

Государственное образовательное учреждение
«Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко»

Физико-технический институт

Физико-математический факультет

Кафедра высшей и прикладной математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедры-разработчика

 / Коровай А.В.

Протокол № 1 «30» 08 2024 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Б1.О.06 «Интегральные уравнения»

на 2024/ 2025 учебный год

Направление

01.04.01 Математика

Профиль

Математика. Преподавание математики и информатики

Квалификация

Магистр

Форма обучения

Очная

ГОД НАБОРА 2023

Разработчик: доцент кафедры ВПМИ

 / Алещенко С.А.

«30» 08 2024 г.

Тирасполь 2024 г.

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Интегральные уравнения»

1. В результате изучения дисциплины «*Интегральные уравнения*» у обучающихся должны формироваться следующие компетенции:

Категория (группа) компетенций	Код и наименование	Код и наименование индикатора достижения универсальной компетенции
Общепрофессиональные компетенции и индикаторы их достижения		
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	ИД-1 _{ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3} Знает виды деятельности по реализации научной педагогической деятельности, направленной на изучение совокупности отношений, возникающих в педагогической сфере, новых образовательных технологий, активных и интерактивных форм обучения
	ОПК-2 Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	ИД-2 _{ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3} Умеет: осуществлять педагогическую деятельность в двух ее формах (учебной и воспитательной); планировать результаты обучения, проводить промежуточный и итоговый контроль знаний обучающихся
	ОПК-3 Способен использовать знания в сфере математики при осуществлении педагогической деятельности	ИД-3 _{ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3} Владеет методами подготовки к проведению занятий по основным профессиональным образовательным программам и дополнительным профессиональным программам
Обязательные профессиональные компетенции и индикаторы их достижения		
	ПК-1 Способен на самостоятельное построение целостной картины дисциплины	ИД-1 _{ПК-1} Знает: историю, теорию, закономерности и принципы построения и функционирования образовательных систем, роль и место образования в жизни личности и общества ИД-2 _{ПК-1} Умеет: разрабатывать и реализовывать программы учебных дисциплин в рамках основной общеобразовательной программы ИД-3 _{ПК-1} Владеет: формами и методами обучения, в том числе выходящими за рамки учебных занятий: проектная деятельность, лабораторные эксперименты, полевая практика и т.п.
	ПК-2 Владеет методами математического моделирования при анализе глобальных проблем на основе глубоких знаний фундаментальных математических дисциплин и компьютерных наук	ИД-1 _{ПК-2} Знает: преподаваемый предмет в пределах требований федеральных государственных образовательных стандартов и основной общеобразовательной программы, его истории и места в мировой культуре и науке ИД-2 _{ПК-2} Умеет: обеспечивать коммуникативную и учебную «включенности» всех учащихся в образовательный процесс (в частности, понимание формулировки задания, основной терминологии, общего смысла идущего в классе обсуждения) ИД-3 _{ПК-2} Владеет: предметно-педагогической ИКТ-компетентностью (отражающей профессиональную

		ИКТ-компетентность соответствующей области человеческой деятельности)
	ПК-7 Способен к организации учебной деятельности в конкретной предметной области (математика, физика, информатика)	ИД-1_{ПК-7} Знает: преподаваемый предмет в пределах требований федеральных государственных образовательных стандартов и основной общеобразовательной программы, его истории и места в мировой культуре и науке ИД-2_{ПК-7} Умеет: использовать информационные источники, следить за последними открытиями в области математики и знакомить с ними обучающихся, квалифицированно набирать математический текст, проводить различия между точным и (или) приближенным математическим доказательством, в частности, компьютерной оценкой, приближенным измерением, вычислением и др. ИД-3_{ПК-7} Владеет: основными математическими компьютерными инструментами визуализации данных, зависимостей, отношений, процессов, геометрических объектов; вычислений - численных и символьных; обработки данных (статистики); экспериментальных лабораторий (вероятность, информатика)

2. Программа оценивания контролируемой компетенции:

Текущая аттестация	Контролируемые модули, разделы (темы) дисциплины и их наименование	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	Раздел 1 Принцип Банаха сжимающих отображений.	ОПК-1, 2, 3; ПК-1, 2, 7.	Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №1
2	Раздел 2 Методы решения линейных интегральных уравнений.	ОПК-1, 2, 3; ПК-1, 2, 7.	Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №2
3	Раздел 3 Теория Рисса-Шаудера.	ОПК-1, 2, 3; ПК-1, 2, 7.	Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №3
4	Раздел 3 Принцип Шаудера неподвижной точки.	ОПК-1, 2, 3; ПК-1, 2, 7.	Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №4
Промежуточная аттестация		Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
Зачет		ОПК-1, 2, 3; ПК-1, 2, 7.	Вопросы к зачету

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №1

по дисциплине «*Интегральные уравнения*»

Тема: Принцип Банаха сжимающих отображений.

