Государственное образовательное учреждение

«Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко»

Физико-технический институт

Физико-математический факультет

Кафедра высшей и прикладной математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедры-разработчика

__________________/ Коровай А.В.

Протокол №_1_ «_30_»___08___ 2024 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Б1.В.02 «Дополнительные главы математического анализа»

на 2024/ 2025 учебный год

Направление

01.04.01 Математика

Профиль

Математика. Преподавание математики и информатики

Квалификация

Магистр

Форма обучения

Очная

ГОД НАБОРА 2024

Разработчик: доцент кафедры ВПМИ

__________________/ Алещенко С.А.

«_30_» _______08_______ 2024 г.

Тирасполь 2024 г.

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине
«Дополнительные главы математического анализа»

1. В результате изучения дисциплины «***Дополнительные главы математического анализа***» у обучающихся должны формироваться следующие компетенции:

Категория (группа) компетенций	**Код и наименование**	**Код и наименование индикатора достижения универсальной компетенции**
Обязательные профессиональные компетенции и индикаторы их достижения		
	ПК-1 Способен на самостоятельное построение целостной картины дисциплины	ПК-1.1 Знает: историю, теорию, закономерности и принципы построения и функционирования образовательных систем, роль и место образования в жизни личности и общества ПК-1.2 Умеет: разрабатывать и реализовывать программы учебных дисциплин в рамках основной общеобразовательной программы ПК-1.3 Владеет: формами и методами обучения, в том числе выходящими за рамки учебных занятий: проектная деятельность, лабораторные эксперименты, полевая практика и т.п.
	ПК-2 Владеет методами математического моделирования при анализе глобальных проблем на основе глубоких знаний фундаментальных математических дисциплин и компьютерных наук	ПК-2.1 Знает: преподаваемый предмет в пределах требований федеральных государственных образовательных стандартов и основной общеобразовательной программы, его истории и места в мировой культуре и науке ПК-2.2 Умеет: обеспечивать коммуникативную и учебную «включенности» всех учащихся в образовательный процесс (в частности, понимание формулировки задания, основной терминологии, общего смысла идущего в классе обсуждения) ПК-2.3 Владеет: предметно-педагогической ИКТ-компетентностью (отражающей профессиональную ИКТ-компетентность соответствующей области человеческой деятельности)
	ПК-7 Способен к организации учебной деятельности в конкретной предметной области (математика, физика, информатика)	ПК-7.1 Знает: преподаваемый предмет в пределах требований федеральных государственных образовательных стандартов и основной общеобразовательной программы, его истории и места в мировой культуре и науке ПК-7.2 Умеет: использовать информационные источники, следить за последними открытиями в области математики и знакомить с ними обучающихся, квалифицированно набирать математический текст, проводить различия между точным и (или) приближенным математическим доказательством, в частности, компьютерной оценкой, приближенным измерением, вычислением и др. ПК-7.3 Владеет: основными математическими компьютерными инструментами визуализации данных, зависимостей, отношений, процессов, геометрических объектов; вычислений - численных и символьных; обработки данных (статистики); экспериментальных лабораторий (вероятность, информатика)

2. Программа оценивания контролируемой компетенции:

Текущая аттестация	Контролируемые модули, разделы (темы) дисциплины и их наименование	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	Раздел 1, 2 Функциональные последовательности и ряды. Интегралы, зависящие от параметра	ПК-1.1; ПК-1.2; ПК-1.3; ПК-2.1; ПК-2.2; ПК-2.3; ПК-7.1; ПК-7.2; ПК-7.3	Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №1
2	Раздел 3 Мера Жордана и кратные интегралы	ПК-1.1; ПК-1.2; ПК-1.3; ПК-2.1; ПК-2.2; ПК-2.3; ПК-7.1; ПК-7.2; ПК-7.3	Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №2
3	Раздел 4 Интегралы по многообразиям и теорема Стокса	ПК-1.1; ПК-1.2; ПК-1.3; ПК-2.1; ПК-2.2; ПК-2.3; ПК-7.1; ПК-7.2; ПК-7.3	Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №3
Промежуточная аттестация		Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
Экзамен		ПК-1.1; ПК-1.2; ПК-1.3; ПК-2.1; ПК-2.2; ПК-2.3; ПК-7.1; ПК-7.2; ПК-7.3	Вопросы к экзамену

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №1

по дисциплине «***Дополнительные главы математического анализа***»

Тема: Функциональные последовательности и ряды. Интегралы, зависящие от параметра.

Вариант №1.

