Государственное образовательное учреждение

«Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко»

Физико-технический институт

Физико-математический факультет

Кафедра высшей и прикладной математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедры-разработчика

________________/ Коровай А.В.

Протокол № 1 « 30 » 08 2024 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине
Б1.О.32 «Функциональный анализ»

Направление
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Профиль
Системное программирование и компьютерные технологии

Квалификация
Бакалавр

Форма обучения
Очная

ГОД НАБОРА 2022

Разработчик: доцент кафедры
ВПМИ

________________/ Алещенко С.А.

« 30 » 08 2024 г.

Тирасполь 2024 г.

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Функциональный анализ»

1. В результате изучения дисциплины «Функциональный анализ» у обучающихся должны формироваться следующие компетенции:

Категория (группа) компетенций	Код и наименование	Код и наименование индикатора достижения универсальной компетенции
Общепрофессиональные компетенции и индикаторы их достижения		
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ИД-1$_{\text{ОПК-1}}$ Обладает знаниями в области фундаментальной и прикладной математики и естественно-научных дисциплин. ИД-2$_{\text{ОПК-1}}$Умеет использовать знания в области фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности. ИД-3$_{\text{ОПК-1}}$ Владеет навыками применения знаний фундаментальной и прикладной математики для решения практических задач в области естественных наук и инженерной практике.
	ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.	ИД-1$_{\text{ОПК-3}}$ Обладает фундаментальными знаниями по математическим моделям для решения прикладных задач. ИД-2$_{\text{ОПК-3}}$Умеет использовать аппарат математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности ИД-3$_{\text{ОПК-3}}$ Имеет навыки применения и модификации математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности.
Обязательные профессиональные компетенции и индикаторы их достижения		
	ПК-1 Способен демонстрировать общенаучные базовые знания естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой.	ИД-1$_{\text{ПК-1}}$ Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий. ИД-2$_{\text{ПК-1}}$ Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий. ИД-3$_{\text{ПК-1}}$ Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.
	ПК-2 Способен понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат.	ИД-1$_{\text{ПК-2}}$ Знает современный математический аппарат. ИД-2$_{\text{ПК-2}}$ Умеет применять методы, алгоритмы и приёмы современного математического аппарата. ИД-3$_{\text{ПК-2}}$ Владеет практическими навыками применения современного математического аппарата в исследовательской и прикладной деятельности.

2. Программа оценивания контролируемой компетенции:

Текущая аттестация	Контролируемые модули, разделы (темы) дисциплины и их наименование	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	Раздел 1. Метрические пространства.	ОПК-1, 3; ПК-1,2.	Контрольная работа; комплект задач реконструктивно-творческого уровня для домашних заданий
2	Раздел 2. Нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.	ОПК-1, 3; ПК-1,2.	Контрольная работа; комплект задач реконструктивно-творческого уровня для домашних заданий
3	Раздел 3. Линейные функционалы и операторы в нормированных пространствах.	ОПК-1, 3; ПК-1,2.	Контрольная работа; комплект задач реконструктивно-творческого уровня для домашних заданий
4	Раздел 4. Интегральные уравнения.	ОПК-1, 3; ПК-1,2.	Контрольная работа; комплект задач реконструктивно-творческого уровня для домашних заданий
5	Раздел 5. Операторы в гильбертовых пространствах.	ОПК-1, 3; ПК-1,2.	Контрольная работа; комплект задач реконструктивно-творческого уровня для домашних заданий
Промежуточная аттестация		Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
Зачет		ОПК-1, 3; ПК-1,2.	Вопросы к зачету

Государственное образовательное учреждение

«Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко»

Физико-технический институт

Физико-математический факультет

Кафедра высшей и прикладной математики и информатики

Контрольная работа

по дисциплине «Функциональный анализ»

Тема: Метрические пространства. Нормированные, банаховы и гильбертовы пространства. Линейные функционалы и операторы в нормированных пространствах. Интегральные уравнения. Операторы в гильбертовых пространствах.

