Практическое занятие

Определение функций распределения показателей надёжности для заданной статистической совокупности объектов

2.4. Распределение случайных величин

Основные характеристики надежности имеют значительный разброс, т.е. они являются случайными величинами, поэтому при многократном повторении они подчиняются определенным статически устойчивым закономерностям.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайных величин и соответствующими этим значениям вероятностями.

Распределение дискретной случайной величины. Дискретная случайная величина может принимать только ряд отдельных значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, каждому из которых соответствует некоторое значение вероятности $P_1, P_2, \dots, P_n$.

Распределение дискретной случайной величины можно представить в виде таблицы, называемой рядом распределения, или графически – многоугольником распределения.

При табличной записи каждому значению случайной величины соответствует своя вероятность:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
P_i	P_1	P_2	P_3	P_4	...	P_n

При графическом изображении на оси абсцисс откладывают значение случайной величины x_i, а по оси ординат вероятности P_i, соответствующие этим значениям (рис.2.1).

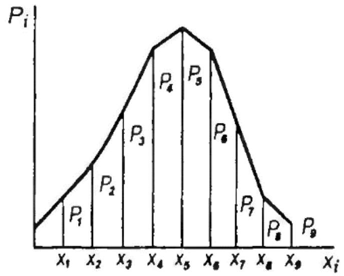

Рис. 2.1. Многоугольник распределения дискретной случайной величины

Распределение непрерывной случайной величины. Непрерывная случайная величина имеет бесчисленное множество значений, поэтому такая форма закона распределения, как показано на рисунке 2.1, непригодна. В данном случае пользуются не вероятностью события $P_i(X=x_i)$, а вероятностью события $P(X<x)$. Это означает, что случайная величина X примет значение, меньшее какого-либо наперед выбранного значения x ($-\infty<x<+\infty$).

Функция распределения случайной величины – наиболее универсальная характеристика как дискретных, так и случайных непрерывных величин. Она является одной из форм закона распределения. Если X – случайная величина, а x – некоторое ее значение, то вероятность того, что $X < x$ будет выглядеть так:

$$F(x) = P(X < x), \tag{2.19}$$

где $F(x)$ – функция распределения.

Функцию распределения можно представить в виде графика, если по оси абсцисс откладывать значение x, а по оси ординат – значение $F(x)$.

Для дискретной случайной величины график функции распределения будет иметь вид ступенчатой (рис.2.2), а для непрерывной – монотонной кривой (рис.2.3).

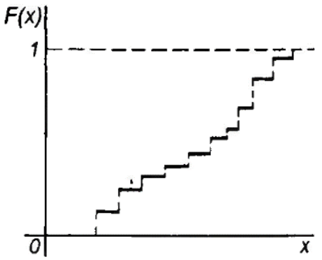

Рис. 2.2. График функции распределения дискретной случайной величины

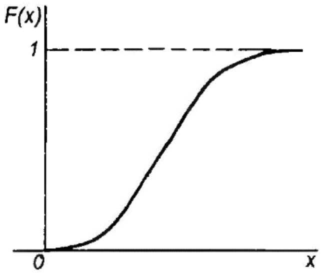

Рис. 2.3. График функции распределения непрерывной случайной величины

Основными свойствами интегральной функции распределения являются:

1. Функция изменяется от 0 до 1

$$0 \le F(x) \le 1. \tag{2.20}$$

2. На минус бесконечности функция равна нулю

$$F(-\infty) = 0. \tag{2.21}$$

3. На плюс бесконечности функция равна единице

$$F(+\infty) = 1. \tag{2.22}$$

Эмпирическим распределением случайной величины называется совокупность зафиксированных ее значений, расположенных в возрастающем порядке, с указанием соответствующих частот или частостей (вероятностей).

Это распределение можно использовать для нахождения закономерностей рассеивания случайной величины.

На практике при изучении непрерывной случайной величины полученные значения ее делят на интервалы или разряды. После этого подсчитывают частоты не по действительным значениям случайной величины, а по разрядам. В таблице эмпирического распределения непрерывной случайной величины указывают интервалы (разряды) значений x_i, частоту m_i и частость W_i (или вероятность P_i).

