема полностью доказана.

4.7. Теорема. *Пусть* (X,τ) *– топологическое пространство, и* A *– открытое множество в* (X,τ). *Если* $a \in A$, и U *является окрестностью точки* a *в* $(A,\tau|_A)$, *то* U*- окрестность точки* a *в пространстве* (X,τ).

Доказательство. Так как U является окрестностью точки a в $(A,\tau|_A)$, то по теореме 4.5, существует такая окрестность V точки a в (X,τ) , что $U = A \cap V$. Так как $a \in A$ и $A \in \tau$, то A – окрестность точки a в (X,τ). Тогда (см. утверждение 2.3.3) $V \cap A$ – окрестность точки a в пространстве (X,τ), и значит, U – окрестность точки a в (X,τ) .

Этим теорема полностью доказана.

4.8. Теорема. *Если* (X,τ) *– топологическое пространство и* A *– замкнутое множество в* (X,τ) , *то верны следующие утверждения:*

4.8.1. *Если* F*- замкнутое множество в пространстве* $(A, \tau\,|_A)$, *то* F *является замкнутым множеством в пространстве* (X, τ);

4.8.2. *Для любого* $B \subseteq A$ *верно, что* $[B]_{(A,\tau|_A)} = [B]_{(X,\tau)}$.

Доказательство. Если F – замкнутое множество в пространстве $(A, \tau\,|_A)$, то, по теореме 4.4,. в пространстве (X, τ) существует такое замкнутое множество B, что $F = A \cap B$. Так как A – замкнутое множество в пространстве (X, τ), то $F = A \cap B$ является замкнутым множеством в пространстве (X, τ).

Этим утверждение 4.8.1 доказано.

Докажем вначале включение $[B]_{(A,\tau|_A)} \supseteq [B]_{(X,\tau)}$.

По теореме 3.16, множество $[B]_{(A,\tau|_A)}$ является замкнутым множеством в пространстве $(A, \tau\,|_A)$, и по утверждению 4.8.1, $[B]_{(A,\tau|_A)}$ является замкнутым множеством в пространстве (X, τ). Так как $B \subseteq [B]_{(A,\tau|_A)}$ то согласно утверждению 3.14.2 и теореме 3.15,

$$[B]_{(X,\tau)} \subseteq \quad \Big[[B]_{(A,\tau|_A)}\Big]_{(X,\tau)} = [B]_{(A,\tau|_A)},$$

т.е. $[B]_{(A,\tau|_A)} \supseteq [B]_{(X,\tau)}$.

Докажем обратное включение. Так как, согласно теореме 3.16, $[B]_{(X,\tau)}$ является замкнутым множеством в пространстве (X, τ), то $A \cap [B]_{(X,\tau)}$ будет замкнутым множеством в пространстве $(A, \tau\,|_A)$. Тогда по теореме 4.6, $[B]_{(A,\tau|_A)} = A \cap [B]_{(X,\tau)} \subseteq [B]_{(X,\tau)}$. Значит $[B]_{(A,\tau|_A)} = [B]_{(X,\tau)}$.

Этим теорема полностью доказана.

5. ОТОБРАЖЕНИЯ

ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ.

5.1. Определения.

5.1.1. Если X, Y – произвольные множества и f – некоторое правило, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$ (будем писать $y = f(x)$), то f называется *отображением* множества X в множество Y и обозначается $f : X \to Y$.

Если X и Y – это множества $\mathbb{R}$ действительных чисел, то понятие отображения совпадает с понятием функции.

5.1.2. Отображение $f : X \to Y$ называется *сюръективным отображением* (или другими словами – *сюръекцией, или отображением на*), если любой элемент $y \in Y$ является образом некоторого элемента $x \in X$.

5.1.3. Отображение $f : X \to Y$называется *иньективным* отображением (или другими словами – *иньекцией*), если из того, что $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. различным элементам множества X соответствуют различные элементы множества Y.

5.1.4. *Биективным отображением* называется отображение, которое является иньективным и сюрьективным отображением (т.е. является взаимнооднозначным отображением на).

5.2. Примеры:

1) Пусть X – множество стульев, а Y – множество студентов в данной аудитории. Если f – правило, которое каждому стулу ставит в соответствие студента, который сидит на этом стуле, то f не будет отображением, так как есть стулья, на которых никто не сидит.

Но если бы все стулья были заняты студентами, то f было бы отображением и даже биекцией.

2) Пусть X – множество столов, а Y – множество стульев в данной аудитории. Если f – правило, которое каждому столу ставит в соответствие стулья, которые находятся возле данного стола, то f не будет отображением, так как около стола имеется больше, чем один стул.

5.3. Определение. Пусть X, Y – любые множества и $f : X \to Y$, тогда:

5.3.1. Если $A \subseteq X$, то множество $\{f(x)\,|x \in A\}$ называется *образом множества* A при отображении f и обозначается $f(A)$.

5.3.2. Если $B \subseteq Y$, то множество $\{x \in X\,|f\,(x) \in B\}$ называется *прообразом множества* B при отображении f и обозначается $f^{-1}(B)$.

Выражение $f^{-1}(B)$ нужно рассматривать как единное целое выражение и это, в оличие от 5.4, не означает, что имеется отображение f^{-1}.

5.4. Определение. Пусть X, Y – любые множества, $\varphi : Y \to X$ и $f : X \to Y$.

Каждое из отображений f и φ называются *обратными* к другому из этих отображений, если $f(\varphi(y)) = y$ и $\varphi(f(x)) = x$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

В этом случае будем писать $\varphi = f^{-1}$ и $f = \varphi^{-1}$.

5.5. Упражнение. Доказать, что если X, Y – любые множества и $f : X \to Y$, то для отображения f существует обратное отображение $\varphi : Y \to X$ тогда и только тогда, когда f является биективным отображением.

5.6. Обозначение. Пусть X, Y – любые множества. Если $f : X \to Y$ и $A \subseteq X$, то $f : A \to Y$ является отображением и его будем обозначать через $f\,|_A$.

5.7. Упражнения. Пусть $\{A_\gamma|\gamma \in \Gamma\}$ **и** $\{B_\gamma|\gamma \in \Gamma\}$ – любые совокупности подмножеств множеств X и Y, соответственно, и $f : X \to Y$. Доказать верность следующих утверждений:

5.7.1. $A_\gamma \subseteq f^{-1}(f(A_\gamma))$ и $A_\gamma = f^{-1}(f(A_\gamma))$, если f является инъективным отображением;

5.7.2. $B_\gamma \supseteq f(f^{-1}(B_\gamma))$ и $B_\gamma = f(f^{-1}(B_\gamma))$, если f является сюръективным отображением;

5.7.3. $f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$ и $f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$, если f является инъективным отображением;

5.7.4. $f^{-1}(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$;

5.7.5. $f(A_{\gamma_1} \backslash A_{\gamma_2}) \supseteq f(A_{\gamma_1}) \backslash f(A_{\gamma_2})$ и $f(A_{\gamma_1} \backslash A_{\gamma_2}) = f(A_{\gamma_1}) \backslash f(A_{\gamma_2})$, если f является инъективным отображением;

5.7.6. $f(X \backslash A_\gamma) \supseteq f(X) \backslash f(A_\gamma)$ и $f(X \backslash A_\gamma) = Y \backslash f(A_\gamma)$, если f является биективным отображением;

5.7.7. $f^{-1}(B_{\gamma_1} \backslash B_{\gamma_2}) = f^{-1}(B_{\gamma_1}) \backslash f^{-1}(B_{\gamma_2})$, в частности, $f^{-1}(Y \backslash B_\gamma) = X \backslash f^{-1}(B_\gamma)$;

5.7.8. $f(\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$;

5.7.9. $f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$;

5.7.10. Привести примеры, показывающие, что являются существенными:

– Требование инъективности отображения f в 5.7.1, в 5.7.3, в 5.7.5;

– Требование сюръективности отображения f в 5.7.2;

– Требование биективности отображения f в 5.7.6.

5.8. Определение. Пусть (X, τ_1) и (Y, τ_2) – топологические пространства, $a \in X$ и $f : X \to Y$. Отображение f называется *непрерывным в точке* $a \in X$, если для любой окрестности U точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2) существует такая окрестность V точки a в пространстве (X, τ_1), что $f(V) \subseteq U$.

5.9. Замечание. Если вместо топологических пространств (X, τ_1) и (Y, τ_2) взять пространство $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ действительных чисел с интервальной топологией и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то f является функцией и понятие непрерывного отображения в точке совпадает с понятием непрерывности функции в точке.

5.10. Определение. Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) – топологические пространства, и $f : X \to Y$, то отображение f называется *непрерывным отображением топологического пространства* (X, τ_1) *в топологическое пространство* (Y, τ_2), если f является непрерывным отображением в любой точке $x \in X$.

5.11. Упражнения:

5.11.1. Пусть X, Y – произвольные множества и $f : X \to Y$. Если τ_1 – дискретная топология на множестве X, а τ_2 – любая топология на множестве Y, то $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным отображением.

5.11.2. Пусть X и Y – произвольные множества и $f : X \to Y$. Если τ_1 – любая топология на множестве X, а τ_2 – антидискретная топология на множестве Y, то $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ – непрерывное отображение.

5.11.3. Пусть $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ – пространство действительных чисел с интервальной топологией, и $f(x) = x^2$. Тогда $f : (\mathbb{R}, \tau_{инт}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{инт}})$ является непрерывным отображением.

5.12. Теорема (Критерий непрерывности отображения в точке). *Пусть* (X, τ_1) *и* (Y, τ_2) *- топологические пространства.* Если $a \in X$ *и* $f : X \to Y$, *то отображение* $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ *является непрерывным в точке* $a \in X$ *тогда и только тогда, когда* $f^{-1}(U)$ *является окрестностью точки* a *в пространстве* (X, τ_1) *для любой окрестности* U *точки* $f(a)$ *в пространстве* (Y, τ_2).

Доказательство.

Необходимость. Пусть $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ – непрерывное отображение в точке $a \in X$ и U – окрестность точки $f(a)$ в (Y, τ_2). Тогда, согласно определению 5.8, существует такая окрестность V точки a в (X, τ_1), что $f(V) \subseteq U$, и значит, $V \subseteq f^{-1}(f(V) \subseteq f^{-1}(U)$. По утверждению 2.3.2, $f^{-1}(U)$ является окрестностью точки a в пространстве (X, τ_1).

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $f : X \to Y$ – такое отображение, что $f^{-1}(U)$ является окрестностью точки a в пространстве (X, τ_1) для любой окрестности U точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2).

Тогда, если U – произвольная окрестность точки точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2), то $V = f^{-1}(U)$ является окрестностью точки a в (X, τ_1), причем $f(V) = f(f^{-1}(U)) \subseteq U$, т.е. отображение f является непрерывным в точке a.

Этим теорема полностью доказана.

5.13. Теорема (Критерий непрерывности отображения). *Если* (X, τ_1) *и* (Y, τ_2) *– топологические пространства, и* $f : X \to Y$ *– произвольное отображение, то следующие условия эквивалентны:*

1) $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ *– непрерывное отображение;*

2) *Если* $U \in \tau_2$, *то* $f^{-1}(U) \in \tau_1$ *(т.е. прообраз любого открытого множества является открытым множеством);*

3) *Если* F *– замкнутое множество в пространстве* (Y, τ_2), *то* $f^{-1}(F)$ *является замкнутым множеством в пространстве* (X, τ_1), *т.е. прообраз любого замкнутого множества является замкнутым подмножеством;*

4) $f\left([M]_{(X,\tau_1)}\right) \subseteq [f(M)]_{(Y,\tau_2)}$ *для любого подмножества* $M \subseteq X$.

Доказательство.

Доказательство проведем по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Пусть отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным и $U \in \tau_2$. Если $f^{-1}(U) = \emptyset$, то $f^{-1}(U) = \emptyset \in \tau_1$. Если же $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ и

$a \in f^{-1}(U)$, то $f(a) \in f\left(f^{-1}(U)\right) \subseteq U$. Так как $U \in \tau_2$, то U – окрестность точки $f(a)$ в (Y, τ_2).

Согласно теореме 5.12, $f^{-1}(U)$ – окрестность точки a в пространстве (X, τ_1), и значит, $f^{-1}(U)$ является окрестностью любой своей точки. Тогда, согласно утверждению 2.3.4, $f^{-1}(U) \in \tau_1$.

Этим доказано, что 1⇒2.

Пусть отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условию 2 и F - замкнутое множество в пространстве (Y, τ_2). Тогда $U = Y \backslash F \in \tau_2$ и согласно условию 2, $f^{-1}\left(Y \backslash F\right) \in \tau_1$. Так как, согласно упражнению 5.7.7, $f^{-1}\left(Y \backslash F\right) = f^{-1}\left(Y\right) \backslash f^{-1}\left(F\right) = X \backslash f^{-1}\left(F\right)$, то $X \backslash f^{-1}(F) \in \tau_1$, и значит, $f^{-1}\left(F\right)$ является замкнутым множество в пространстве (X, τ_1).

Этим доказано, что 2⇒3.

Пусть отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условию 3 и $M \subseteq X$. Тогда, согласно теореме 3.16, $F = \left[f\left(M\right)\right]_{(Y,\tau_2)}$ является замкнутым множеством в пространстве (Y, τ_2), и по условию 3, $f^{-1}(F)$ – замкнутое множество в пространстве (X, τ_1).

Так как $f\left(M\right) \subseteq \left[f\left(M\right)\right]_{(Y,\tau_2)} = F$, то $M \subseteq f^{-1}(F)$. Поскольку $f^{-1}(F)$ является замкнутым множеством в пространстве (X, τ_1), то согласно утверждению 3.14.2 и теореме 3.15, $\left[M\right]_{(X,\tau_1)} \subseteq \left[f^{-1}(F)\right]_{(X,\tau_1)} = f^{-1}(F)$, и значит, $f\left(\left[M\right]_{(X,\tau_1)}\right) \subseteq f\left(f^{-1}(F)\right) \subseteq F = \left[f\left(M\right)\right]_{(Y,\tau_2)}$.

Этим доказано, что 3⇒4.

Пусть теперь отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условию 4. Покажем, что отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным отображением.

Допустим противное, т.е. что отображения $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ не является непрерывным в некоторой точке $a \in X$. Тогда существует такая окрестность U точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2), что $f(V) \not\subset U$ для любой окрестности V точки a в пространстве (X, τ_1), и значит, $f(V) \backslash U \neq \emptyset$. Выберем некоторый элемент $b_V \in V$ такой, что $f(b_V) \notin U$.

Если Δ – множество всех окрестностей точки a в пространстве (X, τ_1), то рассмотрим множество $M = \{b_V | V \in \Delta\}$. Так как $b_V \in V \cap M$ для любой окрестности V точки a в пространстве (X, τ_1), то $a \in \left[M\right]_{(X,\tau_1)}$. Тогда $f(a) \in f(\left[M\right]_{(X,\tau_1)}) \subseteq \left[f(M)\right]_{(Y,\tau_2)}$, и значит, $f(a)$ является точкой прикосновения к множеству $f(M)$ в пространстве (Y, τ_2).

Так как U является окрестностью точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2), то $U \cap f(M) \neq \emptyset$, и значит, $f(b_V) \in U \cap f(M)$ для некоторого $V \in \Delta$. Получили противоречие с тем, что $f(b_V) \notin U$ для любого $V \in \Delta$.

5.14. Определение. Отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ называется:

5.14.1. *Открытым отображением*, если $f(U) \in \tau_2$ для любого $U \in \tau_1$, т.е. образ открытого множества является открытым;

5.14.2. *Замкнутым отображением*, если $f(F)$ является замкнутым подмножеством в пространстве (Y, τ_2) для любого замкнутого множества F в пространстве (X, τ_1), т.е. образ замкнутого множества является замкнутым.

5.15. Упражнения. Доказать, что:

5.15.1. Если (X, τ_1) – любое топологическое пространство и (Y, τ_2) является дискретным пространством, то любое отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является открытым отображением и является замкнутым отображением;

5.15.2. Если (X, τ_1) является антидискретным пространством и (Y, τ_2) – произвольное топологическое пространство, то любое сюръективное отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является открытым отображением и является замкнутым отображением.

5.15.3. Пусть $f : X \to Y$ – биективное отображение и $f^{-1} : Y \to X$ – обратное к нему отображение (см. 5.5). Если τ_1 и τ_2 – топологии на X и Y, соответственно, то следующие утверждения эквивалентны:

1) $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным отображением;
2) $f^{-1} : (Y, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ является открытым отображением;
3) $f^{-1} : (Y, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ является замкнутым отображением.

5.16. Определение. Отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ называется *гомеоморфизмом*, если f – биекция и f является непрерывным и открытым отображением, т.е. f – биекция и $\tau_2 = \{f(U) \,|U \in \tau_1\}$.

5.17. Замечание. Так как исходным понятием в топологии является открытое множество и все остальные понятия и результаты сводятся к нему, а гомеоморфизм – это такое биективное отображение, которое переводит множество всех открытых множеств одного пространства в множество всех открытых множеств другого пространства, то гомеоморфные пространства обладают одинаковыми топологическими свойствами.

Поэтому в общей топологии, иногда, гомеоморфные пространства отождествляются.

5.18 . Теорема. *Если $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$- непрерывное отображение и $B = f(X)$, то $f : (X, \tau_1) \to (B, \tau_2|_B)$ является непрерывным отображением.*

Доказательство. Пусть $a \in X$ и U – окрестность точки $f(a)$ в пространстве $(B, \tau_2|_B)$. Тогда (см. теорему 4.5), существует такая окрестность W точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2), что $U = W \cap B$.

Так как $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ – непрерывное отображение, то существует такая окрестность V точки a в пространстве (X, τ_1), что $f(V) \subseteq W$. Тогда $f(V) \subseteq W \cap f(X) = W \cap B = U$. Из произвольности точки a и окрестности U следует, что $f : (X, \tau_1) \to (B, \tau_2|_B)$ является непрерывным отображением.

Этим теорема полностью доказана.

5.19. Теорема. *Если $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ - непрерывное отображение и $A \subseteq X$, то $f|_A : (A, \tau_1|_A) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным отображением.*

Доказательство. Пусть $a \in A$ и U – произвольная окрестность точки $f(a)$ в пространстве (Y, τ_2). Тогда существует такая окрестность V точки a в пространстве (X, τ_1), что $f(V) \subseteq U$. Так как $W = A \cap V$ является окрестностью точки a в $(A, \tau_1|_A)$, и
$f|_A(W) = f(V \cap A) \subseteq f(V) \subseteq U$, то $f|_A : (A, \tau_1|_A) \to (Y, \tau_2)$ – непрерывное отображение.

5.20. Теорема. *Пусть X, Y – произвольные непустые множества, и $f : X \to Y$. Если τ_2 – некоторая топология на множестве Y, то совокупность $\tau_f = \{f^{-1}(U) \,|U \in \tau_2\}$ является топологией на множестве X.*

Доказательство. Проверим, что совокупность τ_f удовлетворяет аксиомам определения топологического пространства.

Так как $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \tau_f$ и $X = f^{-1}(Y) \in \tau_f$, то совокупность τ_f удовлетворяет первой аксиоме определения 1.1.

Если $A, B \in \tau_f$, то существуют такие $U, V \in \tau_2$, что $A = f^{-1}(U)$ и $B = f^{-1}(V)$. Тогда $U \cap V \in \tau_2$, и значит, $A \cap B = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) \in \tau_f$, т.е. совокупность τ_f удовлетворяет второй аксиоме определения 1.1.

Пусть теперь $S \subseteq \tau_f$. Тогда для каждого $A \in S$ существует $U_A \in \tau_2$, такое что $A = f^{-1}(U_A)$. Так как $\left(\bigcup\limits_{A \in S} U_A\right) \in \tau_2$, то $\bigcup\limits_{A \in S} A = \bigcup\limits_{A \in S} f^{-1}(U_A) = f^{-1}\left(\bigcup\limits_{A \in S} U_A\right) \in \tau_f$, и значит, совокупность τ_f удовлетворяет и третей аксиоме определения 1.1.

Этим теорема полностью доказана.

5.21. Определение. Указанная в предыдущей теореме топология τ_f на множестве X называется *прообразом топологии* τ_2 *относительно отображения* f.

5.22. Теорема. *Пусть* X *и* Y *– произвольные множества, и* $f : X \to Y$ *- сюръективное отображение. Если* τ_2 *- топология на* Y *и* $\tau_f = \{f^{-1}(U) \,|U \in \tau_2\}$*- прообраз топологии на* X *относительно отображения* f, *то* $f : (X, \tau_f) \to (Y, \tau_2)$ *является непрерывным и открытым отображением.*

Доказательство. Если $U \in \tau_2$, то $f^{-1}(U) \in \tau_f$, и значит, прообраз любого открытого множества является открытым множеством. Тогда, согласно теореме 5.13, отображение $f : (X, \tau_f) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным.

Пусть теперь W – открытое множество в пространстве (X, τ_f), т.е. $W \in \tau_f = \{f^{-1}(U) \,|U \in \tau_2\}$. Тогда существует такое $U_0 \in \tau_2$, что
$W = f^{-1}(U_0)$. Так как (см. упражнение 5.7.2)
$f(W) = f(f^{-1}(U_0)) = U_0 \in \tau_2$, то отображение f является открытым.

Этим теорема полностью доказана.

5.23. Упражнения. Доказать, что:

5.23.1. Если $f : X \to Y$ и τ_2 – антидискретная топология на множестве Y, то τ_f является антидискретной топологией на множестве X;

5.23.2. Если $f : X \to Y$ и τ_2 – дискретная топология на множестве Y и $f : X \to Y$ является инъективным отображением, то τ_f будет дискретной топологией на множестве X;

5.23.3. Если $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ и $\varphi : (Y, \tau_2) \to (Z, \tau_3)$ – непрерывные отображения, то $\varphi \circ f : (X, \tau_1) \to (Z, \tau_3)$ будет непрерывным отображением:

5.23.4. Если $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ и $\varphi : (Y, \tau_2) \to (Z, \tau_3)$ – открытые отображения, то $\varphi \circ f : (X, \tau_1) \to (Z, \tau_3)$ будет открытым отображением;

5.23.5. Если $f_i : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ – непрерывные отображения для $1 \leq i \leq n$ и $f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ для любого $x \in X$, то отображение $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ будет непрерывным отображением.

6. СРАВНЕНИЯ ТОПОЛОГИЙ.

6.1. Определение. Пусть на непустом множестве X заданы две топологии τ_1 и τ_2. Говорим, что топология τ_1 *слабее топологии* τ_2 и пишем $\tau_1 \leq \tau_2$, если $\tau_1 \subseteq \tau_2$ (т.е. всякое открытое множество в пространстве (X, τ_1) будет открытым и в пространстве (X, τ_2)).

6.2. Упражнения. Доказать, что:

6.2.1. Если X – произвольное непустое множество, τ_1- любая топология на X и τ_2 – дискретная топология на X, то $\tau_1 \leq \tau_2$ (т.е. дискретная топология является наибольшей из всех топологий).

6.2.2. Если X - произвольное непустое множество, τ_1 – антидискретная топология на X и τ_2 – произвольная топология на X, то $\tau_1 \leq \tau_2$ (т.е. антидискретная топология является наименьшей из всех топологий).

6.3 Определение. Как обычно, отображение $f : X \to X$ называется *тождественным*, если $f(x) = x$ для любого $x \in X$.

6.4. Теорема. *(Критерий сравнимости топологий). Пусть X – произвольное непустое множество, $f : X \to X$ – тождественное отображение. Если τ_1 и τ_2 – топологии на множествеX, то следующие утверждения эквивалентны:*

1.$\tau_1 \leq \tau_2$;

2.$f : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ *является непрерывным отображением;*

3. Для любого $a \in X$ всякая окрестность элемента $a = f(a)$ в пространстве (X, τ_1) является окрестностью элемента a в пространстве (X, τ_2).

