

Государственное образовательное учреждение
«Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко»

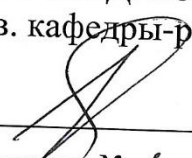
Физико-технический институт

Физико-математический факультет

Кафедра высшей и прикладной математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедры-разработчика

 / Коровай А.В.

Протокол № 1 «30» 08 2024 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Б1.О.36 «Дополнительные главы математического анализа»

на 2024/ 2025 учебный год

Направление

01.03.04 Прикладная математика

Профиль

Математические и компьютерные методы для современных цифровых технологий

Квалификация

Бакалавр

Форма обучения

Очная

ГОД НАБОРА 2022

Разработчик: доцент кафедры ВПМИ

 / Алещенко С.А.
«30» 08 2024 г.

Тирасполь 2024 г.

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине
«Дополнительные главы математического анализа»

1. В результате изучения дисциплины *«Дополнительные главы математического анализа»* у обучающихся должны формироваться следующие компетенции:

Категория (группа) компетенций	Код и наименование	Код и наименование индикатора достижения универсальной компетенции
Общепрофессиональные компетенции и индикаторы их достижения		
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-1. Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике.	ИД-1_{ОПК-1} Обладает знаниями в области фундаментальной и прикладной математики и естественно-научных дисциплин. ИД-2_{ОПК-1} Умеет использовать знания в области фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности. ИД-3_{ОПК-1} Владеет навыками применения знаний фундаментальной и прикладной математики для решения практических задач в области естественных наук и инженерной практике.
Обязательные профессиональные компетенции и индикаторы их достижения		
	ПК-1 Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, применять соответствующую процессу математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных результатов.	ИД-1_{ПК-1} Знает основы фундаментальной и прикладной математики для формализации исследуемых процессов и явлений. ИД-2_{ПК-1} Умеет самостоятельно разрабатывать математические модели на основе содержательного и физического описания процессов и объектов. ИД-3_{ПК-1} Владеет способностью применить соответствующую процессу математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных результатов.
	ПК-2 Способен самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук.	ИД-1_{ПК-2} Знает основы фундаментальных наук и их задачи. ИД-2_{ПК-2} Умеет использовать изученные разделы фундаментальных наук для решения конкретных научно-практических задач. ИД-3_{ПК-2} Владеет навыками применения математических и естественных наук для решения конкретных научно-практических задач.

2. Программа оценивания контролируемой компетенции:

Текущая аттестация	Контролируемые модули, разделы (темы) дисциплины и их наименование	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	Раздел 1. Функциональные последовательности и ряды.	ОПК-1; ПК-1,2.	Контрольная работа; комплект задач реконструктивно-творческого уровня для домашних заданий
2	Раздел 2. Тригонометрические ряды Фурье.	ОПК-1; ПК-1,2.	Контрольная работа; комплект задач реконструктивно-творческого уровня для домашних заданий
Промежуточная аттестация		Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
Зачет		ОПК-1; ПК-1,2.	Вопросы к зачету

Контрольная работа
по дисциплине «Дополнительные главы математического анализа»

Тема: Функциональные последовательности и ряды.
Тригонометрические ряды Фурье.

Вариант №1.

1. Вычислить производную функции $\Phi(y) = \int_y^{y^2} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x + y + 1} dx, y > 1$.
2. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить собственный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 \varphi) d\varphi, |a| > 1$.
3. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2} - e^{-\alpha x^2}}{x} dx, \alpha > 0$.
4. Применяя леммы об интегралах Фруллани, вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg(1 + \alpha x) - \arctg(1 + \beta x)}{x} dx, \alpha, \beta > 0$.
5. Вычислить с помощью интеграла Эйлера-Пуассона $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch} \beta x dx, \alpha, \beta > 0$.
6. Вычислить с помощью Γ и B функций $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1 + \sqrt[3]{x})^7}}$.
7. Разложить функцию $f(x) = x \sin x$ в ряд по синусам на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$.
8. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = e^{-|x|} \cos x$.

Вариант №2.

