

**ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г.ШЕВЧЕНКО**

Бендерский Политехнический филиал

Кафедра архитектуры

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

(с примерами и пояснениями)

Практикум

Бендеры, 2017

УДК 624.04
ББК 38.112
С23

Составители:

Петренко Л.Д., старший преподаватель кафедры «Архитектура» БПФ
ГОУ «ПГУ им.Т.Г. Шевченко»

Дабежа А.М., старший преподаватель ГОУ «ПГУ им.Т.Г. Шевченко»

Рецензенты:

Бурменко Ф.Ю., директор ИТИ ПГУ им. Т.Г. Шевченко, доцент

Хамидуллин Р.А., доцент кафедры общей и теоретической физики ПГУ
им.Т.Г. Шевченко

С23 Строительная механика: Практикум / Сост.: Л.Д.Петренко, А.М.
Дабежа – Бендеры, 2017. – 58 с.

Практикум разработан для студентов архитектурно-строительных специальностей, для практических занятий, рубежного контроля знаний, зачетов и экзаменов. Приведены типовые задания по расчету отдельных элементов строительных конструкций и подробно изложены методы расчета.

Рекомендовано НМС
ПГУ им.Т.Г. Шевченко

© Л.Д.Петренко, А.М. Дабежа, составление, 2017

Оглавление.

1.	Введение	4
2.	Раздел 1. Расчет однопролетных консольных балок	5
3.	Раздел 2. Расчет шарнирно-консольных балок	17
4.	Раздел 3. Расчет плоских рам	26
5.	Раздел 4. Расчет балочных ферм	33
6.	Раздел 5. Расчет статически неопределимых рамных систем	41
7.	Раздел 6. Расчет перемещений от нагрузки	47
8.	Раздел 7. Расчет перемещения от изменения температуры	52
9.	Раздел 8. Литература	58

Введение.

Основная цель учебного пособия «Сборник задач по строительной механике (с примерами и пояснениями)» - помочь студентам усвоить законы статики, проследить важность межпредметной связи трех дисциплин специального теоретического курса – теоретической механики, сопротивления материалов и статики сооружений, которые формируют мировоззрение человека, развивают его способность логически мыслить, обучают творчески обобщать результаты и выводы для успешной работы в курсовом и дипломном проектировании. От изданных задачников по строительной механике учебное пособие отличается типовыми, современными расчетными схемами несущих элементов конструкций зданий, которые расположены в пособии по возрастающей сложности.

К каждому разделу учебного пособия прилагается четкая формулировка задания, с указанием базовой науки и приводится пример расчета с подробными пояснениями. В пособии, для самостоятельного изучения теоретического материала указана необходимая литература.

Учебное пособие «Сборник задач по строительной механике (с примерами и пояснениями)» можно использовать на практических занятиях по строительной механике, при рубежном (промежуточном) контроле знаний студентов, а также на зачетах и экзаменах.

Раздел 1. Расчет однопролетных консольных балок.

Формулировка задачи: Для одной из балок на рис. 1-10 требуется:

- определить опорные реакции связей – теоретическая механика;
- построить линии влияния внутренних усилий в сечениях «n» и «k» – статика сооружений;

исходные данные для расчета в таблице № 1.

Таблица 1

Номер варианта	M, кН·м	F, кН	q, кН/м	a, м	b, м	c, м	d, м
1	6	4	2	2	3	3	2
2	5	5	1	3	4	3	4
3	4	3	3	4	2	2	4
4	6	4	4	2	4	4	2
5	8	5	2	2	3	2	3
6	6	2	1	4	2	3	2
7	7	6	3	3	3	3	3
8	4	2	1	1	4	4	1
9	5	4	2	3	3	2	1
10	8	2	1	2	2	2	2
11	6	4	2	2	3	3	2
12	5	5	1	3	4	3	4
13	4	3	3	4	2	2	4
14	6	4	4	2	4	4	2

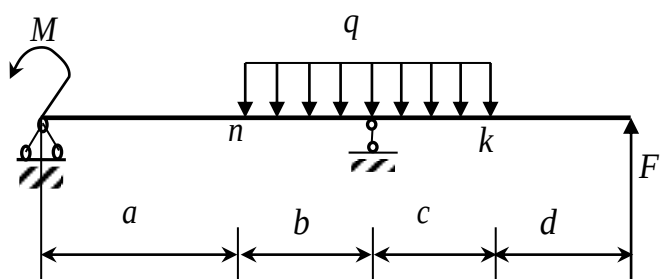


Рис1.1

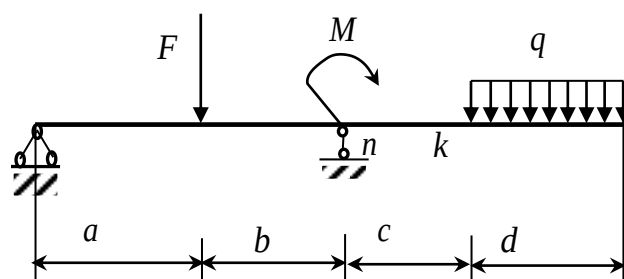


Рис1.2

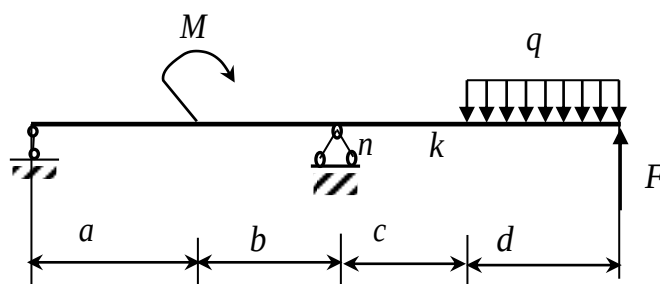


Рис1.3

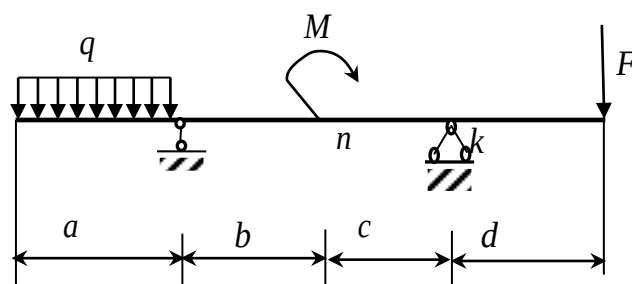


Рис1.4

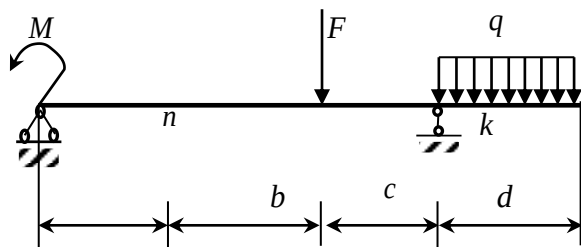


Рис1.5

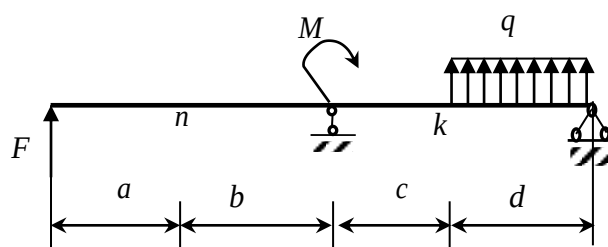


Рис1.6

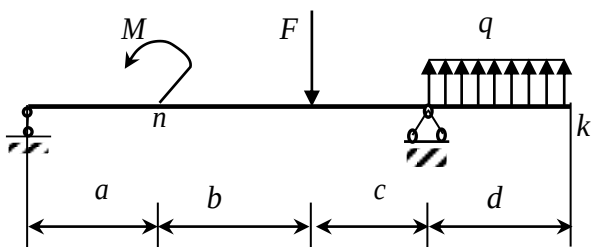


Рис1.7

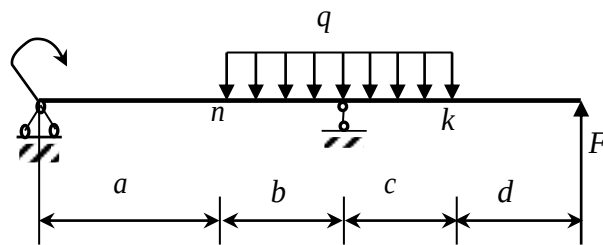


Рис1.8

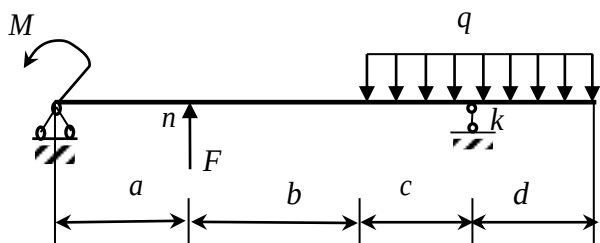


Рис1.10

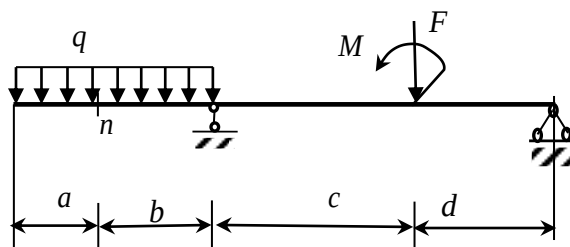


Рис1.9

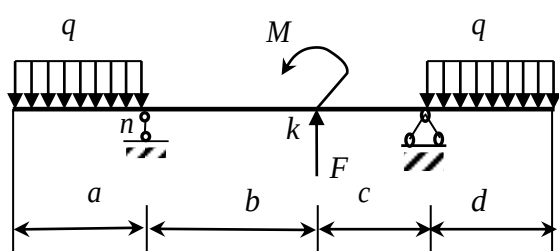


Рис1.11

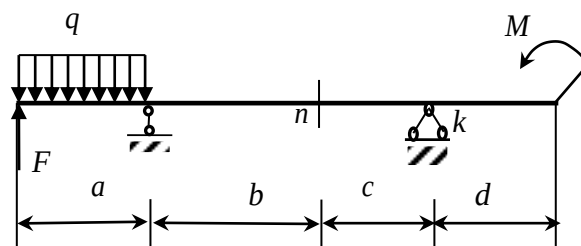


Рис1.12

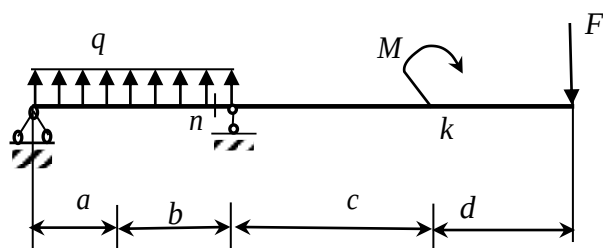


Рис1.13

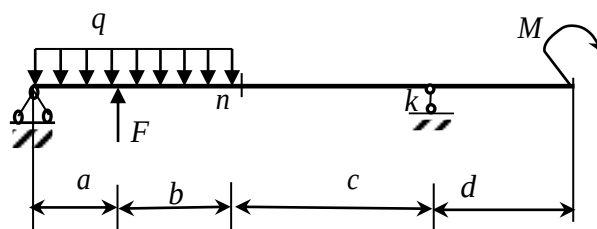


Рис1.14

Пример расчета однопролетной консольной балки.

а) Для определения опорных реакций балки АВ применим принцип освобождения от связей и преобразуем данную балку в расчетную схему с исходными данными: $M=8 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $F=2 \text{ кН}$, $q=1 \text{ кН/м}$, $a=b=c=d=2 \text{ м}$;

выбираем реакцию опоры левой – R_A , правой – R_B .

