Государственное образовательное учреждение

«Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко»

Физико-технический институт

Физико-математический факультет

Кафедра высшей и прикладной математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедры-разработчика
____________________/Коровай А.В.
(подпись, расшифровка подписи)
протокол № 1 «30» 08 20__ г.

Фонд оценочных средств

по дисциплине

Б1.О.05 Основные алгебраические системы и их элементарные свойства

Направление
01.04.01 Математика

Профиль
Математика. Преподавание математики и информатики

Квалификация
Магистр

Форма обучения
очная

ГОД НАБОРА 2024

Разработала: доцент ВиПМиИ,
Г.Н. Ермакова
____
(подпись)
«30» 08 2024 г.

Тирасполь 2024 г.

Паспорт фонда оценочных средств по учебной дисциплине
«Основные алгебраические системы и их элементарные свойства»

1. В результате изучения дисциплины «Основные алгебраические системы и их элементарные свойства» у обучающихся должны быть сформированы следующие компетенции:

Категория (группа) компетенций	Код и наименование	Код и наименование индикатора достижения универсальной компетенции
Общепрофессиональные компетенции выпускников и индикаторы их достижения		
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	ОПК-1.1 Знает виды деятельности по реализации научной педагогической деятельности, направленной на изучение совокупности отношений, возникающих в педагогической сфере, новых образовательных технологий, активных и интерактивных форм обучения ОПК-1.2 Умеет: осуществлять практическую педагогическую деятельность в двух ее формах (учебной и воспитательной); планировать результаты обучения, проводить промежуточный и итоговый контроль знаний обучающихся ОПК-1.3 Владеет методами подготовки к проведению занятий по основным профессиональным образовательным программам и дополнительным профессиональным программам
	ОПК-2 Способен строить и анализировать математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1 Знает виды деятельности по реализации научной педагогической деятельности, направленной на изучение совокупности отношений, возникающих в педагогической сфере, новых образовательных технологий, активных и интерактивных форм обучения ОПК-2.2 Умеет: осуществлять практическую педагогическую деятельность в двух ее формах (учебной и воспитательной); планировать результаты обучения, проводить промежуточный и итоговый контроль знаний обучающихся ОПК-2.3 Владеет методами подготовки к проведению занятий по основным профессиональным образовательным программам и дополнительным профессиональным программам
	ОПК-3 Способен использовать знания в сфере математики при осуществлении педагогической деятельности	ОПК-3.1 Знает виды деятельности по реализации научной педагогической деятельности, направленной на изучение совокупности отношений, возникающих в педагогической сфере, новых образовательных технологий, активных и интерактивных форм обучения ОПК-3.2 Умеет: осуществлять практическую педагогическую деятельность в двух ее формах (учебной и воспитательной); планировать результаты обучения, проводить промежуточный и итоговый контроль знаний обучающихся ОПК-3.3 Владеет методами подготовки к проведению занятий по основным профессиональным образовательным программам и дополнительным профессиональным программам
Обязательные профессиональные компетенции и индикаторы их достижения		
	ПК-1 Способен на самостоятельное построение целостной картины дисциплины	ПК-1.1 Знает: историю, теорию, закономерности и принципы построения и функционирования образовательных систем, роль и место образования в жиз-ни личности и общества ПК-1.2 Умеет: разрабатывать и реализовывать программы учебных дисциплин в рамках основной общеобразовательной программы ПК-1.3 Владеет: формами и методами обучения, в том числе выходящими за рамки учебных занятий: проектная деятельность, лабораторные эксперименты, полевая практика и т.п.

	ПК-3 Способен к интенсивной научно-исследовательской и научно-изыскательской деятельности	ПК-3.1 Знает методы формирования общекультурных компетенций и понимание места предмета в общей картине мира, его истории и места в мировой культуре и науке ПК-3.2 Умеет: обеспечивать помощь обучающимся, не освоившим необходимый материал (из всего курса математики), в форме предложения специальных заданий, индивидуальных консультаций (в том числе дистанционных); осуществлять пошаговый контроль выполнения соответствующих заданий, при необходимости прибегая к помощи других педагогических работников, в частности тьюторов ПК-3.3 Владеет: современными образовательными технологиями, включая информационные, а также цифровыми образовательными ресурсами
	ПК-7 Способен к организации учебной деятельности в конкретной предметной области (математика, физика, информатика)	ПК-7.1 Знает: преподаваемый предмет в пределах требований федеральных государственных образовательных стандартов и основной общеобразовательной программы, его истории и места в мировой культуре и науке ПК-7.2 Умеет: использовать информационные источники, следить за последними открытиями в области математики и знакомить с ними обучающихся, квалифицированно набирать математический текст, проводить различия между точным и (или) приближенным математическим доказательством, в частности, компьютерной оценкой, приближенным измерением, вычислением и др. ПК-7.3 Владеет: основными математическими компьютерными инструмента-ми визуализации данных, зависимостей, отношений, процессов, геометрических объектов; вычислений - численных и символьных; обработки данных (статистики); экспериментальных лабораторий (вероятность, информатика)