1. Исследовать равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2e^{-nx}}{x^2+n^2}$ на множестве $E=[0;+\infty)$.
2. Исследовать на равномерную сходимость семейство функций $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{1+x^2y^2}$ на множестве $X=(0;+\infty)$ при $y\to+\infty$.
3. Проверить, выполняется или нет равенство $\lim\limits_{y\to0+}\int_0^1\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx=\int_0^1\lim\limits_{y\to0+}\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx$.
4. Вычислить производную функции $\Phi(y)=\int_y^{e^y}\frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)}dx$, $y>0$.
5. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{arctg(a\sin x)}{\sin x}dx$.
6. Исследовать на равномерную сходимость на множестве E несобственный интеграл $\int_0^1\frac{\alpha x^2-\alpha^3}{\sqrt{x}(\alpha^2+x^2)^2}dx$, если: а) $E=(0,25;0,75)$; б) $E=(0;1)$.
7. Исследовать на непрерывность функцию $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x-\alpha)^2+1}dx$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
8. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx dx$, $\alpha,\beta>0$.
9. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить интеграл $\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$, $|\alpha|\le1$.
10. Вычислить с помощью интегралов Фруллани $\int_0^{+\infty}\frac{\beta\, arctg\,\alpha x-\alpha\, arctg\,\beta x}{x^2}dx$, $\alpha,\beta>0$.
11. Вычислить с помощью интеграла Дирихле $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^5\alpha x}{x^3}dx$.
12. Вычислить с помощью интеграла Эйлера-Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\, ch\gamma x dx$, $\alpha,\beta,\gamma>0$.
13. Вычислить с помощью интеграла Лапласа $\int_0^{+\infty}\frac{x^2-\alpha^2}{x^2+\alpha^2}\cdot\frac{\sin x}{x}dx$, $\alpha>0$.

14. Вычислить с помощью Γ и B функций $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^7}}$.

Вариант №2.

1. Исследовать равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x \cos nx}{n^2 x^2 + n}$ на множестве $E = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
2. Исследовать на равномерную сходимость семейство функций $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ на множестве $X = (1; +\infty)$ при $y \to 0+$.
3. Исследовать на непрерывность функцию $\Phi(y) = \int\limits_0^1 \frac{ye^x}{x^2 + y^2}$, $y \in \mathbb{R}$.
4. Проверить, что функция $u(r) = \int\limits_0^{\pi} e^{nr \cos \varphi} d\varphi$ удовлетворяет уравнению $u'' + \frac{1}{r} u' - n^2 u = 0$.
5. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2 - \sin^2 \varphi\right) d\varphi$, $|a| > 1$.
6. Исследовать на равномерную сходимость на множестве E несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha} x}{1 + x^3} dx$, если: а) $E = (0; 10)$; б) $E = (0; +\infty)$.
7. Исследовать на непрерывность функцию $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \sqrt{x} dx$, $\alpha \in (0, +\infty)$.
8. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx$, $\alpha, \beta > 0$.
9. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1 - \alpha^2 x^2\right)}{x\sqrt{1 - x^2}} dx$, $|\alpha| \le 1$.
10. Вычислить с помощью интегралов Фруллани $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\left(1 + e^{-\alpha x}\right) - \mathrm{arctg}\left(1 + e^{-\beta x}\right)}{x} dx$, $\alpha, \beta > 0$.
11. Вычислить с помощью интеграла Дирихле $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x \cos \gamma x}{x^2} dx$.
12. Вычислить с помощью интеграла Эйлера-Пуассона $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\right)^2 dx$, $\alpha, \beta > 0$.
13. Вычислить с помощью интегралов Френеля $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(ax^2 + 2bx + c\right) dx$, $a \ne 0$.

14. Вычислить с помощью Γ и B функций $\int\limits_0^2 x^{10}\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Вариант №3.

1. Исследовать равномерную сходимость последовательности $\left\{ f_n(x), n \geq 1 \right\}$ на заданном множестве E, если $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)$, а) $E=(0;2)$; б) $E=(2;+\infty)$.
2. Исследовать на равномерную сходимость семейство функций $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{1+x^2y^2}$ на множестве $X=(1;+\infty)$ при $y \to 0+$.
3. Проверить, выполняется или нет равенство $\lim\limits_{y\to+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x^2}{y}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x^2}{y}\,dx$.
4. Вычислить производную функции $\Phi(y)=\int\limits_y^{y^2} e^{-y(x+y)^2}\,dx$.
5. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\dfrac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\cdot\dfrac{dx}{\sin x}$,
$|a|<1$.
6. Исследовать на равномерную сходимость на множестве E несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sin\left(\alpha e^x\right)dx$, если: а) $E=(1;+\infty)$; б) $E=(0;1)$.
7. Исследовать на непрерывность функцию $F(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{4+x^\alpha}\,dx$, $\alpha\in(0,+\infty)$.
8. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin\beta x-\sin\gamma x}{x}e^{-\alpha x}\,dx$, $\alpha,\beta,\gamma>0$.
9. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\alpha^2x^2\right)}{1+\beta^2x^2}\,dx$, $\alpha,\beta>0$.
10. Вычислить с помощью интегралов Фруллани $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\beta\ln(1+\alpha x)-\alpha\ln(1+\beta x)}{x^2}\,dx$, $\alpha,\beta>0$.
11. Вычислить с помощью интеграла Дирихле $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin^3 x\cos\alpha x}{x}\,dx$.
12. Вычислить с помощью интеграла Эйлера-Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(4x^2-4x+17\right)e^{-\left(9x^2+6x+2\right)}dx$.
13. Вычислить с помощью интеграла Лапласа $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos\alpha x}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$, $\alpha>0$.
14. Вычислить с помощью Γ и B функций $\int\limits_0^{\pi}\sin^6 x\cos^2\dfrac{x}{2}\,dx$.

Вариант №4.

1. Определить область существования функции $f(x)$ и исследовать ее на непрерывность, если $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$.