Вариант №1.

1. Является ли метрикой на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел функция $\rho(x,y)=|shx-shy|$? Ответ обосновать.
2. Сходится ли последовательность $x_n(t)=nt^2\cdot e^{-nt}$ к функции $x_0(t)\equiv 0$ в пространстве $C_{[0;1]}$? Ответ обосновать.
3. С помощью теоремы Банаха докажите, что последовательность $\left\{ x_0=1,\ x_n=\dfrac{3}{8+3x_{n-1}},\ n\in N \right\}$ имеет предел, и найдите его.
4. Методом последовательных приближений решить уравнение $x=\sqrt{\cos x}$ на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ с точностью 10^{-5}.
5. Пусть V – множество векторов на плоскости; $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$. Задаёт ли на V скалярное произведение функция $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+9a_2b_2-3a_1b_2-3a_2b_1$? Ответ обосновать.
6. Покажите, что функционал $f(x)=\int\limits_0^1\dfrac{x(t)}{\sqrt[4]{1-t^2}}dt$, $f:L_{2[0,1]}\to\mathbb{R}$, принадлежит соответствующему сопряжённому пространству, и найдите его норму.
7. Докажите, что оператор $A:C_{[0,1]}\to C_{[0,1]}$ линейный, ограниченный и непрерывный, и найдите $\|A\|$, если $(Ax)(t)=\int\limits_0^1 t^3s^4x(s)ds$.

8. Сходится ли последовательность $x_n = \left(\overbrace{0,0,\dots,0}^{n}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{4^n}, \frac{1}{8^n}, \dots, \frac{1}{2^{kn}}, \dots \right)$ к $x = (0,0,0,0,\dots,0,\dots)$ в l_2 сильно (слабо)? Ответ обосновать.

9. Найдите A^*, если $Ax = \left(0, \frac{1+i}{2} x_1, \frac{1+i}{4} x_2, \dots, \frac{1+i}{2^n} x_n, \dots \right)$, $A: l_2 \to l_2$.

10. Найти спектр, собственные значения и собственные функции оператора $A: L_{2[0,\pi]} \to L_{2[0,\pi]}$, если $(Ax)(t) = \int\limits_0^{\pi} sin(2t+s)\, x(s)\, ds$.

Вариант №2.

1. Является ли метрикой на множестве □ действительных чисел функция $\rho(x,y) = |chx - chy|$? Ответ обосновать.
2. Сходится ли последовательность функций $x_n(t) = te^{-nt}$ к функции $x_0(t) \equiv 0$ в пространстве $C_{1[0,1]}$? Ответ обосновать.
3. С помощью теоремы Банаха докажите, что последовательность $\left\{ x_0 = \frac{11}{50},\ x_n = \frac{11}{50} - \frac{x_{n-1}^2}{2},\ n \in N \right\}$ имеет предел, и найдите его.
4. Методом последовательных приближений решить уравнение $x = \sqrt[4]{x+1}$ на промежутке $(0;+\infty)$ с точностью 10^{-5}.
5. Является ли линейным пространством (с естественными алгебраическими операциями) над □ или □ (указать, над каким именно) множество c_0 – сходящихся к нулю комплексных последовательностей? Ответ обосновать.
6. Покажите, что функционал $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{5^{k-1}} x_{2k-1}$, $f: l_2 \to$ □, принадлежит соответствующему сопряжённому пространству, и найдите его норму.
7. Докажите, что оператор $A: L_{2[0,1]} \to L_{2[0,1]}$ линейный, ограниченный и непрерывный, и найдите $\|A\|$, если $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 \frac{sx(s)\,ds}{\sqrt[4]{1-t^2}}$.
8. Сходится ли последовательность $x_n(t) = nt(1-t)^n$ к $x_0(t) \equiv 0$ в $C_{[0,1]}$ сильно (слабо)? Ответ обосновать.
9. Найдите A^*, если $(Ax)(t) = \int\limits_{t^3}^{t} x(\tau)\, d\tau$, $A: L_{2[0,1]} \to L_{2[0,1]}$.
10. Найти спектр, собственные значения и собственные функции оператора $A: L_{2[-1,1]} \to L_{2[-1,1]}$, если $(Ax)(t) = \int\limits_{-1}^{1} \left(5t\,s^3 + 4t^2 s \right) x(s)\, ds$.