2. Программа оценивания контролируемой компетенции:

Текущая аттестация	Контролируемые модули, разделы (темы дисциплины и их наименование*	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства**
№1	Множества и отношения	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3; ОПК-2.1; ОПК-2.2; ОПК-2.3; ОПК-3.1; ОПК-3.2; ОПК-3.3; ПК-1.1; ПК-1.2; ПК-1.3; ПК-3.1; ПК-3.2; ПК-3.3; ПК-7.1; ПК-7.2; ПК-7.3	Выполнение контрольных заданий, сообщение, собеседование
№2	Элементы теории групп	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3; ОПК-2.1; ОПК-2.2; ОПК-2.3; ОПК-3.1; ОПК-3.2; ОПК-3.3; ПК-1.1; ПК-1.2; ПК-1.3; ПК-3.1; ПК-3.2; ПК-3.3; ПК-7.1; ПК-7.2; ПК-7.3	Выполнение контрольных заданий, сообщение, собеседование
№3	Кольца	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3; ОПК-2.1; ОПК-2.2; ОПК-2.3; ОПК-3.1; ОПК-3.2; ОПК-3.3; ПК-1.1; ПК-1.2; ПК-1.3; ПК-3.1; ПК-3.2; ПК-3.3; ПК-7.1; ПК-7.2; ПК-7.3	Выполнение контрольных заданий, сообщение, собеседование
№4	Поля	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3; ОПК-2.1; ОПК-2.2; ОПК-2.3; ОПК-3.1; ОПК-3.2;	Выполнение контрольных заданий, сообщение, собеседование

		ОПК-3.3; ПК-1.1; ПК-1.2; ПК-1.3; ПК-3.1; ПК-3.2; ПК-3.3; ПК-7.1; ПК-7.2; ПК-7.3	
№5	Основные числовые системы	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3; ОПК-2.1; ОПК-2.2; ОПК-2.3; ОПК-3.1; ОПК-3.2; ОПК-3.3; ПК-1.1; ПК-1.2; ПК-1.3; ПК-3.1; ПК-3.2; ПК-3.3; ПК-7.1; ПК-7.2; ПК-7.3	Выполнение контрольных заданий, сообщение, собеседование
Промежуточная аттестация		Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства**
Экзамен		ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3; ОПК-2.1; ОПК-2.2; ОПК-2.3; ОПК-3.1; ОПК-3.2; ОПК-3.3; ПК-1.1; ПК-1.2; ПК-1.3; ПК-3.1; ПК-3.2; ПК-3.3; ПК-7.1; ПК-7.2; ПК-7.3	Варианты контрольных заданий, перечень вопросов

Комплект вопросов для проведения собеседованияпо дисциплине «Основные алгебраические системы и их элементарные свойства»

Множества и отношения

1. Множества.
2. Бинарные отношения.
3. Функции.
4. Отношение эквивалентности.
5. Отношение порядка.

Элементы теории групп

6. Группа. Подгруппа.
7. Циклические подгруппы
8. Смежные классы. Нормальные делители групп.
9. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп
10. Фактор-группа

Кольца

11. Кольца
12. Понятие кольца
13. Простейшие свойства кольца
14. Гомоморфизмы и изоморфизмы колец
15. Подкольца

Поля

16. Поля
17. Понятие поля
18. Простейшие свойства поля
19. Гомоморфизмы полей
20. Подполя

Основные числовые системы

21. Система натуральных чисел.
22. Кольцо целых чисел
23. Поле рациональных чисел.
24. Поле действительных чисел.
25. Поле комплексных чисел.

Критерии оценки:

- 5 баллов выставляется студенту, если продемонстрированы знание вопроса и самостоятельность мышления, ответ соответствует требованиям правильности, полноты и аргументированности;
- 4 балла в неполном, недостаточно четком и убедительном, но в целом правильном ответе;
- 3 балла ставится, если студент отвечает неконкретно, слабо аргументировано и не убедительно, хотя и имеется какое-то представление о вопросе;
- меньше 2 баллов ставится, если студент отвечает неправильно, нечетко и неубедительно, дает неверные формулировки, в ответе отсутствует какое-либо представление о вопросе.

