Практическое занятие № 2
СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН

Средние величины являются обобщенной, абстрактной характеристикой всей совокупности в целом. Значение средних заключается в их свойстве уравновешивать все индивидуальные отклонения, в результате чего получаются значения, характеризующие своеобразие группового объекта и позволяющие отличать варьирующие объекты друг от друга.

Средние величины могут характеризовать только однородную массу вариант. При наличии разнородных по составу данных их необходимо группировать в отдельные качественно однородные группы и вычислять средние групповые или частные средние.

Существует 2 класса средних величин: ***степенные*** и ***структурные***.

К **структурным** средним относятся *мода* и *медиана.*

Мода (Мо) – значение, которое встречается в данной совокупности с наибольшей частотой.

Медиана (Ме) – средняя, относительно которой ряд значений признака делится на 2 половины: в обе стороны от медианы располагается одинаковое число вариант. В выборках малого размера определить медиану достаточно легко: для этого значения признака ранжируют по возрастанию, и если число членов ряда нечетное, то центральная варианта и будет медианой. При четном числе значений признака медиана определяется по полусумме соседних вариант, расположенных в центре ряда.

Структурные средние применяются достаточно редко.

Степенные средние величины могут быть *простыми* и *взвешенными*.

Простая средняя величина рассчитывается для *не сгруппированных* данных, расположенных в произвольном порядке, по следующей общей формуле:

$$\bar{x} = \sqrt[m]{\frac{\sum X^m}{n}} \quad (3)$$

Взвешенная средняя величина рассчитывается для *сгруппированных* данных по следующей общей формуле:

$$\bar{x} = \sqrt[m]{\frac{\sum X^m \cdot f}{\sum f}} \quad (4)$$

где X – значения варьирующего признака или середины группировочных интервалов;

m - показатель степени, от значения которого зависит вид степенных средних величин:

при m = -1 средняя гармоническая;

при m = 0 средняя геометрическая;

при m = 1 средняя арифметическая;

при m = 2 средняя квадратическая;

при m = 3 средняя кубическая.

Из степенных средних наиболее часто используется ***средняя арифметическая***. Для малой выборки и несгруппированных данных определяется ***простая средняя арифметическая*** по формуле:

$$\bar{x} = \frac{\sum X}{n} \qquad (5)$$

где X – значение варьирующего признака,

n – общее число вариант, составляющих выборку.

Для сгруппированных данных, т.е. для вариационного ряда рассчитывается ***взвешенная средняя арифметическая:***

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot X_1 + f_2 \cdot X_2 + ... + f_n \cdot X_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n} = \frac{\sum f \cdot X}{n} \qquad (6)$$

Средняя гармоническая обозначается символом $\mathbf{x_h}$. Для расчета средней гармонической используются не абсолютные значения вариант, а их обратные числа. Средняя гармоническая может быть простой и взвешенной.

Простая рассчитывается по формуле: $\bar{x}_h = \dfrac{n}{\sum \frac{1}{X}}$ (7)

взвешенная: $\bar{x}_h = \dfrac{n}{\sum f \cdot \frac{1}{X}}$ (8)

Пример. Для определения плотности колосьев ржи было отобрано 20 растений, у которых подсчитывалось число зерен в колосе и измерялась длина колоса в см. Плотность определялась как отношение числа зерен к длине колоса. Результаты распределились следующим образом:

Плотность колосьев	4,5	4,2	4,0	3,7	3,5
Частота, f	2	5	10	2	1

Рассчитываем взвешенную среднюю гармоническую по формуле (8):

$$\bar{x}_h = \frac{20}{2\cdot\frac{1}{4,5}+5\cdot\frac{1}{4,2}+10\cdot\frac{1}{4,0}+2\cdot\frac{1}{3,7}+1\cdot\frac{1}{3,5}} =$$

$$= \frac{20}{2\cdot 0,222+5\cdot 0,238+10\cdot 0,25+2\cdot 0,270+1\cdot 0,286} =$$

$$= \frac{20}{0,444+1,19+2,5+0,54+0,286} = \frac{20}{4,96} = 4,03$$

в то время как взвешенная средняя арифметическая рассчитывается по формуле (6):

$$\bar{x} = \frac{2\cdot 4,5+5\cdot 4,2+10\cdot 4,0+2\cdot 3,7+1\cdot 3,5}{20} =$$

$$= \frac{9,0+21,0+40,0+7,4+3,5}{20} = \frac{80,9}{20} = 4,04$$

Задание 1: Рассчитать среднюю арифметическую и среднюю гармоническую.