2. Исследовать на равномерную сходимость семейство функций $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ на множестве $X=(1;A)$ при $y\to+\infty$.

3. Исследовать на непрерывность функцию $\Phi(y)=\int_0^1 \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}dx$, $y\in\mathbb{R}$.

4. Найти производные от полных эллиптических интегралов $E(r)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-r^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$,

   $F(r)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-r^2\sin^2\varphi}}$, где $0<r<1$, и выразить их через функции $E(r)$ и $F(r)$.

5. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл $\int_0^{\pi}\ln\left(1+2a\cos x+a^2\right)dx$.

6. Исследовать на равномерную сходимость на множестве E несобственный интеграл $\int_1^2 |\ln x|^{-\alpha}dx$, если: а) $E=(0.25;0.75)$; б) $E=(0;1)$.

7. Исследовать на непрерывность функцию $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha^2x}dx$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

8. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x-\cos\gamma x}{x}e^{-\alpha x}dx$, $\alpha,\beta,\gamma>0$.

9. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

10. Вычислить с помощью интегралов Фруллани $\int_0^{+\infty}\frac{\beta e^{-\alpha x}-\alpha e^{-\beta x}+\alpha-\beta}{x^2}dx$, $\alpha,\beta>0$.

11. Вычислить с помощью интеграла Дирихле $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^5\alpha x}{x^5}dx$.

12. Вычислить с помощью интеграла Эйлера-Пуассона $\int_0^{+\infty}x^2e^{-\alpha x^2}\operatorname{ch}\beta x\,dx$, $\alpha,\beta>0$.

13. Вычислить с помощью интегралов Френеля $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\left(\alpha x^2\right)-\cos\left(\beta x^2\right)}{x^2}dx$, $\beta,\alpha>0$.

14. Вычислить с помощью Γ и B функций $\int_0^1\frac{x^{12}dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.

Вариант №5.

1. Проверить, выполняется или нет равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx=\int\limits_a^b\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$, если $f_n(x)=n^2\sin x\cos^{2n}x$, $[a;b]=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Исследовать на равномерную сходимость семейство функций $f(x,y)=\dfrac{y\,arctg(xy)}{y+1}$ на множестве $X=(1;+\infty)$ при $y\to 0+$.
3. Исследовать на непрерывность функцию $\Phi(y)=\int\limits_0^1\dfrac{dx}{e^x-x+y}$, $y>0$.
4. Вычислить производную функции $\Phi(y)=\int\limits_0^y\left(\int\limits_{-yx}^{yx} e^{yx^3z^3}dz\right)dx$, $y>0$.
5. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)dx$, $a^2+b^2>0$.
6. Исследовать на равномерную сходимость на множестве E несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\left(\alpha^3+x\right)e^{-\alpha x^2}dx$, если: а) $E=(1;5)$; б) $E=(0;5)$.
7. Исследовать на непрерывность функцию $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{1+(x+\alpha)^2}dx$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
8. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{e^{-\alpha x}\sin^2\beta x}{x^2}dx$, $\alpha,\beta>0$.
9. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{\ln\left(\alpha^2+x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
10. Вычислить с помощью интегралов Фруллани $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos\alpha x\cdot e^{-\alpha x}-\cos\beta x\cdot e^{-\beta x}}{x}dx$, $\alpha,\beta>0$.
11. Вычислить с помощью интеграла Дирихле $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin\alpha x\sin\beta x\sin\gamma x}{x^3}dx$.
12. Вычислить с помощью интеграла Эйлера-Пуассона $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}\cdot e^{-x^{-2}}dx$.
13. Вычислить с помощью интегралов Френеля $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cdot\cos 2ax\,dx$, $a\neq 0$.
14. Вычислить с помощью Γ и B функций $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt[6]{1-x^6}}$.

Примечание. Задачи из КЗРТУ №1 обучающиеся выполняют в индивидуальном порядке по вариантам в качестве домашней индивидуальной работы; преподаватель проверяет выполнение КЗРТУ №1 согласно графику проведения КСР.

Критерии оценки:

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №1 оценивается максимум в 20 баллов. Баллы определяются по формуле $B=\frac{M}{N}\cdot 20$, где $N=14$ – общее количество задач в индивидуальной работе №1, M – количество правильно решенных задач.

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если он набрал от 17 до 20 баллов;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если он набрал от 13 до 16,9 баллов;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал от 8 до 12,9 баллов;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал менее пяти баллов.

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №2

по дисциплине «***Дополнительные главы математического анализа***»

Тема: Мера Жордана и кратные интегралы.

Вариант №1.

1. а) Записать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $f\in C(D)$, в виде повторного (или суммы повторных) двумя способами, если $D=\left\{(x,y)\middle|\, y\ge x^2,\ y\le \frac{1}{2}(x^2+1)\right\}$; б) вычислить $\iint\limits_D y\,dxdy$. Сделать чертеж.
2. а) В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $f\in C(D)$, перейти к полярным координатам и записать интеграл в виде повторного (или суммы повторных) двумя способами, если $D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2\ge y\right\}$; б) вычислить $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$. Сделать чертеж.
3. Производя надлежащую замену переменных, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{x}dxdy$, где $D=\left\{(x,y)\middle|\, 1-x\le y\le 3-x,\ \frac{x}{2}\le y\le 2x\right\}$.
4. а) Записать тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного, если T – тело, ограниченное поверхностями $z=4-x^2$, $2x+y=4$, $y=0$, $z=0$, $x=0$ $(x\ge 0)$; б) вычислить $\iiint\limits_T x\,dxdydz$. Сделать чертеж.
5. а) В тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ перейти к цилиндрическим координатам и записать интеграл в виде повторного, если $T=\left\{(x,y,z)\middle|\, 1\le x^2+y^2\le 4, x^2+y^2\ge z^2, z\ge 0\right\}$; б) вычислить $\iiint\limits_T z\,dxdydz$. Сделать чертеж.