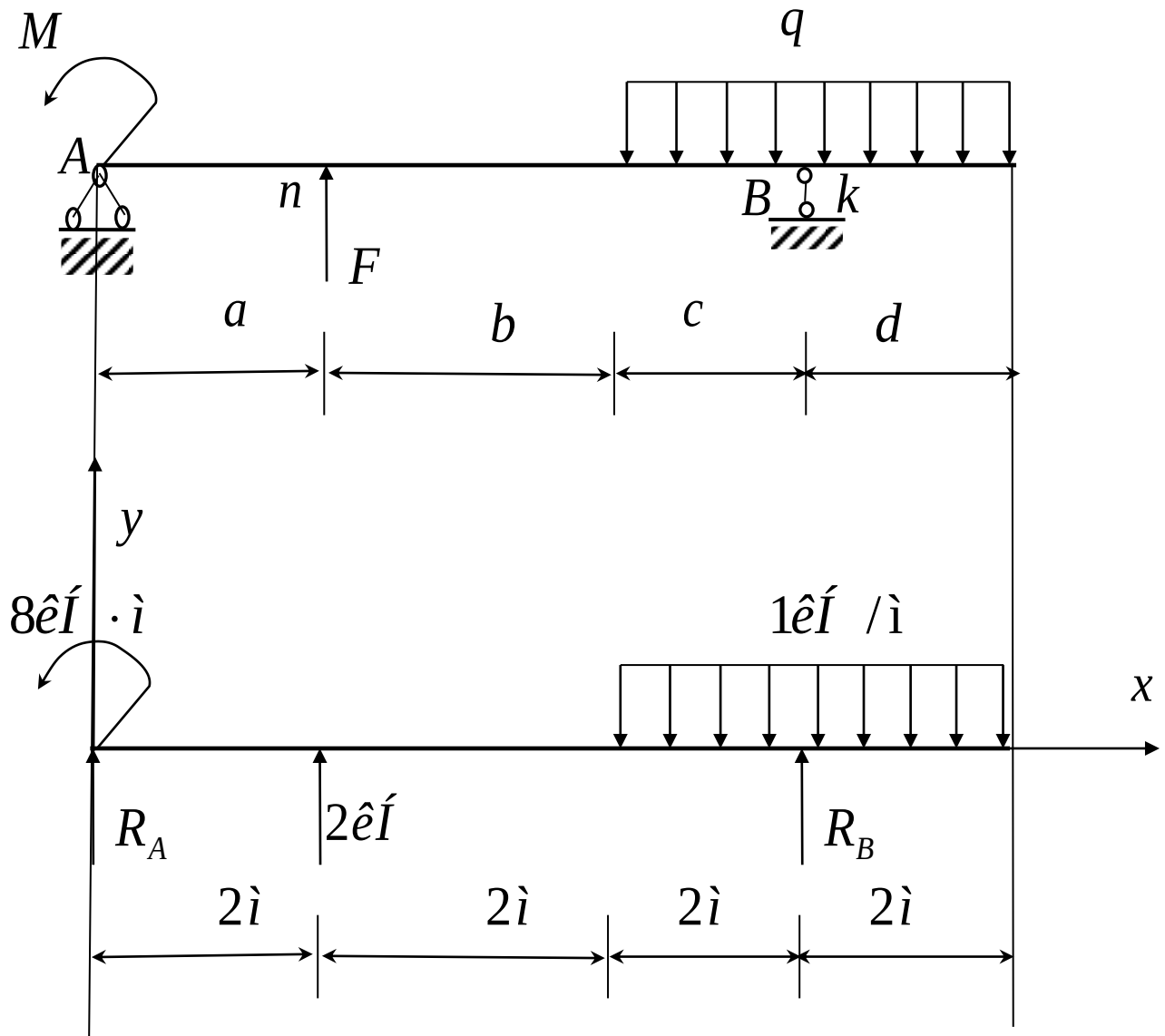


Рис1.10.а)

Опорные реакции R_A и R_B определяем составив уравнение моментов относительно точек А и В. Условимся считать, что момент силы положительный, если сила стремится вращать свое плечо вокруг центра момента по часовой стрелке и наоборот.

$$\sum M_A = 0; \quad -8 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot (2 + 2) \cdot 6 - R_B \cdot 6 = 0; \quad -8 - 4 + 24 = R_B \cdot 6$$

$$\text{Определяем } R_B = \frac{12}{6} = 2 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -8 + 2 \cdot 4 + R_A \cdot 6 = 0; \quad -8 + 8 = R_A \cdot 6; \text{ тогда } R_A = 0$$

Проверим правильность определения опорных реакций, составив уравнение равновесия проекций всех сил на ось у:

$$\sum F_y = 0; \quad 0 + 2 + 2 - 1 \cdot 4 = 0$$

Полученный результат говорит о том, что система сил в равновесии и опорные реакции определены правильно.

б) Переходим к построению эпюр внутренних силовых факторов: поперечных сил "Q" и изгибающих моментов "M". Определим расчетные участки и применим метод сечения. Надо помнить, что реакции связей при определении внутренних сил учитываются наравне с активными внешними силами, действующими на балку. В общем случае, границами участков балки являются начало и конец балки, опоры, начало и конец распределенной нагрузки, точки приложения сосредоточенных сил и внешних моментов. В данном примере балка состоит из четырех участков, которые по условию задачи равны двум метрам. Заметим, что для определения опорных реакций пользуются правилами знаков статики, для определения знаков поперечных сил и изгибающих моментов — правилами знаков сопротивления материалов. Поперечная сила в сечении считается положительной, если внешняя сила стремится сдвинуть левую часть балки вверх относительно правой или правую часть вниз относительно левой и наоборот. Правило знаков для изгибающих моментов называют "правилом дождя" (имея в виду, что в случае выпуклости вниз образуется воронка, в которой задержится дождевая вода, при выпуклости вверх "зонтик" дождевая скатится).

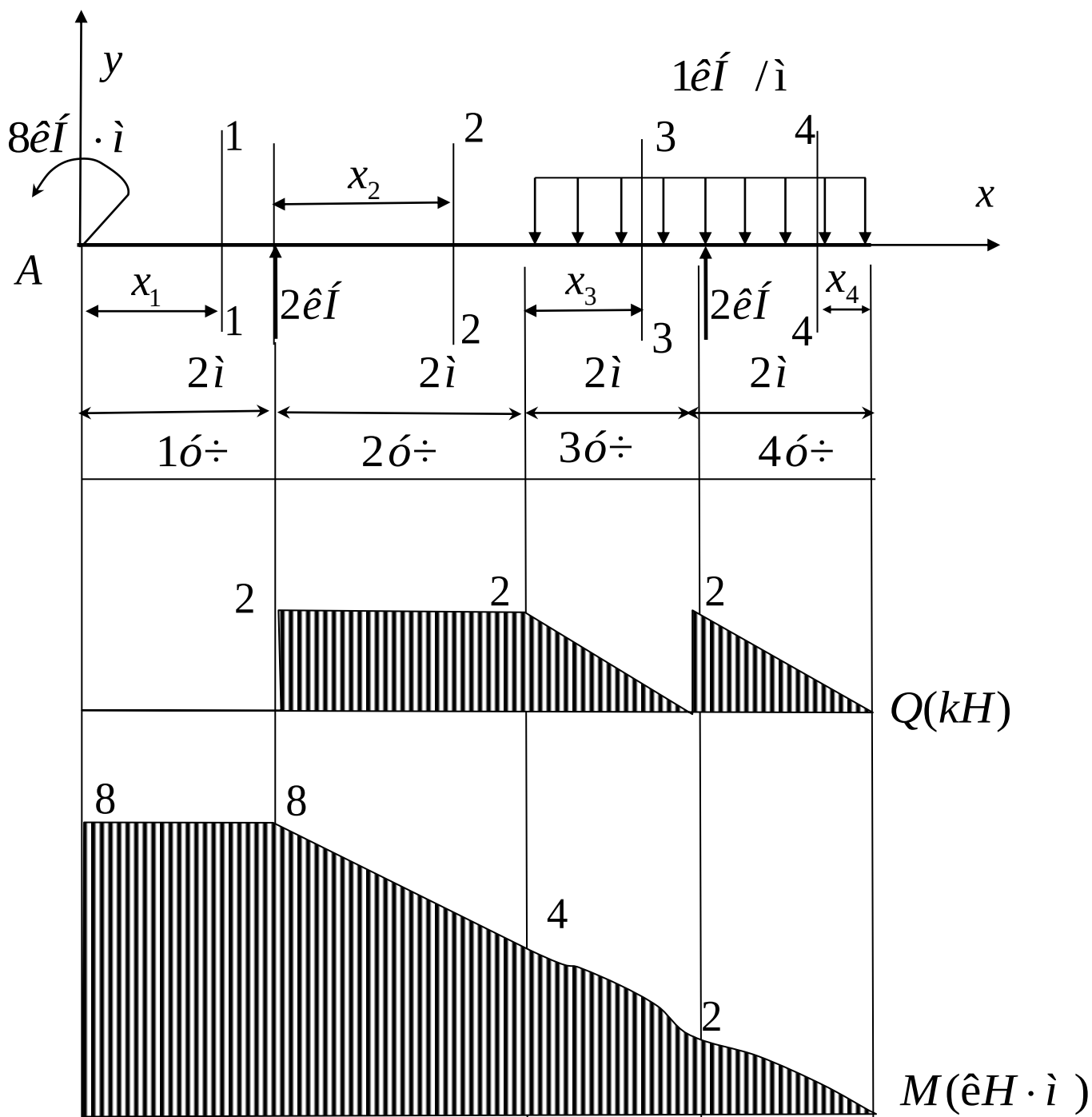
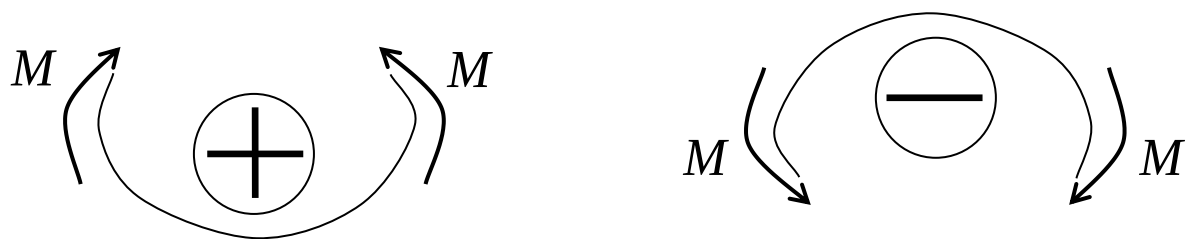


Рис1.10.6)

Рассмотрим первый участок балки относительно сечения 1-1, на оставшуюся часть действует только момент $M = 8кН \cdot м$, значит поперечная сила Q_1 будет равна нулю, т. к. поперечная сила в сечении балки численно равна алгебраической сумме внешних сил, действующих в рассматриваемом примере слева от сечения 1-1. Нет внешних – нет и сил сопротивления $Q_1 = 0$. Строим график – эпюру Q , проведем линию параллельную оси балки. На первом участке $Q_1 = 0$; изгибающий момент на первом участке, относительно сечения 1-1 равен $M_1 = -8кН \cdot м$. Условимся отрицательные моменты откладывать вверх от оси эпюры M , выбираем масштаб, откладываем значение, затем проводим прямую параллельную оси эпюры M ; определяем внутренние силовые факторы на втором участке. Отсекаем сечением 2-2 правую часть балки и рассматриваем равновесие левой части. Поперечная сила Q_2 положительна, постоянна и равна $2кН$. Откладываем в выбранном масштабе от оси эпюры Q это значение и проводим прямую параллельную оси эпюры Q до конца границы второго участка. Изгибающий момент на втором участке относительно сечения 2-2 равен: $M_2 = -M + F \cdot x_2 = -8 + 2 \cdot x_2$. Текущая переменная имеет два граничных значений $x_2 = 0$; $x_2 = 2м$, что соответствует $M_2 = -8кН \cdot м$; $M_2 = -8 + 2 \cdot 2 = -4кН \cdot м$. Откладываем эти значения в масштабе от оси эпюры M , соединяя их прямой. Аналогично рассуждая, получим значение поперечной силы на третьем участке: $Q_3 = F - 9 \cdot x_3 = \sqrt{2} - 1 \cdot x_3$; переменная x_3 имеет два значения при $x_3 = 0$; $Q_3 = 2кН$, что соответствует значению конца второго участка; при $x_3 = 2м$ поперечная сила $Q_3 = 2 - 1 \cdot 2 = 0$.

Изгибающий момент на третьем участке относительно сечения 3-3 равен:

$M_3 = -M + F(2 + x_3) - \frac{q \cdot x_3^2}{2}$. Текущая переменная имеет два значения $x_3 = 0$;

$x_3 = 2м$, что соответствует значениям момента M_3 :

$$\dot{M}_3 = -\dot{M} + F \cdot 2 = -8 + 2 \cdot 2 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\dot{M}_3 = -\dot{M} + F(2 + 2) - \frac{q \cdot 2^2}{2} = -8 + 8.$$

Откладываем значения поперечной силы Q_3 в граничных точках и соединяем прямой и значения M_3 в масштабе от оси эпюры M соединяя пологой кривой (парабола), чтобы получить точное очертание кривой, необходимо задать значения переменной x_3 , например $x_3 = 0,5м$; $x_3 = 1м$, $x_3 = 1,5м$.

С целью упрощения расчетов, сечение 4-4 проведем на расстоянии переменной x_4 , с правого конца балки, тогда на правом консольном конце балки значение $x_4 = 0$; на границе с третьим участком $x_4 = 2м$.

Определяем внутренние силовые факторы на четвертом участке. Отсекаем сечением 4-4 левую часть балки и рассматриваем равновесие правой части. Поперечная сила Q_4 положительна и равна $Q_4 = q \cdot x_4$. При $x_4 = 0$; $Q_4 = 0$; при $x_4 = 2м$; $Q_4 = 1 \cdot 2 = 2кН$. Откладываем полученные значения в выбранном масштабе, от оси эпюры Q и соединяем прямой. Заметим, что на эпюре внутреннего силового фактора Q в сечении, где приложены сосредоточенные силы, наблюдается скачок на величину модулей этих сил. На границе первого и второго участков на величину силы $F = 2кН$ и на границе третьего и четвертого участков на величину силы $R_g = 2кН$.

Изгибающий момент на четвертом участке, относительно сечения 4-4 равен:

$M_4 = -q \cdot \frac{x_4^2}{2}$. Текущая переменная имеет два граничных значений $x_4 = 0$;

$x_4 = 2м$, что соответствует $M_4 = 0$; $M_2 = -1 \cdot 2 = -2кН \cdot м$. Чтобы получить точное очертание кривой (параболы) необходимо задать промежуточное значение переменной x_4 , между двумя граничными, например, $x_4 = 1м$, тогда

$$M_4 = -1 \cdot \frac{1^2}{2} = -0,5кН \cdot м.$$

Заметим, если на участке есть чистый изгибающий момент, то на эпюре моментов будет скачок, равный величине моментов пары сил.

в) Построение линий влияния внутренних силовых факторов в сечениях «п» и «к» заданной балки.

Линией влияния называется график, выражающий закон изменения какого-либо фактора (поперечной силы, изгибающего момента, усилия в стержне фермы и т. д.) при движении по длине сооружения единичного сосредоточенного груза $P = 1$ постоянного направления.