Доказательство. Доказательство проведем по схеме 1 ⇒2⇒3⇒1.

Пусть $\tau_1 \leq \tau_2$ и U- открытое множество в пространстве (X, τ_1), т.е. $U \in \tau_1$. Так как f- тождественное отображение, то $f^{-1}(U) = U \in \tau_1 \subseteq \tau_2$, т.е. $f^{-1}(U)$ является открытым множеством в (X, τ_2). Тогда, согласно теореме 5.12, отображение $f : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ является непрерывным. Этим доказано то, что 1⇒2.

Пусть теперь$f : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ является непрерывным отображением и $a \in X$. Если U окрестность элемента $a = f(a)$ в пространстве

(X, τ_1), то, согласно теореме 5.13, $U = f^{-1}(U)$ является окрестностью элемента a в пространстве (X, τ_2). Из произвольности множества U следует, что 2⇒3 доказано.

Пусть теперь верно утверждение 3 и $U \in \tau_1$. Согласно утверждению 2.3.4, U является окрестностью любой своей точки в пространстве (X, τ_1). Тогда согласно утверждению 3, U будет окрестностью любой своей точки в пространстве (X, τ_2), и значит, согласно утверждению 2.3.4, $U \in \tau_2$.

Из произвольности U следует, что $\tau_1 \leq \tau_2$.

Этим теорема полностью доказана.

6.5. Определение. Как обычно, непустое множество S называется *частично упорядоченным* множеством, если между некоторыми его элементами установлен порядок, т.е. такое бинарное отношение $\leq$, что выполнены следующие условия:

1) $a \leq a$ для любого $a \in S$;

2) Если $a \leq b$ и $b \leq c$ для $a, b, c \in S$, то $a \leq c$;

3) Если $a \leq b$ и $b \leq a$ для $a, b \in S$, то $a = b$.

6.6. Упражнения. Выяснить являются ли следующие множества, с указанными бинарными отношениями, частично упорядоченными:

6.6.1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с обычным отношением порядка;

6.6.2. Рассмотрим множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Введём на нём бинарное отношение следующим образом:

Считаем, что $a \leq b$, если b *делится на* a.

6.6.3. Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Введём на нём бинарное отношение следующим образом: *Считаем, что* $a \leq b$, если b *делится на* a.

6.6.4. Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Введём на нём бинарное отношение следующим образом: *будем считать, что* $a \leq b$, если $b = a^k$ *для некоторого* $k \in \mathrm{Z}$.

6.6.5. Пусть S – множество всех топологий на некотором непустом множестве X и $\leq$ бинарное отношение, определенное в 6.1.

6.7. Определение. Элемент a частично упорядоченного множества $(S, \leq)$ называется *точной нижней гранью непустого множества* $M \subseteq S$ в множестве $(S, \leq)$, если выполняются следующие два условия:

1) $a \leq b$ для любого $b \in M$;

2) Если $c \in S$ и $c \leq b$ для любого $b \in M$, то $c \leq a$.

Это будем записывать: $a = \inf M$.

6.8. Определение. Элемент d частично упорядоченного множества $(S, \leq)$ называется *точной верхней гранью непустого множества* $M \subseteq S$ в множестве $(S, \leq)$, если выполняются следующие два условия:

1) $d \geq b$ для любого $b \in M$;

2) Если $c \in S$ и $c \geq b$ для любого $b \in M$, то $c \geq d$.

Это будем записывать: $d = \sup M$.

6.9. Упражнения. Найти $\inf M$ и $\sup M$ или доказать, что они не существуют в следующих случаях:

6.9.1. $(\mathbb{R}, \leq)$ множество действительных чисел с обычным порядком и M – множество рациональных чисел из интервала $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

6.9.2. $(\mathbb{Q}, \leq)$ множество рациональных чисел с обычным порядком и M – множество рациональных чисел из интервала $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

6.10. Замечание. Требование чтобы $M \neq \emptyset$ в определениях 6.7 и 6.8 является существенным, ибо для $\emptyset$ не существуют ни $\inf \emptyset$ и ни $\sup \emptyset$.

6.11. Теорема. *Пусть $X \neq \emptyset$ и Δ – множество всех топологий на множестве X, на котором задан порядк, определенный в 6.1. Тогда для любого непустого подмножества $M \subseteq \Delta$ существует такая топология $\tau_0 \in \Delta$, что $\tau_0 = \inf M$ (т.е. для любого непустого множества топологий существует точная нижняя грань).*

Доказательство. Пусть $\emptyset \neq M \subseteq \Delta$ и $\tau_0 = \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau$. Докажем, что τ_0 является топологией на множествеX:

Так как $\emptyset, X \in \tau$ для любой топологии $\tau \in M$, то $X \in \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau = \tau_0$, и $\emptyset \in \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau = \tau_0$. Этим проверили верность первой аксиомы определения 1.1 для совокупности τ_0.

Пусть теперь $A, B \in \tau_0$. Тогда$A, B \in \tau$ для любой топологии $\tau \in M$, и значит, $A \cap B \in \tau$ для любой топологии $\tau \in M$. Тогда
$A \cap B \in \tau_0 = \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau$. Этим проверили верность второй аксиомы определения 1.1 для совокупности τ_0.

Если $S \subseteq \tau_0$, то $S \subseteq \tau$ для любой топологии $\tau \in M$, и значит, $\bigcup\limits_{A \in S} A \in \tau$ для любой топологии $\tau \in M$. Тогда $\bigcup\limits_{A \in S} A \in \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau = \tau_0$. Этим проверили верность и третьей аксиомы определения 1.1 для совокупности τ_0.

Следовательно, $\tau_0 \in \Delta$.

Проверим теперь, что $\tau_0 = \inf M$, т.е. что τ_0 удовлетворяет условиям определения 6.7

В самом деле, так как $\tau_0 = \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau$, то $\tau_0 \leq \tau$ для любой топологии $\tau \in M$, т.е. первое условие определения 6.7 выполнено.

Кроме того, если $\tau' \leq \tau$ для любой топологии $\tau \in M$, то $\tau' \subseteq \tau$ для любой топологии $\tau \in M$, и значит, $\tau' \subseteq \bigcap\limits_{\tau \in M} \tau = \tau_0$, т.е. $\tau' \leq \tau_0$. Этим проверили верность и второго условия определения 6.7.

Этим теорема полностью доказана.

6.12. Теорема. *Пусть $X \neq \emptyset$ и Δ – множество всех топологий на множестве X с порядком, который был определен в 6.1. Если $\emptyset \neq \mathrm{M} \subseteq \Delta$, то существует такая топология $\tau_1 \in \Delta$, что $\tau_1 = \sup M$, (т.е. для любого непустого множества топологий существует точная верхняя грань).*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathrm{M}' = \{\tau' \in , \Delta \,|\tau' \geq \tau, \quad \forall \tau \in M\}$. Множество $\mathrm{M}' \neq \emptyset$, т.к. дискретная топология принадлежит M'. Согласно предыдущей теореме, существует $\tau* = \inf M'$.

Покажем, что $\tau*$ удовлетворяет условиям определения 6.8.

В самом деле, если $\tau \in M$, то $\tau' \geq \tau$ для любого $\tau' \in \mathrm{M}'$. Так как $\tau* = \inf M'$, то, согласно второму условию определения 6.7, $\tau* \geq \tau$. Этим проверили, что $\tau*$ удовлетворяет первому условию определения 6.8.

Пусть теперь $\tau_0 \in \Delta$ такая топология, что $\tau_0 \geq \tau$ для любой топологии $\tau \in M$. Тогда $\tau_0 \in \mathrm{M}'$ и, поскольку $\tau* = \inf M'$, то $\tau* \leq \tau_0$. Этим проверили, что $\tau*$ удовлетворяет и второму условию определения 6.8.

Следовательно $\tau* = \sup M$.

6.13. Теорема. *Пусть S – некоторое непустое множество топологий на множестве X и $\tau* = \sup S$. Если $U \subseteq X$, то $U \in \tau*$ тогда и только тогда, когда U удовлетворяет следующему условию:*

(*) Для любого элемента $a \in U$ существует такое конечное число топологий $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in S$ и такие окрестности $U_1, \cdots, U_n$ элемента a в пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$.

Доказательство.

Достаточность. Пусть подмножество $U \subseteq X$ удовлетворяет условию (*) и a – произвольный элемент из U. Если $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ – такие топологии из S и $U_1, \cdots, U_n$ – такие окрестности элемента a в топологических пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$, то из того, что $\tau* \geq \tau$, для любой топологии $\tau \in S$, из теоремы 6.4 следует, что $U_1, \cdots, U_n$ являются окрестностями элемента a в пространстве $(X, \tau*)$.

Тогда, согласно утверждению 2.3.3, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ является окрестностью элемента a в пространстве $(X, \tau*)$. Поскольку $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$, то согласно утверждению 2.3.2 , U является окрестностью элемента a в пространстве $(X, \tau*)$.

Итак, мы получили, что U является окрестностью любого своего элемента в пространстве $(X, \tau*)$. Согласно утверждению 2.3.4, $U \in \tau*$.

Этим достаточность доказана.

Необходимость. Пусть σ – совокупность всех подмножеств $U \subseteq X$, которые удовлетворяют условию (*).

Покажем вначале, что σ – топология на множестве X, т.е. что σ удовлетворяет условиям 1 – 3 определения 1.1.

Легко заметить, что $\emptyset$ и X удовлетворяют условию (*), и значит, $\emptyset \in \sigma$ и $X \in \sigma$, т.е. σ удовлетворяет первому условию определения 1.1.

Пусть теперь, $A \in \sigma$ и $B \in \sigma$. Если $a \in A \cap B$ то существуют такие топологии $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in S$ и такие окрестности $U_1, \cdots, U_n$ элемента a в пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq A$.

Аналогично, существуют такие топологии $\tau_1', \tau_2', ..., \tau_k' \in S$ и такие окрестности $U_1', \cdots, U_k'$ элемента a в пространствах $(X, \tau_1'), \cdots, (X, \tau_k')$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i' \subseteq B$.

Тогда, $\{\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_1', \ldots, \tau_k'\}$ – конечное множество топологий из множества S и $(\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i) \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i') \subseteq A \cap B$. Из произвольности элемента a следует, что $A \cap B$ удовлетворяет условию (*), и значит,
$A \cap B \in \sigma$. Следовательно, совокупность σ удовлетворяет и второму условию определения 1.1.

Пусть теперь $\{U_\gamma | \gamma \in \Gamma\} \subseteq \sigma$ и $a \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$. Тогда $a \in U_{\gamma_0}$ для некоторого $\gamma_0 \in \Gamma$, и значит, существуют такие топологии $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in S$ и такие окрестности $U_1, \cdots, U_n$ элемента a в топологических простран-

ствах $(X,\tau_1),\cdots,(X,\tau_n)$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq U_{\gamma_0} \subseteq \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$. Из произвольности элемента a следует, что $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$ удовлетворяет условию (*), и значит, $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \in \sigma$. Следовательно, совокупность σ удовлетворяет и третьему условию определения 1.1.

Этим мы доказали, что σ является топологией на множестве X.

Покажем теперь, что $\tau* = \sigma$.

Пусть $W \in \sigma$ и $d \in W$. Тогда существуют такие топологии $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n \in S$ и такие окрестности $U_1,\cdots,U_n$ элемента d в пространствах $(X,\tau_1),\cdots,(X,\tau_n)$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq W$. Так как $\tau* = \sup S \geq \tau_i$, для $1 \leq i \leq n$, то $U_1,\cdots,U_n$ являются окрестностями элемента d в пространстве $(X,\tau*)$. Тогда (см. теорему 2.3), $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ будет окрестностью элемента d в пространстве $(X,\tau*)$. Значит, W будет окрестностью элемента d в пространстве $(X,\tau*)$.

Итак, мы доказали, что W будет окрестностью любой своей точки в пространстве $(X,\tau*)$, т.е. $W \in \tau*$.

Из произвольности W следует, что $\tau* \supseteq \sigma$, т.е. $\tau* \geq \sigma$.

Кроме того, так как для любой топологии $\tau \in S$ произвольное множество $U \in \tau$ удовлетворяет условию (*), то $U \in \sigma$, и значит $\sigma \geq \tau$ для любой топологии $\tau \in S$. Из того, что $\tau* = \sup S$ и второго условия определения 6.8, следует, что $\tau* \leq \sigma$, и значит $\tau* = \sigma$.

Этим теорема полностью доказана.

6.14. Теорема. *Пусть S – некоторое непустое множество топологий на множестве X и $\tau* = \sup S$. Если $d \in X$, то подмножество $W \subseteq X$ является окрестностью элемента d в пространстве $(X,\tau*)$ тогда и только тогда, когда существует такое конечное число топологий $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n \in S$ и существуют такие окрестности $W_1,\cdots,W_n$ элемента d в пространствах $(X,\tau_1),\cdots,(X,\tau_n)$, соответственно, что $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть подмножество $W \subseteq X$ является окрестностью элемента d в пространстве $(X,\tau*)$ тогда существует такое $U \in \tau*$, что $d \in U \subseteq W$. Согласно теореме 6.13, существует такое конечное число топологий $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n \in S$ и такие окрестности $U_1,\cdots,U_n$ элемента d в пространствах $(X,\tau_1),\cdots,(X,\tau_n)$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$. Тогда,

согласно утверждению 2.3.2, для каждого $1 \leq i \leq n$ подмножество $W_i = U_i \cup W$ будет окрестностью элемента d в пространстве (X, τ_i), причем $W \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (U_i \cup W) = (\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i) \cup W = U \cup W = W$, т.е. $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$.

Достаточность. Если для множества W существует такое конечное число топологий $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in S$ и такие окрестности $W_1, \cdots, W_n$ элемента d в пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, соответственно, что $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$, то из теоремы 6.4 и неравенства $\tau* \geq \tau_i$ для любого $1 \leq i \leq n$ следует, что каждое из подмножеств W_i является окрестностью элемента d в пространстве $(X, \tau*)$. Тогда $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$ будет окрестностью элемента d в пространстве $(X, \tau*)$.

Этим теорема полностью доказана.

6.15. Следствие. *Пусть* $S = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\}$ *– некоторое непустое конечное множество топологий на множестве* X *и* $\tau^* = \sup S$. *Если* $d \in X$ *, то подмножество* $W \subseteq X$ *будет окрестностью элемента* d *в пространстве* $(X, \tau*)$ *тогда и только тогда, когда существуют такие окрестности* $W_1, \cdots, W_n$ *элемента* d *в топологических пространствах* $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$, *соответственно, что* $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$.

В самом деле, согласно предыдущей теореме множество $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$ будет окрестностью элемента d в пространстве $(X, \tau*)$.

Кроме того, если W является окрестностью элемента d в пространстве $(X, \tau*)$, то, согласно предыдущей теореме, существует такое конечное множество топологий $\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k\} \subseteq \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\}$ и такие окрестности $W_1, \cdots, W_k$ элемента d в пространствах $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$ соответственно, что $W = \bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i$. Если для каждого $k < i \leq n$ возьмем $W_i = X$, то получим, что $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$.

7. АКСИОМЫ ОТДЕЛИМОСТИ.

7.1. Определение. Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Говорим, что в пространстве (X, τ) выполняется аксиома отделимости:

7.1.1. *Аксиома* T_0 : Если для любых различных точек $a, b \in X$ хотя бы одна из этих точек имеет окрестность, не содержащую вторую точку.

Пространство, в котором выполняется аксиома отделимости T_0, будем называть еще T_0-*пространством.*

7.1.2. *Аксиома* T_1 : Если для любых различных точек $a, b \in X$ каждая из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.

Пространство, в котором выполняется аксиома отделимости T_1, будем называть еще T_1-*пространством.*

7.1.3. *Аксиома* T_2 : Если для любых различных точек $a, b \in X$ существуют такие окрестности U и V элементов a и b соответственно, что $U \cap V = \emptyset$;

Топологическое пространство, в котором выполняется аксиома T_2, называется еще *Хаусдорфовым пространством.*

7.1.4. *Аксиома* T_3 : Если для любого замкнутого множества F и произвольной точки $d \notin F$ существуют такие множества $U, V \in \tau$, что $F \subseteq U$, $d \in V$ и $U \cap V = \emptyset$;

7.1.5. Пространство, в котором выполняются аксиомы T_1 и T_3, называется *регулярным пространством.*

7.1.6. *Аксиома* T_4 : Если для любых непересекающихся замкнутых множеств A *и* B в пространстве (X, τ) существуют такие множества $U, V \in \tau$, что $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset$;

7.1.7. Пространство, в котором выполняются аксиомы T_1 и T_4, называется *нормальным пространством.*

7.1.8. Топологическое пространство (X, τ) называется *вполне регулярным*, если в нём выполняется аксиома T_1 и для любого замкнутого множества F и произвольного элемента $d \notin F$ существует непрерывное отображение $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ такое, что $0 \leq f(x) \leq 1$ для любого $x \in X$, $f(d) = 0$ и $f(F) \subseteq \{1\}$.

Ясно, что если $F \neq \emptyset$, то $f(F) = \{1\}$, и значит $f(x) = 1$ для любого $x \in F$.

7.2. Теорема. *Если* (X,τ) *– топологическое пространство, то верны следующие утверждения:*

7.2.1. (X,τ) *является* T_0 *пространством, тогда и только тогда, когда для любых* $a \neq b \in X$ *либо* $a \notin [\{b\}]_{(X,\tau)}$, *либо* $b \notin [\{a\}]_{(X,\tau)}$;

7.2.2. (X,τ) *является* T_1 *пространством, тогда и только тогда, когда всякое одноэлементное множество является замкнутым;*

7.2.3. (X,τ) *является* T_3 *пространством, тогда и только тогда, когда любая точка обладает базисом окрестностей, который состоит из замкнутых множеств.*

Доказательство.

Доказательство утверждения 7.2.1.

Пусть (X,τ) является T_0 пространством и $a \neq b \in X$. Тогда, либо a обладает окрестностью, которая не содержит b, либо b обладает окрестностью, которая не содержит a.

Если a обладает окрестностью, которая не содержит b, то a не является точкой прикосновения к множеству $\{b\}$, и значит, $a \notin [\{b\}]_{(X,\tau)}$.

Аналогично, если b обладает окрестностью, которая не содержит a, то b не является точкой прикосновения к множеству $\{a\}$, и значит, $b \notin [\{a\}]_{(X,\tau)}$.

Этим достаточность для утверждения 7.2.1 доказана.

Пусть теперь в топологическом пространстве (X,τ) выполняется условие:

для любых $a \neq b \in X$ либо $a \notin [\{b\}]_{(X,\tau)}$, либо $b \notin [\{a\}]_{(X,\tau)}$.

Если $a \notin [\{b\}]_{(X,\tau)}$, то $a \in X \backslash [\{b\}]_{(X,\tau)}$. Так как $[\{b\}]_{(X,\tau)}$ является замкнутым множеством, то $X \backslash [\{b\}]_{(X,\tau)} \in \tau$, и значит, $X \backslash [\{b\}]_{(X,\tau)}$ является окрестностью точки a, которая не содержит b.

Аналогично доказывается, что если $b \notin [\{a\}]_{(X,\tau)}$, то $X \backslash [\{a\}]_{(X,\tau)}$ является окрестностью точки b, которая не содержит a.

Этим утверждение 7.2.1 полностью доказано.

Доказательство утверждения 7.2.2.

Пусть (X,τ) является T_1 пространством и $a \in X$. Если $a \neq b \in X$, то элемент b обладает такой окрестностью V в пространстве (X,τ), что $a \notin V$. Тогда $V \cap \{a\} = \emptyset$, и значит, $b \notin [\{a\}]_{(X,\tau)}$. Из произвольности элемента $b \in X$ следует, что $\{a\} = [\{a\}]_{(X,\tau)}$, и значит, (см. теорему 3.15), $\{a\}$ является замкнутым множеством в пространстве (X,τ).

Из произвольности элемента a следует, что для утверждения 7.2.2 достаточность доказана.

Пусть теперь в пространстве (X,τ) всякое одноэлементное множество является замкнутым и $a \neq b \in X$. Тогда $b \in X\backslash\{a\} \in \tau$, и согласно утверждению 2.3.4, $X\backslash\{a\}$ является окрестностью элемента b, причем $a \notin X\backslash\{a\}$. Аналогично доказывается, что $X\backslash\{b\}$ является окрестностью элемента a, причем $b \notin X\backslash\{b\}$.

Этим утверждение 7.2.2 полностью доказано.

Доказательство утверждения 7.2.3.

Если (X,τ) является T_3 пространством и $a \in X$, то рассмотрим совокупность $B_a = \{[U]_{(X,\tau)} | U\text{-}\textit{окрестность точки} \quad a\}$ и проверим, что B_a является базисом окрестностей точки a.

Так как $U \subseteq [U]_{(X,\tau)}$, то любое множество из совокупности B_a является окрестностью точки a, т.е. первое условие определения 2.4 выполняется.

Пусть теперь V – произвольная окрестность точки a, и W – такое открытое множество, что $a \in W \subseteq V$. Тогда $F = X\backslash W$ является замкнутым множеством, причем $a \notin F$. Так как (X,τ) является T_3 пространством, то существуют такие $\widehat{V}, \widehat{U} \in \tau$, что $a \in \widehat{U}$, $F \subseteq \widehat{V}$ и $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$. Тогда $[\widehat{U}]_{(X,\tau)} \in B_a$. Так как $\widehat{V}$ является окрестностью любого элемента $x \in F$, то любой элемент $x \in F$ не является точкой прикосновения к множеству $\widehat{U}$, и значит, $[\widehat{U}]_{(X,\tau)} \cap F = \emptyset$. Тогда $[\widehat{U}]_{(X,\tau)} \subseteq X\backslash F = W \subseteq V$.

Следовательно, и второе условие определения 2.4 выполняется, значит, B_a является базисом окрестностей точки a.

Этим мы доказали достаточность для утверждения 7.2.3.

Пусть теперь в пространстве (X,τ) любая точка обладает базисом окрестностей, который состоит из замкнутых подмножеств. Если $a \in X$ и F – такое замкнутое множество в пространстве (X,τ), что $a \notin F$, то $a \in U = X\backslash F \in \tau$, и значит, U является окрестностью точки a в пространстве (X,τ).

Согласно условию теоремы, существует такая замкнутая окрестность V точки a в пространстве (X,τ), что $V \subseteq U$. Тогда $W = X\backslash V \in \tau$ и $F = X\backslash U \subseteq X\backslash V = W$.

Согласно определению 2.1, существует такое $V' \in \tau$, что $a \in V' \subseteq V$. Так как $V' \cap W \subseteq V \cap (X\backslash V) = \emptyset$, то, из произвольности элемента a и множества F, следует регулярность пространства (X,τ).

Этим теорема полностью доказана.

7.3. Теорема. *Если (X,τ) – топологическое пространство, то верны следующие утверждения:*

7.3.1. $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$;

7.3.2. *Во всяком регулярном пространстве выполняется аксиома* T_2;

7.3.3. *Всякое вполне регулярное пространство является регулярным пространством;*

7.3.4. *Всякое нормальное пространство является вполне регулярным.*

Доказательство.

Верность утверждения 7.3.1 легко следует из определений аксиом T_2, T_1 и T_0.

Пусть теперь (X, τ) является регулярным пространством. Тогда в пространстве (X, τ) выполняется аксиома T_1. Если $a \neq b \in X$, то согласно утверждению 7.2.2, $F = \{b\}$ является замкнутым множеством и $a \notin F$.