6. а) В тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz$ перейти к сферическим координатам и записать интеграл в виде повторного, если $T=\left\{(x,y,z)\middle|\, x^2+y^2+z^2\le 2,\ z^2\le x^2+y^2,\ z\ge 0\right\}$; б) вычислить $\iiint\limits_T z^2\,dxdydz$. Сделать чертеж.

7. Пользуясь подходящей заменой переменных, вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}+\sqrt{\dfrac{z}{c}}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:
$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\cos\left(x^2+y^2\right)dx\,dy$.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_G \left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2 dx_1dx_2\ldots dx_n$, где $G=\left[0;1\right]^n$ – n-мерный единичный брус.

Вариант №2.

1. а) Записать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, где $f\in C(D)$, в виде повторного (или суммы повторных) двумя способами, если $D=\left\{(x,y)\middle|\, x-y-1\le 0,\ x+y-1\le 0,\ y^2\le 2x+1\right\}$; б) вычислить $\iint\limits_D dxdy$. Сделать чертеж.

2. а) В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, где $f\in C(D)$, перейти к полярным координатам и записать интеграл в виде повторного (или суммы повторных) двумя способами, если $D=\left\{(x,y)\middle|\,(x-1)^2+y^2\le 1,\ x^2+(y-1)^2\le 1\right\}$; б) вычислить $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$. Сделать чертеж.

3. Производя надлежащую замену переменных, вычислить двойной интеграл
$\iint\limits_D\left(\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}\right)^3 dxdy$, где $D=\left\{(x,y)\middle|\,\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$.

4. а) Записать тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz$ в виде повторного, если T – тело, ограниченное поверхностями $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$; б) вычислить $\iiint\limits_T z\,dxdydz$. Сделать чертеж.

5. а) В тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz$ перейти к цилиндрическим координатам и записать интеграл в виде повторного, если $T=\left\{(x,y,z)\middle|\, z^2\le x^2+y^2,\ z\ge x^2+y^2\right\}$; б) вычислить $\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$. Сделать чертеж.

6. а) В тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz$ перейти к сферическим координатам и записать интеграл в виде повторного, если $T=\left\{(x,y,z)\middle|\, 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\le y\le x\sqrt{3},\ x\ge 0\right\}$; б) вычислить $\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$. Сделать чертеж.

7. Пользуясь подходящей заменой переменных, вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

8. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\iint\limits_D e^{-(x+y)}\,dx\,dy$, $D=\{(x,y)|0\le x\le y\}$.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_G \left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)dx_1dx_2\ldots dx_n$, где $G=[0;1]^n$ – n-мерный единичный брус.

Вариант №3.

1. а) Записать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $f\in C(D)$, в виде повторного (или суммы повторных) двумя способами, если $D=\left\{(x,y)\middle|(x+1)^2+y^2\ge 1,(x-1)^2+y^2\ge 1,0\le y\le 1\right\}$; б) вычислить $\iint\limits_D y\,dxdy$. Сделать чертеж.

2. а) В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $f\in C(D)$, перейти к полярным координатам и записать интеграл в виде повторного (или суммы повторных) двумя способами, если $D=\left\{(x,y)\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}\cap\left\{(r,\varphi)\middle|\,r\ge\cos 3\varphi\right\}$; б) вычислить $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$. Сделать чертеж.

3. Производя надлежащую замену переменных, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^3+y^3\right)dxdy$, где $D=\left\{(x,y)\middle|\,x^2\le y\le 3x^2,\ \frac{1}{x}\le 2y\le\frac{3}{x}\right\}$.

4. а) Записать тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного, если T – тело, ограниченное поверхностями $z=y^2-x^2$, $y=3$, $z=0$; б) вычислить $\iiint\limits_T y\,dxdydz$. Сделать чертеж.

5. а) В тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ перейти к цилиндрическим координатам и записать интеграл в виде повторного, если $T=\left\{(x,y,z)\middle|\,x^2+y^2+z^2\le 2x,\ x^2+y^2\le 1\right\}$; б) вычислить $\iiint\limits_T dxdydz$. Сделать чертеж.

6. а) В тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ перейти к сферическим координатам и записать интеграл в виде повторного, если $T=\left\{(x,y,z)\middle|\left(x^2+y^2+z^2\right)^3\le a^3xyz,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$; б) вычислить $\iiint\limits_T x\,dxdydz$. Сделать чертеж.

7. Пользуясь подходящей заменой переменных, вычислить интеграл $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz$, где тело T расположено в октанте $x>0$, $y>0$, $z>0$ и ограничено поверхностями $z=\frac{x^2+y^2}{m}$, $z=\frac{x^2+y^2}{n}$, $xy=a^2$, $xy=b^2$, $y=\beta x$, $y=\gamma x$ $(0<a<b,\ 0<\beta<\gamma,\ 0<m<n)$.

8. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:
$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \sin\left(x^2+y^2\right) dx\,dy$.

9. Найти объем n-мерного цилиндра, ограниченного поверхностями
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=1$, $x_n=0$, $x_n=h$.

Вариант №4.

1. а) Записать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $f\in C(D)$, в виде повторного (или суммы повторных) двумя способами, если $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\ge a^2,\ y^2\le a^2-\frac{ax}{2},\ x\ge 0\right\}$; б) вычислить $\iint\limits_D x\,dxdy$. Сделать чертеж.

2. а) В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $f\in C(D)$, перейти к полярным координатам и записать интеграл в виде повторного (или суммы повторных) двумя способами, если $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\ge a^2,\ \left(x^2+y^2\right)^2\le 2a^2\left(x^2-y^2\right)\right\}$; б) вычислить $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$. Сделать чертеж.

3. Производя надлежащую замену переменных, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy(x+y)dxdy$, где $D=\left\{(x,y)\middle| -1\le x-y\le 1,\ \frac{1}{x}\le y\le\frac{2}{x}\right\}$.

4. а) Записать тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного, если T – тело, ограниченное поверхностями $z=x^2+y^2$, $y=2x$, $y=1$, $z=0$, $x+y=6$; б) вычислить $\iiint\limits_T x\,dxdydz$. Сделать чертеж.

5. а) В тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ перейти к цилиндрическим координатам и записать интеграл в виде повторного, если $T=\left\{(x,y,z)\middle| a^2\le x^2+y^2\le b^2,\ 0\le z\le x^2+y^2\right\}$; б) вычислить $\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$. Сделать чертеж.

6. а) В тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ перейти к сферическим координатам и записать интеграл в виде повторного, если $T=\left\{(x,y,z)\middle| \left(x^2+y^2+z^2\right)^2\le axyz,\ x\ge 0,\ z\ge 0\right\}$; б) вычислить $\iiint\limits_T y\,dxdydz$. Сделать чертеж.

7. Пользуясь подходящей заменой переменных, вычислить интеграл $\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz$, где $T=\left\{(x,y,z)\middle| a\le xyz\le b,\ cx\le yz\le dx,\ my\le x\le ny,\ y>0\right\}$.

8. Вычислить несобственный интеграл $\iint\limits_D e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy$, $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ge 1\right\}$, или установить его расходимость.

9. Найти объем n-мерной пирамиды $\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n}\le 1$, $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ldots,x_n\ge 0,\ a_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$.

Вариант №5.

1. а) Записать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $f\in C(D)$, в виде повторного (или суммы повторных) двумя способами, если $D=\left\{(x,y)\middle|(x+1)^2+(y-1)^2\ge 1,\ x+y-1\le 0,\ y\ge 0\right\}$; б) вычислить $\iint\limits_D dxdy$. Сделать чертеж.

2. а) В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $f\in C(D)$, перейти к полярным координатам и записать интеграл в виде повторного (или суммы повторных) двумя способами, если $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\ge a^2\right\}\cap\left\{(r,\varphi)\middle| r\le 2a(1+\cos\varphi)\right\}$; б) вычислить $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$. Сделать чертеж.

3. Производя надлежащую замену переменных, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D(x+y)dxdy$, где $D=\left\{(x,y)\middle|(x+y)^5\le ax^2y^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$.

4. а) Записать тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного, если T – тело, ограниченное поверхностями $2y^2=x$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$, $z=0$; б) вычислить $\iiint\limits_T x\,dxdydz$. Сделать чертеж.

5. а) В тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ перейти к цилиндрическим координатам и записать интеграл в виде повторного, если $T=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 2,\ z\ge x^2+y^2\right\}$; б) вычислить $\iiint\limits_T z\,dxdydz$. Сделать чертеж.

6. а) В тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ перейти к сферическим координатам и записать интеграл в виде повторного, если $T=\left\{(x,y,z)\middle|\left(x^2+y^2+z^2\right)^3\le az\left(x^2+y^2\right)^2\right\}$; б) вычислить $\iiint\limits_T z\,dxdydz$. Сделать чертеж.

7. Пользуясь подходящей заменой переменных, вычислить интеграл $\iiint\limits_T x^2\,dx\,dy\,dz$, где тело T ограничено поверхностями $z=ay^2$, $z=by^2$, $y>0$, $0<a<b$, $z=\lambda x$, $z=\mu x$, $0<\lambda<\mu$, $z=h$, $h>0$.

8. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2<1\right\}$.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_G\sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n}\,dx_1dx_2\ldots dx_n$, где $G=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\middle| x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ldots,x_n\ge 0,\ \ x_1+x_2+\ldots+x_n\le 1\right\}$.

Примечание. Задачи из КЗРТУ №2 обучающиеся выполняют в индивидуальном порядке по вариантам в качестве домашней индивидуальной работы; преподаватель проверяет выполнение КЗРТУ №2 согласно графику проведения КСР.