Критерии оценки:

Контрольная работа оценивается максимум в 20 баллов.

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если он набрал от 17 до 20 баллов;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если он набрал от 13 до 16,9 баллов;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал от 8 до 12,9 баллов;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал менее двух баллов.

Государственное образовательное учреждение

«Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко»

Физико-технический институт

Физико-математический факультет

Кафедра высшей и прикладной математики и информатики

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня

для домашних заданий

по дисциплине «Функциональный анализ»

Тема: Метрические пространства. Нормированные, банаховы и гильбертовы пространства. Линейные функционалы и операторы в нормированных пространствах. Интегральные уравнения. Операторы в гильбертовых пространствах.

Метрические пространства.

1. Являются ли метриками в □ следующие функции:

а) $\rho(x,y)=\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|$; б) $\rho(x,y)=\left|x^2-y^2\right|$; в) $\rho(x,y)=\left|\sin(x-y)\right|$;

г) $\rho(x,y)=\left|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y\right|$? Ответ обосновать.

2. Является ли метрикой на множестве натуральных чисел функция

$\rho(x,y)=1+\dfrac{1}{x+y}$, если $x\neq y$, $\rho(x,y)=0$, если $x=y$. Ответ обосновать.

3. Найдите расстояние $\rho(x,y)$ между функциями $x(t)=t^3$ $y(t)=3t+4$

в следующих пространствах: а) $C_{[0,2]}$; б) $C_{1[0,2]}$; в) $D^1_{[0,2]}$; г) $C_{2[0,2]}$; д) $D^2_{[0,2]}$.

Сходящиеся последовательности в метрических пространствах.

1. Сходится ли последовательность $x_n(t)=\dfrac{\ln\left(1+n^2t^2\right)}{2n^2}$ к функции $x_0(t)\equiv 0$ в пространстве $D^1_{[0,1]}$? Ответ обосновать.

2. Сходится ли последовательность $x_n(t)=\dfrac{t}{1+n^2t^2}$ к функции $x_0(t)\equiv 0$ в следующих пространствах: а) $C_{[0;1]}$; б) $C_{1[0;1]}$? Ответ обосновать.

3. Сходится ли последовательность $x_n(t)=t\cdot e^{-nt}$ к функции $x_0(t)\equiv 0$ в следующих пространствах: а) $C_{[0;1]}$; б) $C_{1[0;1]}$? Ответ обосновать.

Принцип сжимающих отображений и его применение.

1. Покажите, что функция $f(x)=\sqrt[3]{1000-x}$ отображает отрезок $[9,10]$ в себя. Является ли это отображение сжимающим? Ответ обосновать.
2. С помощью теоремы Банаха докажите, что последовательность $\sqrt{3+\sqrt{3}},\ \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}},\ \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}},\ldots$ имеет предел, и найдите его.
3. С помощью теоремы Банаха докажите, что последовательность $\left\{x_0=-5,\ x_n=\dfrac{x_{n-1}}{3-x_{n-1}},\ n\in N\right\}$ имеет предел, и найдите его.
4. Покажите, что уравнение $x=0.1\sin x+2$ можно решить методом последовательных приближений, и найдите его корень с точностью до 10^{-5} .

Решение интегральных уравнений методом последовательных приближений.

1. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение Фредгольма II рода $x(t)=t-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 t\,s^4x(s)\,ds$, $x_0(t)\equiv 0$.
2. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение Фредгольма II рода $x(t)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{t^2}}-\dfrac{1}{5}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x(s)\,ds}{\sqrt[5]{t^2s}}$, $x_0(t)\equiv 0$.
3. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение Вольтерра II рода $x(t)=t-2\displaystyle\int_0^t \dfrac{t\,x(s)\,ds}{1+s^2}$, $x_0(t)\equiv 0$.
4. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение Вольтерра II рода $x(t)=1+t-3\displaystyle\int_0^t \dfrac{1+t}{1+s}x(s)\,ds$, $x_0(t)\equiv 0$.

Линейные пространства.

1. Является ли линейным пространством (с естественными алгебраическими операциями) над □ или □ (указать, над каким именно) множество непрерывных периодических на □ функций? Ответ обосновать.
2. Является ли линейным пространством (с естественными алгебраическими операциями) над □ или □ (указать, над каким именно) множество l_∞ – ограниченных комплексных последовательностей? Ответ обосновать.

3. Является ли линейным пространством (с естественными алгебраическими операциями) над $\square$ или $\square$ (указать, над каким именно) множество c_0 – сходящихся к нулю комплексных последовательностей? Ответ обосновать.
4. Является ли линейным пространством (с естественными алгебраическими операциями) над $\square$ или $\square$ (указать, над каким именно) множество $Lip_{[a,b]}$ – функций, удовлетворяющих условию Липшица на отрезке $[a,b]$.

Нормированные пространства.

1. Пусть P – линейное пространство многочленов с действительными коэффициентами. Можно ли принять в пространстве P за норму наибольший по модулю коэффициент многочлена? Ответ обосновать.
2. Проверьте, что $C_{1[a,b]}$ – нормированное пространство.
3. Проверьте, что l_1 – нормированное пространство.
4. Найдите норму функции $x(t) = \frac{1}{5}\left(4t^3 - t^4\right)$ в пространстве $C_{1[-1,5]}$.
5. Найти норму $\|x\|$, если $x = \left(\frac{1+i}{2}, \frac{1+i}{4}, \frac{1+i}{8}, \dots, \frac{1+i}{2^n}, \dots\right)$, $x \in l_2$.

Предгильбертовы и гильбертовы пространства.

1. Пусть V – множество векторов на плоскости; $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Задаёт ли на V скалярное произведение функция $(\vec{a}, \vec{b}) = 100a_1b_1 + a_2b_2$? Ответ обосновать.
2. Пусть c – множество всех сходящихся комплексных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$? Задаёт ли на c скалярное произведение функция $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n \bar{y}_n}{n!}$? Ответ обосновать.
3. Пусть $\square^{+}$ – линейное пространство с введенными на нём операциями сложения $x \oplus y := xy$ и умножения на число $\lambda \bullet x := x^{\lambda}$, где $x, y \in \square^{+}$, $\lambda \in R$. Задаёт ли в пространстве $\square^{+}$ скалярное произведение функция $(x, y) = \ln x \cdot \ln y$? Ответ обосновать.
4. Найти скалярное произведение (x, y), если $x(t) = t^2$, $y(t) = \cos\frac{\pi}{2}t$, $x, y \in L_{2[0;1]}$.
5. Найти скалярное произведение (x, y), если $x, y \in l_2$, $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots\right)$, $y = \left(\frac{i}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{i}{8}, \dots, \frac{i^n}{2^n}, \dots\right)$.

Ряды Фурье по ортонормированным системам.

1. Доказать, что $\left\{h_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt, n \in \square\right\}$ – ортонормированная система функций в пространстве $L_{2[0,\pi]}$.

2. Разложить функцию $x(t)=\pi t-t^2$ в ряд Фурье по ортонормированной системе $\left\{h_n(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, n\in \mathbb{N}\right\}$ в пространстве $L_{2[0,\pi]}$.