Задача 1. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\text{Фредгольма II рода } x(t) = t^3 + \frac{1}{2} \int_0^1 t^3 s^3 x(s) ds, \quad x_0(t) \equiv 0.$$

Задача 2. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\text{Фредгольма II рода } x(t) = \sqrt[4]{t} + \frac{1}{8} \int_0^1 \sqrt[4]{\frac{t}{s-s^2}} x(s) ds, \quad x_0(t) \equiv 0.$$

Задача 3. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение Фредгольма II рода

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^{\pi/2} \frac{x(s)}{tg^\alpha t \cdot tg^\beta s} ds.$$

Задача 4. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\text{Вольтерра II рода } x(t) = t + 1 - \int_0^t x(s) ds, \quad x_0(t) \equiv 0.$$

Задача 5. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\text{Вольтерра II рода } x(t) = 1 + t - 3 \int_0^t \frac{1+t}{1+s} x(s) ds, \quad x_0(t) \equiv 0.$$

Задача 6. Исследовать на разрешимость в пространстве $C_{[0,1]}$ нелинейное интегральное

уравнение типа Вольтерра $x(t) = f(t) + \lambda \int_0^t t^\alpha (1-s)^\beta \sin(s^\gamma |x(s)|) ds$ в зависимости от параметров α, β, γ .

Задача 7. Исследовать на разрешимость в пространстве $C_{[0,1]}$ нелинейное интегральное

уравнение типа Фредгольма $x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 t^\alpha (1-s)^\beta \sin(s^\gamma |x(s)|) ds$ в зависимости от параметров α, β, γ .

Задача 8. Исследовать на разрешимость в пространстве $L_{\infty[0,1]}$ нелинейное интегральное

уравнение типа Фредгольма $x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 t^\alpha (1-s)^\beta \sin(s^\gamma |x(s)|) ds$ в зависимости от параметров α, β, γ .

Задача 9. Исследовать на разрешимость в пространстве $L_{1[0,1]}$ нелинейное интегральное

уравнение типа Фредгольма $x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 t^\alpha (1-s)^\beta \sin(s^\gamma |x(s)|) ds$ в зависимости от параметров α, β, γ .

Задача 10. Исследовать на разрешимость в пространстве $L_{2[0,1]}$ нелинейное интегральное уравнение типа Фредгольма $x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 t^\alpha (1-s)^\beta \sin(s^\gamma |x(s)|) ds$ в зависимости от параметров α, β, γ .

Задача 11. Исследовать на разрешимость в пространстве $L_{p[0,1]}$ нелинейное интегральное уравнение типа Фредгольма $x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 t^\alpha (1-s)^\beta \sin(s^\gamma |x(s)|) ds$ в зависимости от параметров α, β, γ .

Критерии оценки:

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №1 для индивидуальной работы оценивается максимум в 22 балла.

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если он набрал от 18,5 до 22 баллов;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если он набрал от 14,5 до 18,4 баллов;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал от 8 до 14,4 баллов;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал менее четырех баллов.

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №2

по дисциплине «*Интегральные уравнения*»

Тема: Методы решения линейных интегральных уравнений.