Комплект заданий для проведения проверочной работыпо дисциплине «Основные алгебраические системы и их элементарные свойства»

1. Покажите, что на множестве натуральных чисел операция возведения в степень не коммутативная и не ассоциативная.
2. Пусть a, b– фиксированные рациональные числа. Покажите, что отображение $\langle x, y\rangle \longmapsto ax + by$, где x, y – любые рациональные числа, является бинарной ассоциативной операцией на множестве рациональных чисел.
3. Пусть $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел и (x, y) – наибольший общий делитель натуральных чисел x и y. Докажите, что отображение $\langle x, y\rangle \longmapsto (x, y)$ является коммутативной и ассоциативной бинарной операцией на множестве $\mathbb{N}$.
4. Пусть $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел и $[x, y]$ – наибольший общий делитель натуральных чисел x и y. Докажите, что отображение $\langle x, y\rangle \longmapsto [x, y]$ является коммутативной и ассоциативной бинарной операцией на множестве $\mathbb{N}$.
5. Пусть $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел и $\circ$ – бинарная алгебраическая операция, действующая по правилу: $n \circ m = n + m - nm$, где $n, m \in \mathbb{Z}$. Докажите, что операция $\circ$ является коммутативной и ассоциативной бинарной операцией на множестве $\mathbb{Z}$. Существует ли в множестве $\mathbb{Z}$ нейтральный элемент относительно операции $\circ$, есть ли в $(\mathbb{Z},\circ)$ обратимые элементы.
6. Пусть $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел и $*$ – бинарная алгебраическая операция, действующая по правилу: $n * m = -n - m$, где $n, m \in \mathbb{Z}$. Докажите, что операция $*$ является коммутативной и неассоциативной бинарной операцией на множестве $\mathbb{Z}$. Существует ли в множестве $\mathbb{Z}$ нейтральный элемент относительно операции $*$, симметричные элементы для элементов множества $\mathbb{Z}$, относительно введённой операции.
7. В алгебраической системе $(\mathbb{X},*)$ в которой $(x * y) * y = x$, $y * (y * x) = x$, для любых $x, y \in \mathbb{X}$. Доказать, что $x * y = y * x$, т.е. операция $*$ коммутативна.
8. Показать, что $M_n^*(\mathbb{R}) = \left\{A = \left(a_{ij}\right) \in M_n(\mathbb{R}) \middle| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0,\ i = \overline{1, n}\right\}$ – полугруппа с обычной операцией умножения матриц. Является ли $(M_n^*(\mathbb{R}),\times)$ – моноидом.
9. В мультипликативном моноиде $\mathbb{M}$ выбирается произвольный элемент t и вводится новая операция $*$: $x * y = x/y$. Показать, что $(\mathbb{M},*)$ – полугруппа и что обратимость элемента t в $\mathbb{M}$ необходимое и достаточное условие, при выполнении которого $(\mathbb{M},*)$ – моноид с нейтральным (единичным) элементом t^{-1}/
10. Показать, что множество $\mathbb{Z}$ с операцией $\circ$, определённой по правилу для любых $n, m \in \mathbb{Z}$ полагаем, что $n \circ m = n + m + nm = (1 + n)(1 + m) - 1$, является коммутативным моноидом. Существует ли в $(\mathbb{Z},\circ)$ нейтральный элемент, найти в $(\mathbb{Z},\circ)$ все обратимые элементы.
11. Пусть $P(U)$ – множество всех подмножеств непустого множества U. Множество $X\Delta Y$, определяемое формулой $X\Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, называется *симметрической разностью множеств* X и Y. Докажите, что Δ есть коммутативная и ассоциативная бинарная операция на множестве $P(U)$. Покажите, что операция $\cap$ дистрибутивна относительно операции Δ.
12. Приведите пример множества A, отношения эквивалентности R на A и бинарной операции $*$ на A таких, что (a) R – конгруэнция относительно $*$, (b) R – не является конгруэнцией относительно $*$.
13. Пусть $+,\cdot$ суть обычные операции сложения и умножения на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел и h – отображение множества $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ такое, что $h(x) = 2^x$ для всякого x из $\mathbb{N}$. Докажите, что h является гомоморфизмом алгебры $\langle\mathbb{N}, +\rangle$ в алгебру $\langle\mathbb{N},\cdot\rangle$.