Так как в пространстве (X, τ) выполняется аксиома T_3, то имеются такие открытые множества U и V, что $a \in U$, $F \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset$. Тогда U и V являются окрестностями точек a и b соответственно, и не содержащие другую из этих точек, т.е. в пространстве (X, τ) выполняется аксиома T_2.

Этим утверждение 7.3.2 доказано.

Пусть теперь (X, τ) является вполне регулярным пространством. Тогда, в пространстве (X, τ) выполняется аксиома T_1.

Если F – замкнутое множество в (X, τ) и $d \notin F$, то существует такое непрерывное отображение $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$, что
$f(d) = 0$ и $f(F) \subseteq \{1\}$. Возьмём в пространстве (R, τ) в качестве окрестности точки 0 интервал $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \tau_{инт}$, а в качестве окрестности точки 1 интервал $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \in \tau_{инт}$. Так как $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ является непрерывным отображением, то $U = f^{-1}(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right))$ является открытым множеством в (X, τ) и $d \in U$. Аналогично, $\mathrm{V} = \mathrm{f}^{-1}(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right))$ является открытым множеством в (X, τ) и $F \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq V$. Так как (см. упражнение 5.7.4) $U \cap V = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, то выполняется аксиома T_3.

Следовательно, пространство (X, τ) является регулярным.

Этим мы доказали утверждение 7.3.3.

Доказательство утверждения 7.3.4 является несколько громоздким, и мы (в рамках этого курса) не будем его доказывать.

7.4. Упражнения. Проверить какие аксиомы отделимости выполняются в следующих топологических пространствах:

7.4.1. X содержит больше чем 1 элемент и (X, τ) – антидискретное пространство.

7.4.2. (X, τ) – дискретное пространство.

7.4.3. $X = \{a, b\}$, и $\tau = \{\{a\}, X, \emptyset\}$.

7.4.4. X- бесконечное множество и
$\tau = \{A \,|X \backslash A$ – *конечное множество*$\} \cup \{\emptyset\}$.

7.5. Упражнения. Используя упражнения 7.4, показать, что:
Существует пространство, которое не является T_0 пространством.

7.6. Замечание. Можно показать, что все аксиомы отделимости являются различыми.

7.7. Упражнение. Показать, что:

7.7.1. Каждая из аксиом T_0, T_1, T_2 сохраняются при усилении топологии.

7.7.2. Каждая из аксиом T_0, T_1, T_2, T_3, регулярность и вполне регулярность сохраняются при взятии подпространства.

7.8. Упражнение. Используя упражнения 7.4, показать, что аксиомы T_3 и T_4 не сохраняются при усилении топологии.

7.9. Замечание. Существуют топологические пространства, в которых выполняется аксиома T_4, и содержащие подпространства в которых аксиома T_4 не выполняется, т.е. подпространство T_4-пространства может не быть T_4-пространством.

7.10. Теорема. *Если X- конечное множество и τ- такая топология, что пространство (X, τ) является T_1-* пространством, *то (X, τ) является дискретным пространством.*

Доказательство. Согласно утверждению 7.2.2, в пространстве (X, τ) любое одноэлементное множество $\{a\}$ является замкнутым. Тогда если $A \subseteq X$, то, ввиду конечности множества X, множество
$B = X \backslash A = \bigcup\limits_{a \in B} \{a\}$ будет замкнутым множеством как объединение конечного числа замкнутых множеств (см. упражнение 3.7), и значит, $A \in \tau$.

Этим теорема полностью доказана.

8. КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА.

8.1. Определение. Совокупность Δ подмножеств множества X называется *покрытием множества* X, если $\bigcup\limits_{U\in\Delta} U = X$.

Если Δ – покрытие множества X, то подмножество $\Omega \subseteq \Delta$ называется *подпокрытием покрытия* Δ, если Ω само является покрытием множества X, т.е. если $\bigcup\limits_{U\in\Omega} U = X$.

8.2. Определение. Пусть (X,τ) – топологическое пространство и Δ – покрытие множества X. Если $\Delta \subseteq \tau$ (т.е. все подмножества, входящие в Δ, являются открытыми в пространстве (X,τ)), то покрытие Δ называется *открытым покрытием* топологического пространства (X,τ).

8.3. Определения.

8.3.1. Топологическое пространство (X,τ) называется *компактным*, если из любого открытого покрытия пространство (X,τ) можно извлечь конечное подпокрытие, т.е. если для любой системы $\{U_\alpha \,|\alpha \in A\}$ подмножеств множества X, для которой выполняются условия:

1. $U_\alpha \in \tau$ для любого $\alpha \in A$;
2. $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha = X$

существует такое конечное подмножество $\{\alpha_1, .., \alpha_n\} \subseteq A$, что
$\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X$.

8.3.2. Подмножество S топологическое пространство (X,τ) называется *компактным множеством*, если пространство $(S, \tau|_S)$ (см. 4.2) является компактным.

8.4. Упражнения. Доказать компактность следующих топологических пространств:

8.4. 1. (X,τ) – антидискретное пространство.

8.4. 2. Если X – конечное множество, то в любой топологии τ пространство (X,τ) является компактным.

8.4. 3. В любом топологическом пространстве (X,τ) всякое конечное подмножество S, является компактным множеством.

8.4. 4. Если X – бесконечное множество и
$\tau = \{A \subseteq X | X\backslash A$ конечное множество$\} \cup \{\emptyset\}$ (см. 1.3.7),
то (X,τ) – компактное пространство.

8.5. Теорема. *Дискретное пространство* (X, τ) *является компактным тогда и только тогда, когда* X *- конечное множество.*

Доказательство. Если X – конечное множество, то согласно упражнению 8.4.2, (X, τ) является компактным пространством.

Пусть теперь дискретное пространство (X, τ) является компактным пространством.

Из дискретности пространства (X, τ) следует, что $\{x\} \in \tau$ для каждого элемента $x \in X$. Так как $X = \bigcup\limits_{x \in X} \{x\}$, то $\{\{x\} | x \in X\}$ является открытым покрытием топологического пространства (X, τ) и тогда из компактности пространства (X, τ) следует, что существуют такие $x_1, x_2, .., x_n \in X$, что $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{x_i\} = \{x_1, .., x_n\}$, т.е. X является конечным множеством.

8.6. Теорема. *Подмножество* S *топологического пространства* (X, τ) *является компактным, тогда и только тогда, когда в любой такой совокупности* Δ *открытых множеств пространства* (X, τ), *что* $S \subseteq \bigcup\limits_{U \in \Delta} U$ *имеется такая конечная совокупность*

$\{U_1, \cdots, U_k\} \subseteq \Delta$, *что* $S \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть подмножество S топологическое пространство (X, τ) является компактным множеством. Если Δ – такая совокупность открытых множеств в пространстве (X, τ), что $S \subseteq \bigcup\limits_{U \in \Delta} U$, то $\Lambda = \{S \cap U | U \in \Delta\}$ является открытым покрытием пространства $(S, \tau|_S)$. Из компактности пространства $(S, \tau|_S)$ следует, что существует конечное подпокрытие $\{S \cap U_1, \cdots, S_k \cap U_k) \subseteq \Lambda$ пространства $(S, \tau|_S)$. Тогда $S = \bigcup\limits_{i=1}^{k} (S \cap U_i) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$. Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть S – такое подмножество топологического пространства (X, τ), что в любой совокупности Δ открытых множеств пространства (X, τ) такой, что $S \subseteq \bigcup\limits_{U \in \Delta} U$ имеется такая конечная совокупность $\{U_1, \cdots, U_k\} \subseteq \Delta$, что $S \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$.

Если Λ – произвольное открытое покрытие топологического пространства $(S, \tau|_S)$, то для каждого $V \in \Lambda$ существует такое $U_V \in \tau$, что

$V = S \cap U_V$. Тогда $S = \bigcup\limits_{V \in \Lambda} V \subseteq \bigcup\limits_{V \in \Lambda} U_V$ и согласно условию теоремы, существует такая конечная совокупность $\{U_{V_1}, \cdots, U_{V_k}\}$, что $S \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{V_i}$, и значит, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (S \cap U_{V_i}) = \ S \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{V_i}) = S$. Из произвольности покрытия Λ следует компактность пространства $(S, \tau|_S)$, и значит, S является компактным множеством.

Этим теорема полностью доказана.

8.7. Определение. Пусть X- некоторое непустое множество и Φ – непустая совокупность подмножеств множества X. Говорим, что Φ является *фильтром на множестве* X, если выполняются следующие условия:

1. $\emptyset \notin \Phi$;
2. Если $A, B \in \Phi$, то $A \cap B \in \Phi$;
3. Если $A \in \Phi$ и $A \subseteq B \subseteq X$, то $B \in \Phi$.

8.8. Упражнения. Доказать верность следующих утверждений:

8.8.1. Если $X \neq \emptyset$ и $a \in X$, то совокупность $\Phi_a = \{A \subseteq X \,|a \in A\}$ является фильтром.

8.8.2. Если (X, τ) – топологическое пространство и $a \in X$, то совокупность $\Phi_a = \{U \subseteq X \,|U$ – окрестность точки a в $(X, \tau)\}$ является фильтром в множестве X.

8.9. Теорема. *Пусть (X, τ) – топологическое пространство и $M \subseteq X$. Если a – точка прикосновения к множеству M, то совокупность $\Phi_a = \{U \cap M \,|U$ – окрестность точки a в пространстве $(X, \tau)\}$ является фильтром в множестве M.*

Доказательство. Так как a является точкой прикосновения к множеству M, то $M \cap U \neq \emptyset$ для любой окрестности U точки a в пространстве (X, τ), и значит, $\emptyset \notin \Phi_a$, т.е. для совокупности Φ_a первое условие определения 8.7 выполняется.

Пусть $A, B \in \Phi_a$ и $C = A \cap B$. Тогда $A = M \cap V$ и $B = M \cap U$ для некоторых окрестностей U, V точки a в пространстве (X, τ). Согласно утверждению 2.3.3, $W = U \cap V$ является окрестностью точки a в пространстве (X, τ), и
$C = A \cap B = (M \cap V) \cap (M \cap U) = M \cap (U \cap V) = M \cap W \in \Phi_a$.

Этим мы проверили, что для совокупности Φ_a выполняется второе условие определения 8.7.

Пусть $A \in \Phi_a$ и $A \subseteq B \subseteq M$. Тогда $A = M \cap V$ для некоторой окрестности V точки a в пространстве (X, τ). Согласно утверждению 2.3.2, $U = V \cup B$ является окрестностью точки a в пространстве (X, τ) и $B = A \cup B = (M \cap V) \cup (M \cap B) = M \cap (V \cup B) = M \cap U \in \Phi_a$.

Этим мы проверили, что для совокупности Φ_a выполняется и третье условие определения 8.7, и значит, совокупность Φ_a является фильтром в множестве M.

Этим теорема полностью доказана.

8.10. Определение. Пусть $X \neq \emptyset$ и Φ – фильтр на множестве X. Совокупность Δ подмножеств множества X называется *базисом фильтра* Φ, если выполняются следующие условия:

1) $\Delta \subseteq \Phi$;

2) Для любого $A \in \Phi$ существует такое $\mathrm{B} \in \Delta$, что $\mathrm{B} \subseteq A$.

8.11. Упражнения. Доказать верность следующих утверждений:

8.11.1. Если Δ – базис некоторого фильтра Φ на множестве X, то для любого конечного числа множеств $A_1, \cdots, A_n \in \Delta$ существует такое множество $A \in \Delta$, что $A \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

8.11.2. Пусть $X \neq \emptyset$ и $a \in X$. Если $\Phi_a = \{A \subseteq X \,|\, a \in A\}$, то совокупность $\mathrm{B} = \{\{a\}\}$ является базисом фильтра Φ_a.

8.11.3. Пусть (X, τ) – топологическое пространство и $a \in X$. Если $\Phi'_a = \{U \subseteq X \,|\, U$ – окрестность точки a в $(X, \tau)\}$, и B' – базис окрестностей точки a в топологическом пространстве (X, τ) (см. 2.4), то B' является базисом фильтра (см. 8.8.2) Φ'_a.

8.12. Теорема. *Если X- произвольное непустое множество, то непустая совокупность Δ подмножеств множества X, является базисом некоторого фильтра Φ на множестве X тогда и только тогда, когда $\emptyset \notin \Delta$ и для любых множеств $A_1, A_2 \in \Delta$ существует такое $A' \in \Delta$, что $A' \subseteq A_1 \cap A_2$.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть Δ является базисом некоторого фильтра Φ. Так как $\Delta \subseteq \Phi$ и $\emptyset \notin \Phi$, то $\emptyset \notin \Delta$.

Если теперь $A_1, A_2 \in \Delta$, то $A_1, A_2 \in \Phi$, и значит (см. 8.7), $A_1 \cap A_2 \in \Phi$. Так как Δ является базисом фильтра Φ, то существует такое $A' \in \Delta$, что $A' \subseteq A_1 \cap A_2$.

Этим необходимость доказана.

Достаточность. Пусть Δ – такая совокупность подмножеств множества X, что $\emptyset \notin \Delta$ и для любых множеств $A_1, A_2 \in \Delta$ существует такое $A' \in \Delta$, что $A' \subseteq A_1 \cap A_2$. Рассмотрим совокупность
$\Phi = \{C \subseteq X |$ существует $A \in \Delta$, такое что $A \subseteq C\}$.

Проверим вначале, что Φ является фильтром на множестве X.

Так как $\Delta \neq \emptyset$, то существует такое $A \subseteq X$, что $A \in \Delta$. Тогда $X \in \Phi$, и значит, $\Phi \neq \emptyset$. Поскольку любое множество из совокупности Φ содержит некоторое множество из совокупности Δ, и $\emptyset \notin \Delta$, то $\emptyset \notin \Phi$, т.е. Φ удовлетворяет первому условию определения 8.7.

Пусть теперь $A, B \in \Phi$ и $A', B' \in \Delta$ такие, что $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$. Согласно условию теоремы, существует такое $C \in \Delta$, что $C \subseteq A' \cap B'$. Тогда $C \subseteq A' \cap B' \subseteq A \cap B$, и значит, $A \cap B \in \Phi$, т.е. Φ удовлетворяет второму условию определения 8.7.

Пусть $A \in \Phi$ и $A \subseteq B \subseteq X$. Если $A' \in \Delta$ – такое множество, что $A' \subseteq A$, то $A' \subseteq B$, и значит, $B \in \Phi$, т.е. Φ удовлетворяет и третьему условию определения 8.7.

Следовательно, Φ является фильтром на множестве X.

Так как согласно определению совокупности Φ, любое множество из Φ содержит некоторое множество из совокупности Δ и $\Delta \subseteq \Phi$, то Δ является базисом фильтра Φ.

Этим теорема полностью доказана.

8.13. Теорема. *Топологическое пространство* (X, τ) *является компактным пространством тогда и только тогда, когда* $\bigcap\limits_{U \in \Delta} [U]_{(X,\tau)} \neq \emptyset$ *для любой совокупности* Δ*, которая является базисом некоторого фильтра* Φ.

Доказательство.

Необходимость. Допустим противное, т.е. что в некотором компактном пространстве (X, τ) существует такая совокупность Δ, которая является базисом некоторого фильтра Φ на множестве X и
$\bigcap\limits_{U \in \Delta} [U]_{(X,\tau)} = \emptyset$.

Для каждого $U \in \Delta$ рассмотрим множество $V_U = X \setminus [U]_{(X,\tau)}$. Так как $[U]_{(X,\tau)}$является замкнутым множеством в пространстве (X, τ), то $V_U \in \tau$, причем $\bigcup\limits_{U \in \Delta} V_U = \bigcup\limits_{U \in \Delta} X \setminus [U]_{(X,\tau)} = X \setminus \bigcap\limits_{U \in \Delta} [U]_{(X,\tau)} = X \setminus \emptyset = X$, т.е. $\left\{X \setminus [U]_{(X,\tau)} \,|U \in \Delta\right\}$ является открытым покрытием пространства (X, τ). Из компактности пространства (X, τ) следует существование конечного подпокрытия $\{X \setminus [U_1]_{(X,\tau)}, \cdots, X \setminus [U_n]_{(X,\tau)}\} \subseteq \Delta$, т.е $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (X \setminus [U]_{(X,\tau)}) = X$.

Согласно утверждению 8.11.1, существует такое $A \in \Delta$, что $A \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$. Тогда $\emptyset \neq A \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} [U_i]_{(X,\tau)} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \big(X \backslash (X \backslash [U_i]_{(X,\tau)}\big) = X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n} (X \backslash [U_i]_{(X,\tau)}) = X \backslash X = \emptyset$.

Полученное противоречие, завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть $\bigcap\limits_{U \in \Delta} [U]_{(X,\tau)} \neq \emptyset$ в топологическом пространстве (X, τ) для любой совокупности Δ, которая является базисом некоторого фильтра Φ. Покажем, что (X, τ) является компактным пространством.

Допустим противное, т. е. существует открытое покрытие $\{U_\gamma \,|\gamma \in \Gamma\}$ пространства (X, τ), из которого нельзя извлечь конечное подпокрытие. Рассмотрим множество $\widehat{\Gamma}$ всех конечных подмножеств множества Γи для каждого $\widehat{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_n\} \in \widehat{\Gamma}$ рассмотрим множество $A_{\widehat{\gamma}} = X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\gamma_i}$. Согласно допущению, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\gamma_i} \neq X$. Так как $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\gamma_i} \in \tau$, то каждое $A_{\widehat{\gamma}}$ является непустым замкнутым множеством в пространстве (X, τ), и значит, $A_{\widehat{\gamma}} = [A_{\widehat{\gamma}}]_{(X,\tau)}$.

Так как $A_{\{\gamma_1,..,\gamma_n\}} \cap A_{\{\gamma'_1,..,\gamma'_k\}} = A_{\{\gamma_1,..,\gamma_n,\gamma'_1,\cdots,\gamma'_k\}} \in \Delta$, то согласно теореме 8.12, Δ является базисом некоторого фильтра на множестве X, и согласно условию теоремы, $\bigcap\limits_{\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}} A_{\widehat{\gamma}} = \bigcap\limits_{\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}} [A_{\widehat{\gamma}}]_{(X,\tau)} \neq \emptyset$. Легко заметить, что $\bigcap\limits_{\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}} A_{\widehat{\gamma}} = \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_{\{\gamma\}}$.

Тогда $X = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} \big(X \backslash A_{\{\gamma\}}\big) = X \backslash \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_{\{\gamma\}} = X \backslash \bigcap\limits_{\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}} A_{\widehat{\gamma}}$, и значит, $\bigcap\limits_{\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}} A_{\widehat{\gamma}} = \emptyset$.

Получили противоречие с ранее доказанным.

Этим теорема полностью доказана.

8.14. Теорема. *Пусть (X, τ_1) и (Y, τ_2) – топологические пространства и $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$- непрерывное отображение. Если A является компактным подмножеством в топологическом пространстве (X, τ_1), то и $B = f(A)$ будет компактным подмножеством в топологическом пространстве (Y, τ_2).*

Доказательство. Пусть $\{U_\gamma \,|\gamma \in \Gamma\}$ – такая совокупность открытых подмножеств в пространстве (Y, τ_2), что $B \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$. Из непрерывности

отображения $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ (см. теорему 5.13) следует, что
$V_\gamma = f^{-1}(U_\gamma)\in\tau_1$ для каждого $\gamma\in\Gamma$, причем
$A\subseteq f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}U_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(U_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}V_\gamma$.

Так как множество A является компактным в пространстве (X,τ_1), то из теоремы 8.6 следует существование такого конечного числа элементов $\gamma_1,...,\gamma_n\in\Gamma$, что $A\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_{\gamma_i}$. Тогда
$B = f(A)\subseteq f(\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_{\gamma_i}) = \bigcup\limits_{i=1}^{n}f(V_{\gamma_i})\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_{\gamma_i}$, и значит, согласно теореме 8.6, $B=f(A)$ является компактным подмножеством в топологическом пространстве (Y,τ_2).

Этим теорема полностью доказана.

8.15. Следствие. *Пусть (X,τ_1) и (Y,τ_2) – топологические пространства и $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ – непрерывное сюръективное отображение. Если (X,τ_1) – компактное топологическое пространство, то и (Y,τ_2) будет компактным топологическим пространством.*

8.16. Теорема. *Пусть X и Y – произвольные множества и $f:X\to Y$ – сюръективное отображение. Если τ – такая топология на множестве Y, что (Y,τ) является компактным пространством и τ_1- прообраз топологии τ относительно отображения f (см.5.20 и 5.21), то (X,τ_1) является компактным пространством.*

Доказательство. Если $\{U_\gamma\,|\gamma\in\Gamma\}$ – открытое покрытие пространства (X,τ_1), то для каждого $\gamma\in\Gamma$ существует такое $V_\gamma\in\tau$, что $U_\gamma = f^{-1}(V_\gamma)$. Тогда $Y=f(X)=f(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}U_\gamma)=f(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(V_\gamma))=\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}V_\gamma$, и значит, $\{V_\gamma\,|\gamma\in\Gamma\}$ является открытым покрытием пространства (Y,τ). Из компактности пространства (Y,τ) следует существование конечного подпокрытия $\{V_{\gamma_1},..,V_{\gamma_n}\}$. Тогда
$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_{\gamma_i}\right) = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(V_{\gamma_i}) = \bigcup\limits_{i=1}^{n}U_{\gamma_i}$, и значит, (X,τ_1) является компактным пространством.

Этим теорема полностью доказана.

8.17. Теорема. *Замкнутое подмножество A компактного пространства (X,τ) является компактным множеством.*

Доказательство. Пусть $\Delta=\{V_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$ – такая совокупность открытых множеств в топологическом пространстве (X,τ), что

$A \subseteq \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$. Тогда совокупность $\{V_\gamma | \gamma \in \Gamma\} \cup \{X \backslash A\}$ является открытым покрытием пространства (X, τ). Из компактности пространства (X, τ) следует существование конечного подпокрытия Ω пространства (X, τ), и значит, $A \subseteq \bigcup\limits_{U\in\Omega} U$. Так как $A \cap (X \backslash A) = \emptyset$, то $A \subseteq \bigcup\limits_{U\in\Omega\backslash\{X\backslash A\}} U$ и $\Omega \backslash \{X \backslash A\} \subseteq \Delta$. Согласно теореме 8.6, A является компактным множеством в топологическом пространстве (X, τ).

Этим теорема полностью доказана.

8.18. Теорема. *Если топологическое пространство* (X, τ) *является Хаусдорфовым (т.е. удовлетворяет аксиоме* T_2 (см. 7.1)) *и* A *– компактное множество в пространстве* (X, τ), *то* A *является замкнутым множеством в пространстве* (X, τ).

Доказательство. Допустим противное, т.е. что A не является замкнутым множеством в пространстве (X, τ). Тогда, согласно теореме 3.15, $[A]_{(X,\tau)} \backslash A \neq \emptyset$. Если $a \in [A]_{(X,\tau)} \backslash A$, то согласно теореме 8.9, $\Phi_a = \{U \cap A \,|U$ – окрестность точки a в $(X, \tau)\}$ является фильтром на множестве A. Так как сам фильтр является базисом для себя, то из компактности пространства $(A, \tau|_A)$ (см. теорему 8.13) следует, что $\bigcap\limits_{B\in\Phi_a} [B]_{(A,\tau|_A)} \neq \emptyset$. Если $b \in \bigcap\limits_{B\in\Phi_a} [B]_{(A,\tau|_A)}$, то $b \in A$, и значит, $b \neq a$.