Задача 1. Построить резольвенту и решить интегральное уравнение Фредгольма II рода

$$x(t) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t \sin s x(s) ds + e^{\cos t}.$$

Задача 2. Построить резольвенту и решить интегральное уравнение Вольтерра II рода

$$x(t) = e^t \sin t + \int_0^t \frac{2 + \cos t}{2 + \cos s} x(s) ds.$$

Задача 3. При любых значениях параметра λ решить интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$x(t) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(2t + s) x(s) ds + \pi - 2t.$$

Задача 4. При любых значениях параметра λ решить с помощью характеристических чисел и собственных функций интегральное уравнение с симметричным вырожденным ядром

$$x(t) = \lambda \int_0^{2\pi} \left(\sin(t + s) + \frac{1}{2} \right) x(s) ds + t.$$

Задача 5. При любых значениях параметра λ решить с помощью характеристических чисел и собственных функций интегральное уравнение с симметричным невырожденным ядром

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^{\pi} K(t, s) x(s) ds, \text{ где } K(t, s) = \begin{cases} \cos t \sin s, & 0 \leq t \leq s \leq \pi, \\ \cos s \sin t, & 0 \leq s \leq t \leq \pi, \end{cases}$$

если: а) $f(t) = 1$; б) $f(t) = \cos \frac{3t}{2}$.

Задача 6. При любых значениях параметра λ решить с помощью рядов Фурье интегральное уравнение

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(t - s) x(s) ds, \text{ если: 1) } K(-t) = K(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}; 2)$$

$$K(t + 2\pi) = K(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}; 3) K(t) = t^2 \quad \forall t \in [0, \pi].$$

Критерии оценки:

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №2 оценивается максимум в 12 баллов.

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если он набрал от 10,5 до 12 баллов;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если он набрал от 8,5 до 10,4 баллов;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал от 6 до 8,4 баллов;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал менее четырёх баллов.

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №3

по дисциплине «*Интегральные уравнения*»

Тема: Теория Рисса-Шаудера.

Задача 1. Не решая уравнения, исследовать на разрешимость при различных значениях

параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ интегральное уравнение
$$x(t) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{1+ts}{1+s^2} x(s) ds + t + \pi t^2.$$

Задача 2. Не решая уравнения, найти все значения параметров a , b и c , при которых ин-

тегральное уравнение
$$x(t) = \lambda \int_0^1 \left(ts - \frac{1}{3} \right) x(s) ds + at^2 + bt + c$$
 имеет решение при любых

$\lambda \in \mathbb{R}$.

Задача 3. Не решая уравнения, исследовать на разрешимость при различных значениях параметров $\lambda, a, b, c \in \mathbb{R}$ интегральное уравнение

$$x(t) = at^2 + bt + c + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} \sin(t+s) x(s) ds.$$

Критерии оценки:

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №3 оценивается максимум в 6 баллов.

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если он набрал от 5,5 до 6 баллов;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если он набрал от 4,5 до 5,4 баллов;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал от 3 до 4,4 баллов;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал менее двух баллов.

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №4

по дисциплине «*Интегральные уравнения*»

Тема: Принцип Шаудера неподвижной точки.

Задача 1. Применяя принцип Шаудера, исследовать на разрешимость в пространстве $C_{[0,1]}$ нелинейное интегральное уравнение типа Фредгольма

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 t^\alpha (1-s)^\beta \sin(s^\gamma |x(s)|) ds \text{ в зависимости от параметров } \alpha, \beta, \gamma.$$

Задача 2. Применяя принцип Шаудера, исследовать на разрешимость в пространстве $L_{\infty[0,1]}$ нелинейное интегральное уравнение типа Фредгольма

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 t^\alpha (1-s)^\beta \sin(s^\gamma |x(s)|) ds \text{ в зависимости от параметров } \alpha, \beta, \gamma.$$

Задача 3. Применяя принцип Шаудера, исследовать на разрешимость в пространстве $L_{1[0,1]}$ нелинейное интегральное уравнение типа Фредгольма

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 t^\alpha (1-s)^\beta \sin(s^\gamma |x(s)|) ds \text{ в зависимости от параметров } \alpha, \beta, \gamma.$$

Задача 4. Применяя принцип Шаудера, исследовать на разрешимость в пространстве $L_{2[0,1]}$ нелинейное интегральное уравнение типа Фредгольма

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 t^\alpha (1-s)^\beta \sin(s^\gamma |x(s)|) ds \text{ в зависимости от параметров } \alpha, \beta, \gamma.$$

Задача 5. Применяя принцип Шаудера, исследовать на разрешимость в пространстве $L_{p[0,1]}$ нелинейное интегральное уравнение типа Фредгольма

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 t^\alpha (1-s)^\beta \sin(s^\gamma |x(s)|) ds \text{ в зависимости от параметров } \alpha, \beta, \gamma.$$

Критерии оценки:

Комплект задач реконструктивно-творческого уровня №4 оценивается максимум в 10 баллов.