Критерии оценки:

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №2 оценивается максимум в 15 баллов. Баллы определяются по формуле $B = \frac{M}{N} \cdot 15$, где $N = 9$ – общее количество задач в индивидуальной работе №2, M – количество правильно решенных задач.

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если он набрал от 13 до 15 баллов;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если он набрал от 9 до 12,9 баллов;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал от 5 до 8,9 баллов;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал менее трёх баллов.

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №3

по дисциплине «***Дополнительные главы математического анализа***»

Тема: Интегралы по многообразиям и теорема Стокса.

Вариант №1.

1. Привести к координатному виду дифференциальную форму
$\omega = \left(x_2 dx_3 \wedge dx_4 + x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_4 + x_4 dx_1 \wedge dx_2 \right) \wedge$
$\wedge \left(x_1 x_2 dx_1 + x_2 x_3 dx_2 + x_3 x_4 dx_3 + x_4 x_1 dx_4 \right)$.
2. Выяснить, замкнута или нет следующая форма:
$\omega = \left(ye^{xyz} + xy^2 ze^{xyz} \right) dx + \left(xe^{xyz} + x^2 yze^{xyz} \right) dy + x^2 y^2 e^{xyz} dz$.
3. Найти сужение формы ω на поверхность S с указанной параметризацией:
$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$, S – сфера радиуса R,
$S = \left\{ (x, y, z) \middle| x = R\cos\varphi\cos\psi,\ y = R\sin\varphi\cos\psi,\ z = R\sin\psi \right\}$.
4. С помощью определения интеграла от дифференциальной формы вычислить следующий интеграл: $\int\limits_L \left(x^2 + y \right) dx + \left(y^2 + z \right) dy + \left(z^2 + x \right) dz$, где L – эллипс $x^2 + y^2 = 4$, $x + z = 2$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости. Сделать чертеж.
5. Применяя общую формулу Стокса, вычислить следующий интеграл от дифференциальной формы: $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2 \right) dy \wedge dz + \left(y^2 + z^2 \right) dz \wedge dx + \left(z^2 + x^2 \right) dx \wedge dy$, где S – внутренняя сторона поверхности тела $T = \left\{ (x, y, z) \middle| x^2 + y^2 + z^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \right\}$. Сделать чертеж.
6. Убедиться в том, что следующая дифференциальная форма является дифференциалом некоторой формы ω, и найти ω, если $d\omega = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z} \right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2} \right) dy - \frac{xy}{z^2} dz$.

Вариант №2.

1. Привести к координатному виду дифференциальную форму
$\omega = d\left(x_1x_2dx_1 + x_2x_3dx_2 + x_3x_4dx_3 + x_4x_1dx_4\right) \wedge \left(x_4dx_1 + x_3dx_2 + x_2dx_3 + x_1dx_4\right)$.
2. Выяснить, замкнута или нет следующая форма:
$\omega = \left(x_1^2 + x_2x_3 - x_3x_4\right)dx_1 \wedge dx_2 + \left(x_2^2 + 2x_3x_4 - x_2x_4\right)dx_1 \wedge dx_3 + 2x_1x_4dx_1 \wedge dx_4 +$
$+\left(x_1x_2 - x_3x_4\right)dx_2 \wedge dx_3 + \left(-2x_2x_4 + x_1x_3\right)dx_2 \wedge dx_4 + \left(x_1x_2 + x_2x_3 - 2x_1x_3\right)dx_3 \wedge dx_4$.
3. Найти сужение формы ω на кривую L с указанной параметризацией:
$\omega = xzdx + yzdy + \left(x^2 + y^2\right)dz$, $L = \left\{(x, y, z) \middle| x = at\sin t,\ y = at\cos t,\ z = bt^2\right\}$.
4. С помощью определения интеграла от дифференциальной формы вычислить следующий интеграл: $\iint\limits_S \left(x + y^2\right)dy \wedge dz + \left(y + z^2\right)dz \wedge dx + \left(z + x^2\right)dx \wedge dy$, где S – часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le z \le H$. Сделать чертеж.
5. Применяя общую формулу Стокса, вычислить следующий интеграл от дифференциальной формы: $\int\limits_L \left(z - x^2 - y\right)dx + \left(x + y + z\right)dy + \left(y + 2x + z^3\right)dz$, где L – кривая $y^2 + z^2 = x^2$, $x \ge 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, положительно ориентированная на внешней стороне правой $(x \ge 0)$ полусферы. Сделать чертеж.
6. Убедиться в том, что следующая дифференциальная форма является дифференциалом некоторой формы ω, и найти ω, если $d\omega = \left(\sqrt{1 - y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx +$
$+\left(\sqrt{1 - x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1 - y^2}} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y}\right)dy$.

Вариант №3.