1. Вычислить производную функции $\Phi(y) = \int_y^{y\sqrt{3}} \frac{\arctg \frac{x}{y}}{x^2 + y^2} dx, y > 0$.
2. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить собственный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a \sin x}{1 - a \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x}, |a| < 1$.
3. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x (e^{-\beta x} - e^{-\gamma x})}{x} dx, \alpha, \beta, \gamma > 0$.
4. Применяя леммы об интегралах Фруллани, вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg(e^{-\alpha x}) - \arctg(e^{-\beta x})}{x} dx, \alpha, \beta > 0$.
5. Вычислить с помощью интеграла Эйлера-Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} (4x^2 - 4x + 17) e^{-(9x^2 + 6x + 2)} dx$.

6. Вычислить с помощью Γ и B функций $\int_0^2 x^{10} \sqrt{4-x^2} dx$.
7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = e^{-x}$, $0 \leq x < 1$;
 $f(x+1) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
8. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}$.

Вариант №3.

1. Вычислить производную функции $\Phi(y) = \int_{\frac{1}{y}}^{y^2} \frac{\ln(1+x^2 y^2)}{1+x^2 y^2} dx$, $y > 1$.
2. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить собственный интеграл $\int_0^\pi \ln(1+2a \cos x + a^2) dx$.
3. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$, $\alpha, \beta > 0$.
4. Применяя леммы об интегралах Фруллани, вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \ln \frac{1+\operatorname{arctg} \alpha x}{1+\operatorname{arctg} \beta x} \frac{dx}{x}$,
 $\alpha, \beta > 0$.
5. Вычислить с помощью интеграла Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x \sin \alpha x}{x^2} dx$.
6. Вычислить с помощью Γ и B функций $\int_0^\pi \sin^6 x \cos^2 \frac{x}{2} dx$.
7. Разложить функцию $f(x) = e^x$ в ряд по косинусам на отрезке $[0, 1]$.
8. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = x e^{-x^2/2}$.

Вариант №4.

1. Вычислить производную функции $\Phi(y) = \int_{\frac{1}{y}}^y \frac{\cos(x+y)}{x^2+y^2} dx$, $y > 1$.
2. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить собственный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$, $a^2 + b^2 > 0$.
3. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{(\cos \alpha x - \cos \beta x) e^{-\gamma x}}{x} dx$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$.
4. Применяя леммы об интегралах Фруллани, вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\beta \operatorname{arctg}(\alpha x) - \alpha \operatorname{arctg}(\beta x)}{x^2} dx$, $\alpha, \beta > 0$.

5. Вычислить с помощью интеграла Лапласа $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(\alpha^2 + x^2)^2} dx, \alpha > 0$.
6. Вычислить с помощью Γ и B функций $\int_0^1 \frac{x^{12} dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.
7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = \cos x, 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$;
 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x), x \in \mathbb{R}$.
8. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$.

1. Вычислить производную функции $\Phi(y) = \int_{\sqrt{y}}^{y^3} \frac{x^2 y^2}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} dx$, $y > 1$.
2. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить собственный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx$, $0 < a < 1$.
3. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x} \cos \beta x dx$, $\alpha, \beta > 0$.
4. Применяя леммы об интегралах Фруллани, вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^2(\alpha x) - \operatorname{arccot}^2(\beta x)}{x} dx$, $\alpha, \beta > 0$.
5. Вычислить с помощью интеграла Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cos \alpha x}{x^2} dx$.
6. Вычислить с помощью Γ и B функций $\int_{-0.5\pi}^{0.5\pi} |\sin x|^7 \cdot \sqrt{\cos^3 x} dx$.
7. Разложить функцию $f(x) = e^x$ в ряд по синусам на отрезке $[0, 1]$.
8. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = e^{-|x|} \sin x$.

Критерии оценки:

Контрольная работа оценивается максимум в 20 баллов.

- оценка «отлично» выставляется студенту, если он набрал от 17 до 20 баллов;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если он набрал от 13 до 16,9 баллов;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он набрал от 8 до 12,9 баллов;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он набрал менее двух баллов.