Так как (X, τ) является Хаусдорфовым пространством, то точки a и b обладают такими окрестностями U_0 и V_0, соответстенно, что $U_0 \cap V_0 = \emptyset$. Тогда b не является точкой прикосновения к множеству U_0, и значит, $b \notin [U_0]_{(X,\tau)} \supseteq [U_0 \cap A]_{(X,\tau)} \supseteq [U_0 \cap A]_{(X,\tau)} \bigcap A \supseteq [U_0 \cap A]_{(A,\tau|_A)} \supseteq \bigcap\limits_{B\in\Phi_a} [B]_{(A,\tau|_A)}$.

Получили противоречие с выбором элемента $b \in \bigcap\limits_{B\in\Phi_a} [B]_{(A,\tau|_A)}$.

Этим доказательство теоремы завершено.

8.19. Теорема. *Всякое компактное Хаусдорфово пространство* (X, τ) *является нормальным пространством (см. 7.1).*

Доказательство. Докажем вначале, что (X, τ) является регулярным пространством.

Согласно утверждения 7.3.1, в пространстве (X, τ) выполняется аксиома T_1. Проверим, что в пространстве (X, τ) выполняется и аксиома T_3.

Пусть $a \in X$ и F – такое замкнутое множество в пространстве (X, τ), что $a \notin F$. Так как (X, τ) является Хаусдорфовым пространством, то для каждого элемента $b \in F$ существуют такие окрестности U_b и V_b элементов a и b, соответственно, что $U_b \cap V_b = \emptyset$. Так как всякая

точка топологического пространства обладает базисом окрестностей, состоящим из открытых множеств (см. теорему 2.6), то можем считать, что U_b и V_b являются открытыми множествами.

Согласно теореме 8.17, F является компактным множеством в топологическом пространстве (X, τ). Так как $F = \bigcup\limits_{b \in F} \{b\} \subseteq \bigcup\limits_{b \in F} V_b$, то, по теореме 8.6, существует такое конечное число множеств $V_{b_1}, \cdots, V_{b_n}$, что $F \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{b_i}$. Тогда (см. теорему 1.2) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{b_i} \in \tau$ и $a \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{b_i}$, причем $(\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{b_i}) \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{b_i}) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} (U_{b_i} \cap V_{b_i}) = \emptyset$.

Поскольку $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{b_i} \in \tau$, то из произвольности элемента a и множества F следует регулярность пространства (X, τ).

Докажем теперь, что пространство (X, τ) является нормальным пространством.

Пусть A и B – такие замкнутые множества в пространстве (X, τ), что $A \cap B = \emptyset$. Согласно, доказанному выше, для каждого элемента $b \in B$ существуют такие открытые множества V_b и U_b, что $b \in V_b$, $A \subseteq U_b$ и $U_b \cap V_b = \emptyset$.

Согласно теореме 8.17, B является компактным множеством в топологическом пространстве (X, τ).Так как $B = \bigcup\limits_{b \in B} \{b\} \subseteq \bigcup\limits_{b \in B} V_b$, то, согласно теореме 8.6, существует такое конечное число множеств $V_{b_1}, \cdots, V_{b_n}$, что $B \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{b_i}$. Тогда (см. теорему 1.2) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{b_i} \in \tau$ и $A \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{b_i}$, причем $(\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{b_i}) \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{b_i}) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} (U_{b_i} \cap V_{b_i}) = \emptyset$.

Поскольку $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{b_i} \in \tau$, то из произвольности множеств A и B следует, что пространство (X, τ) является нормальным.

Этим теорема полностью доказана.

Из этой теоремы и утверждения 7.3.4 легко следует:

8.20. Следствие. *Всякое компактное Хаусдорфово пространство (X, τ) является вполне регулярным пространством (см. 7.1).*

9. СВЯЗНЫЕ МНОЖЕСТВА.

9.1. Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется *связным* , если в нем нет других открыто-замкнутых множеств кроме $\emptyset$ и X.

Подмножество A топологического пространства (X, τ) называется *связным множеством в топологическом пространстве* (X, τ), если топологическое пространство $(A, \tau|_A)$ является связным.

9.2. **Упражнения**. Выяснить связность следующих топологических пространств и множеств.

9.2.1. (X, τ) – антидискретное пространство.

9.2.2. Одноэлементное множество $A = \{a\}$ в произвольном топологическом пространстве (X, τ).

9.2.3. В дискретном пространстве множество A, содержащего больше одного элемента.

9.2.4. Пусть $X = \{a, b, c\}$ и $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$.

9.2.5. Пространство $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ действительных чисел с интервальной топологией.

9.3. Теорема. *Пусть* (X, τ) *– топологическое пространство. Тогда верны следующие утверждения:*

9.3.1. *Если* A *– связное множество в пространстве* (X, τ), *то для любого открыто-замкнутого множества* U *топологического пространства* (X, τ) *либо* $A \subseteq U$, *либо* $A \cap U = \emptyset$;

9.3.2. *Если* $\{A_\gamma \,|\gamma \in \Gamma\}$ *– такая совокупность связных множеств в* (X, τ), *что* $\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \neq \emptyset$, *то* $B = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ *является связным множеством в пространстве* (X, τ);

9.3.3. *Если* A *– связное множество в пространстве* (X, τ), *то* $D = [A]_{(X,\tau)}$ *является связным множеством в пространстве* (X, τ).

Доказательство.

9.3.1. Если U – открыто-замкнутое множество в пространстве (X, τ), то $A \cap U$ будет открыто-замкнутым множеством в пространстве $(A, \tau|_A)$. Из связности множества A следует, что, либо $A \cap U = \emptyset$, либо $A \cap U = A$, и тогда $A \subseteq U$.

Этим утверждение 9.3.1 доказано.

9.3.2. Допустим противное, т.е. что $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = B$ не является связным множеством в пространстве (X,τ).

Так как $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \neq \emptyset$, то выберем некоторый элемент $a \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$.

По допущению множество B не является связным, и значит, существует такое открыто-замкнутое множество U в пространстве $(B,\tau|_B)$, что $U \neq B$ и $U \neq \emptyset$. Тогда $V = B\backslash U$ тоже будет открыто-замкнутым множеством в пространстве $(B,\tau|_B)$, причем $V \neq B$ и $V \neq \emptyset$. Так как $B = U \cup V$, то либо $a \in U$, либо $a \in V$.

Допустим, для определенности, что $a \in U$. Тогда $a \in U \cap A_\gamma$ для каждого $\gamma \in \Gamma$, и значит, $C_\gamma = U \cap A_\gamma \neq \emptyset$ для каждого $\gamma \in \Gamma$. Так как U – открыто-замкнутое множество в пространстве $(B,\tau|_B)$, то C_γ будет открыто-замкнутым множеством в пространстве $\big(A_\gamma,(\tau|_B)|_{A_\gamma}\big)$ (см. теоремы 4.1 и 4.4). Поскольку

$\tau|_{A_\gamma} = \{A_\gamma \cap W | W \in \tau\} = \{A_\gamma \cap B \cap W | W \in \tau\} = (\tau|_B)|_{A_\gamma}$,

то C_γ является открыто-замкнутым множеством в пространстве $\big(A_\gamma,\tau|_{A_\gamma}\big)$.

Из того, что A_γ является связным множеством следует, что либо $C_\gamma = \emptyset$ (но выше было доказано, что это не так), либо $C_\gamma = A_\gamma$.

Тогда $A_\gamma \subseteq U$ для любого $\gamma \in \Gamma$, и значит, $U \subseteq B = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subseteq U$, т.е. $B = U$. Получили противоречие с тем, что $U \neq B$.

Этим утверждение 9.3.2 доказано.

9.3.3. Допустим противное, т.е. что $D = [A]_{(X,\tau)}$ не является связным множеством. Тогда существует такое открыто-замкнутое множество U в пространстве $(D,\tau|_D)$, что $U \neq D$ и $U \neq \emptyset$. Выберем некоторый элемент $b \in D\backslash U$. Так как $b \in D = [A]_{(X,\tau)}$, то b будет точкой прикосновения к множествуA в пространстве (X,τ). Причем $b \in D\backslash U = V \neq D$ и V является открыто-замкнутым множеством в $(D,\tau|_D)$

Из того, что $b \in D = [A]_{(X,\tau)}$ следует, что $b \in D \cap [A]_{(X,\tau)} = [A]_{(D,\tau|_D)}$ (см теорему 4.6).

Так как V является открыто-замкнутым множеством в пространстве $(D,\tau|_D)$, то V будет окрестностью точки b в пространстве $(D,\tau|_D)$, и значит, $\emptyset \neq V \cap A$.

Тогда $V \cap A$ будет непустым открыто-замкнутым множеством в связном пространстве $(A,\tau|_A)$, а потому, $V \cap A = A$, т.е. $A \subseteq V$. Так как $D = D \cap [A]_{(X,\tau)} = \quad [A]_{(D,\tau|_D)} \subseteq [V]_{(D,\tau|_D)} = V \subseteq D$, то $V = D$.

Получили противоречие с тем, что $V \neq D$. Следовательно, множество $[A]_{(X,\tau_1)}$ является связным множеством в пространстве (X,τ).

Этим теорема полностью доказана.

9.4. Теорема. *Пусть* (X, τ_1) *и* (Y, τ_2) *– топологические пространства, и* $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ *– непрерывное отображение. Если* A *– связное множество в пространстве* (X, τ_1), *то* $C = f(A)$ *является связным множеством в пространстве* (Y, τ_2).

Доказательство. Допустим противное, т.е. что $C = f(A)$ не является связным множеством в пространстве (Y, τ_2). Тогда $(C, \tau|_C)$ не является связным пространством, и значит, существует такое открыто-замкнутое множество U в пространстве $(C, \tau|_C)$, что $U \neq C$ и $U \neq \emptyset$.

Так как $f|_A : (A, \tau|_A) \to (C, \tau|_C)$ является непрерывным отображением (см. теоремы 5.18 и 5.19), то, согласно теореме 5.13, $V = f^{-1}(U)$ будет открыто-замкнутым множеством в пространстве $(A, \tau|_A)$. Так как $f|_A : A \to C = f(A)$ является сюрьективным отображением, то (см. 5.7.2) $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ и $f|_A(f|_A{}^{-1}(U)) = U \neq C = f(A)$, и значит, $f|_A{}^{-1}(U) \neq A$.

Итак, $V = f|_A{}^{-1}(U)$ является непустым открыто-замкнутым множеством отличным от A. Получили противоречие с тем, что A – связное множество.

Этим теорема полностью доказана.

9.5. Определение. Пусть (X, τ) – топологическое пространство и $a \in X$. *Связной компонентой* C_a *точки* a в пространстве (X, τ) называется объединение всех связных множеств, содержащих точку a.

9.6. Теорема (Свойства связных компонент точек). *Если* (X, τ) *– топологическое пространство и* $a, b \in X$ *– различные точки, то верны следующие утверждения:*

9.6.1 C_a *является связным замкнутым множеством, содержащим точку* a;

9.6.2. *Либо* $C_a \cap C_b = \emptyset$, *либо* $C_a = C_b$.

Доказательство.

9.6.1. Пусть $\Delta = \{A_\gamma \,|\gamma \in \Gamma\}$ – множество всех связных множеств в пространстве (X, τ), содержащих точку a. Так как $\{a\}$ является связным множеством в пространстве (X, τ), содержащим точку a, то $\Delta \neq \emptyset$, и значит $a \in C_a$.

Поскольку $a \in \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, то, согласно утверждению 9.3.2, $C_a = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ является связным множеством.

Согласно утверждению 9.3.3, $[C_a]_{(X,\tau)}$ будет связным множеством, причем $a \in [C_a]_{(X,\tau)}$, и значит, $[C_a]_{(X,\tau)} \in \Delta$. Тогда
$C_a = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \supseteq [C_a]_{(X,\tau)} \supseteq C_a$, и значит $C_a = [C_a]_{(X,\tau)}$, т.е. C_a – замкнутое множество.

Этим утверждение 9.6.1 доказано.

9.6.2. Если $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, то согласно утверждению 9.3.2, $D = C_a \cup C_b$ является связным множеством в пространстве (X, τ). Так как $a \in C_a \subseteq D$ и $b \in C_b \subseteq D$, то из определения 9.5 следует, что $C_a \supseteq D$ и $C_b \supseteq D$. Тогда $C_a \subseteq D \subseteq C_a$ и $D \subseteq C_b \subseteq D$, и значит, $C_a = D$ и $C_b = D$, т.е. $C_a = C_b$.

Этим теорема полностью доказана.

9.7. Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется *вполне несвязным*, если $C_a = \{a\}$ для любой точки $a \in X$, т.е. если всякое непустое связное множество является одноэлементным.

9.8. Упражнение. Доказать, что всякое вполне несвязное пространство является T_1-пространством.

10. ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ.

10.1. Определение. Пусть $\Delta = \{X_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ – непустая совокупность непустых множеств X_γ. Рассмотрим множество

$\widehat{X} = \{f : \Gamma \to \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma | f(\gamma) \in X_\gamma$ для $\gamma \in \Gamma\}$.

Это множество $\widehat{X}$ назовем *произведением совокупности* Δ *множеств* и будем обозначать его через $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$.

10.2. Замечание. Если $\Gamma = \{1, \cdots, n\}$, то каждое отображение $f \in \widehat{X}$ можно отождествить с последовательностью $(f(1), \cdots, f(n))$. Тогда $\widehat{X} = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i \in X_i$ для i $= 1, \cdots,$ n$\}$.

В частности, если $n = 2$, то $\widehat{X} = \{(x_1, x_2) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2)$.

Если $\Gamma = \{1, \cdots, n\}$, то вместо записи $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ будем иногда писать $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ или $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

10.3. Определение. Пусть $\Delta = \{X_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ **и** $\widehat{X} = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Для каждого $\gamma \in \Gamma$ отображение $\pi_\gamma : \widehat{X} \to X_\gamma$, действующее по правилу $\pi_\gamma(f) = f(\gamma)$ для любого $f \in \widehat{X}$, называется *проекцией* множества $\widehat{X}$ на множество X_γ.

Если $\Gamma = \{1, \cdots, n\}$, то для любого $1 \le i \le n$ имеем $\pi_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i$.

10.4. Определение. Пусть задана непустая совокупность $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ топологических пространств и $\widehat{X} = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Для каждого $\gamma \in \Gamma$ рассмотрим на множестве $\widehat{X}$ топологию $\widehat{\tau}_\gamma$, которая является прообразом топологии τ_γ относительно отображения $\pi_\gamma : \widehat{X} \to X_\gamma$ (см. 5.21) и топологию $\widehat{\tau} = \sup\{\widehat{\tau}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$. (см. теорему 6.12).

Топологическое пространство $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ называется *произведением совокупности* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *топологических пространств* и обозначается $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$.

10.5. Теорема. *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *−− непустая совокупность топологических пространств и* $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *– произведение этой совокупности. Тогда для каждого* $\lambda \in \Gamma$ *проекция* $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ *является сюръективным, непрерывным и открытым отображением.*

Доказательство. Так как $X_\gamma \neq \emptyset$, для любого $\gamma \in \Gamma$, то в каждом X_γ можем зафиксировать некоторый элемент a_γ.

Пусть теперь $\lambda \in \Gamma$ и b – произвольный элемент из X_λ. Тогда отображение $f : \Gamma \to \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, действующее по правилу, $f(\gamma) = a_\gamma \in X_\gamma$ если $\gamma \neq \lambda$ и $f(\gamma) = b \in X_\lambda$ если $\gamma = \lambda$, принадлежит $\widehat{X}$, причем $\pi_\lambda(f) = b$. Из произвольности элемента b следует, что отображение $\pi_\lambda : \widehat{X} \to X_\lambda$ является сюръективным.

Проверим теперь непрерывность отображения $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Если $\widehat{\tau}_\lambda$ – прообраз топологии τ_λ относительно отображения $\pi_\lambda : \widehat{X} \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$, то согласно теореме 5.22 отображение $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}_\lambda) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ является непрерывным и открытым. Так как $\widehat{\tau} = \sup\{\tau_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$, то $\widehat{\tau} \geq \tau_\lambda$, и значит, (см. определение 6.1 и теорему 5.13) отображение $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ является непрерывным.

Проверим теперь открытость отображения $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Пусть теперь $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$ и $U = \pi_\lambda(\widehat{U})$. Если $a \in U = \pi_\lambda(\widehat{U})$, то существует такое $f_0 \in \widehat{U}$, что $a = f_0(\lambda)$. Так как $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$, и $\widehat{\tau} = \sup\{\widehat{\tau}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$(см. определение 10.4), то, согласно теореме 6.13, существует такое конечное число элементов $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$ и конечное число окрестностей $\widehat{U}_1, \cdots, \widehat{U}_n$ элемента f_0 в пространствах $(\widehat{X}, \widehat{\tau}_{\gamma_1}), \cdots, (\widehat{X}, \widehat{\tau}_{\gamma_n})$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \widehat{U}_i \subseteq \widehat{U}$.

Не нарушая общности, можем считать, что $\widehat{U}_i \in \widehat{\tau}_{\gamma_i}$(в противном случае в качестве $\widehat{U}_i$ взяли бы открытое подмножество, содержащее f_0 и содержащееся в $\widehat{U}_i$). Тогда $\widehat{U}_i = \pi_{\gamma_i}^{-1}(U_i)$ для некоторого $U_i \in \tau_{\gamma_i}$, причем $f_0(\gamma_i) \in U_i$ для $1 \leq i \leq n$.

Возьмем $U_\lambda = X_\lambda$ если $\lambda \notin \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ и $U_\lambda = U_s$ если $\lambda = \gamma_s$ для $1 \leq s \leq n$. Тогда $U_\lambda \in \tau_\lambda$ и $a = f_0(\lambda) \in U_\lambda$.

Проверим, что $U_\lambda \subseteq U$. Если b – произвольный элемент из U_λ, то рассмотрим отображение $f_b : \Gamma \to \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, действующее по правилу,

$f_b(\lambda) = b$ и $f_b(\gamma) = f_0(\gamma)$ если $\gamma \neq \lambda$.

Так как $\pi_{\gamma_i}(f_b) = \quad f_b(\gamma_i) = f_0(\gamma_i) \in U_i$ если $1 \leq i \leq n$ и $\gamma_i \neq \lambda$ и $f_b(\lambda) = b \in U_\lambda = U_s$ если $\lambda = \gamma_s$ для $1 \leq i \leq n$. то $f_b \in \pi_{\gamma_i}^{-1}(U_i) = \widehat{U}_i$ для $1 \leq i \leq n$, и значит, $f_b \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \widehat{U}_i \subseteq \widehat{U}$. Тогда

$b = f_b(\lambda) = \quad \pi_\lambda(f_b) \in \pi_\lambda(\widehat{U}) = U$. Из произвольности элемента b следует, что $U_\lambda \subseteq U$. Значит, U является окрестностью точки a в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, т.е. U является окрестностью любой своей точки в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$

Согласно утверждению 2.3.4, $U \in \tau_\lambda$, т.е. $\pi_\lambda(\widehat{U}) = U \in \tau_\lambda$. Из произвольности множества $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$ следует открытость отображения $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Этим теорема полностью доказана.

10.6. Теорема. *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}-$ *непустая совокупность топологических пространств,* $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *– произведение этой совокупности и* $f_0 \in \widehat{X}$. *Если* $\lambda \in \Gamma$ *и*
$\widehat{X}_\lambda = \{f \in \widehat{X} | f(\gamma) = f_0(\gamma)$ *для* $\gamma \neq \lambda\}$, *то отображение*
$\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : (\widehat{X}_\lambda, \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_\lambda}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ *является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Так как, согласно теореме 10.5, отображение $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ является непрерывным, то, по теореме 5.19, отображение $\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : (\widehat{X}_\lambda, \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_\lambda}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ будет непрерывным.

Пусть теперь $V \in \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_\lambda}$ и $V_\lambda = \pi_\lambda(V)$. Покажем, что $V_\lambda \in \tau_\lambda$, т.е. что V_λ является окрестностью любой своей точки в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Если $a \in V_\lambda = \pi_\lambda(V)$, то существует такое $f_0 \in V$, что $a = f_0(\lambda)$.

Так как $V = \widehat{X}_\lambda \cap \widehat{U}$, для некоторого $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$, где $\widehat{\tau} = \sup\{\widehat{\tau}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$(см. определение 10.4), то, согласно теореме 6.13, существует такое конечное число элементов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ и окрестности $\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_n$ элемента f_0 в пространствах $(\widehat{X}, \widehat{\tau}_{\gamma_1}), \ldots, (\widehat{X}, \widehat{\tau}_{\gamma_n})$, соответственно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \widehat{U}_i \subseteq \widehat{U}$.

Как и при доказательстве теоремы 10.5, не нарушая общности, можем считать, что $\widehat{U}_i \in \widehat{\tau}_{\gamma_i}$. Тогда $\widehat{U}_i = \pi_{\gamma_i}^{-1}(U_i)$, для некоторого $U_i \in \tau_{\gamma_i}$ и $f_0(\gamma_i) = \pi_{\gamma_i}(f_0) \in \quad \pi_{\gamma_i}(\pi_{\gamma_i}^{-1}(U_i) = U_i$ для $1 \leq i \leq n$.

Возьмем $U_\lambda = X_\lambda$ если $\lambda \notin \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ и $U_\lambda = U_k$ если $\lambda = \gamma_k$. Тогда $U_\lambda \in \tau_\lambda$ и $a = f_0(\lambda) \in U_\lambda$.

Проверим, что $U_\lambda \subseteq V$.

Если b – произвольный элемент из U_λ, то рассмотрим отображение $f_b : \Gamma \to \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, действующее по правилу $f_b(\lambda) = b$ и $f_b(\gamma) = f_0(\gamma)$, если $\gamma \neq \lambda$. Тогда $f_b \in \widehat{X}_\lambda$.

Так как $\pi_{\gamma_i}(f_b) = f_b(\gamma_i) = f_0(\gamma_i) \in U_i$ если $1 \leq i \leq n$ и $\gamma_i \neq \lambda$ и $f_b(\lambda) = b \in U_\lambda = U_i$ если $\gamma_i = \lambda$, то $f_b \in \pi_{\gamma_i}^{-1}(U_i) = \widehat{U}_i$ для $1 \leq i \leq n$, и значит, $f_b \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \widehat{U}_i \subseteq \widehat{U}$. Тогда $f_b \in \widehat{U} \cap \widehat{X}_\lambda$, и значит,

$b = f_b(\lambda) = \pi_\lambda(f_b) \in \pi_\lambda(\widehat{U} \cap \widehat{X}_\lambda) = \pi_\lambda(V) = V_\lambda$.

Из произвольности элемента b следует, что $U_\lambda \subseteq V_\lambda$, и значит, V_λ является окрестностью точки a в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, т.е. V_λ является окрестностью любой своей точки в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Согласно утверждению 2.3.4, $U \in \tau_\lambda$. Значит, отображение

$\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : (\widehat{X}_\lambda, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ является открытым.

Проверим теперь, что отображение $\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : \widehat{X}_\lambda \to X_\lambda$ является биекцией.

Пусть $f_1, f_2 \in \widehat{X}_\lambda$ и $f_1 \neq f_2$. Так как $f_1(\gamma) = f_0(\gamma) = f_2(\gamma)$ для любого $\gamma \neq \lambda$ (см. выше, определение множества $\widehat{X}_\lambda$) , то $f_1(\lambda) \neq f_2(\lambda)$. Тогда $\pi_\lambda(f_1) = f_1(\lambda) \neq f_2(\lambda) = \pi_\lambda(f_2)$, т.е. отображение $\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : \widehat{X}_\lambda \to X_\lambda$ является инъективным.

Из определения множества $\widehat{X}_\lambda$ легко следует так же, что отображение $\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : \widehat{X}_\lambda \to X_\lambda$ является сюръективным, и значит, отображение

$\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : \widehat{X}_\lambda \to X_\lambda$ является биективным.