Пример 1. *У 50 растений льна-долгунца определено процентное соотношение технической длины стебля к общей. Получены следующие результаты:*

Соотношение, %	80	83	85	88	90	92
Частота, f	2	8	13	15	9	3

Пример 2. *У 50 растений винограда определено процентное соотношение вызревшей части однолетнего прироста к общей. Получены следующие результаты:*

Соотношение, %	70	73	75	78	80	82
Частота, f	2	8	13	15	9	3

Если признак выражается мерами площади (например, диаметр корзинок подсолнечника, определяющий его урожайность; величина листовых пластинок, от которой зависит продуктивность фотосинтеза; размеры колоний микроорганизмов) более точной является ***средняя квадратическая***, которая обозначается символом $\boldsymbol{x_q}$. Она равна корню квадратному из отношения суммы квадратов вариант к общему числу наблюдений.

Простая средняя квадратическая рассчитывается по формуле: $\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n}}$ (9); взвешенная - $\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{n}}$ (10).

Пример. При измерении диаметра у 10 корзинок подсолнечника получены следующие результаты:

Диаметр, см	8	11	13	15	16	17
Частота, f	1	1	2	3	2	1

Рассчитываем взвешенную среднюю квадратическую по формуле (10):

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{1\cdot 8^2 + 1\cdot 11^2 + 2\cdot 13^2 + 3\cdot 15^2 + 2\cdot 16^2 + 1\cdot 17^2}{10}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1\cdot 64 + 1\cdot 121\cdot 2\cdot 169 + 3\cdot 225 + 2\cdot 256 + 1\cdot 289}{10}} =$$

$$= \sqrt{\frac{64+121+338+675+512+289}{10}} = \sqrt{\frac{1999}{10}} = \sqrt{199{,}9} = 14{,}1$$

в то время как взвешенная средняя арифметическая рассчитывается по формуле (6):

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 8 + 1\cdot 11 + 2\cdot 13 + 3\cdot 15 + 2\cdot 16 + 1\cdot 17}{10} =$$

$$= \frac{8+11+26+45+32+17}{10} = \frac{139}{10} = 13{,}9$$

Задание 2: Рассчитать среднюю квадратическую и среднюю арифметическую.

Пример 3. *При измерении площади листьев яровой пшеницы получены следующие результаты:*

Площадь листа, см^2 14,2; 16,1; 13,3; 17,4; 13,8; 16,5; 15,2; 16,9; 14,7; 5,7.

Пример 4. *При измерении площади листьев яблони получены следующие результаты:*

Площадь листа, см^2 31 28 33 37 32 29 32 36 28 35

Пример 5. *При измерении диаметра луковиц лука севка были получены следующие данные:*

Диаметр луковицы, см	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
Частота, f	2	4	5	7	6	3	1

Пример 6. *При измерении диаметра 16 колоний микроорганизмов были получены следующие значения:*

Диаметр колоний, см	3	5	7	9	11
Число колоний	1	3	6	4	2

Для характеристики объемных признаков более точным показателем является ***средняя кубическая***, которая обозначается символом $\mathbf{x_k}$. Простая средняя кубическая рассчитывается по формуле:

$$\bar{x}_k = \sqrt[3]{\frac{\sum X^3}{n}} \quad (11); \quad \text{взвешенная - } \bar{x}_k = \sqrt[3]{\frac{\sum f \cdot X^3}{n}} \quad (12).$$

Средняя геометрическая – более точная характеристика при определении средних прибавок или при увеличении средних размеров, прироста численности популяции за определенный промежуток времени. Обозначается символом $\boldsymbol{x_g}$ и равна корню n-ой степени из произведений членов ряда:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n} \qquad (13)$$

Обычно средняя геометрическая вычисляется с помощью десятичных логарифмов по формуле:

$$\lg \bar{x}_g = \frac{1}{n-1}\left(\lg X_1 + \lg X_2 + \ldots + \lg X_n\right) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum \lg X \qquad (14)$$

Правило мажорантности средних величин

Если рассчитать все виды средних для одних и тех же исходных данных, то значения их окажутся неодинаковыми. Здесь действует правило мажорантности средних: *с увеличением показателя степени т увеличивается и соответствующая средняя величина, т.е.:*

$$\bar{x}_h < \bar{x}_g < \bar{x} < \bar{x}_q < \bar{x}_k$$

Контрольные вопросы:

1. Какие классы и виды средних используются?
2. В каких случаях рассчитывают среднюю квадратическую, среднюю кубическую и среднюю геометрическую?