**Комплект задач реконструктивно-творческого уровня
для домашних заданий
по дисциплине «Дополнительные главы математического анализа»**

**Тема: Функциональные последовательности и ряды.
Тригонометрические ряды Фурье.**

Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.
Исследовать равномерную сходимость функциональных последовательностей на указанных множествах.

$$2750. f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}; \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$2752. f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}; \quad \text{а) } 0 \leq x \leq 1;$$

$$\text{б) } 1 < x < +\infty.$$

$$660) f_n(x) = \frac{nx + n^2 + x^2}{n^2 + x^2}, \quad E = [0; 1].$$

Для следующей функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, $x \in [a; b]$,

1) установить ее сходимость и исследовать ее равномерную сходимость на множестве $x \in [a; b]$;

2) выяснить, справедливо или нет равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

$$732) f_n(x) = nx(1-x)^n, \quad [a; b] = [0; 1].$$

$$733) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}, \quad [a; b] = [0; 1].$$

Для следующей функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, $x \in E$,

1) установить ее сходимость и исследовать равномерную сходимость последовательности $\{f'_n(x)\}$ на E ;

2) выяснить, справедливо или нет равенство

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' \Big|_{x=x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0), \quad x_0 \in E.$$

$$743) f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, \quad E = (-\infty; +\infty), \quad x_0 \in E.$$

$$744) f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}, \quad E = (-\infty; +\infty), \quad x_0 \in E.$$

Исследовать равномерную сходимость функциональных рядов на указанных множествах.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}, \quad 0 \leq x < +\infty;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad |x| < +\infty;$$

$$857) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}, \quad E = [-3/2; 3/2].$$

$$865) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad E = [-1; 1].$$

Разложение функций в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$.

1. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$ функцию $f(x) = \operatorname{sgn} x$.
2. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$ функцию $f(x) = |x|$.
3. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$ функцию $f(x) = \pi^2 - x^2$.
4. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$ функцию $f(x) = \cos ax$, $a \notin \mathbb{Z}$.
5. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$ функцию $f(x) = \operatorname{sh} ax$.

Разложение функций в ряд Фурье на произвольном отрезке.

1. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[0; 2l]$ функцию $f(x) = A \cdot \chi_{[0;l]}(x)$.
2. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-h; h]$ функцию $f(x) = e^{ax}$.
3. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[a; a+2l]$ функцию $f(x) = x$.
4. Разложить в ряд Фурье на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функцию $f(x) = x \cos x$.
5. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[0; 3]$ функцию $f(x) = x \cdot \chi_{[0;1]}(x) + x \cdot \chi_{(1;2)}(x) + (3-x) \cdot \chi_{[2;3]}(x)$.

Разложение функций в неполный ряд Фурье.

1. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{ch} x$ на отрезке $[0; \pi]$ в ряд косинусов.
2. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{ch} x$ на отрезке $[0; \pi]$ в ряд синусов.
3. Разложить на отрезке $[0; \pi]$ в ряд косинусов функцию $f(x) = \sin ax$, $a \notin \mathbb{Z}$.
4. Разложить на отрезке $[0; 2]$ в ряд синусов функцию $f(x) = \chi_{[0;1]}(x) + (2-x) \cdot \chi_{(1;2]}(x)$.
5. Разложить на отрезке $[0; 1]$ в ряд синусов функцию $f(x) = x^2$.

Разложение в ряд Фурье периодических функций.

1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = |\cos x|$.
2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$.
3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = \arcsin(\sin x)$.
4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x - [x]$.
5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$.

Собственные интегралы, зависящие от параметра.

