Практическое занятие

Применение теорем теории вероятностей при решении задач по надёжности механических систем

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Большинство параметров, характеризующих работу любой технической системы, случайны. *Случайным* называют событие, которое при рассматриваемом сочетании условий может произойти или не произойти (например, появление отказа машины за определенное время работы). При этом, используя аппарат теории вероятностей, можно предсказать и количественно описать случайные закономерности, возникающие в процессе работы машины.

Числовые характеристики случайной величины определяются из анализа единичных реализаций, происходящих с этой величиной в период наблюдения (испытания). Наука, которая занимается методами обработки опытных данных, полученных в результате такого наблюдения, называется *математической статистикой*. Поэтому методы обработки случайных величин называются *статистическими методами*. При этом статистика подробно анализирует поведение случайных величин.

Случайные величины разделяют на две группы: дискретные и непрерывные.

Дискретной случайной величиной называется такая величина, число возможных значений которой конечно (число дефектных деталей в партии из n штук, число отказов машины в течение определенного периода времени и т.д.).

Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая в некотором интервале (конечном или бесконечном) может принимать любое значение (диаметр изношенной втулки, время безотказной работы машины и т.д.).

2.1. Относительная частота и вероятность появления события

Рассматривая случаи появления или отсутствия события A в большом числе испытаний, можно установить определенные

закономерности появления этого события. Если при проведении n_1 испытаний событие A имело место m_1 раз, то *относительную частоту* (*частость*) появления события A определяют из соотношения:

$$\hat{P}(A) = \frac{m_1}{n_1}. \tag{2.1}$$

Если событие A имело место в каждом из n_1 испытаний, т.е. $m_1 = n_1$, то $\hat{P}(A) = 1$. Если событие A не наступило ни в одном из n_1 испытаний, т.е. $m_1 = 0$, то $\hat{P}(A) = 0$. При проведении серии последовательных испытаний получим соотношения:

$$\hat{P}_1 = \frac{m_1}{n_1};\ \hat{P}_2 = \frac{m_2}{n_2}; \dots ;\ \hat{P}_i = \frac{m_i}{n_i}. \tag{2.2}$$

Относительная частота становится все более устойчивой при увеличении числа испытаний. Такая закономерность была замечена давно и подтверждена результатами решения многочисленных примеров. Самыми известными примерами являются примеры бросания монеты или игральной кости. Так, при большом числе бросаний монеты относительная частота выпадания герба равна 1/2 и равна относительной частоте выпадания цифры. При большом числе бросаний игральной кости относительная частота выпадания каждой стороны, на которой изображены цифры от 1 до 6, равна 1/6.

Приведенные примеры показывают, что существует постоянная величина (в нашем случае 1/2 или 1/6), около которой колеблется относительная частота свершения случайного события и к которой она все более приближается с увеличением числа испытаний. Постоянную величину, к которой приближается относительная частота случайного события, называют *вероятностью случайного события A* и обозначают символом $P(A)$. На практике при большом числе испытаний вероятность случайного события приближенно принимают равной относительной частоте этого события $P(A) \approx \hat{P}(A)$.

Математическим основанием этого утверждения является *закон больших чисел* – вероятность отклонения относительной частоты некоторого события A от вероятности $P(A)$ этого события более, чем на произвольно заданную величину $\varepsilon > 0$ становится сколько угодно малой, если число испытаний n неограниченно возрастает. Таким образом, вероятность события $P(A)$ представляет собой число, заключенное в интервале от нуля до единицы, т.е. справедливо неравенство:

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{2.3}$$

Если $m = n$, то

$$P(A) = m/n = 1$$

и событие A – достоверное; при $P(A) = 0$ – событие невозможное.

Для всякого случайного события A действительно соотношение:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \tag{2.4}$$

где $\overline{A}$ – событие, противоположное событию A.

Например, событие A состоит в выборе годной детали из партии, в которой доля годных деталей составляет 95%, т.е. $P(A) = 0{,}95$. Тогда $\overline{A}$ – событие, состоящее в выборе дефектной детали. По формуле (2.4) определяем $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$, т.е. партия содержит 5% бракованных деталей.

Пример 2.1. Производится стрельба из артиллерийского орудия по цели. В результате проведения 200 выстрелов число промахов оказалось равным 10. Найти вероятность попадания в цель одним выстрелом.

Решение. Общее число проведенных опытов $n = 200$, при этом число попаданий $m = n - 10 = 190$. Используя формулу (2.1), найдем вероятность попадания

$$\hat{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{190}{200} = 0{,}95.$$

Ответ: $\hat{P}(A) = 0{,}95$.

Пример 2.2. Обрабатывают 50 гильз цилиндров дизеля до размера $120^{+0{,}06}$ мм, при этом у 40 гильз размер попал в интервал 120,02...120,04 мм. Найти вероятность попадания размера гильзы в этот интервал.