Необходимо представлять себе принципиальное различие между линиями влияния и эпюрами. Это по существу противоположные друг другу понятия. Если, например, линия влияния изгибающего момента всегда строится для одного определенного сечения, при перемещающемся грузе, то эпюра изгибающего момента строится для всех сечений сразу при неподвижной нагрузке.

Каждая ордината линии влияния представляет собой величину изучаемого фактора, вызванного грузом $P = 1$, в тот момент, когда груз расположен над этой ординатой.

Необходимо помнить, что ординаты линии влияния поперечной силы Q_n и Q_k являются отвлеченными. Условимся откладывать положительные ординаты вверх от оси балки, отрицательные – вниз.

Пусть нагрузка $D=1$ движется от опоры А и находится слева от сечения "n". Выражение поперечной силы является функцией первой степени абсциссы точки x приложения движущейся нагрузки и имеет вид:

$$Q_n = -R_B = -\frac{x}{l}$$

Размерности числителя и знаменателя одинаковые, поэтому силы Q_n и Q_k не имеют размерности.

$$\text{При } x = 0; Q_n = -\frac{0}{l} = 0;$$

$$\text{При } x = a = 2l; Q_n = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

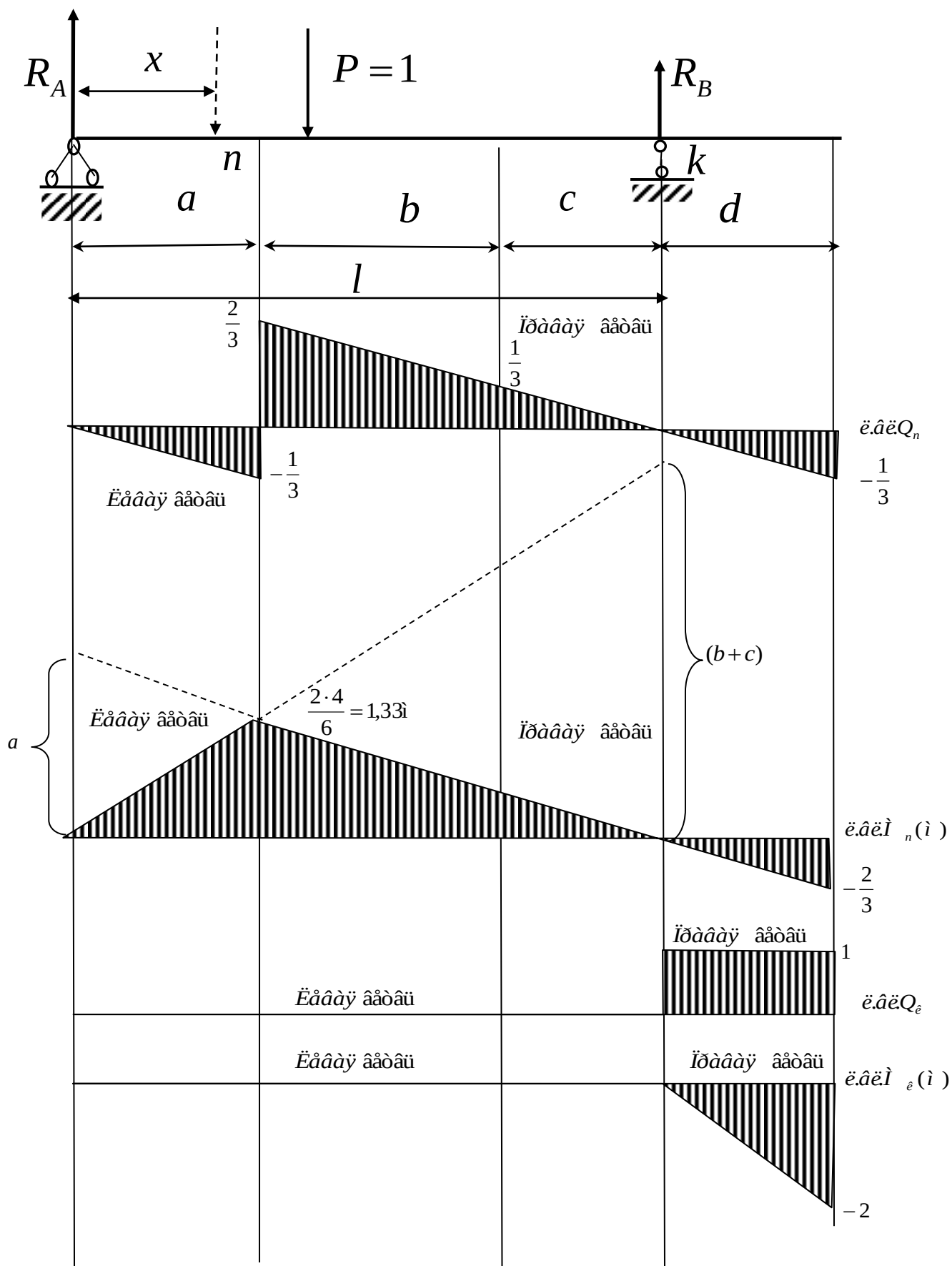


Рис1.10. в)

Когда нагрузка движется справа от рассматриваемого сечения "н" к опоре В, поперечная сила $Q_n = -R_A = \frac{l-x}{l}$, то есть в данном случае x принимает значения от a до l :

$$\text{При } x = a = 2\text{ м}; Q_n = \frac{l-a}{l} = \frac{6-2}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{При } x = l = 6\text{ м}; Q_n = \frac{6-6}{6} = 0.$$

По полученным данным строим левую ветвь линии влияния Q_n (рис 1.10.в). Так как график многочлена первой степени от x представляет собой прямую линию, которую построить по двум точкам, получаем:

$$x = 0; Q_n = 0; \quad x = a = 2\text{ м}; Q_n = \frac{2}{3},$$

и, соответственно, две точки для правой ветви линии влияния Q_n :

$$x = a = 2\text{ м}; Q_n = \frac{2}{3}; \quad x = l = 6\text{ м}; Q_n = 0.$$

Правую ветвь продолжаем до пересечения с вертикалью, проходящей через конец балки, при этом она отсекает на этой вертикали ниже оси абсцисс отрезок $Q_n = -\frac{1}{3}$, так как у левой и правой ветвей одинаковый угловой коэффициент ($1/l$), следовательно, они параллельны.

При построении линии влияния изгибающего момента в сечении «п», также как и при построении линии влияния поперечной силы, следует рассмотреть два положения груза $P = 1$: слева и справа от сечения «п».

При движении груза слева от сечения «п» изгибающий момент $M_n = R_B \cdot (b + c)$.

Это выражение справедливо при $x = 0$; $M_n = \frac{x}{l} \cdot (b + c) = 0$; при $x = a = 2\text{ м}$;

$$M_n = \frac{2 \cdot 4}{6} = 1,33\text{ м}. \text{ По полученным данным строим левую ветвь линии влияния } M_n.$$

Ординаты линии влияния изгибающего момента имеют размерность длины. Поэтому при их построении целесообразно принять тот же масштаб, в котором вычерчена схема балки.

Когда груз передвигается справа от сечения «п» изгибающий момент

$$M_n = R_A \cdot a = \frac{l-x}{l} \cdot a; \quad \text{при } x = a = 2\text{ м}; \quad M_n = \frac{4 \cdot 2}{6} = 1,33\text{ м}; \quad \text{при } x = l = 6\text{ м};$$

$$M_n = \frac{6-6}{6} \cdot a = 0.$$

Тот факт, что значения ординат левой и правой ветвей линии влияния M_n получились под рассматриваемым сечением одинаковыми, свидетельствует о том, что эти ветви пересекаются между собой под указанным сечением. Соединив точку, полученную при построении левой ветви, с нулевым значением M_n на опоре B , получим правую ветвь линии влияния изгибающего момента M_n . Если продолжить эту ветвь до пересечения с вертикалью, проходящей через конец балки, то она отсечет на этой вертикали, ниже оси абсцисс, ординату $M_n = -\frac{2}{3}m$. Т. к. в заданной балке отрезки c и d равны, то правая ветвь линии влияния относительно опоры B будут отсекать равные по величине, но противоположно направленные отрезки относительно оси абсцисс, на границе «с»: $M_n = \frac{2}{3}m$, на границе «d»: $M_n = \frac{2}{3}m$. (см. рис 2.10.в).

2 способ построения линии влияния изгибающего момента в сечении «п».

Проводят линию параллельную оси балки, на левой опорной вертикали откладывают вверх ординату, равную в принятом масштабе расстоянию от сечения «п» до левой опоры A , и проводят прямую через вершину этой ординаты и нулевую точку на правой опоре B , продолжая прямую до пересечения ее с вертикалью, проходящей через конец консоли балки. На правой опорной вертикали откладывают вверх ординату, равную расстоянию от сечения «п» до правой опоры, т. е. $(b + c)$, и проводят прямую через вершину этой ординаты и нулевую точку на левой опоре. Эти прямые пересекаются под сечением «п». Следовательно, чтобы получить числовую величину изгибающего момента в сечении «п», при заданном положении груза $P = 1$, надо измерить ординату линии влияния M_n под грузом. Отметим, что линия влияния M_n дает закон изменения момента только для сечения «п». (рис. 10.в)

Чтобы получить закон изменения поперечной силы и изгибающего момента в другом сечении, например «k», надо для этого сечения построить свою линию влияния Q_k и M_k .

При расположении груза $P = 1$ слева от сечения «k», поперечная сила $Q_k = 0$, т. к. правее этого сечения нет никаких сил. Следовательно, левая ветвь линии влияния Q_k совпадет с осью абсцисс: $Q_k = 0$. Когда груз $P = 1$ находится справа от сечения «k» $Q_k = P = 1$, т. е. правая ветвь линии влияния параллельна оси

отсчета, т. к. при перемещении груза справа от сечения «к» поперечная сила имеет постоянное значение. (рис. 10.в)

Построим линию влияния изгибающего момента в сечении «к». При расположении груза слева от рассматриваемого сечения, правее этого сечения никаких сил нет, поэтому $M_k = 0$, следовательно левая ветвь линии влияния M_k совпадет с осью абсцисс. (рис. 10.в) Если груз находится справа от сечения, то $M_k = -P(x-l) = -1(x-l)$; при $x = l = 6\text{ м}$; $M_k = 0$; при $x = l + d = 8\text{ м}$; $M_k = -1(l + d - l) = -2\text{ м}$. Соединяем нулевую точку на опоре В и значение на вертикали конца консоли балки, получили правую ветвь линии влияния изгибающего момента M_k .

г) Определение внутренних усилий S (поперечной силы или изгибающего момента) в сечениях «п» и «к» по формуле влияния:

$$S = M \cdot \operatorname{tg} \alpha + F \cdot y + q \cdot \omega,$$

где M - сосредоточенный момент («+» - направление по часовой стрелке, «-» - направление против часовой стрелки);

α - наклон линии влияния в месте приложения M ;

F - сосредоточенная сила («+» - направлена вниз, «-» - направлена вверх);

y - ордината линии влияния под силой;

q - интенсивность распределенной нагрузки («+» - направлена вниз, «-» - направлена вверх);

ω - площадь линии влияния под нагрузкой.

Знак тангенса определяется из математики (в первой и третьей четвертях он положителен).

$$Q_n = (-8) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + (-2) \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 0 = 0;$$

$$M_n = (-8) \cdot \frac{2}{3} + (-2) \cdot \frac{4}{3} + 1 \cdot 0 = -8\text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_k = (-8) \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2\text{ кН};$$

$$M_k = (-8) \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = -2\text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Значения усилий, вычисленных по линиям влияния, совпали с соответствующими усилиями на эпюрах.

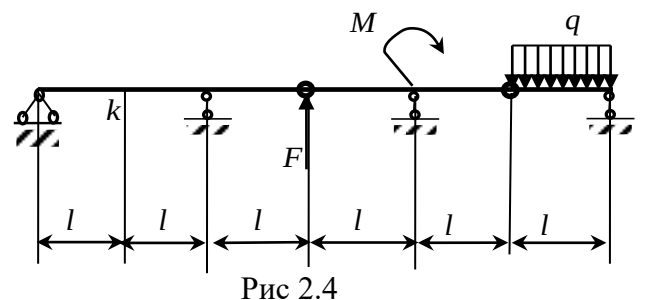
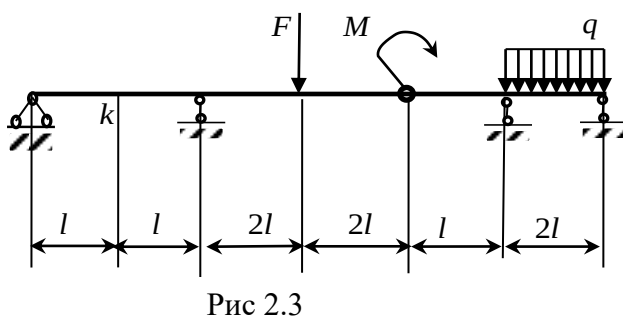
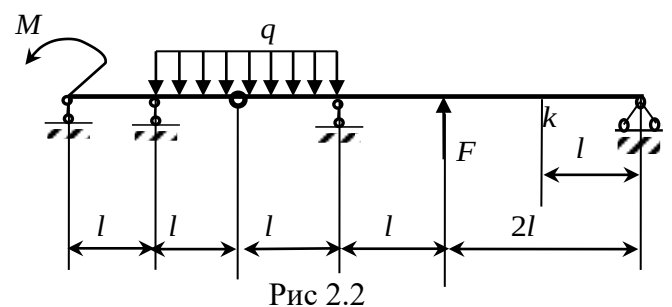
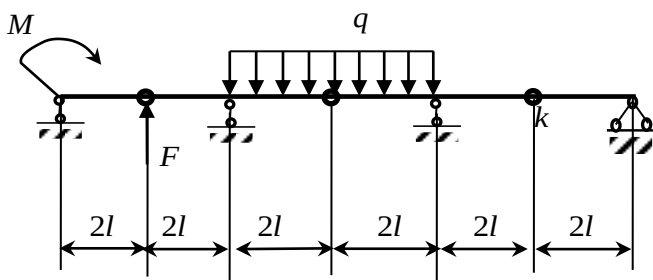
Раздел 2. Расчет шарнирно-консольных балок.