Итак, мы показали, что отображение $\pi_\lambda|_{\widehat{X}_\lambda} : (\widehat{X}_\lambda, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ является непрерывным, открытым и биективным, т.е. оно является гомеоморфизмом.

Этим теорема полностью доказана.

10.7. Теорема. *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *– непустая совокупность топологических пространств,*
$(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *– произведение этой совокупности и*
$f \in \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *. Тогда верны следующие утверждения:*

10.7.1. *Если* S *– конечное подмножество множества* Γ *и для каждого* $\gamma \in S$ *в пространстве* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ *задана некоторая окрестность*

U_γ точки $\pi_\gamma(f)$, то $\overline{W} = \bigcap\limits_{\gamma\in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma)$ является окрестностью точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$;

***10.7.2**. Для любой окрестности $\widehat{U}$ точки f в пространстве $(\widehat{X},\ \widehat{\tau})$ существует такое конечное подмножество S множества Γ, что для каждого $\gamma \in S$ существует такое $U_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\pi_\gamma(f) \in U_\gamma$ и $\bigcap\limits_{\gamma\in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma) \subseteq \widehat{U}$.*

Доказательство.

10.7.1. Согласно определению 2.1, для каждого $\gamma \in S$ существует такое $V_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\pi_\gamma(f) \in V_\gamma \subseteq U_\gamma$. Тогда $f \in \pi_\gamma^{-1}(V_\gamma) \subseteq \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ и $\pi_\gamma^{-1}(V_\gamma)$ является открытым множеством в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau}_\gamma)$ (см. определение 10.4) для каждого $\gamma \in S$. Следовательно, $\pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ является окрестностью точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau}_\gamma)$ для каждого $\gamma \in S$.

Так как $\widehat{\tau} = \sup\{\widehat{\tau}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$, то $\pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ является окрестностью точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, и значит (см. утверждение 2.3.3), $\widehat{W} = \bigcap\limits_{\gamma\in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma)$ является окрестностью точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Этим утверждение 10.7.1 полностью доказано.

10.7.2. Пусть теперь $\widehat{U}$ – произвольная окрестность точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Так как (см. определение 10.4) $\widehat{\tau} = \sup\{\widehat{\tau}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$, то согласно теореме 6.14, существует такое конечное подмножество $S \subseteq \Gamma$, и для каждого $\gamma \in S$ существует такая окрестность $\widehat{W}_\gamma$ элемента f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau}_\gamma)$, что $\widehat{U} = \bigcap\limits_{\gamma\in S} \widehat{W}_\gamma$.

Согласно определению 2.1, для каждого $\gamma \in S$ существует такое $\widehat{U}_\gamma \in \widehat{\tau}_\gamma$, что $f \in \widehat{U}_\gamma \subseteq \widehat{W}_\gamma$. Для каждого $\gamma \in S$ существует такое открытое множество $U_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\widehat{U}_\gamma = \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$, и значит, $\pi_\gamma(f) \in U_\gamma$. Тогда $\bigcap\limits_{\gamma\in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma) = \bigcap\limits_{\gamma\in S} \widehat{U}_\gamma \subseteq \bigcap\limits_{\gamma\in S} \widehat{W}_\gamma = \widehat{U}$.

Этим теорема полностью доказана.

10.8. Теорема. *Пусть $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ – непустая совокупность топологических пространств. Если $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ – произведение этой совокупности и $f \in \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$, то точка f обладает базисом B_f окрестностей в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, состоящим*

из всех подмножеств $\widehat{U}$ *множества* $\widehat{X}$*, каждое из которых может быть получено следующим образом:*

Берем конечное подмножество $S \subseteq \Gamma$*, и для каждого* $\gamma \in S$ *выбираем такое* $U_\gamma \in \tau_\gamma$*, что* $\pi_\gamma(f) = f(\gamma) \in U_\gamma$*. Возьмем* $\widehat{U} = \bigcap\limits_{\gamma \in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma)$, т.е. $\widehat{U} = \{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ *для любого* $\gamma \in S\}$.

Доказательство. Так как для каждого $\gamma \in S$ множество U_γ является окрестностью элемента $\pi_\gamma(f) = f(\gamma)$ в пространстве (X_γ, τ_γ), то согласно утверждению 10.7.1, $\widehat{U} = \bigcap\limits_{\gamma \in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma)$ является окрестностью элемента f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, т.е. совокупность B_f удовлетворяет первому условию определения 2.4.

Так как, согласно утверждению 10.7.2, для любой окрестности $\widehat{U}$ точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ существует такое конечное подмножество S множества Γ, и для каждого $\gamma \in S$ существует такое открытое множество $U_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\pi_\gamma(f) \in U_\gamma$ и $\bigcap\limits_{\gamma \in S} {\pi_\gamma}^{-1}(U_\gamma) \subseteq \widehat{U}$, то совокупность B_f удовлетворяет и второму условию определения 2.4.

Этим теорема полностью доказана.

10.9. Теорема. *Пусть:* $\Delta = \{(X_1, \tau_1), \cdots, (X_n, \tau_n)\}$ *– конечная непустая совокупность топологических пространств.* Если $(\widehat{X}\widehat{\tau}) = \prod\limits_{i=1}^{n} (X_i, \tau_i)$ *– произведение этой совокупности и* $f \in \prod\limits_{i=1}^{n} (X_i, \tau_i)$*, то точка* $(x_1, \cdots, x_n) \in \widehat{X}$ *обладает таким базисом* B *окрестностей в пространстве* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$*, состоящим из всех подмножеств* $\widehat{U}$ *множества* $\widehat{X}$*, которые могут быть получены следующим образом:*

Для каждого $1 \leq i \leq n$ *выбираем такое* $U_i \in \tau_i$, что $x_i \in U_i$ *и полагаем* $\widehat{U} = \{(z_1, \cdots z_n) \in \widehat{X} | z_i \in U_i$ *для* $1 \leq i \leq n\}$.

Доказательство. Согласно теореме 10.8, множество $\widehat{U} = \{(z_1, \cdots z_n) \in \widehat{X} | z_i \in U_i$ для $1 \leq i \leq n\}$ является окрестностью элемента $(x_1, \cdots, x_n)$ в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{i=1}^{n} (X_i, \tau_i)$, т.е. B удовлетворяет первому условию определения 2.4.

Кроме того, если $\widehat{V}$ – окрестность элемента $(x_1, \cdots, x_n)$ в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{i=1}^{n} (X_i, \tau_i)$, то согласно теореме 10.8, существует такое конечное подмножество $S \subseteq \{1, \cdots, n\}$ и для каждого $k \in S$ выбрано такое

$U_k \in \tau_k$, что $\pi_k(x_1, \cdots, x_n) = x_k \in U_k$ и
$\widehat{V} \supseteq \widehat{U} = \{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma \gamma \in S\} = \bigcap\limits_{\gamma \in S} \pi_\gamma{}^{-1}(U_\gamma)$. Тогда, если для каждого $i \in \{1, \cdots, n\} \backslash S$ возьмем $U_i = X_i$, то получим, что
$\bigcap\limits_{\gamma \in S} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(U_i) = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \widehat{X} | z_i \in U_i$ для $1 \leq i \leq n\}$, и значит, $\widehat{V} \supseteq \{(z_1, \cdots, z_n) \in \widehat{X} | z_i \in U_i 1 \leq i \leq n\} = \widehat{U}$, т.е. B удовлетворяет и второму условию определения 2.4.

Этим теорема полностью доказана.

10.10. Теорема. *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *– непустая совокупность топологических пространств и* $\emptyset \neq S \subset \Gamma$. *Тогда топологические пространства* $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *и*
$(\prod\limits_{\gamma \in S} (X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S} (X_\gamma, \tau_\gamma))$ *являются гомеоморфными.*

Доказательство. Определим отображение
$\widehat{\psi} : \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \to (\prod\limits_{\gamma \in S} X_\gamma) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S} X_\gamma)$ следующим образом:

Если $f \in \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, то рассмотрим $f' = f|_S$ и $f'' = f|_{\Gamma \backslash S}$. Тогда
$f' \in (\widehat{X}', \widehat{\tau}') = \prod\limits_{\gamma \in S} X_\gamma$ и $f'' \in (\widehat{X}'', \widehat{\tau}'') = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S} X_\gamma$. Положим
$\widehat{\psi}(f) = (f', f'')$. Легко заметить, что
$\widehat{\psi} : \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \to (\prod\limits_{\gamma \in S} X_\gamma) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S} X_\gamma)$ является биективным отображением.

Покажем, что отображение

$$\widehat{\psi} : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma) \to (\widehat{X}', \widehat{\tau}') \times (\widehat{X}'', \widehat{\tau}'') =$$

$$(\prod_{\gamma \in S} (X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod_{\gamma \in \Gamma \backslash S} (X_\gamma, \tau_\gamma))$$

является непрерывным и открытым отображением.

Пусть $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$ и $W = \widehat{\psi}(\widehat{U})$. Если $(f', f'') \in W$ и f – такой элемент из $\widehat{X}$, что $f(\gamma) = f'(\gamma)$ для $\gamma \in S$ и $f(\gamma) = f''(\gamma)$ для $\gamma \in \Gamma \backslash S$, то $f \in \widehat{\psi}^{-1}(W) = \widehat{U}$. Так как $\widehat{U} \in \widehat{\tau}$, то $\widehat{U}$ является окрестностью элемента f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Согласно теореме 10.8, существует такое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ и для каждого $\gamma \in \Delta$ существует такое $U_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\widehat{U} \supseteq \{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in \Delta\}$. Тогда, согласно теореме 10.8,

$$\widehat{U'} = \{\varphi' \in \widehat{X'} | \varphi'(\gamma) \in U_\gamma \text{ для } \gamma \in \Delta \cap S\}$$

является окрестностью элемента f' в пространстве $(\widehat{X'}, \widehat{\tau'})$ и

$$\widehat{U''} = \{\varphi'' \in \widehat{X''} | \varphi''(\gamma) \in U_\lambda \text{ для } \gamma \in \Delta \cap (\Gamma \backslash S\}$$

является окрестностью элемента f'' в пространстве $(\widehat{X''}, \widehat{\tau''})$, причем $\widehat{\psi}(\widehat{U} \supseteq \{(\varphi', \varphi'') | \varphi' \in \widehat{U'}, \varphi" \in \widehat{U''}\}$. Так как, согласно теореме 10.9, $\widehat{U'} \times \widehat{U''} = \{(\varphi', \varphi") | \varphi' \in \overline{U'}, \varphi" \in \overline{U''}\}$ является окрестностью элемента $\widehat{\psi}(f) = (f', f'')$ в пространстве $(\prod\limits_{\gamma \in S} (X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S} (X_\gamma, \tau_\gamma))$, то $W = \widehat{\psi}(\widehat{U})$ является окрестностью элемента $\widehat{\psi}(f) = (f', f'')$ в пространстве $(\prod\limits_{\gamma \in S} (X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S} (X_\gamma, \tau_\gamma))$. Из произвольности элемента $(f', f'') \in W$ следует, что W является открытым множеством в пространстве $(\prod\limits_{\gamma \in S} (X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S} (X_\gamma, \tau_\gamma)$.

Этим мы доказали, что $\widehat{\psi}$ является открытым отображением.

Пусть теперь $\widehat{V}$ - произвольное открытое множество в пространстве $(\prod\limits_{\gamma \in S} (X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S} (X_\gamma, \tau_\gamma))$ и $\widehat{U} = \widehat{\psi}^{-1}(\widehat{V})$. Если f – произвольный элемент из $\widehat{V}$, то существует такой элемент $(f', f'') \in \widetilde{V}$, что $\widehat{\psi}(f) = (f', f")$. Так как $\widehat{V}$ – открытое множество в пространстве $(\prod\limits_{\gamma \in S} (X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S} (X_\gamma, \tau_\gamma))$, то $\widehat{V}$ является окрестностью элемента $(f', f")$ в пространстве $(\prod\limits_{\gamma \in S} (X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S} (X_\gamma, \tau_\gamma))$. Согласно теореме 10.9, существуют такие окрестности $\widehat{V'}$ и $\widehat{V''}$ элементов f' и $f"$ в пространствах $\prod\limits_{\gamma \in S} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ и $\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \backslash S} (X_\gamma, \tau_\gamma)$, соответственно, что $\widehat{V}' \times \widehat{V}'' \subseteq \widehat{V}$.

Согласно теореме 10.8, существуют такие конечные подмножества $\Delta' \subseteq S$ и $\Delta'' \subseteq \Gamma \backslash S$, что для каждого $\gamma \in \Delta' \cup \Delta''$ существует такое открытое множество U_γ, в пространстве (X_γ, τ_γ), что

$\widehat{V}' \supseteq \{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in \Delta'\}$ и
$\widehat{V''} \supseteq \{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in \Delta"\}$. Если $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$, то по теореме 10.8, множество $\{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in \Delta\}$ является окрестностью элемента f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, причем
$\widehat{U} = \widehat{\psi}^{-1}(\widehat{V}) \supseteq \widehat{\psi}^{-1}(\widehat{V}' \times \widetilde{V''}) = \{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in \Delta\}$, и значит, $\widehat{U}$ является окрестностью элемента f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Из произвольности элемента f следует, что $\widehat{\psi}^{-1}(\widehat{V}) = \widehat{U} \in \widehat{\tau}$, и согласно теореме 5.13, отображение $\widehat{\psi}$ является непрерывным.

Итак, мы доказали, что отображение
$\widehat{\psi} : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to \quad (\prod\limits_{\gamma \in S} (X_\gamma, \tau_\gamma)) \times (\prod\limits_{\gamma \in \Gamma \setminus S} (X_\gamma, \tau_\gamma))$ является биективным, непрерывным и открытым отображением, т.е. является гомеоморфизмом.

Этим теорема полностью доказана.

10.11. Теорема. *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *– непустая совокупность топологических пространств,* $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *– произведение этой совокупности. Если* $f_0 \in \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *и*
$\widetilde{X}_0 = \{f \in \widehat{X} | \{\gamma \in \Gamma | f(\gamma) \neq f_0(\gamma)\}$ *является конечным множеством* $\}$, *то* $\widetilde{X}_0$ *является всюду плотным множеством в пространстве* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ (см. определение 3.10) .

Доказательство . Пусть φ – любой элемент из $\widehat{X}$ и $\widehat{W}$ – произвольная окрестность элемента φ в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Согласно теореме 10.8, существует такое конечное подмножество $S \subseteq \Gamma$ и для каждого $\gamma \in S$ существует такое $U_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\pi_\gamma(\varphi) = \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ и
$\widehat{W} \supseteq \{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in S\}$. Рассмотрим такой элемент $f_1 \in \widehat{X}$, что $f_1(\gamma) = \varphi(\gamma)$ для любого $\gamma \in S$ и $f_1(\gamma) = f_0(\gamma)$ для любого $\gamma \in \Gamma \setminus S$. Тогда $f_1 \in \widetilde{X}_0$ и $f_1 \in \{\varphi \in \widehat{X} | \varphi(\gamma) \in U_\gamma$ для $\gamma \in S\} \subseteq \widehat{W}$, т.е. $\widetilde{X_0} \cap \widehat{W} \neq \emptyset$.

Из произвольности элемента φ и его окрестности $\widehat{W}$ следует, что множество $\widetilde{X_0}$ является всюду плотным множеством в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Этим теорема полностью доказана.

10.12. Теорема. *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *– непустая совокупность топологических пространств, и*

$(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *– произведение этой совокупности. Пространство* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ *является связным тогда и только тогда, когда каждое из пространств* (X_γ, τ_γ) *является связным.*

Доказательство.

Необходимость. Так как, согласно теореме 10.5, для каждого $\gamma \in \Gamma$ проекция $\pi_\gamma : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\gamma, \tau_\gamma)$ является непрерывным отображением, то согласно теореме 9.4 из связности пространства $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ и сюръективности отображения $\pi_\gamma : \widehat{X} \to X_\gamma$ следует связность пространства (X_γ, τ_γ).

Достаточность. Пусть для каждого $\gamma \in \Gamma$ пространство (X_γ, τ_γ) является связным. Доказательство проведем в три этапа, а именно:

1. Γ является двухэлементным множеством;

2. Γ является конечным множеством;

3. Γ является произвольным бесконечным множеством.

Доказательство указанных этапов.

1. Пусть Γ является двухэлементным множеством, т.е. $\Gamma = \{1, 2\}$. Тогда $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = (X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2)$.

Зафиксируем некоторый элемент $(x_0, y_0) \in \widehat{X} = X_1 \times X_2$ и пусть, C_0 – связная компонента этой точки (x_0, y_0) в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Если $\widehat{X}_1 = \{(x, y_0) | x \in X_1\}$, то согласно теореме 10.6, пространства $(\widehat{X}_1, \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_1})$ и (X_1, τ_1) являются гомеоморфными, и значит $\widehat{X}_1 = \{(x, y_0) | x \in X_1\}$ является связным множеством в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Поскольку $(x_0, y_0) \in \widehat{X}_1$, то $\widehat{X}_1 \subseteq C_0$.

Для любого $x \in X_1$ рассмотрим подмножество $\widehat{Y}_x = \{(x, y) | y \in X_2\}$ множества $\widehat{X}$. По теореме 10.6, пространство $(\widehat{Y}_x, \widehat{\tau}|_{\widehat{Y}_x})$ гомеоморфно пространству (X_2, τ_2), и значит, множество $Y_x = \{(x, y) | y \in X_2\}$ является связным множеством в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Так как $(x, y_0) \in \widehat{X}_1 \subseteq C_0$ и $(x, y_0) \in Y_x$, то согласно утверждению 9.3.2, $C_0 \cup Y_x$ является связным множеством в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, и значит, $C_0 \supseteq Y_x$ для любого $x \in X_1$. Тогда $\widehat{X} = \{(x, y) | x \in X_1, y \in X_2\} = \bigcup\limits_{x \in X_1} Y_x \subseteq C_0 \subseteq \widehat{X}$, т.е. $\widehat{X} = C_0$.

Следовательно, пространство $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ является связным.

2. Пусть теперь Γ является конечным множеством, т.е. $\Gamma = \{1, \ldots, n\}$.

Дальнейшее доказательство проведем индукцией по числу n.

Если $n = 1$, то $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = (X_1, \tau_1)$, и значит, является связным пространством.

Допустим, что теорема верна для числа n, и $\Gamma = \{1, \cdots, n+1\}$. Тогда, согласно допущению, пространства $\prod\limits_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ и (X_{n+1}, τ_{n+1}) являются связными, и согласно ранее доказанному (см. этап 1 доказательства настоящей теоремы), пространство $(\prod\limits_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)) \times (X_{n+1}, \tau_{n+1})$ тоже будет связным.

Так как по теореме 10.10 пространства $(\prod\limits_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)) \times (X_{n+1}, \tau_{n+1})$ и $\prod\limits_{i=1}^{n+1}(X_i, \tau_i)$ являются гомеоморфными, то и пространство $\prod\limits_{i=1}^{n+1}(X_i, \tau_i)$ является связным.

Этим теорема доказана для любого конечного множества Γ.

3. Пусть теперь Γ является произвольным бесконечным множеством.

Зафиксируем некоторый элемент $f_0 \in (\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma, \tau_\gamma)$. Если $\widehat{\Gamma}$ – множество всех конечных подмножеств множества Γ, то согласно теореме 10.10, для каждого $S \in \widehat{\Gamma}$ пространства $(\prod\limits_{\gamma\in S}(X_\gamma, \tau_\gamma)) \times \prod\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus S}(X_\gamma, \tau_\gamma)$ и $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma, \tau_\gamma)$ являются гомеоморфными, и значит, можем считать, что $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}(X_\gamma, \tau_\gamma) = (\prod\limits_{\gamma\in S}(X_\gamma, \tau_\gamma)) \times \prod\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus S}(X_\gamma, \tau_\gamma)$.

Если $\widehat{X}_S = \{f \in \widehat{X} | f(\gamma) = f_0(\gamma)$ для $\gamma \in \Gamma\setminus S\}=$
$\{\varphi \in (\prod\limits_{\gamma\in S} X_\gamma) \times (\prod\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus S} X_\gamma) \,|\varphi(\gamma) = f_0(\gamma)$ для $\gamma \in \Gamma\setminus S\}$, то из теоремы 10.6 следует, что пространства $\prod\limits_{\gamma\in S}(X_\gamma, \tau_\gamma)$ и $(\widehat{X}_S, \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_S})$ являются гомеоморфными. Тогда, согласно раннее доказанному (см. этап 2 доказательства настоящей теоремы), пространство $\prod\limits_{\gamma\in S}(X_\gamma, \tau_\gamma)$ будет связным, и значит, пространство $(\widehat{X}_S, \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_S})$ будет связным.

Итак, мы доказали, что для любого конечного подмножества S множества Γ множество $\widehat{X}_S = \{f \in \widehat{X} | f(\gamma) = f_0(\gamma)$ для $\gamma \in \Gamma\setminus S\}$ является связным в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Так как $f_0 \in \widehat{X}_S$ для любого $S \in \widehat{\Gamma}$, то, согласно утверждению 9.3.2, $\widehat{X}' = \{f \in \widehat{X} | \{\gamma \in \Gamma | f(\gamma) \neq f_0(\gamma)$ является конечным$\}\} = \bigcup\limits_{S\in\widehat{\Gamma}} \widehat{X}_S$

является связным множеством в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Кроме того, согласно теореме 10.11, множество $\widehat{X}'$ является всюду-плотным в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Тогда согласно утверждения 9.3.3, $\widehat{X} = [X']_{(\widehat{X}, \widehat{\tau})}$ является связным множеством, т.е. $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ является связным пространством.

Этим теорема полностью доказана.

10.13. Теорема. *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *– непустая совокупность топологических пространств, и* $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *– произведение этой совокупности. Тогда верны следующие утверждения:*

10.13.1. *Для любого целого числа* $0 \leq i \leq 3$ *в пространстве* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ *выполняется аксиома отделимости* T_i *тогда и только тогда, когда в каждом из пространств* (X_γ, τ_γ) *выполняется эта же аксиома отделимости* T_i.

10.13.2. *Пространство* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ *является вполне регулярным тогда и только тогда, когда каждое из пространств* (X_γ, τ_γ) *является вполне регулярным.*

Доказательство.

10.13.1. Необходимость. Пусть $0 \leq i \leq 3$ и в топологическом пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ выполняется аксиома отделимости T_i.

Зафиксируем некоторый элемент f_0 из $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Если $\lambda \in \Gamma$ и $\widehat{X}_\lambda = \{f \in \widehat{X} | f(\gamma) = f_0(\gamma)$ для $\gamma \neq \lambda\}$, то согласно теореме 10.6, топологические пространства $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ и $(\widehat{X}_\lambda, \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_\lambda})$ являются гомеоморфными. Так как, согласно упражнению 7.7.2, в пространстве $(\widehat{X}_\lambda, \widehat{\tau}|_{\widehat{X}_\lambda})$ выполняется аксиома отделимости T_i, то и в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ выполняется аксиома отделимости T_i для люого $0 \leq i \leq 3$.

Этим необходимость для утверждения 10.13.1 доказана.

10.13.1. Достаточность. Пусть теперь $0 \leq i \leq 3$ и в каждом из пространств (X_γ, τ_γ) выполняется аксиома отделимости T_i.

Если $f_1 \neq f_2 \in (\widehat{X}, \widehat{\tau})$, то $f_1(\lambda) \neq f_2(\lambda)$ для некоторого $\lambda \in \Gamma$.