Решение. Общее число обработанных гильз $n = 50$, при этом число гильз, попавших в указанный интервал $m = 40$. Используя также формулу (2.1) получим

$$\hat{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{40}{50} = 0{,}8.$$

Ответ: $\hat{P}(A) = 0{,}8$.

Пример 2.3. Проведены испытания 20 бульдозеров. При этом установлено, что у трех бульдозеров эксплуатационные отказы появились в интервале наработки от 100 до 200 ч, у шести – в интервале от 200 до 300 ч, у восьми – в интервале от 300 до 400 ч, у двух – в интервале от 400 до 500 ч и, наконец, у одного – в интервале наработки от 500 до 600 ч. Определить, чему равна вероятность появления эксплуатационного отказа в каждом интервале наработки бульдозера.

Решение. Пользуясь уравнением (2.1), определим вероятности появления эксплуатационного отказа в различных интервалах наработки бульдозеров:

$$\begin{aligned}
&\hat{P}\ (\text{от } 0 \text{ до } 100) = 0/20 = 0\\
&\hat{P}\ (\text{от } 100 \text{ до } 200) = 3/20 = 0{,}15\\
&\hat{P}\ (\text{от } 200 \text{ до } 300) = 6/20 = 0{,}30\\
&\hat{P}\ (\text{от } 300 \text{ до } 400) = 8/20 = 0{,}40\\
&\hat{P}\ (\text{от } 400 \text{ до } 500) = 2/20 = 0{,}10\\
&\hat{P}\ (\text{от } 500 \text{ до } 600) = 1/20 = 0{,}05\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{Итого } 1{,}00
\end{aligned}$$

Как видно из этих примеров определение вероятностей появления случайной величины или случайного события не представляет затруднений.

Однако возможны более сложные случаи, когда появляются комплексные события, вероятность которых определяется путем сложения или умножения частных вероятностей.

Рассмотрим некоторые понятия и теоремы теории вероятностей, которые будут использованы при расчете показателей качества и надежности технических систем.

Полная группа событий включает все возможные результаты, предусмотренные программой сбора информации по опытам или программой испытания.

В примере 2.3 полная группа событий состоит из шести событий:

событие 1 – появление отказа в интервале от 0 до 100 ч;

событие 2 – появление отказа в интервале от100 до 200 ч и т.д.;

событие 6 – появление отказа в интервале от 500 до 600 ч.

Число событий в зависимости от конечных целей опыта можно менять в широких пределах. Так, в примере 2.3, если уменьшить интервал наработок до 50 ч, число событий в полной группе станет равно 12.

В пределе число событий в полной группе можно уменьшить до двух. Тогда такие события называются противоположными. Как видно из примера 2.3, сумма вероятностей полной группы событий всегда равна единице (или 100%). Эта закономерность – основная в теории вероятностей и представляется уравнением:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1, \qquad (2.5)$$

где n – число событий в полной группе или число выбранных интервалов.

Уравнение (2.5) позволяет провести промежуточную проверку правильности определения показателей надежности: если расчет вероятностей правильный, то сумма вероятностей будет равна 1.

В тоже время уравнение (2.4) упрощает решение многих инженерных задач, связанных с расчетом показателей надежности технических систем.

Например, требуется определить вероятность появления отказа в интервале наработки бульдозера от 0 до 500 ч. В примере 2.3 эту задачу можно решить двумя путями:

1) при помощи суммы вероятностей первых пяти событий:

$$P(\text{от } 0 \text{ до } 500) = P(0 \text{ до } 100) + P(\text{от } 100 \text{ до } 200) + \ldots +$$

$$+ P(\text{от } 400 \text{ до } 500) = 0{,}00 + 0{,}15 + 0{,}30 + 0{,}40 + 0{,}10 = 0{,}95 \text{ или } 95\%;$$

2) при помощи вероятности противоположного события.

В данном случае противоположным событием является вероятность отсутствия отказов машины в интервале от 0 до 500 ч или вероятность появления отказов в интервале свыше 500 ч:

$$P(\text{от } 0 \text{ до } 500) = 1 - P(\text{от } 500 \text{ до } 600) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$$

Второй путь более прост и требует меньшего объема вычислений. Преимущество его становится еще значительнее в сложных случаях вычисления вероятностей. Классическим примером использования свойств противоположных событий может служить определение безотказности машин через их отказы, и наоборот.

Независимые события в полной группе событий – это такие события A и $Б$, вероятность появления одного из которых (например A) не зависит от того, произошло или нет другое событие ($Б$).

Так, если у бульдозера на одном эксплуатационном предприятии вероятность появления отказа $P = 0{,}30$ в интервале наработки 200…300 ч, то вероятность появления отказа у бульдозера, работающего на другом эксплуатационном предприятии (для такой же совокупности бульдозеров), в том же интервале наработки будет независимым. При одинаковых условиях работы машин вероятность этого события также будет $P = 0{,}30$.