Формулировка задачи: Для одной из многопролетных балок, изображенных на рис 2.1-2.12 требуется:

- теоретическая механика: определить опорные реакции;
- сопротивление материалов: построить эпюры внутренних силовых факторов: поперечных сил и изгибающих моментов;
- статика сооружений:
 - а) построить линии влияния внутренних силовых факторов в сечении "К";
 - б) определить усилия в сечении "К" по линиям влияния от заданной нагрузки и сравнит их с усилиями на эпюрах;
 - в) найти максимальное и минимальное значение изгибающего момента в сечении "К" от подвижной системы грузов, показанной на рисунках.

Исходные данные для расчета принять из таблицы № 2

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q , кН/м	2	2	3	2	3	2	1	2	3	2	4	4
F , кН	2	6	5	4	3	6	2	4	3	2	4	2
M , кН·м	4	10	8	4	8	6	4	8	10	6	8	4
l , м	2	1	1	2	1	2	3	1	2	1	1	1



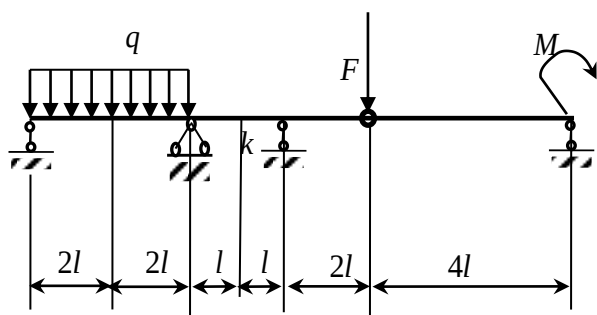


Рис 2.5

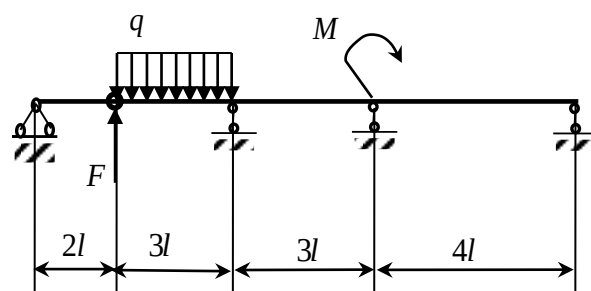


Рис 2.6

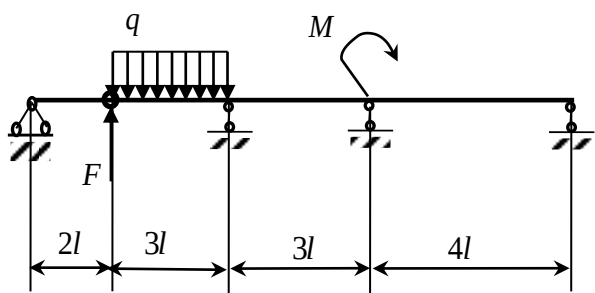


Рис 2.7

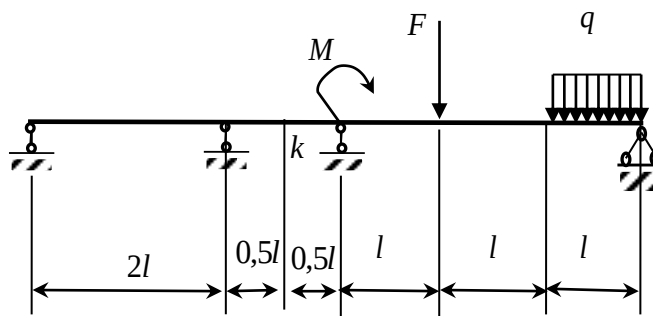


Рис 2.8

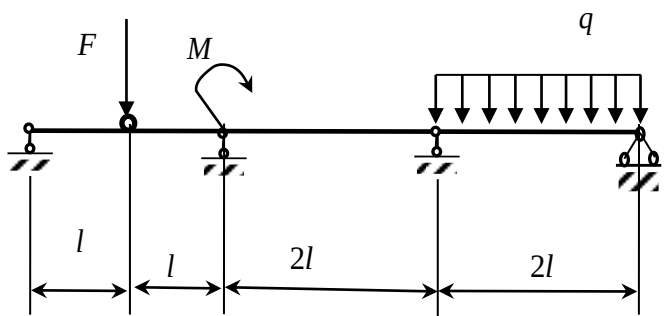


Рис 2.9

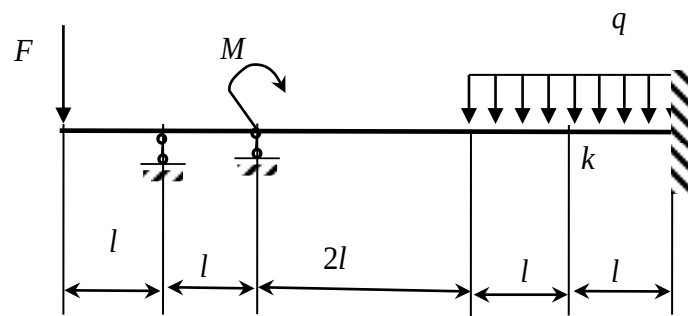


Рис 2.10

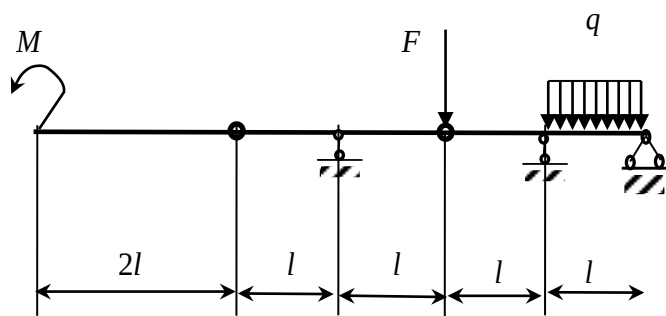


Рис 2.11

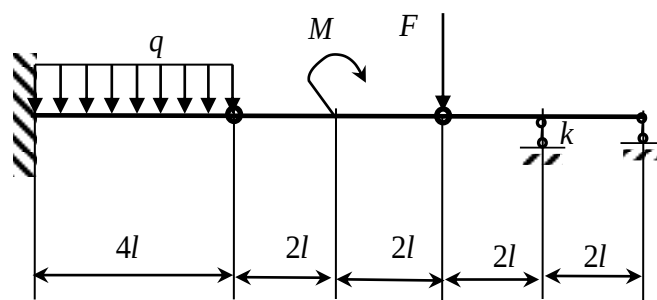


Рис 2.12

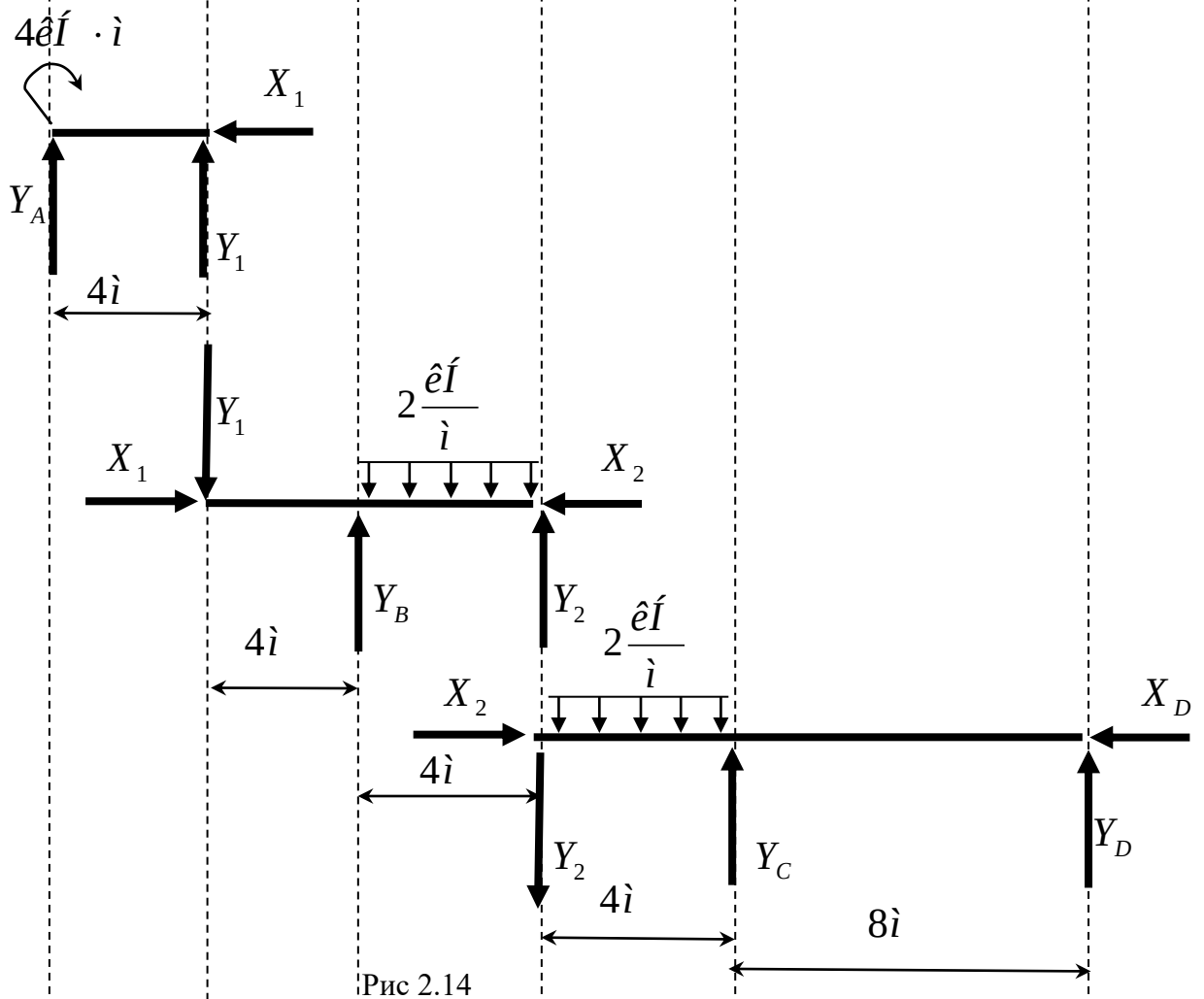
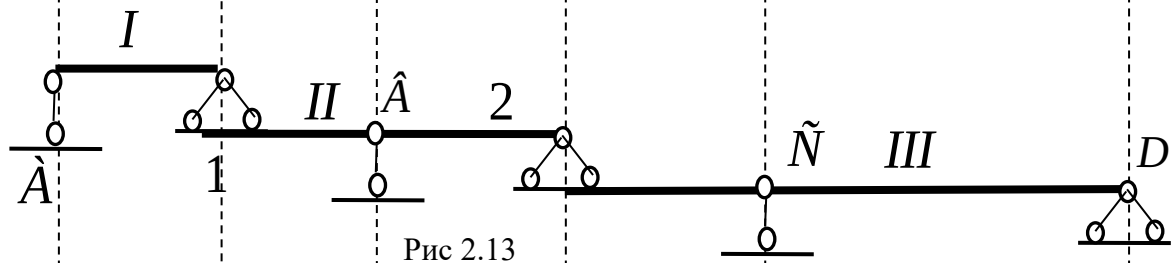
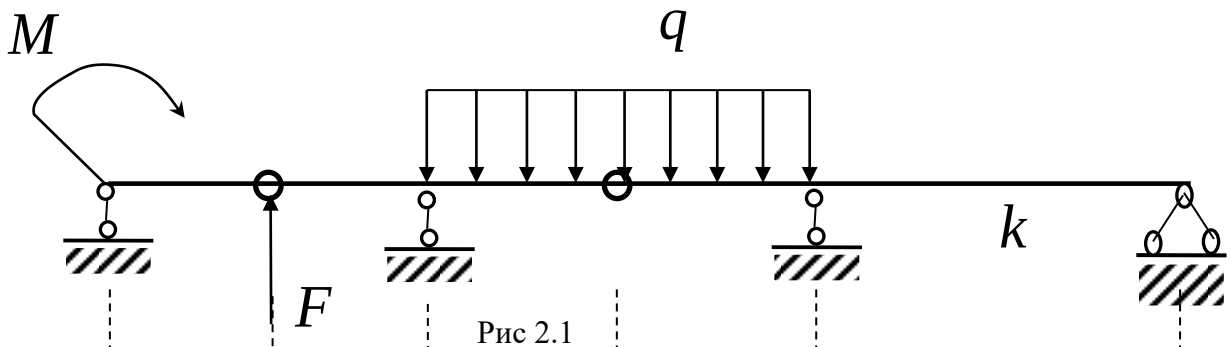
Пример расчета многопролетной балки.