Если $i = 0$, то в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ хотя бы ода из точек $f_1(\lambda)$ или $f_2(\lambda)$ имеет окрестность не содержащую другую. Допустим, для определенности, что $\pi_\lambda(f_1) = f_1(\lambda)$ обладает такой окрестностью U, что

$\pi_\lambda(f_2) = f_2(\lambda) \notin U$. Так как $\pi_\lambda : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ является непрерывным отображением (см. теорему 10.5), то $\widehat{U} = \pi_\lambda^{-1}(U)$ будет окрестностью точки f_1 в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, причем $f_2 \notin \widehat{U}$, ибо
$\pi_\lambda(f_2) = f_2(\lambda) \notin U = \pi_\lambda(\widehat{U})$.

Этим достаточность для утверждения 10.13.1 в случае, когда $i = 0$ доказана.

Если $i = 1$, то достаточность для утверждения 10.13.1 доказывается аналогично как и для случая $i = 0$ с той лишь разницей, что нужно рассматривать и такую окрестность V точки $f_2(\lambda)$, что $f_1(\lambda) \notin V$.

Если $i = 2$, то в пространстве $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ существуют такие окрестности U и V точек $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$, соответственно, что $U \cap V = \emptyset$. Тогда
$\widehat{U} = \pi_\lambda^{-1}(U)$ и $\widehat{V} = \pi_\lambda^{-1}(V)$ будут окрестностями точек f_1 и f_2, соответственно, в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, причем $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$, ибо
$\pi_\lambda(\widehat{U} \cap \widehat{V}) = \pi_\lambda(\widehat{U}) \cap \pi_\lambda(\widehat{V}) = U \cap V = \emptyset$.

Этим достаточность для утверждения 10.13.1 в случае, когда $i = 2$ доказана.

Если $i = 3$, то согласно утверждению 7.2.3, достаточно доказать, что в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ каждая точка f обладает базисом окрестностей, который состоит из замкнутых множеств.

Итак, пусть W – произвольная окрестность точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Согласно утверждению 10.7.2, существует такое конечное подмножество $S \subseteq \Gamma$, что для каждого $\gamma \in S$ существует такое $U_\gamma \in \tau_\gamma$, что
$\pi_\gamma(f) \in U_\gamma$ и $\bigcap\limits_{\gamma \in S} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) \subseteq W$.

Так как для любого $\gamma \in S$ пространство (X_γ, τ_γ) является
T_3 – пространством, то согласно утверждению 7.2.3, существует такая замкнутая окрестность V_γ точки $\pi_\gamma(f)$ в пространстве (X_γ, τ_γ), что
$V_\gamma \subseteq U_\gamma$.

Из непрерывности отображения $\pi_\gamma : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\gamma, \tau_\gamma)$ (см. теоремы 10.5, 5.12 и 5.13) следует, что $\pi_\gamma^{-1}(V_\gamma)$ будет замкнутой окрестностью точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, причем $\pi_\gamma^{-1}(V_\gamma) \subseteq \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ для любого $\gamma \in S$. Тогда $\widehat{V} = \bigcap\limits_{\gamma \in S} \pi_\gamma^{-1}(V_\gamma) \subseteq \bigcap\limits_{\gamma \in S} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) \subseteq W$ и $\widehat{V}$ будет замкнутой окрестностью точки f в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Итак, мы доказали, что в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ любая окрестность W точки f содержит некоторую замкнутую окрестность точки f, и значит,

f обладает базисом из замкнутых окрестностей, т.е. пространство $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ является T_3 пространством.

Этим утверждение 10.13.1 полностью доказано.

10.13.2. Необходимость. Необходимость доказывается дословным повторением доказательства необходимости в утверждении 10.13.1.

10.13.2. Достаточность. Пусть каждое из пространств (X_γ, τ_γ) является вполне регулярным. Тогда из 10.13.1 следует, что в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ выполняется аксиома отделимости T_1.

Пусть теперь $\widehat{F}$ – произвольное замкнутое множество в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ и f_0 – такой элемент из $\widehat{X}$, что $f_0 \notin \widehat{F}$. Тогда $\widehat{X} \backslash \widehat{F} \in \widehat{\tau}$, и значит, $\widehat{X} \backslash \widehat{F}$ является окрестностью элемента f_0 в пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Согласно утверждению 10.7.2, существует такое конечное подмножество $S \subseteq \Gamma$ что для каждого $\gamma \in S$ существует такое $V_\gamma \in \tau_\gamma$, что $\pi_\gamma(f_0) \in V_\gamma$ и $\bigcap\limits_{\gamma \in S} \pi_\gamma^{-1}(V_\gamma) \subseteq \widehat{X} \backslash \widehat{F}$.

Если $\gamma \in S$ и $F_\gamma = X_\gamma \backslash V_\gamma$, то $\pi_\gamma(f_0) \notin F_\gamma$, и из вполне регулярности пространства (X_γ, τ_γ) следует, что существует такое непрерывное отображение $\psi_\gamma : (X_\gamma, \tau_\gamma) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{инт}})$, что $0 \leq \psi_\gamma(\pi_\gamma(f)) \leq 1$, $\psi_\gamma(\pi_\gamma(f_0)) = 0$ и $\psi_\gamma(\pi_\gamma(F_\gamma)) = 1$.

Для каждого $\gamma \in S$ рассмотрим отображение $\widehat{\psi}_\gamma : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\text{инт}})$, действующее по правилу $\widehat{\psi}_\gamma(f) = \psi_\gamma(\pi_\gamma(f))$ для любого $f \in \widehat{X}$. Тогда, согласно упражнению 5.23.3, отображение $\widehat{\psi}_\gamma : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ будет непрерывным, причем $0 \leq \widehat{\psi}_\gamma(f) \leq 1$ для любого $f \in \widehat{X}$. Кроме того, $\widehat{\psi}_\gamma(f_0) = \psi_\gamma(\pi_\gamma(f_0)) = 0$ и $\widehat{\psi}_\gamma(f) = \psi_\gamma(\pi_\gamma(f)) = 1$ для любого $f \in \pi_\gamma^{-1}(F_\gamma) = \widehat{X} \backslash \pi_\gamma^{-1}(V_\gamma)$.

Если $\widehat{\psi}(f) = \max\{\widehat{\psi}_\gamma(f) | \gamma \in S\}$ для любого $f \in \widehat{X}$, то $0 \leq \widehat{\psi}(f) \leq 1$ для каждого $f \in \widehat{X}$ и, согласно упражнению 5.23.5, отображение $\widehat{\psi} : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ будет непрерывным, причем $\widehat{\psi}(f_0) = \max\{\psi_\gamma(f_0) = 0 | \gamma \in S\} = 0$.

Если теперь $f \in \widehat{F}$, то $f \notin \widehat{X} \backslash \widehat{F} \supseteq \bigcap\limits_{\gamma \in S} \pi_\gamma^{-1}(V_\gamma)$, и значит, $f \notin \pi_{\gamma_0}^{-1}(V_{\gamma_0})$, т.е. $\pi_{\gamma_0}(f) \in F_{\gamma_0}$ для некоторого $\gamma_0 \in S$. Тогда $\psi_{\gamma_0}(\pi_{\gamma_0}(f)) = 1$. Так как $\widehat{\psi}(f) \leq 1$, то $\widehat{\psi}(f) = 1$, и значит $\widehat{\psi}(F) = \{1\}$.

Из произвольности элемента f_0, множества F следует вполнерегулярность пространства $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Этим теорема полностью доказана.

10.14. Теорема (Тихонова). *Пусть* $\Delta = \{(X_\gamma, \tau_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ *– непустая совокупность топологических пространств, и* $(\widehat{X, \widehat{\tau}}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ *– произведение этой совокупности. Пространство* $(\widehat{X, \widehat{\tau}})$ *является компактным тогда и только тогда, когда каждое из пространств* (X_γ, τ_γ) *является компактным.*

Доказательство.

Необходимость. Если пространство $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} (X_\gamma, \tau_\gamma)$ является компактным, то согласно теореме 10.5, для каждого $\gamma \in \Gamma$ отображение $\pi_\gamma : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (X_\gamma, \tau_\gamma)$ является непрерывным сюръективным отображением. Тогда, согласно следствию 8.15, пространство (X_γ, τ_γ) является компактным.

Этим необходимость доказана.

Доказательство достаточности является довольно сложным, и мы его не приводим. Это доказательство можно найти, например, в [1], стр. 294 или [2], стр. 114 и в других монографиях по общей топологии

10.15. Теорема. *Пусть* $X = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i$ *– вещественные числа* $\}$. Если $\rho((x_1, \ldots, x_n),_(y_1, \ldots, y_n))$ *– обычная метрика на* n *– мерном Евклидовом пространстве, т.е.*

$$\rho((x_1, \cdots, x_n),_(y_1, \cdots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

и τ_ρ *– топология, задаваемая метрикой* ρ *(см. теорему 1.5), то топологическое пространство* (X, τ_ρ) *гомеоморфно прямому произведению* n *экземпляров топологических пространств* $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ *вещественных чисел с интервальной топологией* $\tau_{инт}$.

Доказательство. Пусть $(\widehat{X}, \widehat{\tau}) = (R_1, \tau_1) \times \cdots \times (R_n, \tau_n)$, где каждое (R_i, τ_i) является пространством действительных чисел с интервальной топологией. Так как любой элемент $\widehat{x} \in \widehat{X}$ можно записать в виде $(x_1, \ldots, x_n)$ (см. замечание 10.2), то будем считать, что $\widehat{X} = X$.

Проверим, что $\tau_\rho = \widehat{\tau}$.

Пусть $U \in \tau_\rho$ и $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Тогда (см. теорему 1.5) существует такое $\varepsilon > 0$, что $\{x \in X | \rho(a, x) < \varepsilon\} \subseteq U$. Так как для любого $1 \leq i \leq n$ интервал $V_i = (a_i - \frac{\varepsilon}{n}, a_i + \frac{\varepsilon}{n}) \in \tau_i$, то согласно теореме 10 .9, $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(V_i)$ является окрестностью элемента a в

топологическом пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, причем $-\frac{\varepsilon}{n} < a_i - y_i < \frac{\varepsilon}{n}$ для любого элемента $y = (y_1, \ldots, y_n) \in W$ и произвольного $1 \leq i \leq n$. Тогда $\rho(a, y) = \sqrt{(a_1 - y_1)^2 + \cdots + (a_n - y_n)^2} < \sqrt{n(\frac{\varepsilon}{n})^2} < \varepsilon$, и значит, $y \in U$.

Из произвольности элемента y следует, что $W \subseteq U$. Тогда (см. утверждению 2.3.2) U является окрестностью элемента a в топологическом пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Из произвольности элемента a, из утверждения 2.3.4 следует, что $W \in \widehat{\tau}$.

Этим мы доказали, что $\tau_\rho \leq \widehat{\tau}$.

Пусть теперь $V \in \widehat{\tau}$ и $b = (b_1, \ldots, b_n) \in V$. Так как $V \in \widehat{\tau}$, то согласно утверждению 2.3.4, V является окрестностью элемента b в топологическом пространстве $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$. Согласно теореме 10.9, для каждого $1 \leq i \leq n$ существует такое $V_i \in \tau_i$, что $b_i \in V_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(V_i) \subseteq V$. Так как каждое V_i является объединением интервалов, то (не нарушая общности) можем считать, что $V_i = (b_i - \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i)$ для любого $1 \leq i \leq n$.

Если $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ такой элемент, что $\rho(b, y) < \varepsilon$, то $y_i \in V_i = (b_i - \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i)$, и значит, $y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(V_i) \subseteq V$. Из произвольности элемента y следует, что $\{z \in X | \rho(z, b) < \varepsilon\} \subseteq V$.

Из произвольности элемента b (см. теорему 1.5) следует, что $V \in \tau_\rho$. Этим мы доказали, что $\tau_\rho \geq \widehat{\tau}$, и значит $\tau_\rho = \widehat{\tau}$.

Этим теорема полностью доказана.

10.16. Определение. Пусть X – произвольное множество и n – некоторое натуральное число. Если
$\widehat{X} = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in X$ для $i = 1, \ldots, n\}$ – произведение n экземпляров множества X, то всякое отображение $\psi : \widehat{X} \to Y$ будем называть *отображением от n аргументов множества X в множество Y.*

10.17. Определение. Пусть (X, τ) и (Y, τ') – топологические пространства, и n – некоторое натуральное число. Если $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ – произведение n экземпляров топологического пространства (X, τ), то непрерывное отображение $\psi : (\widehat{X}, \widehat{\tau}) \to (Y, \tau')$ будем называть *непрерывным отображением от n аргументов топологического пространства (X, τ) в топологическое пространство (Y, τ').*

10.18. Замечание. Из теоремы 10.9 легко следует следующее утверждение:

Пусть (X, τ) и (Y, τ') *– топологические пространства, и* n *– некоторое натуральное число. Если* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ *– произведение* n *экземпляров топологического пространства* (X, τ)*, то отображение* ψ от n *аргументов топологического пространства* (X, τ) *в топологическое пространство* (Y, τ') *будет непрерывным тогда и только тогда, когда для любых* n *элементов* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *и произвольной окрестности* U *элемента* $y = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ *в пространстве* (Y, τ') *существуют такие окрестности* V_i *элементов* x_i *для* $1 \leq i \leq n$ *в пространстве* (X, τ)*, что* $\psi(V_1, \ldots, V_n) = \{\psi(z_1, \ldots, z_n) | z_i \in V_i, i = 1, \ldots, n\} \subseteq U$.

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ.

1.3.1. Действительно:

Так как X, $\emptyset \in \tau$, то аксиома 1 определения 1.1 выполняется.

Пусть A, $B \in \tau$. Тогда, либо $A = B = X$ и в этом случае $A \bigcap B = X \in \tau$, либо $A = \emptyset$, или $B = \emptyset$, и в этом случае $A \bigcap B = \emptyset \in \tau$, следовательно и аксиома 2 определения 1.1 выполняется.

Пусть $S \subseteq \tau$. Тогда $S \subseteq \{\{\emptyset\}, \{X\}, \}$. Если $X \in S$, то $\bigcup\limits_{A \in S} A = X \in \tau$ и если $X \notin S$, то $A = \emptyset$ для любого $A \in S$, и значит, $\bigcup\limits_{A \in S} A = \emptyset \in \tau$.

Это топологическое пространство (X, τ) называется *антидискретным пространством*, а топология $\tau = \{\emptyset, X\}$ называется *антидискретной топологией*.

1.3.2. Действительно.

Так как X и $\emptyset$ являются подмножествами множества X, то $\emptyset \in \tau$ и $X \in \tau$, т.е. аксиома 1 определения 1.1 выполняется.

Если A, $B \in \tau$, то $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$. Тогда $A \cap B \subseteq X$, и значит $A \cap B \in \tau$, т.е. аксиома 2 определения 1.1 выполняется.

Если $S \subseteq \tau$, то $A \subseteq X$ для любого $A \in S$. Тогда $\bigcup\limits_{A \in S} A \subseteq X$, и значит, $\bigcup\limits_{A \in S} A \in \tau$, т.е. аксиома 3 определения 1.1 выполняется..

Это топологическое пространство (X, τ) называется *дискретным пространством*, а топология $\tau = \{A \,|\, A \subseteq X\}$ называется *дискретной топологией*.

1.3.3. В самом деле:

Так как $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$, то τ_1 - антидискретная топология;

Так как $\tau_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$, то τ_2 состоит из всевозможных подмножеств множества X, т.е. τ_2. - дискретная топология.

Если $\tau_3 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$, то, очевидно, что аксиома 1 определения 1.1 выполняется.

Пусть теперь A, $B \in \tau_3$. Тогда:

Если $\emptyset \in \{A, B\}$, то $A \cap B = \emptyset \in \tau_3$;

Если $\emptyset \notin \{A, B\}$ и $\{a\} \in \{A, B\}$, то $A \cap B = \{a\} \in \tau_3$;

Если $\emptyset \notin \{A, B\}$ и $\{a\} \notin \{A, B\}$, то $A \cap B = \{a, b\} \in \tau_3$.

Случай $\tau_4 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\}$ доказывается аналогично предыдущему случаю.

1.3.4. Так как $\emptyset \notin \sigma_1$ и $X \notin \sigma_2$, то для совокупностей σ_1 и σ_2 не выполняется первая аксиома определения 1.1, и значит, σ_1 и σ_2 не являются топологиями на множестве X.

1.3.5. В самом деле:

τ_1 - дискретная топология;

τ_2 - антидискретная топология;

Для каждой из совокупностей $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$, $\tau_4 = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{a\}, \{c\}\}$ и $\tau_5 = \{\emptyset, X, \{c, b\}, \{c\}, \{b\}\}$ как и при доказательстве упражнения 1.3.3, рассмотрением различных случаев, проверяется выполнимость всех аксиом определения 1.1.

1.3.6. Так как $\{a\} \bigcup \{b\} = \{a, b\} \notin \sigma_1$, а $\{a\}, \{b\} \in \sigma_1$, то σ_1 не удовлетворяет третьей аксиоме определения 1.1, и значит, σ_1 не является топологией на множестве X.

Аналогично, так как $\{a, b\} \bigcap \{a, c\} = \{a\} \notin \sigma_2$, а $\{a.b\}, \{a, c\} \in \sigma_2$, то σ_2 не удовлетворяет второй аксиоме определения 1.1, и значит, σ_2 не является топологией на множестве X

1.3.7. Так как $X \subseteq X$ и $X \backslash X = \emptyset$ является конечным множеством, то $X \in \tau$ и поскольку $\emptyset \in \tau$ (по определению совокупности τ), то первая аксиома определения 1.1 выполняется.

Пусть теперь A, $B \in \tau$. Если $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$, то $A \bigcap B = \emptyset \in \tau$.

Если же $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$, то $X \backslash A$ и $X \backslash B$ являются конечными множествами. Тогда $X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$ является конечным множеством, и значит, $A \cap B \in \tau$, т.е. вторая аксиома определения 1.1 выполняется.

Пусть теперь $S \subseteq \tau$.

Если $A = \emptyset$ для любого $A \in S$, то $\bigcup\limits_{A \in S} A = \emptyset \in \tau$.

Если же некоторое множество $A_0 \in S$ отлично от $\emptyset$, то $X \backslash A_0$ является конечным множеством. Тогда $X \backslash (\bigcup\limits_{A \in S} A) \subseteq X \backslash A_0$, и значит, $X \backslash (\bigcup\limits_{A \in S} A)$ является конечным множеством, т.е. $\bigcup\limits_{A \in S} A \in \tau$.

Итак, мы проверили выполнение и третьей аксиомы определения 1.1, т.е. (X, τ) - топологическое пространство.

1.3.8. Так как $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$ и $\emptyset = (k, k)$, то $\mathbb{R} \in \tau_{инт}$ и $\emptyset \in \tau_{инт}$, т.е. первая аксиома определения 1.1 выполняется.

Если A, $B \in \tau_{инт}$, то $A = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} (a_\alpha, b_\alpha)$ и $B = \bigcup\limits_{\gamma \in \Psi} (c_\gamma, d_\gamma)$. Тогда

$$A \cap B = \left(\bigcup_{\alpha \in \Omega} (a_\alpha, b_\alpha) \right) \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Psi} (c_\gamma, d_\gamma) \right) = \bigcup_{\alpha \in \Omega,\, \gamma \in \Psi} ((a_\alpha, b_\alpha) \cap (c_\gamma, d_\gamma)).$$

Так как пересечение любых двух интервалов является интервалом, то $A \bigcap B = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega,\, \gamma \in \Psi} ((a_\alpha, b_\alpha) \cap (c_\gamma, d_\gamma)) \in \tau_{инт}$, т.е. вторая аксиома определения 1.1 выполняется.

Если $S \subseteq \tau_{инт}$, то $S = \{A_\alpha \,|\alpha \in \Omega\}$, где $A_\alpha = \bigcup\limits_{\gamma \in \Psi} (a_{\gamma,\alpha}, b_{\gamma,\alpha})$. Тогда $\bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} \left(\bigcup\limits_{\gamma \in \Psi} (a_{\gamma,\alpha}, b_{\gamma,\alpha}) \right)$, и значит, $\bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} A_\alpha \in \tau_{инт}$, т.е. выполняется и третья аксиома определения 1.1. Следовательно, $\tau_{инт}$ является топологией.

Эта топология называется *интервальной* топологией, а топологическое пространство $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$ называемое *пространством действительных чисел с интервальной топологией.*

1.15.1. Так как $\tau \subseteq \tau$ и $U = \bigcup\limits_{V=U} V$ для любого $U \subseteq X$, то совокупность τ является базой пространства (X, τ).

1.15.2. Так как $\{x\} \in \tau$ для любого $x \in X$, то $\Omega \subseteq \tau$. Кроме того, поскольку $U = \bigcup\limits_{b \in U} \{b\}$ для любого $U \subseteq X$, то совокупность $\Omega = \{\{x\} | x \in X\}$ является базой дискретного пространства (X, τ).

1.15.3. Так как любой интервал с рациональными концами принадлежит $\tau_{\text{инт}}$, то $\Omega \subseteq \tau_{\text{инт}}$. Кроме того, поскольку любой интервал (a, b) можно представить как объединение интервалов (a_i, b_i) с рациональными концами, где $a < a_i$ и $\lim\limits_{i \to \infty} a_i = a$ и $b_i < b$ и $\lim\limits_{i \to \infty} b_i = b$, то совокупность Ω всех интервалов с рациональными концами является базой пространства $(\mathbb{R}, \tau_{\text{инт}})$.

1.15.4. Если $U_{k,a} \in \Omega$ и $x \in U_{k,a}$, то $\rho(x, a) < 2^{-k}$, и значит, существует такое $\varepsilon_x > 0$, что $\rho(x, a) + \varepsilon_x < 2^{-k}$. Тогда, если $y \in X$ и $\rho(x, y) < \varepsilon_x$, то $\rho(a, y) \leq \rho(a, x) + \rho(x, y) < \rho(a, x) + \varepsilon_x < 2^{-k}$, и значит, $y \in U_{k,a}$. Из произвольности элемента $y \in X$ следует, что $U_{k,a} \in \tau_\rho$ (см. теорему 1.5), и значит, $\Omega \subseteq \tau_\rho$.

Кроме того, если $U \in \tau_\rho$, то для любого элемента $a \in U$ существует такое натуральное число n_a, что $U_{a,n_a} = \{y \in X | \rho(a, y) < 2^{-n_a}\} \subseteq U$. Тогда $U = \bigcup\limits_{a \in U} \{a\} \subseteq \bigcup\limits_{a \in U} U_{a,n_a} \subseteq U$, и значит $U = \bigcup\limits_{a \in U} U_{a,n_a}$, т.е. совокупность $\Omega = \{U_{a,k} | a \in X, k \in N\}$ является базой топологического пространства (X, τ_ρ).

2.2.1. В самом деле, если $A \in \tau$ и $a \in A$, то в качестве множества V, указанного в определении 2.1, возьмем A. Тогда $a \in A \subseteq A$, и значит, A является окрестностью точки a .

2.2.2. В самом деле, если $V = X$ и поскольку $X \in \tau$, то, согласно упражнению 2.2.1, $V = X$ является окрестностью точки a.

Кроме того, если V - окрестность точки a, то найдется такое $U \in \tau$, что $a \in U \subseteq V$.

Так как $\tau = \{\emptyset, X\}$, то $U = X$, и значит, $V = X$.

2.2.3. Действительно, так как τ является дискретной топологией, то $A \in \tau$ и поскольку $a \in A$, то из упражнения 2.2.1 следует, что A является окрестностью точки a.

2.2.4. Действительно, если $V = (r-1, r+1)$, то $V \in \tau_{инт}$ и $r \in V \subseteq A$, и значит, A является окрестностью точки r в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$.