Найти следующие пределы.

$$403) \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^3 x^2 \cos(xy) dx.$$

$$405) \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{\sqrt{3}+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

$$407) \lim_{y \rightarrow 1} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-y^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Проверить, выполняется или нет равенство

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$$

$$397) f(x, y) = \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}, \quad [a; b] = [0; 1], \quad y_0 = 0.$$

$$398) f(x, y) = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad [a; b] = [0; 1], \quad y_0 = 0.$$

Вычислить производную функции $F(y)$.

$$430) F(y) = \int_0^y (x + xy)^{10} dx. \quad 432) F(y) = \int_y^{y^2} e^{-x^2} dx. \quad 434) F(y) = \int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x} dx.$$

$$438) F(y) = \int_0^{1/y} \frac{\ln(1+yx)}{1+y} dx, \quad y > 0.$$

$$450) \text{ Проверить, что функция } u_1(r) = \int_0^\pi e^{nr \cos \varphi} d\varphi \text{ удовле-}$$

$$\text{творяет уравнению } u'' + \frac{1}{r} u' - n^2 u = 0.$$

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы.

$$457) \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx. \quad 458) \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1+a \sin x}{1-a \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x}, \quad |a| < 1.$$

Выяснить, справедливо или нет равенство

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

для следующих интегралов.

$$469) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dy.$$

$$471) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить следующий интеграл.

$$475) \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, b > 0.$$

$$476) \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, b > 0.$$

Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Исследовать равномерную сходимость интеграла на множестве M .

$$487) \int_1^{+\infty} \frac{\alpha^2 - x^2}{(\alpha^2 + x^2)^2} dx, \quad \text{а) } M = (-1; 1); \quad \text{б) } M = \mathbb{R}.$$

$$490) \int_0^1 \frac{\alpha^2 - x^2}{\sqrt{x}(\alpha^2 + x^2)^2} dx, \quad M = (0; 1). \quad 496) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (\alpha + x^2)^2}, \quad M = [0; +\infty).$$

$$502) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} x}{4 + x^n} dx, \quad n > 2,$$

$$\text{а) } M = \left(0; \frac{n}{2}\right); \quad \text{б) } M = (0; n - 1).$$

$$511) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx,$$

$$\text{а) } M = (\alpha_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0; \quad \text{б) } M = (0; +\infty).$$

$$523) \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1 + \alpha^2 x^2}, \quad M = \mathbb{R}.$$

$$527) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1 + x^2} dx, \quad \text{а) } M = [a_0; +\infty), \quad a_0 > 0; \quad \text{б) } M = (0; +\infty).$$

$$535) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1 + x^\alpha} dx, \quad M = (0; +\infty). \quad 541) \int_0^{+\infty} \sin x^2 \operatorname{arctg} \alpha x dx, \quad M = \mathbb{R}.$$

$$621) \text{ Пользуясь равенством } \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}, \text{ вычислить интеграл}$$

$$\int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx.$$

623) Пользуясь равенствами

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int_0^{+\infty} x e^{-nx} \sin x \, dx; & \text{б)} \int_0^{+\infty} x e^{-nx} \cos x \, dx; \\ \text{в)} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx} \sin x \, dx; & \text{г)} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx} \cos x \, dx; \\ \text{д)} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-nx} \sin x \, dx; & \text{е)} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-nx} \cos x \, dx. \end{array}$$

Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл.

$$674) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$677) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \, dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$680) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x \cos \gamma x}{x} \, dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0.$$

$$682) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x - \cos \gamma x}{x} e^{-\alpha x} \, dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0.$$

$$687) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} \sin^2 \beta x}{x} \, dx, \quad \alpha > 0.$$

Классические несобственные интегралы, зависящие от параметра.

1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch} \beta x \, dx$, $\alpha, \beta > 0$.
2. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \operatorname{sh} \beta x \, dx$, $\alpha, \beta > 0$.
3. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \sin \beta x \, dx$, $\alpha, \beta > 0$.
4. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos \beta x \, dx$, $\beta > 0$.
5. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} (\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) e^{-(ax^2 + 2bx + c)} \, dx$, $a > 0$, $ac - b^2 > 0$.

6. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx, a > 0$.
7. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx$.
8. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2 dx$.
9. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx, \alpha > 0$.
10. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + 1} dx$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{ax^2 + 2bx + c} dx, a > 0, ac - b^2 > 0$.
12. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(x^2 + 1)^2} dx, \alpha > 0$.

Эйлеровы интегралы.