Исходные данные: схема балки (рис 2.1), где $q = 2 \frac{kH}{l}$; $F = 2kH$; $M = 4kH \cdot l$; $l = 2i$

Кинематический анализ системы.

Расчет многопролетной балки сводится к установке условных шарниров Ш, для получения шарнирно-консольной балки, составленных из расположенных в опреде-

ленной последовательности однопролетных консольных и простых (или только одних консольных) балок, соединенных между собой условными шарнирами, число которых должно быть равно числу ее опорных стержней



C_{Π} без трех, т.е. $\emptyset = \tilde{N}_{\Pi} - 3 = 5 - 3 = 2$. Для получения шарнирно-консольной балки из рассматриваемой много пролетной, изображенной на рис. 2.1 необходимо установить два условных шарнира так, чтобы шарнирно-консольная система была геометрически неизменяемой и одновременно выражала условие статической определимости.

Для обеспечения геометрической неизменяемости шарнирно-консольных балок, имеющих одну шарнирно-неподвижную опору и остальные шарнирно-подвижные, полученное число условных шарниров должно быть распределено между пролетами, с соблюдением следующих условий:

- 1) наличие в пролете более двух шарниров недопустимо;
- 2) пролеты с двумя шарнирами могут чередоваться с пролетами без шарниров;
- 3) наличие шарниров в крайних пролетах быть не должно, допускается установка шарнира в границе крайнего пролета и смежного с ним участка;
- 4) пролеты с одним шарниром могут следовать один за другим.

В данном случае многопролетную балку можно расчленить на основную балку III (2-D) и так называемые передаточные балки I (A-1) и II (1-2).

Под основной понимают балку, которая передает давление от всех действующих на нее нагрузок, через опоры, полностью на основание (землю). Под передаточной понимают такую балку, давление от которой передается частично через опору на основание, а частично на консоль смежной балки, поддерживающей данную передаточную (рис 2.13).

Расчет следует начинать с передаточной балки I (A-1), так как она воспринимает только нагрузку, приложенную к ней непосредственно. Затем должна быть рассчитана балка II (1-2) с учетом давления на нее со стороны балки I (A-1) и последней рассчитывается балка III (2-D). Геометрическая неизменяемость многопролетной балки следует из анализа ее схемы (рис 2.13), где все шарнирно-консольные балки имеют необходимое число правильно установленных связей. Следовательно, многопролетная балка является статически определимой системой.

Определение реакций в связях (подробно изложено в разделе 1).

Силы, обеспечивающие равновесие передаточных балок показаны на рис. 2.14. Из уравнений равновесия для балки I (A-1) определяем реакции:

$$X_1 = 0, Y_1 = 1kH, Y_A = -1kH.$$

Из уравнений равновесия для балки II (1-2) определяем реакции:

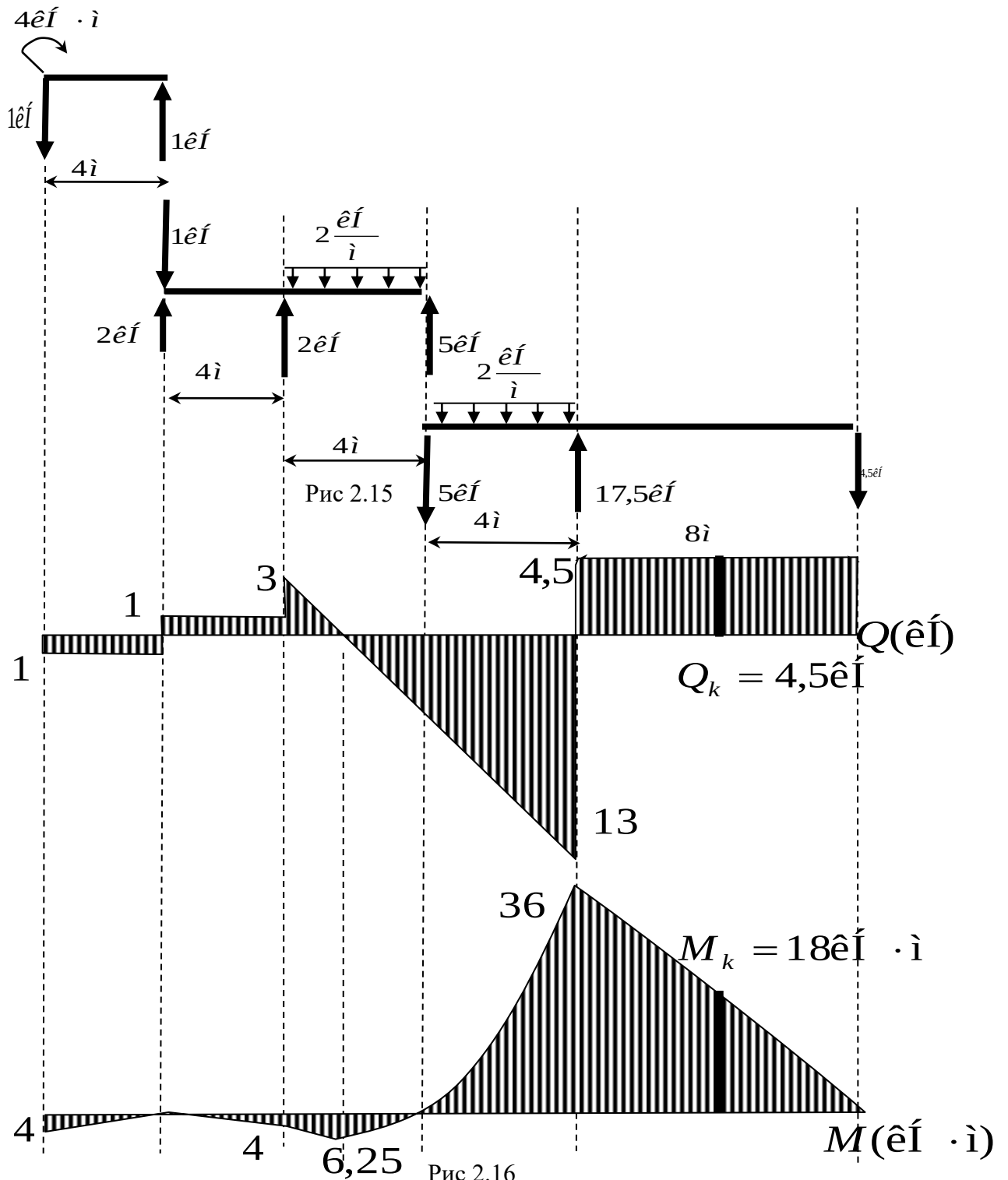
$$X_2 = 0, Y_2 = 5kH, Y_A = 2kH.$$

Из уравнений равновесия для балки III (2-D) определяем реакции:

$$X_D = 0, Y_D = -4,5kH, Y_C = 17,5kH.$$

Правильное направление и величины найденных реакций показаны на рис. 2.15, на основе которых строятся эпюры внутренних силовых факторов.

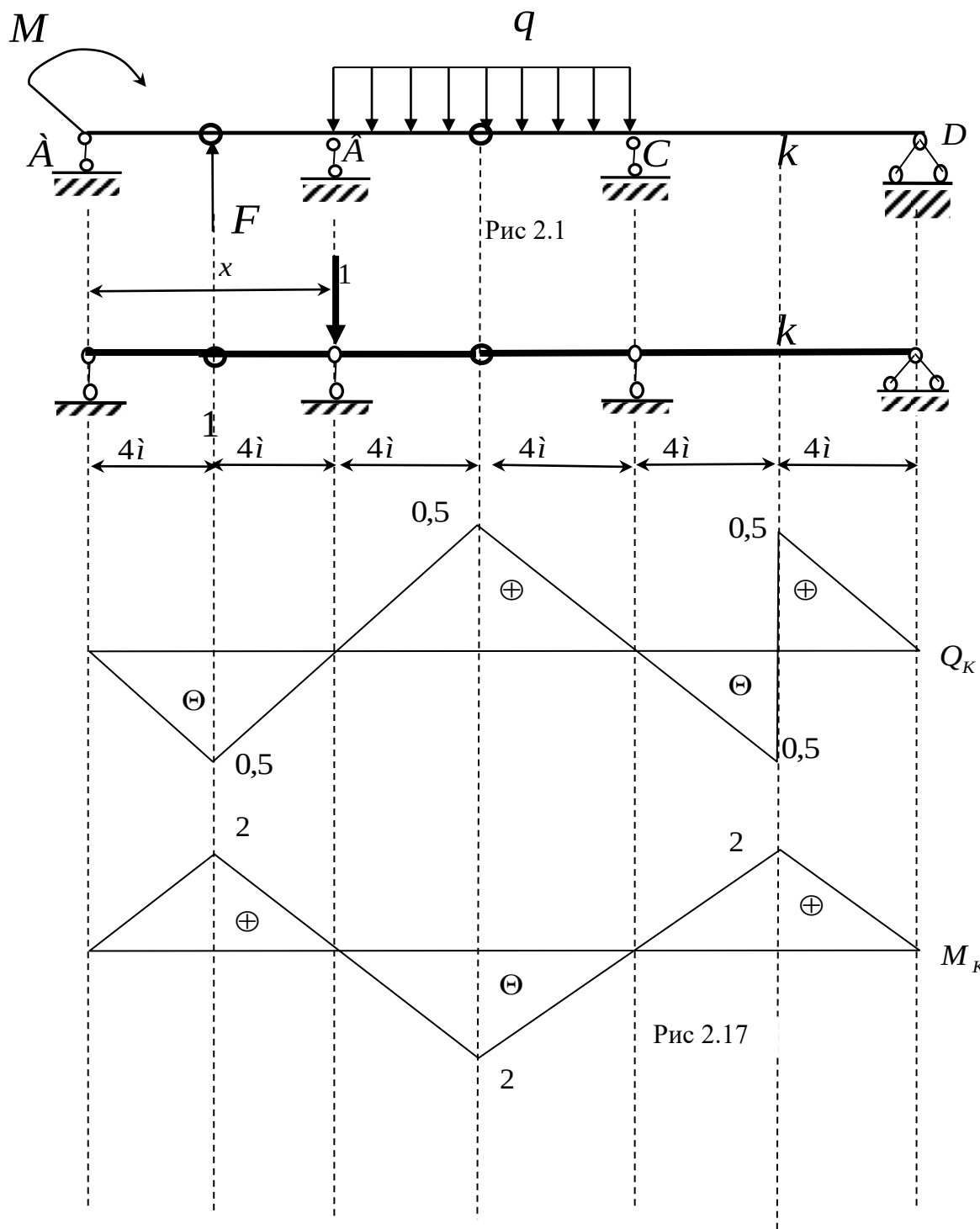
Эпюры внутренних силовых факторов: поперечных сил Q и изгибающих моментов M многопролетной балки ABCD показаны на рис. 2.16 (подробно изложено в разделе 1).



Линии влияния внутренних силовых факторов в сечении к (подробно изложено в разделе 1).

Определим значения внутренних силовых факторов в сечении к по линиям влияния:

$$Q_k = 4 \left(\frac{-0,5}{4} \right) + (-2) \cdot (-5) + 2 \cdot 2 = 4,5 \text{ тс} , \quad M_k = 4 \cdot 0,5 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-8) = -18 \text{ тс} \cdot \text{м}$$



Знаки и значения усилий совпали со знаками и значениями на эпюрах (рис.2.16).

Определение невыгодного нагружения линии влияния изгибающего момента в сечении К подвижной системой связанных грузов, показанной на рис. 2.18,

где $F = 2kH$, $l = 2$:

1) на рис 2.19 показано положение системы грузов, при котором в сечении К возникает максимальный (наибольший со знаком плюс) изгибающий момент. Критическим грузом является сила $F = 4kH$, так как при переходе этого груза через вершину знак производной M_K меняется с плюса на минус:

$$\Leftarrow \frac{dM_K}{dx} = (1+2+4) \cdot 0,5 + (3+2) \cdot (-0,5) > 0;$$

$$\Rightarrow \frac{dM_K}{dx} = (1+2) \cdot 0,5 + (3+2+4) \cdot (-0,5) < 0;$$

$$\max M_K = 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 1,5 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0,5 = 15,5kH$$

2) на рис.2.20 показано положение системы грузов, при котором в сечении К возникает минимальный (наибольший со знаком минус) изгибающий момент. Критическим грузом является сила $F = 4kH$, так как при переходе этого груза через вершину знак производной M_K меняется с минуса на плюс:

$$\Leftarrow \frac{dM_K}{dx} = (1+2+4) \cdot (-0,5) + (3+2) \cdot 0,5 < 0;$$

$$\Rightarrow \frac{dM_K}{dx} = (1+2) \cdot (-0,5) + (3+2+4) \cdot 0,5 > 0;$$

$$\min M_K = 1 \cdot (-0,5) + 2 \cdot (-1,5) + 4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-0,5) = -15,5kH$$

Пояснения к решению задачи

1) Стержневая система является статически определимой, если степень ее свободы W равна нулю и она геометрически неизменяема, т.е.
 $W = 3D - (2\tilde{O} + \tilde{N}_{ш}) = 3 \cdot 3 - (2 \cdot 2 + 5) = 0$, где:

$В$ – число шарнирно-консольных балок;

$Ш$ - число условных шарниров;

$С_{оп}$ – число опорных стержней балки.

В геометрически неизменяемых системах перемещения от нагрузок являются следствием только деформаций ее элементов. Для многопролетных статически определимых балок анализ геометрической неизменяемости проще выполнить через членение их на шарнирно-консольные балки, при этом каждая шарнирно-консольная балка должна иметь три опорных стержня (три связи) (рис 2.13).