3. Пусть $\rho(t)=\sqrt{1-t^2}$. В пространстве $L_{2,\rho[-1,1]}$ ортонормировать линейно независимую систему функций $\{1,t,t^2\}$.

4. Для функции $x(t)=|t|$ найти многочлены $p_n(t)$, $n=0,1,2$, наилучшего приближения в пространстве $L_{2,\rho[-1,1]}$, если $\rho(t)=\sqrt{1-t^2}$.

5. Для заданной функции $x(t)$ найти многочлены $p_n(t)$, $n=0,1,2,3$, наилучшего приближения в пространстве $L_{2,\rho[0,1]}$, если $x(t)=\sqrt[3]{1+t^2}$, $\rho(t)=1+0.5t^2$. Определить абсолютную погрешность каждого приближения.

Линейные непрерывные функционалы.

1. Доказать, что функционал $f(x)=\int_0^1 x(t)\sin t\,dt$ является линейным непрерывным функционалом в пространстве $L_{2[0,1]}$, и найти его норму.

2. Доказать, что функционал $f(x)=\int_0^1 \frac{x(t)}{\sqrt[3]{t}}dt$ является линейным непрерывным функционалом в пространстве $C_{[0,1]}$, и найти его норму.

3. Доказать, что функционал $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}$ является линейным непрерывным функционалом в пространстве l_2, и найти его норму.

4. Доказать, что функционал $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}$ является линейным непрерывным функционалом в пространстве l_∞, и найти его норму.

5. Является ли $f(x)=\int_0^1 |x(t)|dt$ линейным функционалом в пространстве $C_{[0,1]}$? Ответ обосновать.

Линейные непрерывные операторы.

1. Доказать, что оператор $(Ax)(t)=\int_0^1 e^{t-s}x(s)ds$ является линейным непрерывным оператором в пространстве $C_{[0,1]}$, и найти его норму.

2. Доказать, что оператор $\left(Ax\right)\left(t\right)=\int\limits_0^1 \sin\pi t \sin\pi s\, x\left(s\right)ds$ является линейным непрерывным оператором в пространстве $C_{[0,1]}$, и найти его норму.

3. Доказать, что оператор $\left(Ax\right)\left(t\right)=\int\limits_0^1 \sin\pi t \sin\pi s\, x\left(s\right)ds$ является линейным непрерывным оператором в пространстве $L_{2[0,1]}$, и найти его норму.

Сопряженное пространство.

Доказать, что следующие функционалы принадлежат соответствующим сопряжённым пространствам и вычислить их нормы:

1. $f\left(x\right)=x_1-x_2$, $f:\ell_2^2\to\mathbb{R}$;
2. $f\left(x\right)=x_1+2x_2-3x_3$, $f:\ell_\infty^3\to\mathbb{R}$;
3. $f\left(x\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_{2k}}{5^k}$, $f:l_2\to\mathbb{R}$;
4. $f\left(x\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt[k]{k}\cdot x_k$, $f:l_1\to\mathbb{R}$;
5. $f\left(x\right)=\int\limits_0^1 x\left(t\right)\cos\pi t\,dt$, $f:L_{2[0,1]}\to\mathbb{R}$;
6. $f\left(x\right)=\int\limits_0^1 tx\left(t\right)dt$, $f:L_{3[0,1]}\to\mathbb{R}$;
7. $f\left(x\right)=\int\limits_0^1 x\left(t\right)\cos\pi t\,dt$, $f:C_{[0,1]}\to\mathbb{R}$;
8. $f\left(x\right)=\int\limits_0^1 t^2x\left(t\right)dt+x\left(\frac{1}{2}\right)$, $f:C_{[0,1]}\to\mathbb{R}$.

Сильная и слабая сходимость.