Зависимые события в полной группе событий – это такие события A_1 и A_2, вероятность появления одного из которых (например A_1) зависит от того, произошло или нет другое событие (A_2).

Вероятность события A_2 в случае, если произошло событие A_1, называется *условной вероятностью* и обозначается:

$$P(A_2 | A_1).$$

Так, если на одном эксплуатационном предприятии произошел отказ бульдозера в интервале наработки от 300 до 400 ч, то отказ второго бульдозера является событием, связанным с отказом первого бульдозера. Поэтому вероятность отказа второго бульдозера составит $P(A_2 | A_1) = 7 / 19$, а не $8 / 20$, как это было у первого бульдозера.

2.2. Теорема сложения вероятностей

События могут быть совместными и несовместными. Два события называются *несовместными*, если в результате опыта они не могут появиться одновременно. И наоборот, события считаются *совместными*, если они появляются в результате такого опыта.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{2.6}$$

Метод полной индукции позволяет использовать теорему сложения для произвольного числа несовместных событий. Так, вероятность суммы нескольких событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{2.7}$$

Более удобна запись теоремы сложения:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{2.8}$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице (см. формулу 2.5).

Противоположными событиями называются два несовместных события, образующих *полную группу событий*.

Сумма вероятностей *противоположных событий* равна единице (см. формулу 2.4).

Вероятность суммы двух совместных событий A и B выражается формулой

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{2.9}$$

Аналогично вероятность суммы трех совместных событий определяется выражением

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - \\ - P(BC) + P(ABC). \tag{2.10}$$

Вероятность суммы любого числа совместных событий определяется выражением

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k) + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n). \tag{2.11}$$

Формула (2.11) выражает вероятность суммы любого числа событий через вероятности произведений этих событий, взятых по одному, по два, по три, и т.д.

Аналогичную формулу можно написать для произведения двух событий:

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A + B); \tag{2.12}$$

для произведения трех событий:

$$P(ABC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A + B) - P(A + C) - \\ - P(B + C) + P(A + B + C). \tag{2.13}$$

Общая формула, выражающая *вероятность произведения произвольного числа событий* через вероятности сумм этих событий, взятых по одному, по два, по три, и т.д., имеет вид:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i + A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i + A_j + A_k) + \ldots \tag{2.14}$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n).$$

Формулы (2.12) и (2.13) находят практическое применение при преобразовании различных выражений, содержащих вероятности сумм и произведений событий. В зависимости от специфики задачи в некоторых случаях удобнее бывает использовать только суммы, а в других только произведения событий.

Пример 2.4. Производится стрельба из артиллерийского орудия по щиту с двумя зонами попадания. Вероятность попадания в первую зону при одном выстреле равна 0,45, во вторую 0,35. Найти вероятность промаха.

Решение. Обозначим через A – попадание, а через $\overline{A}$ – промах. Тогда событие $A = A_1 + A_2$, где A_1 и A_2 – попадания соответственно в первую и вторую зоны. Используя формулу (2.7), найдем:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}45 + 0{,}35 = 0{,}80.$$

Тогда $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$.

Ответ: $P(\overline{A}) = 0{,}20$.

Пример 2.5. Определить, какой процент бульдозеров по условиям примера 2.3 будет иметь отказы в интервале их средней наработки от 200 до 500 ч.

Решение. Событие A – количество отказавших бульдозеров в интервале наработки от 200 до 500 ч – объединяет три события: A_1 – количество отказов в интервале от 200 до 300 ч, A_2 – количество отказов в интервале от 300 до 400 ч, A_3 – количество отказов в интервале от 400 до 500 ч.

Следовательно, ожидаемое количество отказов в интервале наработки от 200 до 500 ч:

$$P(200\ldots500) = P(200\ldots300) + P(300\ldots400) + P(400\ldots500) =$$
$$= 6/20 + 8/20 + 2/20 = 0{,}80.$$

Ответ: 80% бульдозеров будут иметь отказы в интервале их наработки от 200 до 500 ч.

Пример 2.6. Техническое устройство состоит из трех элементов A_1, A_2, и B. Элементы A_1, и A_2 дублируют друг друга. Это означает, что при отказе одного из них происходит автоматическое переключение на второй. Элемент B не дублирован. Устройство прекращает работу в том случае, когда отказывают оба элемента A_1 и A_2, либо отказывает элемент B. Таким образом, отказ устройства можно представить в виде события $C = A_1 \cdot A_2 + B$, где событие A_1 является отказом элемента A_1; A_2 – отказом элемента A_2 и B – отказом элемента B. Требуется выразить вероятность события C через вероятности событий, содержащих только суммы.