2) При определении опорных реакций в связях многопролетной статически определимой балки целесообразно воспользоваться наиболее общим подхо-

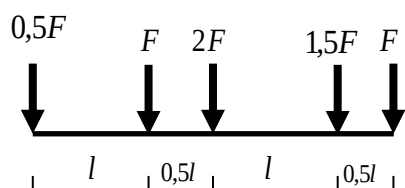


Рис 2.18

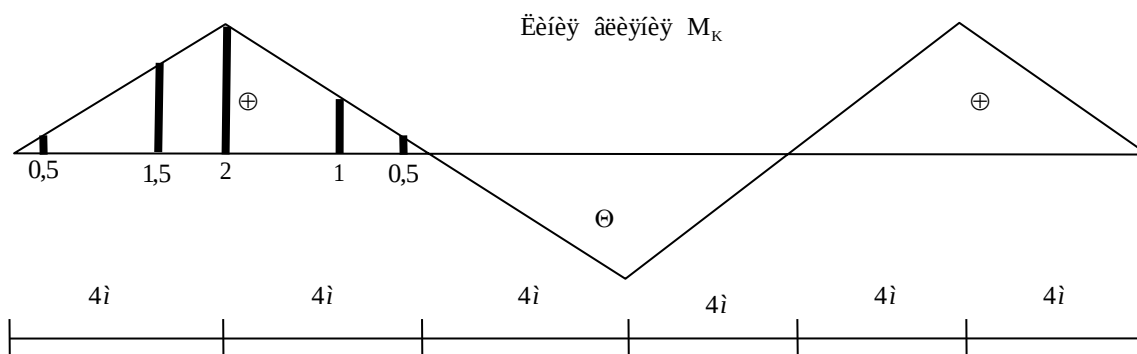
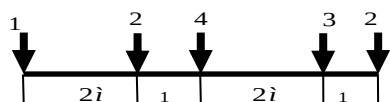


Рис 2.19

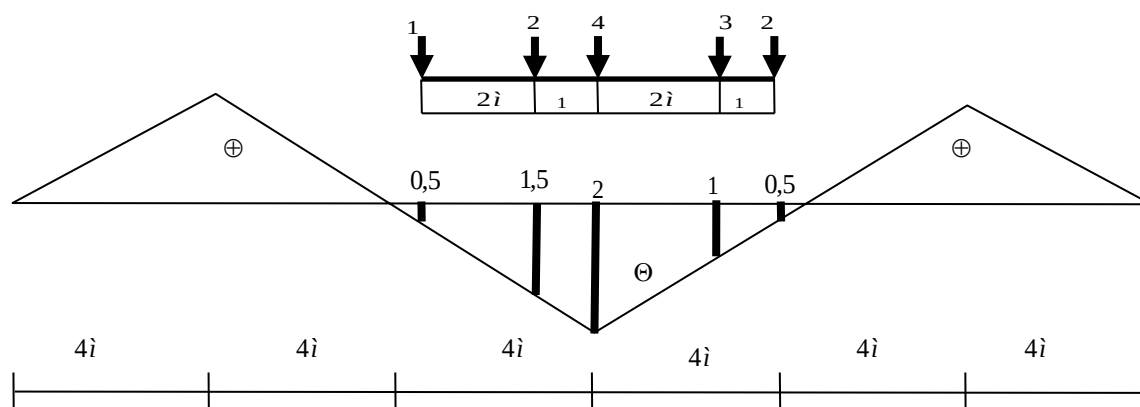


Рис 2.20

дом, заключающимся в том, что любая статически определимая многоопорная система может быть представлена в виде набора отдельных балок (дисков) с действующими на них внешними нагрузками и реакциями связей, обеспечивающих им равновесие в составе системы. В теории статически определимых систем доказано, что число независимых уравнений статики в точности равно числу реакций в связях, включая и силы взаимодействия в шарнирах, которые на смежные балки (диски) прикладываются в соответствии с законом Ньютона "действие равно противодействию", т.е. равными и противоположно направленными.

Примечание. Сосредоточенные внешние силы, действующие на шарниры, можно приложить к любому из смежных дисков.

После построения эпюр внутренних силовых факторов в отдельных двух передаточных балках и основной балке, они объединяются и образуют эпюры для многопролетной балки в целом (рис 2.16).

3) При построении линий влияния усилий в многопролетных балках используется статико-кинематический метод, изложенный в пояснениях раздела 1. Поскольку линии влияния в статически определимых системах имеют полигональный вид, то достаточно найти всего одну наиболее просто определяемую из условия равновесия ординату этой линии влияния. В примере определена ордината, когда единичный груз установлен над сечением К. при таком положении груза (рис 2.13) промежуточные балки не работают, балки I и II можно отбросить и из законов равновесия определить изгибающий момент и поперечную силу в сечении К основной балки.

4) Определение максимального и минимального значений усилия от подвижной нагрузки связанных между собой сосредоточенных грузов требует нахождения невыгодного нагружения линии влияния этой системы грузов. В теории линий влияния доказано, что при невыгодном нагружении один из грузов (критический) должен находиться над одной из вершин (критической) линии влияния. Условием, что груз и вершина действительно критические, является смена знака производной усилия при переходе грузом вершины: с плюса на минус, если отыскивается максимальное решение и с минуса на плюс, если отыскивается минимальное решение. Задача нахождения критического груза и критической вершины решается перебором возможных вариантов.

Раздел 3. Расчет плоских рам.

Формулировка задачи: для одной из рам, изображенной на рис 3.1 – 3.12 требуется:

- выполнить кинематический анализ;
- определить реакции в связях, включая силы взаимодействия в шарнирах;
- построить эпюры внутренних силовых факторов.

Исходные данные для расчета принять из таблицы № 3.

Таблица 3

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
l , м	2	3	3	2	3	4	4	2	2	3	2	3
h , м	2	3	2	3	4	3	4	2	2	4	2	3
F , кН	4	4	3	5	5	4	5	4	4	5	5	4
M , кН·м	4	4	5	6	4	6	5	6	5	6	5	5