1. Сходится ли последовательность $x_n\left(t\right)=nt\left(1-t\right)^n$ к $x_0\left(t\right)\equiv 0$ в $C_{[0,1]}$ сильно (слабо)? Ответ обосновать.
2. Сходится ли последовательность $x_n\left(t\right)=2nt\cdot e^{-nt}$ к $x_0\left(t\right)\equiv 0$ в $C_{[0,1]}$ сильно (слабо)? Ответ обосновать.
3. Сходится ли последовательность $x_n\left(t\right)=\sin\frac{t}{n}$ к $x_0\left(t\right)\equiv 0$ в $L_{2[0,\pi]}$ сильно (слабо)? Ответ обосновать.

4. Сходится ли последовательность $x_n(t)=e^{itn^2}$ к $x_0(t)\equiv 0$ в $L_{2[0,1]}$ сильно (слабо)? Ответ обосновать.
5. Исследовать на сильную и слабую сходимость последовательность $x^{(n)}=\left(1,\frac{1}{2^n},\frac{1}{4^n},\frac{1}{8^n},\ldots,\frac{1}{2^{kn}},\ldots\right)$ в l_2.
6. Исследовать на сильную и слабую сходимость последовательность $x^{(n)}=\left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-1},\frac{1}{\sqrt[n]{n}},0,0,\ldots\right)$ в l_2.

Обратимые операторы.

1. Являются ли обратимыми следующие операторы:

а) $Ax=\left(2x_1,\frac{3}{2}x_2,\frac{4}{3}x_3,\ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n,\ldots\right)$, $A\in\mathcal{L}\left(l_2\right)$;

б) $Ax=\left(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{4},\ldots,\frac{x_n}{2^{n-1}},\ldots\right)$, $A\in\mathcal{L}\left(l_2\right)$? Ответ обосновать.

2. Являются ли обратимыми следующие операторы:

а) $(Ax)(t)=\cos\frac{\pi}{2}t\cdot x(t)$, $A\in\mathcal{L}\left(C_{[0,1]}\right)$; б) $(Ax)(t)=e^t\cdot x(t)$, $A\in\mathcal{L}\left(L_{2[0,1]}\right)$;

в) $(Ax)(t)=\int_0^1 t^3 s^2 x(s)ds$, $A\in\mathcal{L}\left(L_{2[0,1]}\right)$; г) $(Ax)(t)=\left(1+t^2\right)\cdot x(t)$, $A\in\mathcal{L}\left(C_{[0,1]}\right)$?

Ответ обосновать.

3. Найдите обратный оператор A^{-1}, если $(Ax)(t)=\left(1+t^2\right)x'(t)-2t\,x(t)$, $A\in\mathcal{L}\left(X,C_{[0,1]}\right)$, $X=\left\{x\in C^1_{[0,1]}\,\middle|\,x(0)=0\right\}$.

4. Найдите обратный оператор A^{-1}, если $(Ax)(t)=x(t)-2\int_{-1}^1 t^4 s^2 x(s)ds$, $A\in\mathcal{L}\left(L_{2[-1,1]}\right)$.

Сопряженные операторы.

1. Найти сопряженный оператор A^* к оператору $A\in\mathcal{L}\left(L_2(\mathbb{R})\right)$, если $(Ax)(t)=a(t)x(t+h)$, $a(t)\in L_\infty(\mathbb{R})$, $h\in\mathbb{R}$.

2. Найти сопряженный оператор A^* к оператору $A \in \mathcal{L}\left(L_2(\square)\right)$, если

$$(Ax)(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}.$$

3. Найти сопряженный оператор A^* к оператору $A \in \mathcal{L}\left(l_2\right)$, если $Ax = \left(x_2, x_3, x_4, \ldots\right)$.