Эмпирическое распределение можно изобразить в виде ступенчатого графика, называемого *гистограммой распределения*, или в виде ломаной линии (кривой), называемой *полигоном распределения* (рис.2.4). Реже пользуются кривой накопленных частостей (накопленной эмпирической кривой распределения), или кумулятой.

Функция плотности распределения, есть производная от функции распределения непрерывной случайной величины

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \tag{2.23}$$

которая характеризует частоту повторения данного значения случайной величины (рис.2.5).

Площадь элементарного прямоугольника, равную произведению $f(x)d(x)$, называют *элементом вероятности*.

Для определения вероятности $P(X < x)$ необходимо вычислить площадь, заключенную между кривой и осью в интервале от $-\infty$ до x. Для этого необходимо сложить все элементы вероятностей, заключенные в указанном интервале, т.е.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{2.24}$$

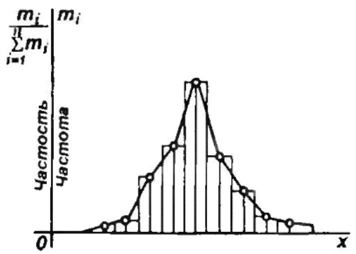

Рис. 2.4. Гистограмма и полигон распределения случайной величины

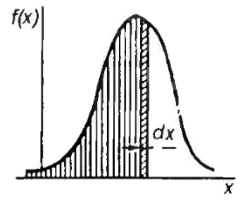

Рис. 2.5. График плотности распределения непрерывной случайной величины

Основные свойства плотности вероятности распределения:

1. Плотность распределения есть неотрицательная функция своего аргумента

$$f(x) \geq 0. \qquad (2.25)$$

2. Полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице. Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (2.26)$$

3. Плотность распределения существует только для непрерывных случайных величин (см. рис.2.5).

2.5. Характеристики распределения случайных величин

В ряде случаев в качестве характеристик распределения случайных величин достаточно использовать некоторые числовые величины, среди которых в теории надежности наиболее употребляемыми являются математическое ожидание (среднее значение), мода и медиана (характеризуют положение центров группирования случайных величин на числовой оси), дисперсия, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации (характеризуют рассеяние случайной величины).

Значения характеристик, полученные по результатам испытаний или эксплуатации, называют *статистическими оценками*. Характеристики распределения используют для прогнозирования надежности.

Для дискретных случайных величин *математическое ожидание* M_x равно сумме произведения всех возможных значений X на вероятности этих значений:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_i. \qquad (2.27)$$

Математическое ожидание для непрерывной случайной величины выражается интегралом в бесконечных пределах от произведения непрерывно изменяющихся возможных значений случайной величины на плотность распределения

$$M_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \qquad (2.28)$$

Математическое ожидание случайной величины непосредственно связано со средним значением. При неограниченном увеличении числа опытов среднее арифметическое значение величины $\bar{x}$ приближается к математическому ожиданию и называется *оценкой среднего значения*:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad (2.29)$$

где n – общее число опытов;
x_i – текущее значение случайной величины.

Дисперсией (D_x) называют математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания.

Для дискретной случайной величины дисперсия равна:

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_x)^2 \cdot P(x_i). \qquad (2.30)$$

Для непрерывной случайной величины дисперсия определяется из выражения:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_x)^2 \cdot f(x)dx. \qquad (2.31)$$

Дисперсия случайной величины является характеристикой *рассеяния* – разбросанности значений случайной величины около ее математического ожидания. *Размерность дисперсии* соответствует квадрату размерности случайной величины. Для наглядности в качестве характеристики рассеяния удобнее использовать величину, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Такой характеристикой может быть *среднее квадратическое отклонение* σ_x, которое определяется как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \qquad (2.32)$$

Среднее квадратическое отклонение определяет ширину кривой распределения. На рисунке 2.6 показано несколько кривых распределения случайной величины с разными значениями σ и одним и тем же значением $\overline{X}$. Кроме перечисленных характеристик распределения случайной величины, часто определяют моду, медиану, квантиль, коэффициент вариации.