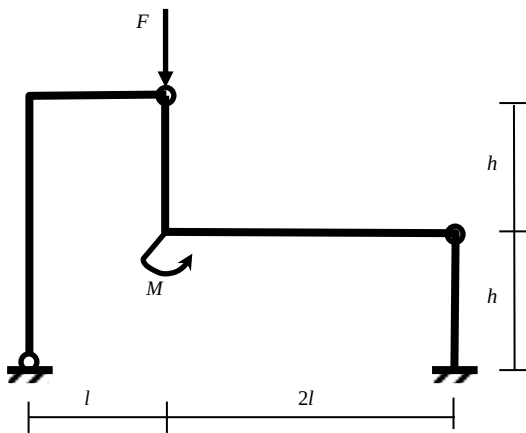


Рис 3.1

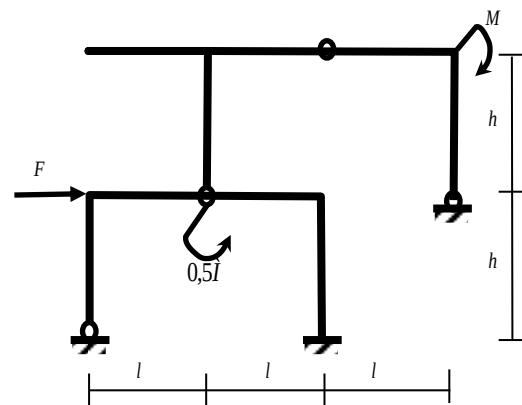


Рис 3.2

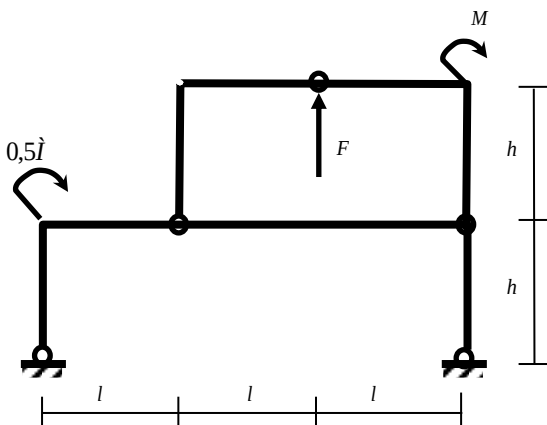


Рис 3.3

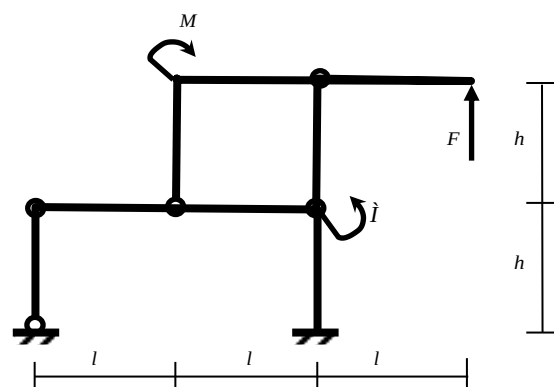


Рис 3.4

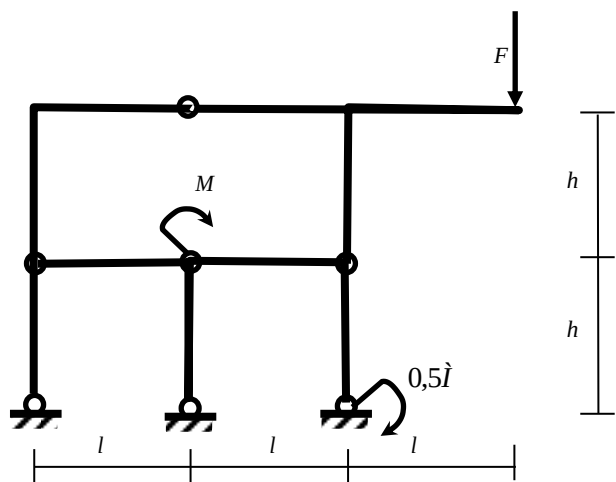


Рис 3.5

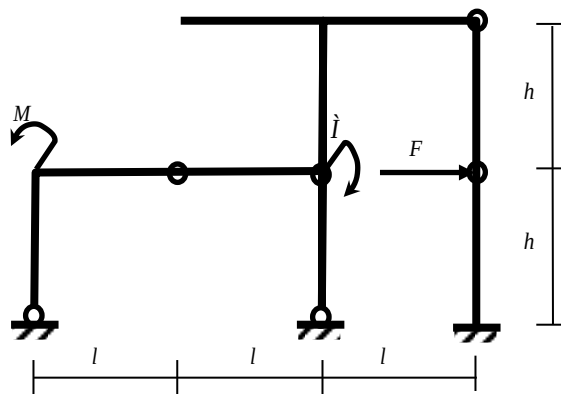


Рис 3.6

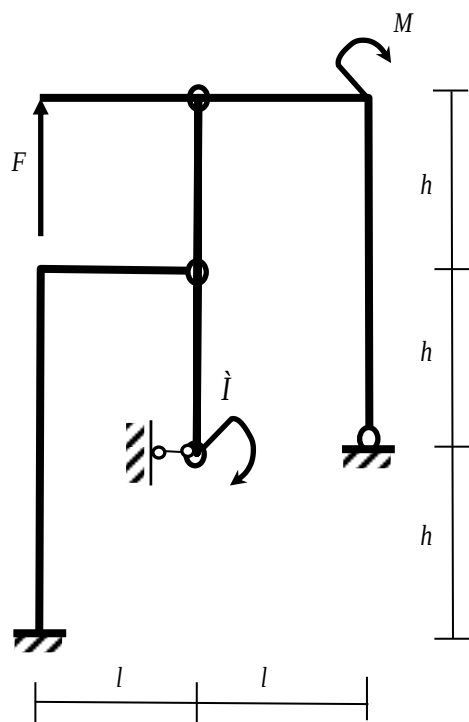


Рис 3.7

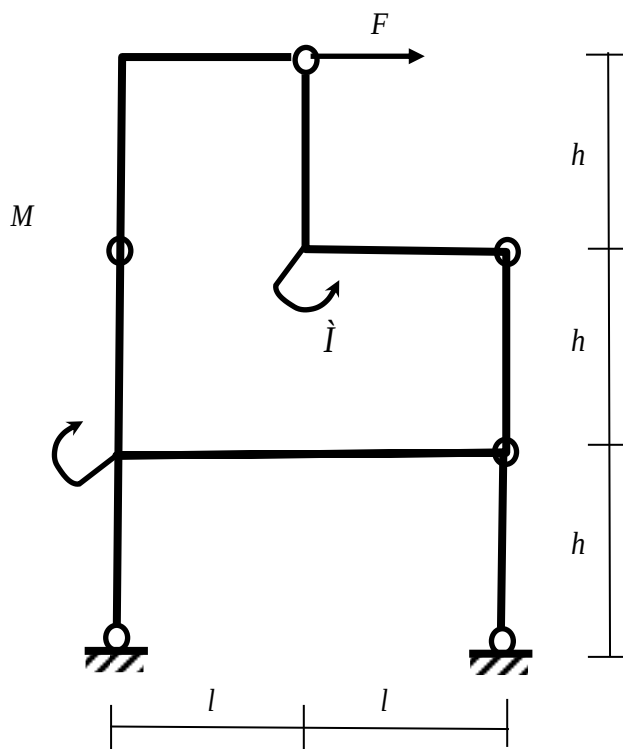


Рис 3.8

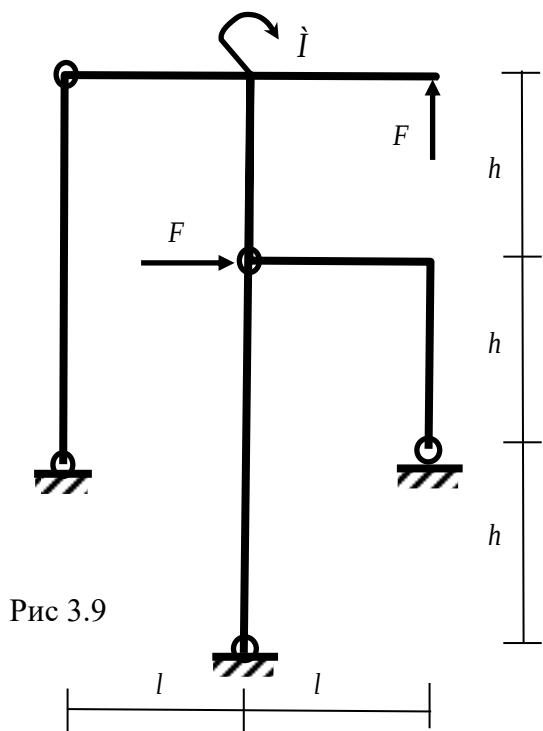


Рис 3.9

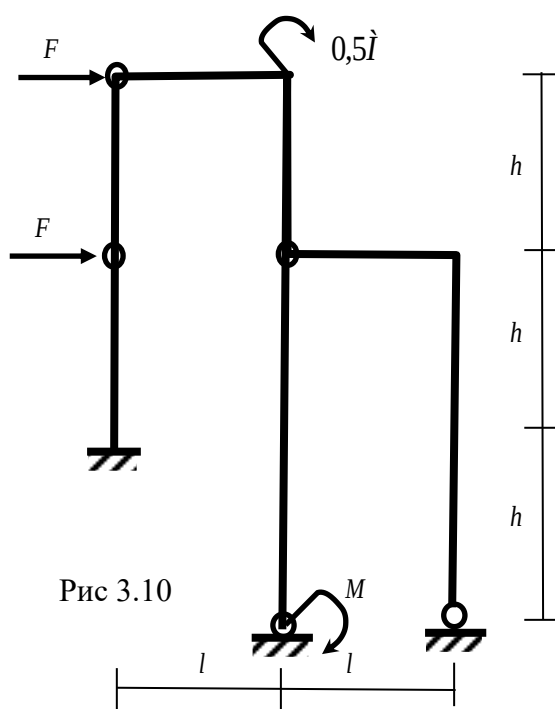


Рис 3.10

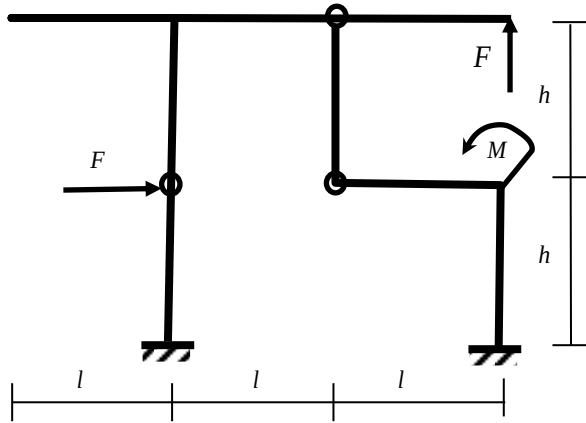


Рис 3.11

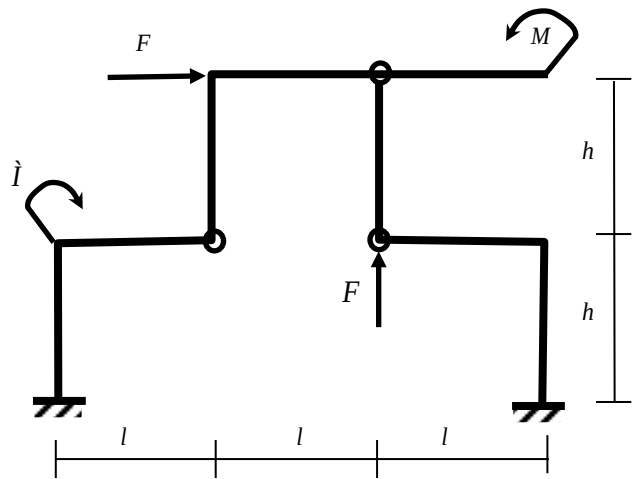


Рис 3.12

Пример расчета плоской рамы.

Исходные данные: схема плоской рамы (рис 3.1), где $l = 2i$; $h = 2i$;

$$M = 4kH \cdot i ; F = 4kH$$

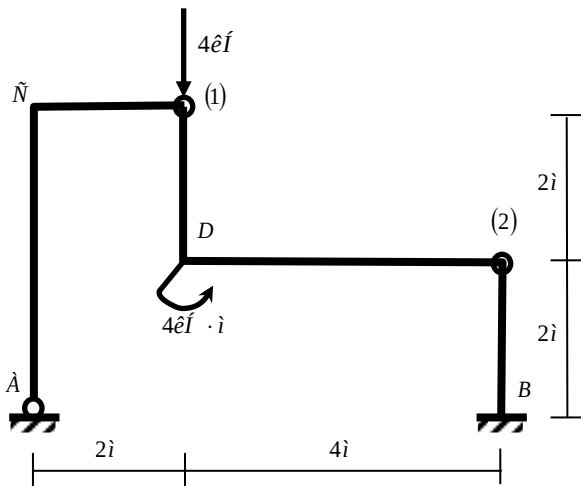


Рис 3.1

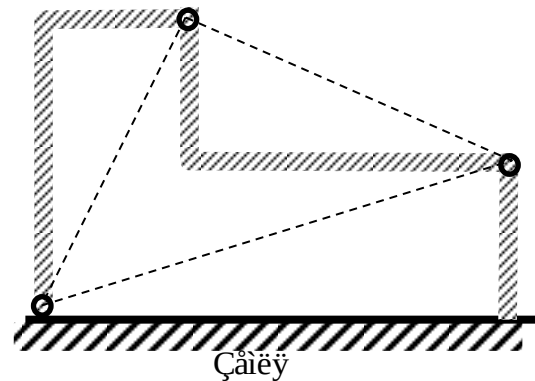


Рис 3.13

Кинематический анализ рамы.

Раму сложной формы расчленим на три диска: AC1; 1D2; 2B (рис 3.14)

Определим степень свободы системы: $W = 3D - (2\varnothing + \tilde{N}) = 3 \cdot 3 - (2 \cdot 2 + 5) = 0$, где

D- число дисков системы; Ш – число шарниров; С – число стержней. Геометрическая неизменяемость рамной конструкции обеспечена, так как рама представляет собой неизменяемую фигуру (рис 3.13), состоящую из трех дисков, соединенных между собой шарнирами А, 1, 2, не лежащими на одной прямой.

Реакции в связях

Силы, обеспечивающие равновесие дисков рамы, показаны на рисунке 3.14:

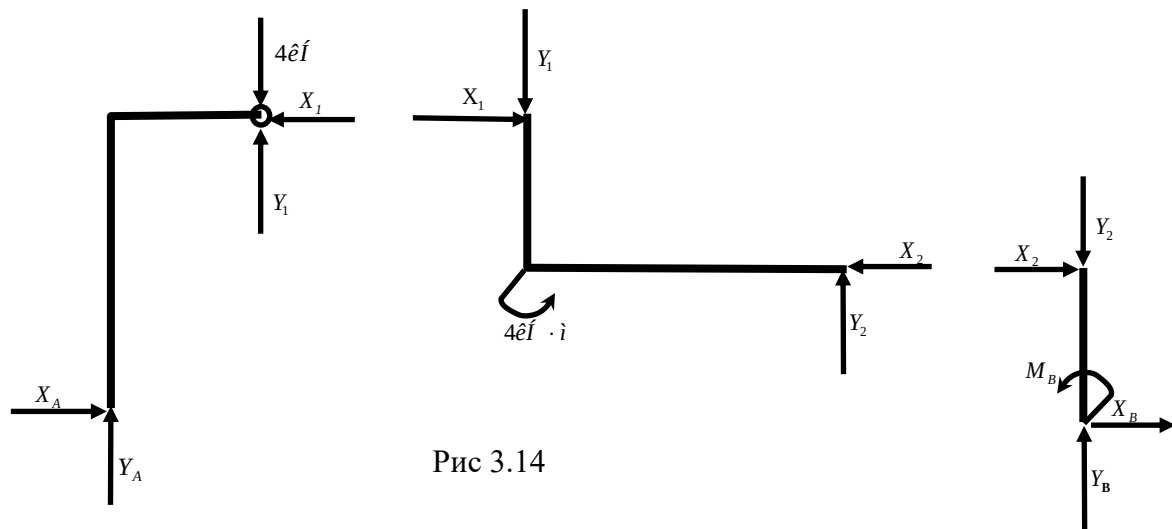


Рис 3.14

Реакции в связях X_A ; Y_A ; X_1 ; Y_1 ; X_2 ; Y_2 ; M_B ; X_B ; Y_B находят из девяти уравнений равновесия (по три для каждого диска) направления и величины показаны на рис 3.15.

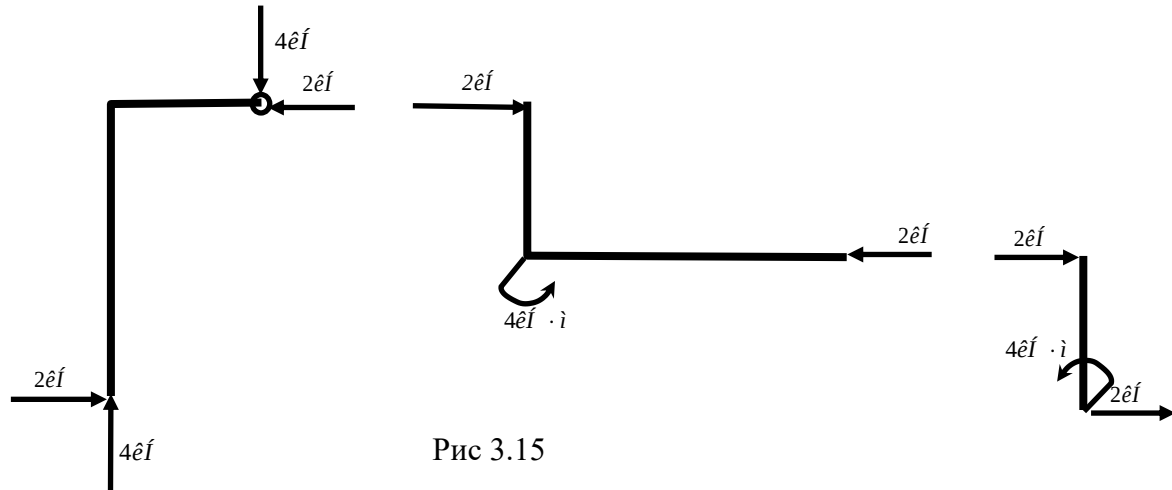
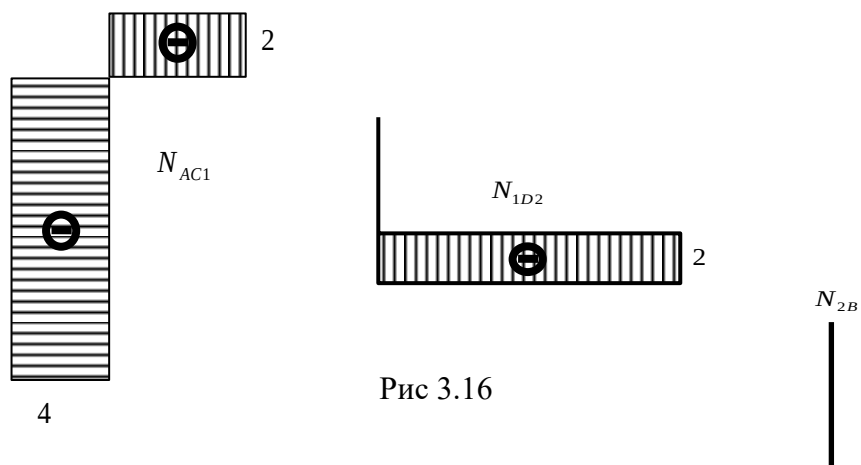


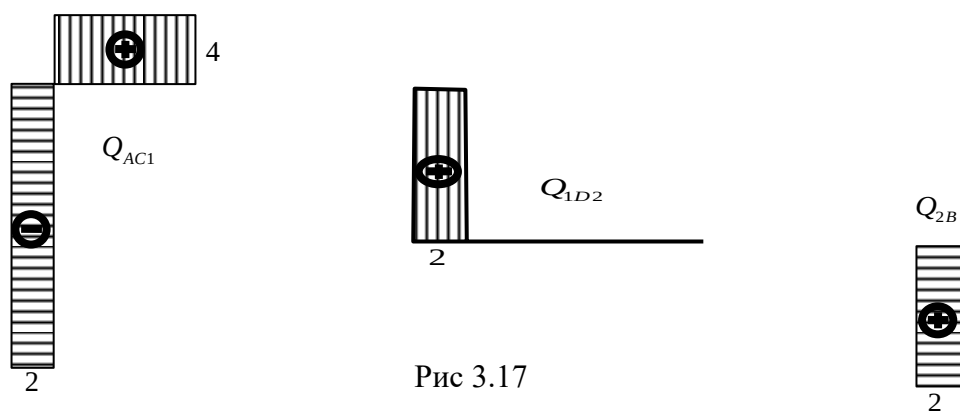
Рис 3.15

Эпюры внутренних силовых факторов в дисках рамы.