Решение. В соответствии с формулой (2.9) имеем

$$P(C) = P(A_1 A_2) + P(B) - P(A_1 A_2 B).$$

Используя формулу (2.12), определим

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 + A_2).$$

Далее, применяя формулу (2.13), получим

$$P(A_1 A_2 B) = P(A_1) + P(A_2) + P(B) - P(A_1 + A_2) - P(A_1 + B) -$$
$$- P(A_2 + B) + P(A_1 + A_2 + B).$$

Подставляя полученные выражения и сокращая противоположные члены, находим

$$P(C) = P(A_1 + B) + P(A_2 + B) - P(A_1 + A_2 + B).$$

Ответ: $P(C) = P(A_1 + B) + P(A_2 + B) - P(A_1 + A_2 + B)$.

2.3. Теорема умножения вероятностей

События могут быть независимыми и зависимыми. Событие A называют *независимым* от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие A называют *зависимым* от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Понятие зависимости и независимости событий можно наглядно показать на следующих примерах.

Пример 2.7. Предположим, что опыт состоит в бросании двух монет, при этом рассматривают следующие события: событие A – появление герба на первой монете и событие B – появление герба на второй монете.

В этом случае вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Следовательно, событие A независимо от события B.

Пример 2.8. Пусть в урне имеется два белых и один черный шар. Два человека вынимают из урны по одному шару, при этом рассматриваются следующие события: событие A – появление белого шара у первого человека и событие B – появление белого шара у второго человека.

Вероятность события A до того как станет известно что-либо о событии B, равна 2/3. Если стало известно, что событие B произошло, то вероятность события A становится раной 1/2, из чего заключаем, что событие A зависит от события B.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что имело место другое событие B, называется *условной вероятностью события* A и обозначается $P(A/B)$.

Для условий примера $P(A) = 2/3$, $P(A/B) = 1/2$.

Теорема умножения вероятностей формулируется следующим образом.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место, т.е.

$$P(AB) = P(A)P(B/A). \qquad (2.15)$$

Очевидно, что при применении теоремы умножения безразлично, какое из событий – A или B – считать первым, какое вторым, и теорему можно записать так: два события называют *независимыми*, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Понятие независимых событий может быть распространено на случай произвольного числа событий. Несколько событий называют *независимыми*, если любое из них не зависит от любой совокупности остальных.

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Теорема умножения вероятностей может быть обобщена на случай произвольного числа событий. В общем виде она формулируется так.

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляют при условии, что все предыдущие имели место:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}). \qquad (2.16)$$

В случае независимых событий теорема упрощается и принимает вид:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n), \qquad (2.17)$$

т.е. вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Применяя знак произведения, теорему можно записать так:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (2.18)$$

Пример 2.9. Устройство состоит из четырех приборов, каждый из которых, независимо от других, может в течение времени t отказать. Отказ хотя бы одного прибора приводит к отказу устройства. За время t вероятность безотказной работы каждого из приборов соответственно равна: $P_1(t) = 0{,}90$; $P_2(t) = 0{,}96$; $P_3(t) = 0{,}98$; $P_4(t) = 0{,}95$. Найти надежность устройства за время работы t.

Решение. Введем обозначения вероятностей безотказной работы первого – четвертого приборов: $A_1 - A_4$.

Имеем: $A = A_1A_2A_3A_4$.

По формуле умножения вероятностей для независимых событий (2.18) получим:

$$P(A) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\,P(A_4) = 0{,}90 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}95 = 0{,}80.$$

Ответ: $P(A) = 0{,}80$.

Пример 2.10. Производят три выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания при первом, втором, третьем выстрелах соответственно равна: $P_1 = 0{,}8$; $P_2 = 0{,}6$; $P_3 = 0{,}3$. Найти вероятность того, что в результате этих трех выстрелов в мишени будет хотя бы одна пробоина.

Решение. Рассмотрим событие B – хотя бы одно попадание в мишень. Представим событие B в виде суммы несовместных вариантов:

$$B = A_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3,$$

где A_1, A_2 и A_3 – попадания при первом, втором, третьем выстрелах; $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ и $\overline{A_3}$ – промах при первом, втором, третьем выстрелах.

Вероятность каждого варианта находим по теореме умножения, а затем используем теорему сложения:

$$P(B) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) +$$

$$+ P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) +$$

$$+ P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot (1 - 0{,}3) +$$

$$+ 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}3 + (1 - 0{,}8) \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}3) +$$

$$+ (1 - 0{,}8) \cdot 0{,}6 \cdot (1 - 0{,}3) + (1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}3 = 0{,}946.$$

Ответ: $P(B) = 0{,}946$.

2.4. Распределение случайных величин

Основные характеристики надежности имеют значительный разброс, т.е. они являются случайными величинами, поэтому при многократном повторении они подчиняются определенным статически устойчивым закономерностям.