1. Привести к координатному виду дифференциальную форму
$\omega = d\left(arctg\frac{x_1x_2}{x_3x_4}\right) \wedge d\left(x_3x_1 - x_2x_4\right)$.
2. Выяснить, замкнута или нет следующая форма: $\omega = z(x - y)\cos(x + y - z)dx \wedge dy +$
$+x(y + z)\cos(x + y - z)dy \wedge dz - y(x + z)\cos(x + y - z)dz \wedge dx$.
3. Найти сужение формы ω на поверхность S с указанной параметризацией:
$\omega = yzdy \wedge dz - xzdz \wedge dx + xydx \wedge dy$, S – тор,
$S = \left\{(x, y, z) \middle| x = (b + a\cos\varphi)\cos\psi,\ y = (b + a\cos\varphi)\sin\psi,\ z = a\sin\varphi\right\}$, $a < b$.
4. С помощью определения интеграла от дифференциальной формы вычислить следующий интеграл: $\int\limits_L (xy + z)dx + (yz + x)dy + (xz + y)dz$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, положительно ориентированная на верхней стороне плоскости. Сделать чертеж.
5. Применяя общую формулу Стокса, вычислить следующий интеграл от дифференциальной формы: $\int\limits_L \left(y^2 + z^2\right)dx + \left(x^2 + z^2\right)dy + \left(y^2 + x^2\right)dz$, где L – верхняя $(z \ge 2)$ петля кривой $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, положительно ориентированная на внешней стороне верхней $(z \ge 2)$ полусферы. Сделать чертеж.

6. Убедиться в том, что следующая дифференциальная форма является дифференциалом некоторой формы ω, и найти ω, если $d\omega = \frac{x+y+z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\Big(\left(y^2+z^2-xy-xz\right)dx+$
$+\left(z^2+x^2-yz-yx\right)dy+\left(x^2+y^2-zx-zy\right)dz\Big)$.

Вариант №4.

1. Привести к координатному виду дифференциальную форму
$\omega = d\left(2x_1^2x_2x_3dx_2\wedge dx_4 + x_1^2x_2^2dx_3\wedge dx_4 - 2x_1x_2^2x_4dx_1\wedge dx_3\right)$.

2. Выяснить, замкнута или нет следующая форма: $\omega = \left(x_1x_2+x_3x_4\right)dx_1\wedge dx_2+$
$+\left(x_1x_3+x_2x_4\right)dx_1\wedge dx_4+\left(x_1x_4+x_2x_3\right)dx_2\wedge dx_3+\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)dx_3\wedge dx_4$.

3. Найти сужение формы ω на поверхность S с указанной параметризацией:
$\omega = zdx\wedge dy + xdy\wedge dz + 2ydz\wedge dx$, $S=\left\{(x,y,z)\middle| x=x,\ y=xz\,ln\left(x^2+z^2\right),\ z=z\right\}$.

4. С помощью определения интеграла от дифференциальной формы вычислить следующий интеграл: $\iint\limits_S x^3dy\wedge dz + y^3dz\wedge dx + z^3dx\wedge dy$, где S – верхняя сторона части параболоида $x^2+y^2=2-z$, $z\ge 0$. Сделать чертеж.

5. Применяя общую формулу Стокса, вычислить следующий интеграл от дифференциальной формы: $\iint\limits_S xz^2dy\wedge dz + yx^2dz\wedge dx + zy^2dx\wedge dy$, где S – внешняя сторона поверхности тела $T=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 2az,\ x^2+y^2\ge 3z^2,\ x\ge y\right\}$. Сделать чертеж.

6. Убедиться в том, что следующая дифференциальная форма является дифференциалом некоторой формы ω, и найти ω, если
$d\omega = \left(2xyz+\frac{1}{z}\right)dx+\left(x^2z-\frac{1}{z^2}\right)dy+\left(x^2y-\frac{x}{z^2}+\frac{2y}{z^3}\right)dz$.

Вариант №5.

1. Привести к координатному виду дифференциальную форму
$\omega = d\left(2x_1x_2e^{x_3+x_4}dx_1\wedge dx_3 + x_1^2e^{x_3+x_4}dx_2\wedge dx_3 + 2x_1x_2e^{x_3+x_4}dx_1\wedge dx_4 + x_1^2e^{x_3+x_4}dx_2\wedge dx_4\right)$.

2. Выяснить, замкнута или нет следующая форма: $\omega = \left(x_4x_3+x_2^2\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3+$
$+x_1x_3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4+\left(x_2x_4-x_4^2\right)dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4+x_1x_2dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$.

3. Найти сужение формы ω на поверхность S с указанной параметризацией:
$\omega = xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy$, $S=\left\{(x,y,z)\middle| x=x,\ y=y,\ z=x\sin y+y\sin x\right\}$.

4. С помощью определения интеграла от дифференциальной формы вычислить следующий интеграл: $\int\limits_L \left(z^2-y^2\right)dx+\left(x^2-z^2\right)dy+\left(y^2-x^2+x\right)dz$, где L – эллипс $x^2+y^2=8x$, $x+y+z=0$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости. Сделать чертеж.

5. Применяя общую формулу Стокса, вычислить следующий интеграл от дифференциальной формы: $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dy\wedge dz+\sqrt{x^2+y^2}\,dz\wedge dx+\sqrt{z}\,dx\wedge dy$, где S – внешняя сторона поверхности тела $T=\left\{(x,y,z)\middle|\, x^2+y^2\le z^2,\ x^2+y^2\le 2-z,\ z\ge 0,\ x\ge 0\right\}$. Сделать чертеж.

6. Убедиться в том, что следующая дифференциальная форма является дифференциалом некоторой формы ω, и найти ω, если $d\omega=\left(\dfrac{y}{2\sqrt{1+xy}}-\dfrac{y}{x^2+y^2}+e^x\sin 2y+\dfrac{1}{\sin x}\right)dx+$
$+\left(\dfrac{x}{2\sqrt{1+xy}}+\dfrac{x}{x^2+y^2}+2e^x\cos 2y\right)dy$.