Покажем теперь, что B не является окрестностью точки r.

Предположим противное, т.е. что B - окрестность точки r в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$. Тогда существует $U \in \tau$, такое что $r \in U \subseteq B$. Так как U является объединением некоторых интервалов, то существует такой интервал (a, b), что $r \in (a, b) \in B$.

Поскольку в любом непустом интервале кроме рациональных чисел содержатся и иррациональные числа, а B содержит только рациональные числа, то получили противоречие.

Следовательно, наше предположение не верно и B не является окрестностью точки r.

2.5.1. В самом деле, если $U \in \Omega_a = \{X\}$, то $U = X$. Так как $X \in \tau$, то согласно утверждению 2.3.4, X является окрестностью точки a в пространстве (X, τ).

Кроме того, если U - окрестность точки a в пространстве (X, τ), то согласно упражнению 2.2.2, $U = X$. Тогда $X \subseteq U$, т.е. совокупность $\Omega_a = \{X\}$ удовлетворяет обоим условиям определения 2.4, и значит, она является базисом окрестностей точки a.

2.5.2. В самом деле, так как τ - дискретная топология, то $\{a\} \in \tau$, и значит, $\{a\}$ - окрестность точки a в пространстве (X, τ) (см. утверждение 2.3.4).

Кроме того, если V - окрестность точки a в пространстве (X, τ), то $a \in V$ и значит $\{a\} \subseteq V$. Следовательно, Ω_a является базисом окрестностей точки a.

2.5.3. В самом деле, так как $a \in \{a\} \in \tau$, то $\{a\}$ является окрестностью точки a в пространстве (X, τ). Кроме того, если
U - окрестность точки a в пространстве (X, τ), то $a \in U$, и значит, $\{a\} \subseteq U$. Следовательно, Ω_a является базисом окрестностей точки a в пространстве (X, τ).

Проверим теперь выполнения условий определения 2.4 для совокупности Ω'.

Так как $X \in \tau$ и $b \in X$, то Xявляется окрестностью точки b. Кроме того, если U - окрестность точки b в пространстве (X, τ), то существует такое $V \in \tau$, что $b \in V \subseteq U$.

Так как $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, то в качестве V можно взять только X. Но тогда $U = X$, и значит, $\Omega' = \{X\}$ является базисом окрестностей точки b в пространстве (X, τ).

Так как $\{a\} \in \tau$, то $\{a\}$ является окрестностью точки a, но в совокупности $\Omega' = \{X\}$ нет множества, которое содержится в $\{a\}$, т.е. не выполняется второе условие определения 2.4, и значит, $\Omega' = \{X\}$ не является базисом окрестностей точки a в пространстве (X, τ).

2.5.4. Действительно, $a \in U_n = \left(a - \frac{1}{2^n}; a + \frac{1}{2^n}\right) \in \tau_{инт}$ для любого натурального числа n, и значит, каждое из множеств U_n является окрестностью точки a в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$.

Кроме того, если V - окрестность точки a в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$, то существует такое $W \in \tau_{инт}$, что $a \in W \subseteq V$.

Так как W является объединением некоторых интервалов, то существуют такие числа $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, что $a \in (a_0, b_0) \subseteq W$. Существует такое натуральное число n, что $a - \frac{1}{2^n} > a_0$ и $a + \frac{1}{2^n} < b_0$. Тогда
$\left(a - \frac{1}{2^n}; a + \frac{1}{2^n}\right) \subseteq (a_0, b_0) \subseteq W \subseteq V$.

Следовательно, Ω является базисом окрестностей точки a в пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$.

2.5.5. Так как множество $\mathbb{N} \backslash (\{n, n+1, n+2, ...\} \cup \{1\})$ является конечным, то $\{n, n+1, n+2, ...\} \cup \{1\} \in \tau$ и содержит 1. Тогда по теореме 2.3, оно является окрестностью точки 1 в пространстве $(\mathbb{N}, \tau)$.

Кроме того, если U - окрестность 1 в пространстве $(\mathbb{N}, \tau)$, то существует такое $V \in \tau$, что $1 \in V \subseteq U$. Тогда $\mathbb{N} \backslash V$ является конечным множеством.

Если $m = \max\{x \in \mathrm{N} \backslash V\}$, то $\{m+1, m+2, m+3, ...\} \subseteq V$. Так как $1 \in V$, то $\{1\} \cup \{m+1, m+2, m+3, ...\} \subseteq V$.

Следовательно, Ω является базисом окрестностей точки 1 в пространстве $(\mathbb{N}, \tau)$.

3.2.1. Действительно, так как $\emptyset = X \backslash X \in \tau$ и $X \subseteq X$, то X является замкнутым множеством в пространстве (X, τ), и так как $X = X \backslash \emptyset \in \tau$ и $\emptyset \subseteq X$, то $\emptyset$ является замкнутым множеством в пространстве (X, τ).

3.2.2. В самом деле, так как $\tau = \{\emptyset, X\}$, то если A - замкнутое множество в пространстве (X, τ) , то либо $A = X \backslash \emptyset = X$, либо $A = X \backslash X = \emptyset$.

3.2.3. В самом деле, $X \backslash A \in \tau$ для любого $A \subseteq X$, ибо τ состоит из всех подмножеств множества X.

3.2.4. Так как τ_1 - антидискретная топология, то совокупность всех замкнутых множеств совпадает с совокупностью $\{X, \emptyset\}$.

Так как τ_2 - дискретная топология, то замкнутыми множествами являются все подмножества множества X.

Так как $\tau_3 = \{\emptyset,\ \{a, b\}, \{a\}\}$, то $\emptyset = X \backslash X$, $\{a, b\} = X \backslash \emptyset$, и $\{b\} = \{a, b\} \backslash \{a\}$, и значит, совокупность всех замкнутых множеств совпадает с совокупностью $\{\emptyset,\ \{a, b\}, \{b\}\}$.

Случай $\tau_4 = \{\emptyset,\ \{a, b\}, \{b\}\}$, проверяется аналогично случаю для τ_3,

3.2.5. Как и при доказательстве 3.2.3 проверяется, что совокупность всех замкнутых множеств совпадает с $\{\emptyset,\ \{a, b, c\}, \{b, c\}, \{c\}, \{a, c\}\}$.

3.2.6. Как и при доказательстве 3.2.3 проверяется, что

N	**Топологии** σ_i	Множество всех замкнутых множеств
1	$\{\emptyset, X\}$	$\{\emptyset, X\}$
2	$\{\emptyset, X, \{a\}\}$	$\{\emptyset, X, \{b, c\}\}$
3	$\{\emptyset, X, \{b\}\}$	$\{\emptyset, X$,{a,c}}
4	$\{\emptyset, X, \{c\}\}$	$\{\emptyset, X$,{a,b}}
9	$\{\emptyset, X\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X$, {c}}
10	$\{\emptyset, X, \{a\}$,$\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X$,{b,c},{c}}
11	$\{\emptyset, X, \{b\}$,$\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X$,{a,c},{c}}
12	$\{\emptyset, X, \{c\}$, $\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}\}$
13	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}$, $\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X$, {b,c},{a,c},{c}}
17	$\{\emptyset, X$,$\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X$,{b}}
18	$\{\emptyset, X, \{a\}$,$\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X$,{b,c},{b}}
19	$\{\emptyset, X, \{b\}$,$\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}\}$
20	$\{\emptyset, X, \{c\}$, $\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X$,{a,b},{b}}
22	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}$, $\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X$, {b,c},{a,b},{b}}
25	$\{\emptyset, X$,$\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X$,{a}}

N	Топологии σ_i	Множество всех замкнутых множеств
26	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b.c\}\}$
27	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a,c\}, \{a\}\}$
28	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a,b\}, \{a\}\}$
34	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{b,c\}, \{c\}, \{b\}\}$
37	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}, \{b,c\}, \{c\}\}$
38	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{b\}\}$
44	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a,b\}, \{b\}, \{a\}\}$
46	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a\}, \{b,a\}, \{b\}\}$
47	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a,c\}, \{a,b\}, \{b\}, \{a\}\}$
51	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a,c\}, \{c\}, \{a\}\}$
53	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a\}, \{a,c\}, \{c\}\}$
55	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a\}\}$
64	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

3.7. В самом деле, если $k = 1$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{1} A_i = A_1$ является замкнутым множеством.

Допустим, что утверждение доказано для числа $k-1$. Тогда, учитывая 3.6.1, получаем, что $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = (\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i) \bigcup A_k$ является замкнутым множеством.

3.11.1. В самом деле, если V - произвольная окрестность точки x, то $x \in V$. Так как $x \in M$, то $x \in V \cap M$. Тогда $V \cap M \neq \emptyset$, т.е. x является точкой прикосновения к множеству M.

3.11.2. В самом деле, $\{a\}$ - открытое подмножество в пространстве (X, τ) , и значит, $\{a\}$ является окрестностью точки a. Так как a - точка прикосновения к M, то $\{a\} \cap M \neq \emptyset$, и значит, $a \in M$.

3.11.3. Это утверждение следует из предыдущих двух утверждений.

3.11.4. В самом деле, если $x \in X$ и $V-$ окрестность точки x, то, согласно 2.2.2, $V = X$, и значит, $V \cap M = X \cap M = M \neq \emptyset$, т.е. x является точкой прикосновения к множеству M.

3.11.5. Допустим противное, т.е. что некоторая точка $a \in X$ является точкой прикосновения к $\emptyset$. Тогда $X \in \tau$, и значит, X является окрестностью точки a.

Так как $X \cap \emptyset = \emptyset$, то получили противоречие. Следовательно, a не может быть точкой прикосновения к $\emptyset$.

3.11.6. В самом деле, если V - произвольная окрестность точки a, то найдется такое $U \in \tau_{инт}$, что $a \in U \subseteq V$. Так как $U = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} (a_\alpha, b_\alpha)$, то $a \in (a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0})$ для некоторого $\alpha_0 \in \Omega$. Тогда
$\emptyset \neq (a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0}) \cap (a, b) \subseteq \quad U \cap (a, b) \quad \subseteq V \cap (a, b)$, и значит,
$V \cap (a, b) \neq \emptyset$. Из произвольности окрестности V следует, что a является точкой прикосновения к (a, b).

Аналогично доказывается, что b является точкой прикосновения к (a, b).

3.11.7. В самом деле, для любого числа $r \in \mathbb{R}$, произвольная окрестность V этого числа содержит некоторый непустой интервал (a, b). Так как в любом непустом интервале содержится некоторое рациональное число, то $V \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Значит, $\mathbb{Q}$ является всюду плотным множеством в топологическом пространстве $(\mathbb{R}, \tau_{инт})$.

3.21.1. Следует непосредственно из определений 3.20, 1.1 и 3.1.

3.21.2. Следует непосредственно из определения 3.20, и определения антидискретной топологии (см. упражнение 1.3.1).

3.21.3. Следует непосредственно из упражнений 1.3.2 и 3.2.3.

3.21.4. Следует непосредственно из упражнений 1.3.3 и 3.2.4.

3.21.5. Следует непосредственно из упражнений 1.3.5 и 3.2.5.

3.22. Учитывая таблицы указанные в примере 1.9 и при решении упражнения 3.2.6, получаем следующую таблицу:

4.3. 1. В самом деле, если $U \subseteq A$, то $U \subseteq X$, и значит, $U \in \tau$. Тогда $U = U \cap A \in \tau\,|_A$, т.е. $(A, \tau\,|_A)$ - дискретное пространство.

N	**Топологии** σ_i	Множество всех открыто-замкнутых множеств
1	$\{\emptyset, X\}$	$\{\emptyset, X\}$
2	$\{\emptyset, X, \{a\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
3	$\{\emptyset, X, \{b\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
4	$\{\emptyset, X, \{c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
9	$\{\emptyset, X\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
10	$\{\emptyset, X, \{a\},\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
11	$\{\emptyset, X, \{b\},\{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
12	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}\}$
13	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
17	$\{\emptyset, X,\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
18	$\{\emptyset, X, \{a\},\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
19	$\{\emptyset, X, \{b\},\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}\}$
20	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
22	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
25	$\{\emptyset, X,\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
26	$\{\emptyset, X, \{a\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b.c\}\}$
27	$\{\emptyset, X, \{b\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
28	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
31	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
34	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\},\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
37	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\},\{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}\}$
38	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}\}$
44	$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, c\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
46	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a\}\}$
47	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, c\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X,\{a, c\}, \{b\}\}$
51	$\{\emptyset, X, \{b\},\{a, b\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X\}$
53	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a\}\}$
55	$\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}\}$
64	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\},\{b, c\}\}$	$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\},\{b, c\}\}$

4.3. 2. В самом деле, если $\emptyset \neq U \in \tau\,|_A$, то существует такое $\emptyset \neq V \in \tau$, что $U = V \cap A$. Так как (X, τ) - антидискретное пространство, то $\tau = \{\emptyset, X\}$.

Значит $V = X$. Тогда $U = V \cap A = X \cap A = A$, и значит, $(A, \tau\,|_A)$ является антидискретным пространством.

4.3.3. В самом деле, если $a \in \mathbb{Z}$, то $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right) \in \tau$. Так как $\{a\} = \mathbb{Z} \cap (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\ )$, то $\{a\}$ является открытым множеством в $(\mathbb{Z}, \tau_{инт}\,|_{\mathbb{Z}})$ для любого $a \in \mathbb{Z}$.

Тогда в $(\mathbb{Z}, \tau_{инт}\,|_{\mathbb{Z}})$ любое подмножество множества $\mathbb{Z}$ будет открытым, как объединение одноэлементных подмножеств, каждое из которых, как мы показали выше, является открытым множеством.

5.5. В самом деле, если $f : X \to Y$ является биективным отображением, то для каждого элемента $y \in Y$ имеется единственный элемент $x_y \in X$, такой, что $y = f(x_y)$.

Тогда, поставив каждому элементу $y \in Y$ в соответствии элемент $x_y \in X$ определим отображение $\varphi : Y \to X$, которое будет обратным отображением к отображению f, так как $f(\varphi(y)) = f(x_y) = y$ для любого $y \in Y$ и $\varphi(f(x)) = x$ для любого $x \in X$.

Пусть теперь для отображения $f : X \to Y$ существует обратное отображение $\phi : Y \to X$. Если $y \in Y$, то $\phi(y) \in X$, причем $y = f(\phi(y))$, т.е. отображение $f : X \to Y$ является сюръективным. Если $a \neq b \in X$, то $\phi(f(a)) = a \neq b = \phi(f(b))$. Поскольку $\phi : Y \to X$ является отображением, то $f(a) \neq f(b)$.

5.7.1. Если $a \in A_\gamma$, то $f(a) \in f(A_\gamma)$, и значит $a \in \{x \in X | f(x) \in f(A_\gamma)\} = f^{-1}(f(A_\gamma))$. Из произвольности элемента a следует, что $A_\gamma \subseteq f^{-1}(f(A_\gamma))$.

Пусть теперь $f : X \to Y$ будет инъективным отображением, и $b \in f^{-1}(f(A_\gamma))$. Тогда $f(b) \in f(A_\gamma)$, и значит $f(b) = f(a)$ для некоторого $a \in A_\gamma$. Так как $f : X \to Y$ является инъективным отображением, то $b = a \in A_\gamma$. Из произвольности элемента b следует, что $A_\gamma \supseteq f^{-1}(f(A_\gamma))$, и значит, $A_\gamma = f^{-1}(f(A_\gamma))$.

5.7.2. Если $b \in f(f^{-1}(B_\gamma))$, то $b = f(a)$ для некоторого элемента $a \in f^{-1}(B_\gamma) = \{x \in X | f(x) \in B_\gamma\}$, и значит, $b = f(a) \in B_\gamma$. Из произвольности элемента b следует, что $f(f^{-1}(B_\gamma)) \subseteq B_\gamma$.

Пусть теперь $f : X \to Y$ является сюръективным отображением и $b \in B_\gamma$. Посколькуf является сюръективным отображением, то $b = f(x)$

для некоторого элемента $x \in X$. Тогда $x \in f^{-1}(B_\gamma)$, и значит, $b = f(x) \in f(f^{-1}(B_\gamma))$. Из произвольности элемента b следует, что $f(f^{-1}(B_\gamma)) \supseteq B_\gamma$, и значит, $f(f^{-1}(B_\gamma)) = B_\gamma$.

5.7.3. Если $b \in f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)$, то существует такой элемент $a \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, что $b = f(a)$. Тогда $a \in A_\gamma$ для любого $\gamma \in \Gamma$, и значит, $b = f(a) \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$. Из произвольности элемента b следует, что $f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

Пусть теперь $f : X \to Y$ является инъективным отображением, и $b \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$. Тогда для каждого $\gamma \in \Gamma$ существует такой элемент $a_\gamma \in A_\gamma$, что $b = f(a_\gamma)$. Из инъективности отображения f следует, что все a_γ равны между собой, т.е. $a_\gamma = a$, причем $a \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. Тогда $b = f(a) \in f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)$.

Из произвольности элемента b следует, что $f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \supseteq \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$, и значит, $f(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

5.7.4. Если $a \in f^{-1}(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma)$, то $f(a) \in B_\gamma$ для любого $\gamma \in \Gamma$, и значит, $a \in f^{-1}(B_\gamma)$ для любого $\gamma \in \Gamma$. Тогда $a \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$. Из произвольности элемента a следует, что $f^{-1}(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) \subseteq . \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$.

Пусть теперь $a \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$. Тогда $f(a) \in B_\gamma$ для любого $\gamma \in \Gamma$, и значит, $f(a) \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$, т.е. $a \in f^{-1}(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma)$. Из произвольности элемента a следует, что $f^{-1}(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) \supseteq . \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$, и значит, $f^{-1}(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = . \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$.

5.7.5. Если $b \in f(A_{\gamma_1})\backslash f(A_{\gamma_2})$, то $b \in f(A_{\gamma_1})$ и $b \notin f(A_{\gamma_2})$. Тогда существует такой элемент $a \in A_{\gamma_1}$, что $b = f(a)$, причем $a \notin A_{\gamma_2}$. Значит, $a \in A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2}$, т.е. $b = f(a) \in f(A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2})$. Из произвольности элемента b следует, что $f(A_{\gamma_1})\backslash f(A_{\gamma_2}) \subseteq f(A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2})$.

Пусть теперь $f : X \to Y$ будет инъективным отображением и $b \in f(A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2})$. Тогда существует такой элемент $a \in A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2}$, что $b = f(a)$. Из инъективности отображения f следует, что $b = f(a) \notin f(A_{\gamma_2})$, и значит $b \in f(A_{\gamma_1})\backslash f(A_{\gamma_2})$. Из произвольности элемента b следует, что $f(A_{\gamma_1})\backslash f(A_{\gamma_2}) \supseteq f(A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2})$, и значит, $f(A_{\gamma_1})\backslash f(A_{\gamma_2}) = f(A_{\gamma_1}\backslash A_{\gamma_2})$.

5.7.6. Это утверждение является частным случаем предыдущего утверждения (нужно взять $A_{\gamma_1} = X$ и $A_{\gamma_2} = A_\gamma$).

5.7.7. Если $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1} \backslash B_{\gamma_2})$, то $f(a) \in B_{\gamma_1} \backslash B_{\gamma_2}$, и значит, $f(a) \in B_{\gamma_1}$ и $f(a) \notin B_{\gamma_2}$. Тогда $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1})$ и $a \notin f^{-1}(B_{\gamma_2})$, и значит, $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1}) \backslash f^{-1}(B_{\gamma_2})$. Из произвольности элемента a следует, что $f^{-1}(B_{\gamma_1} \backslash B_{\gamma_2}) \subseteq f^{-1}(B_{\gamma_1}) \backslash f^{-1}(B_{\gamma_2})$.

Если же $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1}) \backslash f^{-1}(B_{\gamma_2})$, то $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1})$ и $a \notin f^{-1}(B_{\gamma_2})$. Тогда $f(a) \in B_{\gamma_1}$ и $f(a) \notin B_{\gamma_2}$, и значит $f(a) \in B_{\gamma_1} \backslash B_{\gamma_2}$. Следовательно, $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1} \backslash B_{\gamma_2})$. Из произвольности элемента a следует, что $f^{-1}(B_{\gamma_1} \backslash B_{\gamma_2}) \supseteq f^{-1}(B_{\gamma_1}) \backslash f^{-1}(B_{\gamma_2})$, и значит, $f^{-1}(B_{\gamma_1} \backslash B_{\gamma_2}) = f^{-1}(B_{\gamma_1}) \backslash f^{-1}(B_{\gamma_2})$.

Так как $X = f^{-1}(Y)$, то второе равенство является частным случаем только что доказанного равенства (нужно взять $B_{\gamma_1} = Y$ и $B_{\gamma_2} = B_\gamma$).

5.7.8. Пусть $b \in f(\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)$. Тогда существует такой элемент $a \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, что $b = f(a)$. Если $\gamma_1 \in \Gamma$ такой элемент, что $a \in A_{\gamma_1}$, то $b = f(a) \in f(A_{\gamma_1}) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$. Из произвольности элемента b следует, что $f(\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$.

Аналогично, если $b \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$, то $b \in f(A_{\gamma_1})$ для некоторого $\gamma_1 \in \Gamma$.

Тогда существует такой элемент $a \in A_{\gamma_1}$, что $b = f(a)$, и значит, $b \in f(A_{\gamma_1}) \subseteq f(\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)$. Из произвольности элемента b следует, что $f(\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \supseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$, и значит, $f(\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$.

5.7.9. Если $a \in f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma)$,то $f(a) \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$, и значит, $f(a) \in B_{\gamma_1}$ для некоторого $\gamma_1 \in \Gamma$. Тогда $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1}) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$. Из произвольности элемента a следует, что $f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$.

Аналогично, если $a \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$, то $a \in f^{-1}(B_{\gamma_1})$ некоторого $\gamma_1 \in \Gamma$. Тогда $f(a) \in B_{\gamma_1} \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$, и значит, $a \in f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma)$. Из

произвольности элемента a следует, что $f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) \supseteq \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$, и значит, $f^{-1}(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$.

5.7.10. Пусть $X = \{a, b\}$ и $Y = \{c, d\}$. Если $f : X \to Y$ - такое отображение, что $f(a) = f(b) = c$, то:
$\{a\} \neq \{a, b\} = f^{-1}(\{c\}) = f^{-1}(f(\{a\}))$;
$\{c, d\} \neq \{c\} = f(\{a, b\}) = f(f^{-1}(\{c, d\}))$;
$f(\{a\} \cap \{b\}) = f(\emptyset) \neq \{c\} = f(\{a\}) \cap f(\{\{b\})$;
$f(\{a, b\}\backslash\{a\}) = f(\{b\}) = \{c\} \neq \emptyset = \{c\}\backslash\{c\} = f(\{a, b\})\backslash f(\{a\})$.

5.11.1. В самом деле, пусть $x \in X$ и U - любая окрестность точки $f(x)$, в пространстве (Y, τ_2). Тогда $f(x) \in U$. Так как (X, τ_1) - дискретное пространство, то $\{x\} \in \tau_1$, и значит, $\{x\}$ - окрестность элемента x в (X, τ_1). Тогда $f(\{x\}) = \{f(x)\} \subseteq U$, т.е. отображение f является непрерывным в точке x.

Из произвольности элемента x следует непрерывность отображения f.

5.11.2. Действительно, пусть $x \in X$ и U - окрестность точки $f(x)$ в пространстве (Y, τ_2). Так как (Y, τ_2) - антидискретное пространство, то, согласно упражнению 2.2.2, $U = Y$. Так как X - окрестность точки x в пространстве (X, τ) (ибо $X \in \tau$ и $x \in X$), то $f(X) \subseteq Y = U$, и значит f является непрерывным отображением в точке x.