4. Найти сопряженный оператор A^* к оператору $A \in \mathcal{L}\left(l_2\right)$, если

$$Ax = \left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-1}, e^{i\alpha}x_1, e^{i\beta}x_2, 0, 0, \ldots\right).$$

5. Найти сопряженный оператор A^* к оператору $A \in \mathcal{L}\left(L_{2[0,1]}\right)$, если

$$(Ax)(t) = \int_0^{t^2} x(\tau)\,d\tau.$$

6. Найти сопряженный оператор A^* к оператору $A \in \mathcal{L}\left(L_{2[0,1]}\right)$, если

$$(Ax)(t) = \int_0^1 \sin\pi(t + is)\,x(s)\,ds.$$

Спектр линейных непрерывных операторов.

1. Найти спектр, собственные значения, собственные вектора и собственные подпространства оператора $A : \square^3 \to \square^3$, если $Ax = \begin{pmatrix} x_2 \\ -4x_1 + 4x_2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$.

2. Найти спектр, собственные значения, собственные вектора и собственные подпространства оператора $A : \square^3 \to \square^3$, если $Ax = \begin{pmatrix} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$.

3. Найти спектр, собственные значения и собственные функции оператора $A : L_{2[0,1]} \to L_{2[0,1]}$, если $(Ax)(t) = \sin\frac{\pi t}{3} \cdot x(t)$.

4. Найти спектр, собственные значения и собственные элементы оператора $A : l_2 \to l_2$, если $Ax = \left(\frac{1}{3}x_1, \frac{3}{5}x_2, \frac{5}{7}x_3, \ldots, \frac{2n-1}{2n+1}x_n, \ldots\right)$.

5. Найти спектр, собственные значения и собственные элементы оператора $A: l_2 \to l_2$, если $Ax = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots)$.

Спектр интегральных операторов.

1. Найти собственные значения, собственные функции собственные подпространства и спектр оператора $A: L_{2[-1,1]} \to L_{2[-1,1]}$, если $(Ax)(t) = \int\limits_{-1}^{1} (1 + ts)x(s)ds$. Определите норму оператора.
2. Найти собственные значения, собственные функции собственные подпространства и спектр оператора $A: L_{2[0,\pi]} \to L_{2[0,\pi]}$, если $(Ax)(t) = \int\limits_{0}^{\pi} \sin(2t + s)x(s)ds$.
3. Найти спектр, собственные значения и собственные функции оператора $A: L_{2[0,1]} \to L_{2[0,1]}$, если $(Ax)(t) = \int\limits_{0}^{1} K(t,s)x(s)ds$, $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t), & 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$

   Определите норму оператора.

Критерии оценки:

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня для домашних заданий оценивается максимум в 30 баллов.

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если он набрал от 25 до 30 баллов;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если он набрал от 19 до 24,9 баллов;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал от 10 до 18,9 баллов;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал менее 5 баллов.

Государственное образовательное учреждение

«Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко»

Физико-технический институт

Физико-математический факультет

Кафедра высшей и прикладной математики и информатики

Вопросы к зачету

по дисциплине «Функциональный анализ»