Примечание. Задачи из КЗРТУ №3 обучающиеся выполняют в индивидуальном порядке по вариантам в качестве домашней индивидуальной работы; преподаватель проверяет выполнение КЗРТУ №3 согласно графику проведения КСР.

Критерии оценки:

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №3 оценивается максимум в 15 баллов. Баллы определяются по формуле $B=\dfrac{M}{N}\cdot 15$, где $N=6$ – общее количество задач в индивидуальной работе №3, M – количество правильно решенных задач.

– **оценка «отлично»** выставляется студенту, если он набрал от 13 до 15 баллов;
– **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если он набрал от 9 до 12,9 баллов;
– **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал от 5 до 8,9 баллов;
– **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал менее трёх баллов.

Вопросы к экзамену

по дисциплине «***Дополнительные главы математического анализа***»

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность собственного интеграла, зависящего от параметра, дифференцирование по параметру.
2. Дифференцирование интеграла с переменными пределами. Интегрирование собственного интеграла, зависящего от параметра
3. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла Римана для функциональных последовательностей.
4. Равномерно сходящиеся семейства функций. Связь с равномерно сходящимися функциональными последовательностями. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла Римана для семейств функций.
5. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса.
6. Теоремы о среднем значении интеграла Римана.
7. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.
8. Предельный переход под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра.
9. Непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра.
10. Собственное интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра.
11. Дифференцирование несобственного интеграла, зависящего от параметра.
12. Несобственное интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра.
13. Интеграл Дирихле.
14. Интеграл Эйлера-Пуассона.
15. Интеграл Лапласа.
16. Интегралы Френеля.
17. Интегралы Фруллани.
18. Гамма-функция Эйлера и ее свойства.
19. Бета-функция Эйлера и ее свойства.
20. Формула Эйлера-Гаусса. Формула дополнения. Связь между $\boldsymbol{\Gamma}$ и $\boldsymbol{B}$ функциями.
21. Разбиение бруса. Суммы Дарбу и их свойства. Верхний и нижний интегралы. Определение кратного интеграла по брусу.
22. Интегрируемость по брусу непрерывной функции.
23. Свойства интеграла по брусу от непрерывной функции.
24. Сведение $\boldsymbol{m}$-кратного интеграла к последовательным однократным.
25. Множества, измеримые по Жордану и их свойства. Мера Жордана. Свойства меры.
26. Цилиндрические множества и их измеримость.
27. Определение кратного интеграла по измеримому множеству. Свойства интеграла.
28. Вычисление кратного интеграла по цилиндрическому множеству.
29. Теорема о компактности множества при непрерывном отображении.
30. Понятие гомеоморфизма и диффеоморфизма. Вспомогательная лемма. Измеримость образа при простейшем диффеоморфизме.
31. Формула замены переменных для простейшего диффеоморфизма.
32. Формула замены переменных для композиции диффеоморфизмов.
33. Локальное разложение диффеоморфизма в композицию простейших.
34. Формула замены переменных в кратном интеграле. Основная теорема.
35. Следствия из формулы замены переменных. Переход к полярным, цилиндрическим и сферическим координатам. Обобщенная полярная система координат. Обобщенная сферическая система координат. Сферическая система координат в $\boldsymbol{R}^m$.
36. Несобственные кратные интегралы. Необходимое и достаточное условие сходимости интеграла от неотрицательной функции. Признак сравнения.
37. Теорема об абсолютной сходимости несобственных кратных интегралов.
38. Знакопеременные полилинейные формы. Внешнее произведение и его свойства.

39. Дифференциальные формы: основные понятия. Операция внешнего дифференцирования и ее свойства.
40. Замена переменных в дифференциальных формах. Свойства отображения $\boldsymbol{\varphi}^{*}$.
41. Многообразия в пространстве $\boldsymbol{R^m}$. Ориентация многообразия и его границы.
42. Дифференциальные формы на многообразии. Интеграл от формы по многообразию. Общая формула Стокса.
43. Замкнутые дифференциальные формы. Теорема Пуанкаре. Следствия из теоремы Пуанкаре.
44. Теорема о независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования.

Критерии оценки:

– оценка «отлично» выставляется студенту, если он ответил на все вопросы в билете, изложил правильно в логической последовательности доказательства всех утверждений и теорем по билету, отвечает на дополнительные вопросы, связанные с темами вопросов в билете, имеет среднюю оценку не менее «4.5» по задачам реконструктивно-творческого уровня №1-3;

– оценка «хорошо» выставляется студенту, если ответил на все вопросы в билете, изложил доказательства не менее 50% утверждений и теорем по билету, отвечает на дополнительные вопросы, связанные с темами вопросов в билете, имеет среднюю оценку не менее «3.5» по задачам реконструктивно-творческого уровня №1-3;

– оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он ответил на все вопросы в билете без доказательств, может дать ответ на некоторые дополнительные вопросы (не менее 50%), связанные с темами вопросов в билете, имеет среднюю оценку не менее «3» по задачам реконструктивно-творческого уровня №1-3.