Из произвольности точки x следует непрерывность отображения f.

5.11.3. Этот результат доказывается в курсе математического анализа.

5.15.1. Действительно, если $U \in \tau_1$, то
$f(U) \in \tau_2$ (потому что $f(U) \subseteq Y$ и τ_2 - дискретная топология).

Кроме того, если F - замкнутое множество в пространстве (X, τ_1), то $f(F) \subseteq Y$, и значит (см. упражнение 3.2.3), $f(F)$ является замкнутым множеством в пространстве (Y, τ_2).

5.15.2. В самом деле, если $U \in \tau_1$, то либо $U = \emptyset$, либо $U = X$.

Если $U = \emptyset$, то $f(U) = f(\emptyset) = \emptyset \in \tau_2$ и если $U = X$, то
$f(U) = f(X) = Y \in \tau_2$.

Значит fявляется открытым отображением.

Аналогично доказывается, что f является замкнутым отображением.

5.15.3.

1) Если $U \in \tau_2$, то из непрерывности отображения $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ (см. теорему 5.13) следует, что $f^{-1}(U) \in \tau_1$, и значит, отображение $f^{-1} : (Y, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ является открытым, т.е. 1) $\Rightarrow$ 2).

2) Если $U \in \tau_2$, то из открытости отображения $f^{-1} : (Y, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ следует, что $f^{-1}(U) \in \tau_1$, и значит (см. теорему 5.13), отображение $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ является непрерывным, т.е. 2) $\Rightarrow$ 1).

Следовательно, 1) $\Leftrightarrow$ 2).

3) Из равенства $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$ для любого подмножества $A \subseteq Y$ следует, что 2) $\Leftrightarrow$ 3).

5.23.1. В самом деле,

$$\tau_f = \left\{ f^{-1}(U) \,|U \in \tau_2 \right\} = \left\{ f^{-1}(Y), f^{-1}(\emptyset) \right\} = \{X, \emptyset\},$$

т.е. τ_f является антидискретной топологией.

5.23.2 В самом деле, если $A \subseteq X$, то $U = f(A) \subseteq Y$, и значит, $f(A) \in \tau_2$. Тогда, согласно упражнению 5.7.1, $A = f^{-1}(f(A)) \in \tau_f$, т.е. τ_f является дискретной топологией.

5.23.3. Пусть $W \in \tau_3$. Тогда, согласно теореме 5.13, $\varphi^{-1}(W) \in \tau_2$, и значит, $(\varphi \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(\varphi^{-1}(W)) \in \tau_1$.

Из произвольности W следует (см. теорему 5.13), что $\varphi \circ f : (X, \tau_1) \to (Z, \tau_3)$ является непрерывным отображением.

5.23.4. Пусть $U \in \tau_1$. Тогда $f(U) \in \tau_2$, и значит, $\varphi(f(U)) \in \tau_3$.

Из произвольности U следует, что $\varphi \circ f : (X, \tau_1) \to (Z, \tau_3)$ является открытым отображением.

5.23.5. Пусть $a \in X$ и $\varepsilon > 0$. Так как отображение $f_i : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ является непрерывным для каждого $1 \leq i \leq n$, то существуют такие окрестности U_i точки a в пространстве (X, τ), что $f(a) - \varepsilon < f_i(x) < f_i(a) + \varepsilon$ для любого $x \in U_i$. Тогда $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ будет окрестностью точки a в пространстве (X, τ), причем для каждого $y \in U$ имеем :

$f(y) = \max\{f_1(y), \ldots, f_n(y)\} > \max\{f_1(a) - \varepsilon, \ldots, f_n(a) - \varepsilon\} = f(a) - \varepsilon$ и $f(y) = \max\{f_1(y), \ldots, f_n(y)\} < \max\{f_1(a) + \varepsilon, \ldots, f_n(a) + \varepsilon\} = f(a) + \varepsilon$, т.е. $f(a) - \varepsilon < f(y) < f(a) + \varepsilon$. Из произвольности числа ε и элемента a следует, что отображение $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{инт})$ будет непрерывным.

6.2.1. В самом деле, если $A \in \tau_2$, то $A \subseteq X$. Тогда $A \in \tau_2$ (см. определение дискретной топологии), т.е. $\tau_1 \subseteq \tau_2$, и значит, $\tau_1 \leq \tau_2$.

6.2.2. В самом деле, $\tau_1 = \{X, \emptyset\}$ (см. определение антидискретной топологии). Так как $X \in \tau_2$ и $\emptyset \in \tau_2$, то $\tau_1 \subseteq \tau_2$, и значит, $\tau_1 \leq \tau_2$.

6.6.1. Очевидно, что множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с обычным отношением порядка $\leq$ является частично упорядоченным множеством, ибо в нем выполнены все аксиомы определения 6.5.

6.6.2. Легко проверить, что это введенное бинарное отношение удовлетворяет всем аксиомам определения 6.5 , и значит, $\mathbb{N}$ является частично упорядоченным множеством.

6.6.3. Это не будет частично упорядоченным множеством, ибо число 2 делится на число -2, и значит, $-2 \leq 2$. Кроме того, число -2 делится на число 2, и значит, $2 \leq -2$. Но $2 \neq -2$, т.е. не выполняется 3-е условие определения 6.5.

6.6.4. Легко заметить, что первая и вторая аксиомы определения 6.5 выполняются.

Кроме того, если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b^s$ и $b = a^k$. Тогда $b = a^k = (b^s)^k = b^{sk}$, и значит, $sk = 1$. Так как $k, s \in \mathbb{Z}$, то $s = k = 1$ или $s = k = -1$.

Если $s = k = 1$, то $a = b$.

Если же $s = k = -1$, то $b = a^{-1} \notin \mathbb{Z}$ для $a \neq \pm 1$. Значит $a = \pm 1$. Тогда $b = a^{-1} = (\pm 1)^{-1} = \pm 1 = a$. Следовательно, выполняется и третья аксиома определения 6.5.

6.6. 5. Легко проверяется, что это бинарное отношение удовлетворяет всем аксиомам определения 6.5 , т.е. это множество будет частично упорядоченным множеством.

6.9.1. $\inf M = \sqrt{2}$ и $\sup M = \sqrt{3}$.

6.9.2. $\inf M$ и $\sup M$ не существуют, ибо $\sqrt{2} \notin S$ и для любого рационального числа r, которое меньше всех рациональных чисел интервала $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ существует такое рациональное число q, что $r < q$ и q меньше всех рациональных чисел интервала $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Значит, $\inf M$ не существует.

Аналогично доказывается, что $\sup M$ не существует.

7.4.1. Если X содержит больше чем 1 элемент, то в антидискретном пространстве (X, τ) выполняются только аксиомы T_3 и T_4, ибо:

Если для замкнутого множества F существует такая точка $d \in X$, что $d \notin F$, то $F = \emptyset$, и тогда $U = \emptyset \in \tau$ и $V = X \in \tau$ удовлетворяют условию, которое указано в формулировке аксиомы T_3;

Аналогично, если A, B - непересекающиеся замкнутые множества в антидискретном пространстве, то хотя бы одно из них является пустым множеством. Тогда $U = \emptyset$ и $V = X$ удовлетворяют условиям, которые указаны в формулировке аксиомы T_4.

Покажем теперь, что в антидискретном пространстве не выполняется аксиома T_0.

Если $a, b \in X$ - две различные точки, то всякая окрестность элемента a равна X, и значит, $b \in X$.

Аналогично, всякая окрестность элемента b равна X, и значит, $a \in X$.

Следовательно, ни одна из других аксиом отделимости кроме аксиом T_3 и T_4 в антидискретном пространстве не выполняется.

7.4.2. В дискретном пространстве выполняются все аксиомы отделимости.

В самом деле, если $a \neq b$, то $\{a\} \in \tau$ и $a \in \{a\}$, и значит, $\{a\}$ является окрестностью точки a.

Аналогично $\{b\}$ - окрестность точки b.

Так как $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$, то аксиома T_2 выполняется.

Тогда по теореме 7.2. выполняются и аксиомы T_1 и T_0.

Пусть теперь A, B - такие замкнутые множества в пространстве (X, τ), что $A \cap B = \emptyset$. Так как пространство (X, τ) является дискретным, то $A, B \in \tau$. Взяв $U = A$ и $V = B$, видно, что аксиома T_4 выполняется, т.е. дискретное пространство является нормальным.

Согласно теореме 7.3.4, пространство (X, τ) является вполне регулярным, и значит, оно является регулярным.

Следовательно, в дискретном пространстве выполняются все аксиомы отделимости.

7.4.3. В этом топологическом пространстве выполняются только аксиомы T_0 и T_4

В самом деле, если $x \neq y \in X$, то один из этих элементов равен a, а другой равен b. Тогда множество $\{a\}$ является окрестностью точки a, причем $b \notin \{a\}$, т.е. аксиома T_0 выполняется.

Так как любая окрестность точки b равна X и $a \in X$, то аксиома T_1 не выполняется. Тогда по утверждению 7.2.1, не выполняется и аксиома T_2.

Легко заметить, что $F = \{b\}$ является замкнутым множеством. Взяв элемент a, видим, что всякое открытое множество, содержащее $F = \{b\}$, содержит и a, и значит, аксиома T_3 не выполняется.

Пусть теперь A, B - такие замкнутые множества в (X, τ), что $A \cap B = \emptyset$. Так как $\{\emptyset, X, \{b\}\}$ является совокупностью всех замкнутых множеств, то хотя бы одно из этих двух замкнутых множеств A или B должно совпадать с $\emptyset$. Тогда $U = \emptyset$ и $V = X$ удовлетворяют аксиоме T_4, т.е. аксиома T_4 выполняется.

7.4.4. В этом топологическом пространстве выполняются только аксиомы T_0 и T_1.

В самом деле, так как $U = X \setminus \{a\} \in \tau$ для любого элемента $a \in X$, и значит, U является окрестностью любого элемента $b \neq a$, причем $a \notin U$. Из произвольности элементов a и b следует, что в топологическом пространстве (X, τ) выполняется аксиома T_1, и значит, выполняется и аксиома T_0.

Пусть теперь $a \neq b$ и пусть U - окрестность точки a, а V - окрестность точки b. Тогда существуют такие $U^* \in \tau$ и $V^* \in \tau$, что $a \in U^* \subseteq U$ и $b \in V^* \subseteq V$, и значит, $X \setminus U^*$ и $X \setminus V^*$ - конечные множества. Из бесконечности множества X следует, что существует такой элемент $d \in X$, что $d \notin (X \setminus U^*) \cup (X \setminus V^*) = X \setminus (U^* \cap V^*)$. Тогда $d \in U \cap V$, и значит, $U \cap V \neq \emptyset$. Из произвольности окрестностей U и V следует, что аксиома T_2 не выполняется.

Так как в этом пространстве всякое одноэлементное множество является замкнутым (см. утверждение 7.2.3) , то из того, что в нем не выполняется аксиома T_2, следует, что в нем не выполняются и аксиомы T_3 и T_4.

7.5. В самом деле, в антидискретном пространстве, содержащем больше одного элемента, не выполняется аксиома T_0.

В 7.4.3. указано пространство, которое является T_0 пространством, но не является T_1 пространством;

В. 7.4.4. указано пространство, которое является T_1 пространством, но не является T_2 пространством.

7.7.1. В самом деле, при усилении топологии всякая окрестность точки и всякое открытое множество остаются окрестностью точки и открытым множеством, соответственно. Тогда:

1. Если (X, τ_1) является T_0 пространством и $a \neq b$, то существует такая окрестность U, например, точки a в пространстве (X, τ_1), что $b \notin U$. Но тогда U является окрестностью точки a в пространстве (X, τ_2), т.е. аксиома T_0 выполняется и для пространства (X, τ_2).

2. Если (X, τ_1) является T_1 пространством и $a \neq b$, то существует такая окрестность U точки a в пространстве (X, τ_1), что $b \notin U$, но тогда U является окрестностью точки a в пространстве (X, τ_2).

Аналогично доказывается, что в пространстве (X, τ_2) точка b обладает такой окрестностью V, что $a \notin V$, т.е. аксиома T_1 выполняется и для пространства (X, τ_2).

3. Если (X, τ_1) является T_2 пространством и $a \neq b$, то существуют такие окрестности U и V точек a и b в пространстве (X, τ_1) соответственно, что $U \cap V = \emptyset$, но тогда U и V будут окрестностями точек a и b в пространстве (X, τ_2) соответственно, и значит, аксиома T_2 выполняется для пространства (X, τ_2).

7.7.2. Пусть (X, τ) - топологическое пространство, $A \subseteq X$.

Если (X, τ) является T_0 пространством и $a \neq b \in A$, то в пространстве (X, τ), например, точка a обладает такой окрестностью U, что $b \notin U$. Тогда $U \cap A$ будет окрестностью точки a в пространстве $(A, \tau|_A)$, причем $b \notin U \cap A$.

Аналогично доказывается и случай когда (X, τ) является T_1 пространством.

Если (X, τ) является T_2 пространством и $a \neq b \in A$, то в пространстве (X, τ) существуют такие окрестности U и V точек a и b соответственно, что $U \cap V = \emptyset$. Тогда $U \cap A$ и $V \cap A$ будут окрестностями точек a и b соответственно, в пространстве $(A, \tau|_A)$, причем $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$, т.е. $(A, \tau|_A)$ является T_2 пространством.

Пусть (X, τ) является T_3 пространством, F - замкнутое множество в пространстве $(A, \tau|_A)$ и $a \in A \backslash F$. Тогда существует такое замкнутое в пространстве (X, τ) множество B, что $F = A \cap B$. Так как $a \in A$, то $a \notin B$.

Существуют такие $U, V \in \tau$, что $a \in U$, $B \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset$. Тогда $U \cap A, V \cap A \in \tau|_A$, причем $a \in U \cap A$ и $F = B \cap A \subseteq V \cap A$, т.е. $(A, \tau|_A)$ является T_3 пространством.

Если же (X,τ) является вполне регулярным пространством, то (X,τ) является T_1 пространством и существует такое непрерывное отображение $f:(X,\tau)\to(\mathbb{R},\tau_{инт})$, что $0\le f(x)\le 1$ для любого $x\in X$, $f(a)=0$ и $f(B)\subseteq\{1\}$. Тогда $(A,\tau|_A)$ будет T_1 пространством и, согласно теореме 5.19, $f|_A:(A,\tau|_A)\to(\mathbb{R},\tau_{инт})$ является непрерывным отображением, причем $0\le f|_A(x)\le 1$ для любого $x\in A$, $f(a)=0$ и $f(F)\subseteq\{1\}$, т.е. $(A,\tau|_A)$ является вполне регулярным пространством.

7.8. В самом деле, в множестве $X=\{a,b\}$ с антидискретной топологией выполненяются аксиомы T_3 и T_4, а в X с топологией $\tau=\{\emptyset,\{a\},X\}$, которая сильнее андидискретной топологии не выполняются аксиомы ни T_3 и ни T_4 (см. упражнение 7.4.3).

8.4.1. Действительно, пусть $\{U_\alpha\,|\alpha\in A\}$ - открытое покрытие множества X. Так как $\bigcup\limits_{\alpha\in A}U_\alpha=X$ и $U_\alpha\in\{\emptyset,X\}$ для любого $\alpha\in A$, то $U_{\alpha_0}=X$ для некоторого $\alpha_0\in A$. Тогда $\{U_{\alpha_0}\}$ - конечное подпокрытие покрытия $\{U_\alpha\,|\alpha\in A\}$.

8.4.2. В самом деле, если $X=\{x_1,\cdots,x_k\}$ и Δ - произвольное открытое покрытие пространства (X,τ), то для каждого $1\le i\le k$ существует такое $U_i\in\Delta$, что $x_i\in U_i$. Тогда $\{U_1,\ldots,U_k\}\subseteq\Delta$ и $X=\bigcup\limits_{i=1}^{k}U_i$, т.е. $\{U_1,\ldots,U_k\}$ является конечным подпокрытием покрытия Δ.

Из произвольности покрытия Δ следует компактность топологического пространства (X,τ).

8.4.3. В самом деле, согласно 8.4.2, $(S,\tau|_S)$ является компактным пространством, и значит, S является компактным множеством в топологическом пространстве (X,τ).

8.4.4. В самом деле, пусть Δ - произвольное открытое покрытие пространства (X,τ). Так как $X\ne\emptyset$, то существует $\emptyset\ne U\in\Delta$. Из определения τ следует, что $X\backslash U$ является конечным, т.е. $X\backslash U=\{x_1,\cdots,x_n\}$. Тогда для любого $1\le i\le n$ существует такое $U_i\in\Delta$, что $x_i\in U_i$, и значит, $\{U,U_1,\cdots,U_n\}$ является конечным подпокрытием покрытия Δ топологического пространства (X,τ).

8.8.1. В самом деле, выполнения условий 1 – 3 определения 8.7 очевидны.

8.8.2. В самом деле, так как $a \in U$ для любого $U \in \Phi_a$, то $\emptyset \notin \Phi_a$, т.е. первое условие определения 8.7 выполняется.

Пусть $U, V \in \Phi_a$ и $W = U \cap V$. Согласно утверждению 2.3.3, W является окрестностью точки a в пространстве (X, τ), и значит $W \in \Phi_a$. Этим мы проверили, что выполняется и второе условие определения 8.7.

Пусть $U \in \Phi_a$ и $U \subseteq V$. Согласно утверждению 2.3.2 V является окрестностью точки a в пространстве (X, τ), и значит $V \in \Phi_a$. Этим мы проверили, что выполняется и третье условие определения 8.7.

8.11.1. В самом деле, учитывая определение 8.10, это утверждение легко доказывается индукцией по числу n.

8.11.2. Действительно, так как $a \in \{a\}$, то $\{a\} \in \Phi_a$, и значит, $B \subseteq \Phi_a$.

Если $A \in \Phi_a$, то $a \in A$, и значит $\{a\} \subseteq A$.

Следовательно, B является базисом фильтра Φ_a

8.11.3. В самом деле, если $U \in B'$, то $U-$ окрестность точки a в топологическом пространстве (X, τ), и значит, $U \in \Phi'_a$, т.е. первое условие определения 8.10 выполняется.

Кроме того, если $V \in \Phi'_a$, то $V-$ окрестность точки a в топологическом пространстве (X, τ), и согласно 2.4 , существует такое $U \in B'$, что $U \subseteq V$.

Следовательно, B' - базис фильтра Φ'_a.

9.2.1. Это пространство является связным ибо, если A - открыто-замкнутое множество, то $A \in \tau = \{X, \emptyset\}$. Значит, $A = \emptyset$ или $A = X$.

9.2.2. Это множество является связным, так как пространство $(A, \tau|_A)$ является антидискретным пространством, и значит $(A, \tau|_A)$ является связным пространством (см. 9.2.1).

9.2.3. Это множество не является связным, так как $\{a\} \in \tau|_A$ и $A \backslash \{a\} \in \tau|_A$, т.е. $\{a\}$ является открыто-замкнутым множеством в пространстве $(A, \tau|_A)$, причем $\{a\} \neq A$ и $\{a\} \neq \emptyset$.

9.2.4. Это пространство является связным, ибо $F = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{c\}\}$ является множеством всех замкнутых, и значит, открыто-замкнутыми множествами в пространстве (X, τ) являются только $\emptyset$ и X.

9.2.5. Это пространство является связным, так как согласно теореме 3.24, открыто-замкнутыми множествами в нем являются только $\emptyset$ и $\mathbb{R}$.

9.8. Согласно утверждению 9.6.1, $\{a\} = C_a$ является замкнутым множеством для любого $a \in X$, и тогда согласно утверждению 7.2.2, топологическое пространство (X, τ) является T_1 пространством.

Рекомендуемая литература

1. П.С.Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, Москва 1948 Ленинград.

2. Н.Бурбаки, Общая топология (Основные структуры), Москва 1958

3. К.К.Куратовский, Топология т.1, издательство “Мир”, Москва 1966;

4. В.В.Федорчук, В.В.Филиппов, Общая топология, основные конструкции, издательство Московского Университета 1988;

5. Р.Энгелькинг, Общая топология, Москва “Мир” 1986

Список обозначений

(X, τ) 1.1
$\mathbb{R}$ 1.3.8
$\tau_{инт}$ 1.3.8
(X, ρ) 1.4
τ_ρ 1.5
$[M]_{(X,\tau)}$ или $[M]_X$ или $[M]$ 3.13
$\tau|_A$ 4.1
$f : A \to B$ 5.1
f^{-1} 5.4
$f|_A$ 5.6
τ_f 5.20
$\tau_1 \leq \tau_2$ 6.1
$\inf M$ 6.7
$\sup M$ 6.8
C_a 9.5
$\prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ 10.1
$\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ или $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ 10.2
π_γ 10.3

Список терминов

Аксиомы отделимости 7.1
Антидискретная топология ..... 1.3.1.
Антидискретное пространство ..... 1.3.1.
База пространства ..... 1.14.
Базис окрестностей точки ..... 2.4.
Базис фильтра ..... 8.10.
Биекция (биективное отображение) ..... 5.1.3.
Вполне несвязное пространство 9.7
Вполне регулярное пространство 8.7
Всюду плотное подмножество ..... 3.10.
Гомеоморфизм 5.16
Дискретная топология ..... 1.3.2.
Дискретное пространство ..... 1.3.2.
Замкнутое множество ..... 3.1.
Замкнутое отображение 5.14.2
Замыкание множества 3.12
Интервальная топология ..... 1.3.8.
Инъекция (инъективное отображение) ..... 5.1.2.
Компактное множество ..... 8.3.2.
Компактное пространство 8.3.1
Метрика ..... 1.4.
Непрерывное отображение 5.10
Непрерывное отображение в точке ..... 5.8.
Непрерывное отображение от n аргументов 10.17
Нормальное пространство 8.7
Образ множества 5.3.1
Обратное отображение ..... 5.4.
Окрестность точки ..... 2.1.
Открытые множества ..... 1.1.
Открыто-замкнутое множество ..... 3.20.
Открытое отображение ..... 5.14.1.
Открытое покрытие пространства 8.2
Отображение ..... 5.1.
Отображение от n аргументов 10.16
Плотное подмножество ..... 3.10.
Подпространство ..... 4.2.
Покрытие множества 8.1
Произведение совокупности множеств 10.1

Произведение совокупности топологических пространств 10.4
Прообраз множества 5.3.2
Прообраз топологии 5.21
Регулярное пространство .... 7.1.
Связная компонента точки .... 9.5.
Связное множество 9.1
Связное пространство .... 9.1.
Сюръекция (сюръективное отображение) ..... 5.1.1.
Топология .... 1.1.
Топология, которая задается метрикой ..... 1.5.
Топология слабее топологии .....ـ..... 6.1
Топологическое пространство .... 1.1.
Точка прикосновения ..... 3.9.
Точная верхняя грань множества 6.8
Точная нижняя грань множества 6.7
Фильтр на множестве .... 8.7.
Хаусдорфово пространство .... 8.7.
Частично упорядоченное множество ..... 6.5.

СОДЕРЖАНИЕ

1. **Введение** **3**

2. **Топологические пространства, открытые множества** **4**

3. **Окрестности точек** **13**

4. **Замкнутые множества и замыкание множеств** **18**

5. **Подпространства топологического пространства** ... **29**

6. **Отображения топологических пространств** **33**

7. **Сравнение топологий** **41**

8. **Аксиомы отделимости** **48**

9. **Компактные множества** **53**

10. **Связные множества** **62**

11. **Произведение топологических пространств** **66**

12. **Решения упражнений** **83**

13. **Рекомендуемая литература** **104**

14. **Список обозначений** **105**

15. **Терминология** **106**