Модой случайной величины называют ее наиболее вероятное значение или то ее значение, при котором плотность вероятности максимальна.

Медиана (*Me*) характеризует расположение центра группирования случайной величины. Площадь под графиком функции плотности распределения делится медианой пополам (рис.2.7).

Квантиль – значение случайной величины, соответствующее заданной вероятности. Квантиль, соответствующую вероятности 0,5, называют *медианой* (рис.2.8).

Аналогично предыдущим характеристикам понятия моды и медианы даны в статистической трактовке. Для симметричного модального (т.е. имеющего один максимум) распределения математическое ожидание, мода и медиана совпадают.

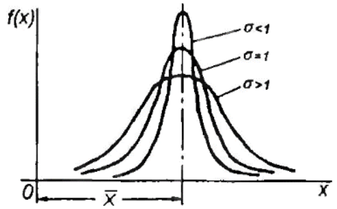

Рис.2.6. Кривые распределения случайной величины с различными значениями σ и одним и тем же значением $\overline{X}$

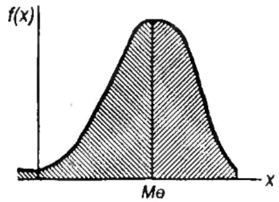

Рис.2.7. Графическая интерпретация медианы непрерывной случайной величины

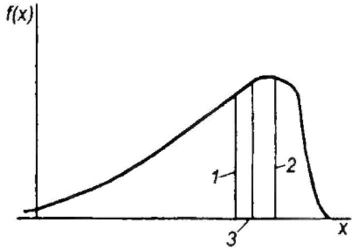

Рис. 2.8. Плотность вероятности и числовые характеристики центра группирования случайной величины:
***1* – медиана; *2* – мода;**
***3* – математическое ожидание**

Для оценки рассеяния с помощью безразмерной величины используют *коэффициент вариации*, который равен отношению среднего квадратического отклонения к математическому ожиданию:

$$V_x = \frac{\sigma_x}{M_x}. \qquad (2.33)$$

Пример 2.11. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ ax^3 & \text{при} \quad 0 \le x \le 1; \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти коэффициент a и плотность распределения $f(x)$.

Решение. Так как функция распределения выражается соотношением

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ 3x^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 1;\\ 0 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Ответ: $a=1$.

Пример 2.12. Плотность распределения случайной величины X описывается выражением

$$f(x)=\begin{cases}3x & \text{при} \quad 0\le x\le 1;\\ 0 & \text{при} \quad x<0 \text{ или } x>1.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Решение. Математическое ожидание найдем по формуле (2.28):

$$M_x=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 3xdx=1.$$

Для определения дисперсии используем формулу (2.31):

$$D_x=\int_0^1 (x-1)^2\cdot 3xdx=3\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{6}{9}+\frac{9}{18}\right)=\frac{1}{4}.$$

Среднее квадратическое отклонение по формуле (2.32) равно:

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $M_x=1$; $\sigma_x=1/2$.

Пример 2.13. При проведении одного опыта может появиться или не появиться некоторое событие A. Вероятность появления события A равно P, а вероятность непоявления этого события $q=1-P$.

Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – число появлений события A.

Решение. Ряд распределения случайной величины X можно записать в виде таблицы:

x_i	0	1
p_i	q	p

По формуле (2.27) находим математическое ожидание:

$$M_x=\sum_{i=0}^{1} x_i p_i=0\cdot q+1\cdot p=p.$$

Дисперсию величины X определим по формуле (2.30)

$$D_x=\sum_{i=0}^{1}(x_i-M_x)^2 p_i=pq.$$

Среднее квадратическое отклонение равно:

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{pq}.$$

Ответ: $M_x=p$; $D_x=pq$; $\sigma_x=\sqrt{pq}$.

Таким образом, перечисленные параметры характеризуют распределение значений случайных величин и используются для определения вида закона распределения.

2.6. Теоретические законы распределения, используемые в расчетах надежности

Законы распределения отказов, являющихся случайными величинами, имеют большое значение для теории и практики по обеспечению надежности технических систем. Значение этих законов позволяет рассчитывать и прогнозировать надежность