14. Пусть $+,\cdot$ суть обычные операции сложения и умножения на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел и a – фиксированное положительное действительное число. Пусть h – отображение множества $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ такое, что $h(x) = a^x$ для всякого x из $\mathbb{R}$. Докажите, что h является гомоморфизмом алгебры $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ в алгебру $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$.
15. Пусть h – гомоморфизм алгебры $\langle A, f \rangle$ в алгебру $\langle B, g \rangle$, где f и g – бинарные операции. Докажите, что
    (a) если операция f коммутативна, то и операция g коммутативна;
    (b) если операция f ассоциативна, то и операция g ассоциативна;
    (c) если e – нейтральный элемент относительно операции f, то $f(e)$ является нейтральным элементом относительно операции g;
    (d) если элемент x симметризуем относительно операции f, то элемент $f(x)$ симметризуем относительно операции g;
    если элементы x и x' взаимно симметричны относительно операции f, то элементы $f(x)$ и $f(x')$ взаимно симметричны относительно операции g.
16. Пусть $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел, $B = \{2^x |\, x \in \mathbb{N}\}$. Пусть h – отображение алгебры $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ в алгебру $\langle B, \cdot \rangle$ такое, что для любого x из $\mathbb{N}$ верно равенство $h(x) = 2^x$. Покажите, что h является изоморфизмом.
17. Пусть $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\mathbb{R}_+^*$ – множество положительных действительных чисел, a –положительное действительное число, отличное от единицы. Пусть h – отображение алгебры $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ в алгебру $\langle \mathbb{R}_+^*, \cdot \rangle$ такое, что $h(x) = a^x$ для каждого x из $\mathbb{R}$. Докажите, что h является изоморфизмом.
18. Пусть f – мономорфизм алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{B}$ и g – мономорфизм алгебры $\mathcal{B}$ в алгебру $\mathcal{C}$. Докажите, что композиция $g \circ f$ является мономорфизмом алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{C}$.
19. Приведите пример алгебры $\mathcal{A}$ и отношения эквивалентности R на $|\mathcal{A}|$, которое не является конгруэнцией в алгебре $\mathcal{A}$.
20. Пусть h есть гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{B}$. Докажите, что $Im|\mathcal{A}|$ (гомоморфный образ основного множества алгебры $\mathcal{A}$) замкнуто в алгебре $\mathcal{B}$.
21. Пусть h – гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{B}$. Докажите, что алгебра $\langle \mathcal{C}, f_1|\mathcal{C}, \dots, f_s|\mathcal{C} \rangle$, где $\mathcal{C} = Im|\mathcal{A}|$, является подалгеброй алгебры $\mathcal{B} = \langle \mathcal{B}, f_1, \dots, f_s \rangle$. Эту алгебру называют гомоморфным образом алгебры $\mathcal{A}$ при гомоморфизме h.
22. Пусть h – гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{B}$. Докажите, что гомоморфный образ алгебры $\mathcal{A}$ при этом гомоморфизме изоморфен фактор-алгебре $\mathcal{A}/\mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ – конгруэнция порождённая гомоморфизмом h.
23. Задачи №391–436 учебник Л.Я. Окунев «Сборник задач по высшей алгебре».

Критерии оценки:

0,5 балла выставляется студенту за каждое верно выполненное упражнение. Объём задания не должен превышать 60 задач и подбирается студентом самостоятельно из предложенных преподавателем источников.

Комплект вопросов для проведения экзамена по дисциплине «Основные алгебраические системы и их элементарные свойства»

Множества и отношения

1. Множества.
2. Бинарные отношения.
3. Функции.
4. Отношение эквивалентности.
5. Отношение порядка.

Элементы теории групп

6. Группа. Подгруппа.
7. Циклические подгруппы
8. Смежные классы. Нормальные делители групп.
9. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп
10. Фактор-группа

Кольца

11. Кольца
12. Понятие кольца
13. Простейшие свойства кольца
14. Гомоморфизмы и изоморфизмы колец
15. Подкольца

Поля

16. Поля
17. Понятие поля
18. Простейшие свойства поля
19. Гомоморфизмы полей
20. Подполя

Основные числовые системы

21. Система натуральных чисел.
22. Кольцо целых чисел
23. Поле рациональных чисел.
24. Поле действительных чисел.
25. Поле комплексных чисел

К экзамену допускается студент, набравший за работу в семестрах 45 баллов.

Критерии оценки:

- 30 баллов выставляется студенту, если продемонстрированы знание вопроса и самостоятельность мышления, ответ соответствует требованиям правильности, полноты и аргументированности;
- 20 баллов в неполном, недостаточно четком и убедительном, но в целом правильном ответе;
- 10 баллов ставится, если студент отвечает неконкретно, слабо аргументировано и не убедительно, хотя и имеется какое-то представление о вопросе;
- меньше 10 баллов ставится, если студент отвечает неправильно, нечетко и неубедительно, дает неверные формулировки, в ответе отсутствует какое-либо представление о вопросе.