1. Метрические пространства. Примеры. Свойства метрики.
2. Сходящиеся последовательности в метрических пространствах. Сходимость в $\boldsymbol{R}_p^n$ и $\boldsymbol{C}_{[a,b]}$.
3. Простейшие типы множеств и точек в метрических пространствах. Открытые и замкнутые множества и их свойства.
4. Всюду плотные множества. Сепарабельные метрические пространства. Примеры.
5. Фундаментальные последовательности. Полные метрические пространства. Примеры. Понятие пополнения метрических пространств.
6. Теорема о вложенных шарах.
7. Принцип сжимающих отображений.
8. Применение принципа сжимающих отображений к решению алгебраических уравнений и систем линейных алгебраических уравнений.
9. Применение принципа сжимающих отображений к решению дифференциальных уравнений.
10. Применение принципа сжимающих отображений к решению интегральных уравнений.
11. Линейные пространства. Линейно зависимые и линейно независимые системы элементов. Подпространства, базис, размерность, изоморфизм линейных пространств.
12. Линейные нормированные пространства. Свойства нормы. Полные системы элементов, базис. Изоморфизм линейных нормированных пространств.
13. Банаховы пространства. Понятие ряда в банаховом пространстве.
14. Предгильбертовы и гильбертовы пространства. Свойства скалярного произведения.
15. Ортогональное дополнение, теорема об ортогональном дополнении.
16. Проекция, теорема о проекции. Понятие прямой и ортогональной суммы подпространств.
17. Ортогональные и ортонормированные системы элементов, ряды Фурье по ортонормированным системам. Сходимость рядов Фурье и неравенство Бесселя, наилучшее приближение элементов гильбертова пространства.
18. Базис гильбертова пространства. Равенство Парсеваля и признак базиса. Ряды Фурье по ортогональным системам. Ортогонализация линейно независимых систем.
19. Линейные непрерывные функционалы. Свойства линейных функционалов. Норма линейного непрерывного функционала.
20. Линейные непрерывные операторы. Свойства линейных операторов. Норма линейного непрерывного оператора. Пример неограниченного оператора.
21. Принцип непрерывного продолжения линейных непрерывных операторов.
22. Теорема Хана-Банаха.

23. Следствия из теоремы Хана-Банаха.
24. Сопряжённое пространство и его свойства.
25. Общий вид линейного непрерывного функционала в $\boldsymbol{R}_p^n$.
26. Общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
27. Общий вид линейного непрерывного функционала в $\boldsymbol{l}_p$, $\boldsymbol{L}_{p[a,b]}$.
28. Пространство $\boldsymbol{V}_{[a,b]}$. Общий вид линейного непрерывного функционала в $\boldsymbol{C}_{[a,b]}$.
29. Второе сопряженное пространство. Рефлексивные и не рефлексивные линейные нормированные пространства.
30. Теорема Банаха-Штейнгауза.
31. Сильная и слабая сходимость последовательностей линейных непрерывных функционалов. Связь между видами сходимости. Критерий слабой сходимости. Слабая полнота сопряженного пространства.
32. Сильная и слабая сходимость последовательностей элементов линейного нормированного пространства. Общий критерий слабой сходимости. Слабая сходимость в $\boldsymbol{R}_p^n$, $\boldsymbol{l}_p$, $\boldsymbol{L}_{p[a,b]}$, $\boldsymbol{C}_{[a,b]}$.
33. Ядро и образ линейного непрерывного оператора. Алгебраически обратный оператор. Обратимый оператор. Критерий обратимости. Теорема Банаха об обратимом операторе.
34. Пространство линейных непрерывных операторов и его свойства. Действия над линейными непрерывными операторами. Равномерная, сильная и слабая сходимость. Кольцо линейных непрерывных операторов.
35. Другой подход к понятию обратимого оператора. Теоремы об обратимых операторах.
36. Спектр линейного непрерывного оператора. Теорема о структуре спектра.
37. Резольвента линейного непрерывного оператора. Теорема о свойствах резольвенты.
38. Теорема о непустоте спектра.
39. Сопряженные операторы и их свойства. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве.
40. Основные классы операторов в гильбертовом пространстве.
41. Компактные множества и их свойства.
42. Предкомпактные множества в банаховых пространствах. Критерии предкомпактности множеств в $\boldsymbol{R}_p^n$, $\boldsymbol{l}_p$, $\boldsymbol{L}_{p[a,b]}$, $\boldsymbol{C}_{[a,b]}$.
43. Компактные операторы и их свойства.
44. Спектр компактного оператора. Спектральные теоремы для компактного самосопряженного оператора.

Критерии оценки:

Ответ студента на зачете оценивается от 10 до 30 баллов. Каждый вопрос зачета оценивается максимум в 10 баллов.

– **оценка «зачтено»** выставляется студенту согласно положению о балльно-рейтинговой системе;

– **оценка «не зачтено»** выставляется студенту согласно положению о балльно-рейтинговой системе.