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если он набрал от 8,5 до 10 баллов;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если он набрал от 6,5 до 8,4 баллов;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал от 4 до 6,4 баллов;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если он набрал менее трёх баллов.

Вопросы к зачету

по дисциплине «*Интегральные уравнения*»

1. Понятие интегрального уравнения. Классификация интегральных уравнений. Задачи, приводящие к понятию интегрального уравнения.
2. Принцип Банаха сжимающих отображений. Метод последовательных приближений.
3. Исследование на разрешимость интегральных уравнений Фредгольма II рода в пространствах $L_{p[a,b]}$, $L_{2[a,b]}$ с помощью принципа сжимающих отображений. Решение интегральных уравнений Фредгольма II рода методом последовательных приближений.
4. Исследование на разрешимость интегральных уравнений Фредгольма II рода в пространствах $L_{1[a,b]}$, $L_{\infty[a,b]}$, $C_{[a,b]}$ с помощью принципа сжимающих отображений.
5. Обобщенный принцип сжимающих отображений.
6. Исследование на разрешимость интегральных уравнений Вольтерра II рода в пространстве $C_{[a,b]}$ с помощью обобщенного принципа сжимающих отображений. Решение интегральных уравнений Вольтерра II рода методом последовательных приближений.
7. Исследование на разрешимость нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма в пространствах $L_{p[a,b]}$, $L_{2[a,b]}$ с помощью принципа сжимающих отображений.
8. Исследование на разрешимость нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма в пространствах $L_{1[a,b]}$, $L_{\infty[a,b]}$, $C_{[a,b]}$ с помощью принципа сжимающих отображений.
9. Исследование на разрешимость нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра в пространстве $C_{[a,b]}$ с помощью обобщенного принципа сжимающих отображений.
10. Повторные ядра и резольвента интегрального уравнения Фредгольма II рода. Решение интегральных уравнений Фредгольма II рода с помощью резольвенты.
11. Повторные ядра и резольвента интегрального уравнения Вольтерра II рода. Решение интегральных уравнений Вольтерра II рода с помощью резольвенты.
12. Интегральные уравнения Фредгольма II рода с вырожденными ядрами.
13. Собственные значения и собственные элементы линейного компактного самосопряженного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.
14. Свойства и структура собственных значений и собственных элементов линейного компактного самосопряженного оператора. Теорема о спектральном разложении.
15. Решение интегральных уравнений с эрмитовыми ядрами.
16. Ядро и образ оператора $T = I - \lambda A$, $A \in \mathbf{C}(X)$.
17. Первая и вторая теоремы Фредгольма. Следствия из теорем.
18. Третья теорема Фредгольма.
19. Четвертая теорема Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.
20. Теорема о структуре спектра оператора $A \in \mathbf{C}(X)$.
21. Первая и вторая леммы принципа Шаудера.
22. Третья лемма принципа Шаудера. Принцип Шаудера неподвижной точки.
23. Применение принципа Шаудера неподвижной точки к доказательству теоремы Пенано.

24. Исследование на разрешимость нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма в пространстве $C_{[a,b]}$ с помощью принципа Шаудера.
25. Исследование на разрешимость нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма в пространстве $L_{2[a,b]}$ с помощью принципа Шаудера.
26. Исследование на разрешимость нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма в пространстве $L_p[a,b]$ с помощью принципа Шаудера.
27. Исследование на разрешимость нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма в пространстве $L_1[a,b]$ с помощью принципа Шаудера.
28. Исследование на разрешимость нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма в пространстве $L_{\infty[a,b]}$ с помощью принципа Шаудера.

Критерии оценки:

Ответ студента на зачете оценивается от 10 до 30 баллов. Каждый вопрос зачета оценивается максимум в 10 баллов.

- **оценка «зачтено»** выставляется студенту согласно положению о балльно-рейтинговой системе;
- **оценка «не зачтено»** выставляется студенту согласно положению о балльно-рейтинговой системе.