1. Вывести формулу для вычисления интегралов вида $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$,
 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{1-x^6}}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[8]{1-x^8}}$.
2. Вывести формулу для вычисления интегралов вида $\int_0^a x^{2n} \sqrt{a^2 - x^2} dx$. Вычислить
 $\int_0^a x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $\int_0^a x^6 \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $\int_0^a x^8 \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $\int_0^a x^{10} \sqrt{a^2 - x^2} dx$.
3. Вывести формулу для вычисления интегралов вида $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$,
 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^5}$.
4. Вывести формулу для вычисления интегралов вида $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$,
 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{12}}$.
5. Вывести формулу для вычисления интегралов вида $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$. Вычислить $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$,
 $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx$, $\int_0^{+\infty} x^6 e^{-x^2} dx$, $\int_0^{+\infty} x^8 e^{-x^2} dx$, $\int_0^{+\infty} x^{10} e^{-x^2} dx$.

6. Вычислить $\int_0^{\pi} \sin^6 x \cos^2 \frac{x}{2} dx$, $\int_0^{\pi} \sin^8 x \cos^8 x dx$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|^7 \cdot \sqrt{\cos^3 x} dx$,
 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 4x \cos^4 2x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$.

Интеграл Фурье.

1. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \chi_{[-1;1]}(x)$.
2. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = \cos x \cdot \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}(x)$.
3. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$.
4. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = xe^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$.
5. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2}$, $a > 0$.

Преобразование Фурье.

1. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-2|x-1|}$.
2. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.
3. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-|x|} \sin \omega x$.
4. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = xe^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$.
5. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos \alpha x$.

Критерии оценки:

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня для домашних заданий оценивается максимум в 30 баллов.

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если он набрал от 25 до 30 баллов;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если он набрал от 19 до 24,9 баллов;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал от 10 до 18,9 баллов;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал менее 5 баллов.

Вопросы к зачету
по дисциплине «*Дополнительные главы математического анализа*»

1. Понятие равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса.
2. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.
3. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов.
4. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность собственного интеграла, зависящего от параметра, дифференцирование по параметру.
5. Дифференцирование интеграла с переменными пределами. Интегрирование собственного интеграла, зависящего от параметра
6. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла Римана для функциональных последовательностей.
7. Равномерно сходящиеся семейства функций. Связь с равномерно сходящимися функциональными последовательностями. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла Римана для семейств функций.
8. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса.
9. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.
10. Предельный переход под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра.
11. Непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра.
12. Собственное интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра.
13. Дифференцирование несобственного интеграла, зависящего от параметра.
14. Несобственное интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра.
15. Интеграл Дирихле.
16. Интеграл Эйлера-Пуассона.
17. Интеграл Лапласа.
18. Интегралы Френеля.
19. Интегралы Фруллани.
20. Гамма-функция Эйлера и ее свойства.
21. Бета-функция Эйлера и ее свойства.
22. Формула Эйлера-Гаусса. Формула дополнения. Связь между Γ и B функциями.
23. Определение ряда Фурье. Формулы для коэффициентов Фурье. Стремление коэффициентов Фурье к нулю.
24. Достаточные условия поточечной сходимости ряда Фурье.
25. Полнота тригонометрической системы функций. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.
26. Почленное дифференцирование рядов Фурье.
27. Равномерная сходимость рядов Фурье.
28. Почленное интегрирование рядов Фурье.
29. Разложение в ряд Фурье на произвольном промежутке. Разложение в неполный ряд Фурье.
30. Комплексная форма записи ряда Фурье.
31. Вывод формул для представления функции в виде интеграла Фурье.
32. Достаточные условия представления функции в виде интеграла Фурье.
33. Комплексная форма записи интеграла Фурье.
34. Преобразование Фурье и его свойства.

Критерии оценки:

Ответ студента на зачете оценивается от 10 до 30 баллов. Каждый вопрос зачета оценивается максимум в 10 баллов.

- **оценка «зачтено»** выставляется студенту согласно положению о балльно-рейтинговой системе;
- **оценка «не зачтено»** выставляется студенту согласно положению о балльно-рейтинговой системе.