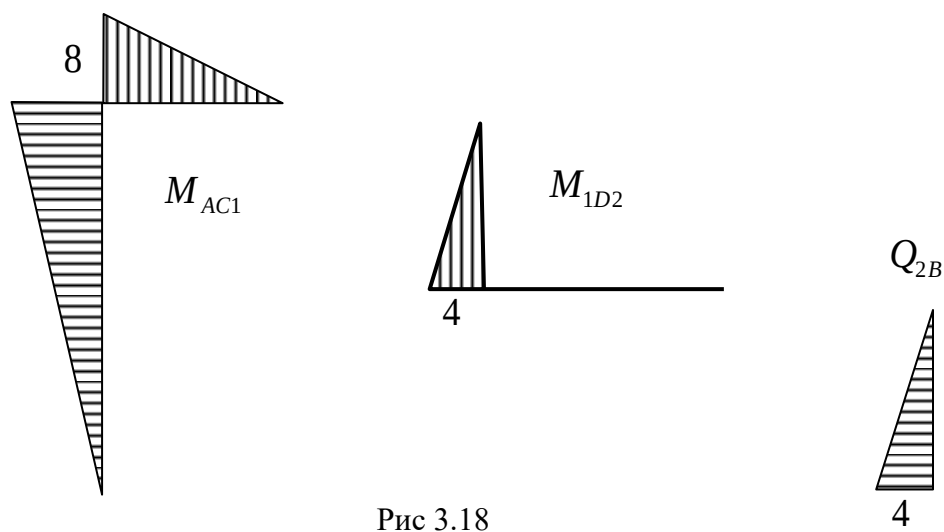
Эпюры продольных сил N (кН).



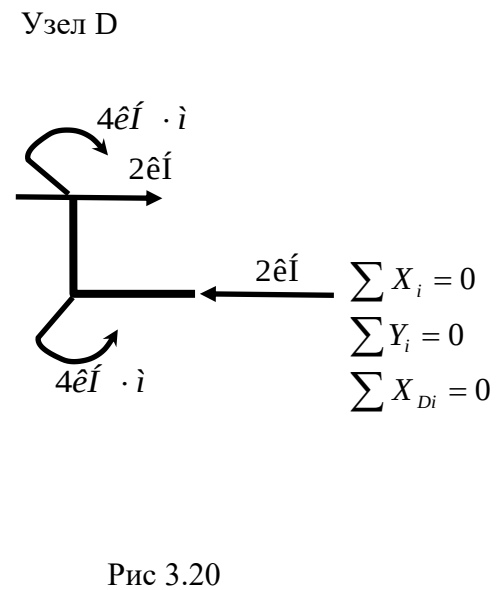
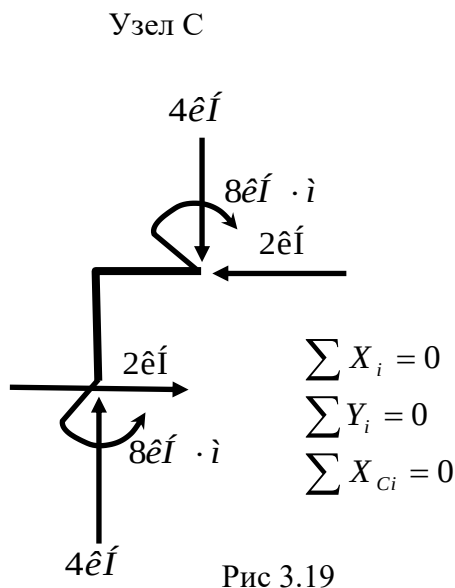
Эпюры поперечных сил Q (кН)



Эпюры изгибающих моментов M (кН·м)



Проверка равновесия жестких узлов C и D:



Пояснения к решению задачи.

Кинематический анализ производится с целью доказательства, что рассматриваемая рамная система является статически определимой, то есть она не имеет избыточных "лишних" связей обеспечена ее геометрическая неизменяемость. Процедура анализа геометрической неизменяемости включает отыскание в раме связанных дисков, в совокупности образующих простейшие неизменяемые фигуры, к которым относятся:

- а) три диска, соединенные тремя не лежащими на одной прямой простыми шарнирами (рис 3.13);
- б) два диска, соединенные тремя простыми не параллельными и не пересекающимися в одной точке связями;

При этом земля рассматривается как неизменяемый и неподвижный диск.

При определении реакций в связях статически определимой рамы используют метод, заключающийся в том, что любая многодисковая статически определимая система может быть представлена в виде набора отдельных дисков с действующими на них внешними нагрузками и реакциями связей, обеспечивающих им равновесие в составе системы. В теории статически определимых систем доказано, что число линейно независимых уравнений статики в точ-

ности равно числу реакций в связях, включая и силы взаимодействия в шарнирах, которые на смежные диски прикладываются в соответствии с законом Ньютона "действие равно противодействию", то есть равными и противоположно направленными.

Примечание: сосредоточенные внешние силы, действующие на шарниры, можно приложить к любому из смежных дисков.

Определение внутренних силовых факторов в дисках производится методом сечений, суть которого состоит в:

- а) разрезают диск на две части так, чтобы в разрез попало поперечное сечение, в котором отыскиваются внутренние силовые факторы;
- б) отбрасывают одну часть диска (любую), а ее действие заменяют усилиями N , Q и M ;
- в) для рассматриваемой части диска составляют три независимых уравнения равновесия, из которых определяются величины и направления внутренних силовых факторов.

Для проверки равновесия жестких узлов C и D снимаются внутренние силовые факторы с построенных эпюр в сечениях, максимально приближенных к узлам и с учетом знака усилия прикладываются к узлам.

Проверяется выполнение условий равновесия, при составлении которых необходимо учесть внешние сосредоточенные силы или моменты, непосредственно приложенных к узлу.

Раздел 4. Расчет балочных ферм.

Формулировка задачи: для одной из балочных ферм, изображенных на рисунках 4.1 – 4.8 требуется:

- определить аналитические усилия в отмеченных "звездочкой" стержнях от неподвижной нагрузки в виде сосредоточенных сил F , приложенных в каждом узле прямолинейного нижнего пояса фермы;
- построить линии влияния усилий для отмеченных стержней при движении по прямолинейному поясу фермы;
- вычислить по линиям влияния усилия в отмеченных стержнях от сил F и результаты сравнить со значениями усилий, полученных аналитически.

Исходные данные для расчета принять из таблицы № 4.

Таблица 4

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l , м	4	1	2	1	2	1	2	1	3	1
h , м	3	2	2	2	2	2	3	3	3	3
F , кН	3	6	5	7	10	8	6	4	7	5

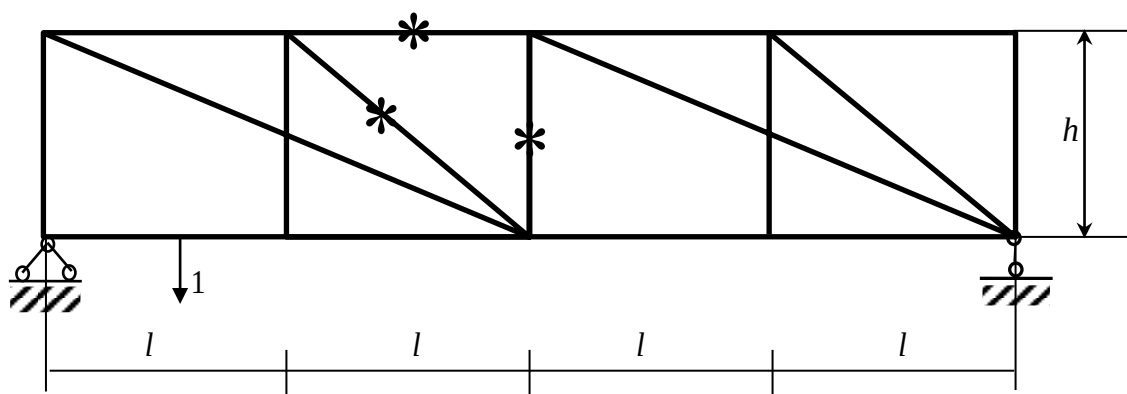


Рис 4.1

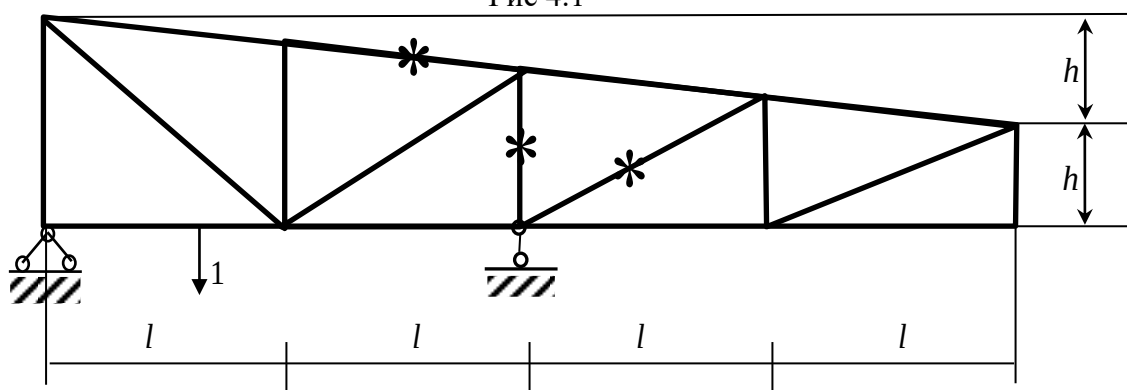


Рис 4.2

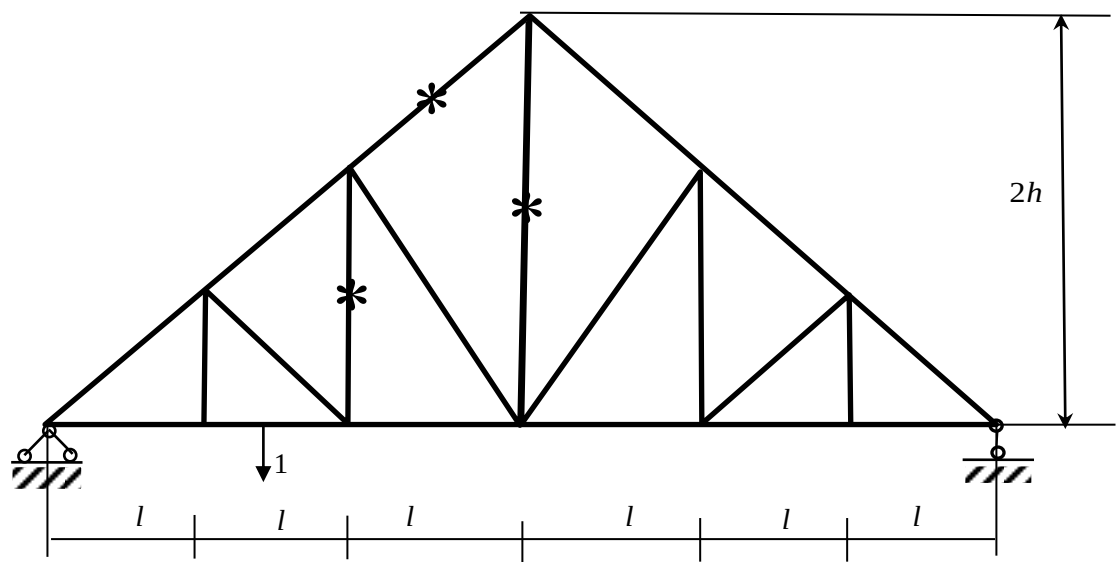


Рис 4.3

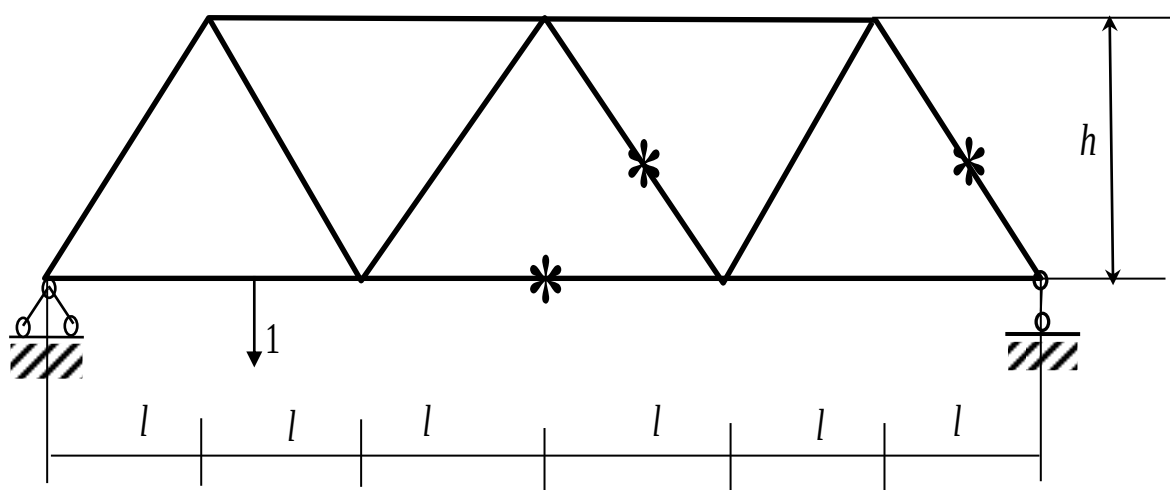


Рис 4.4

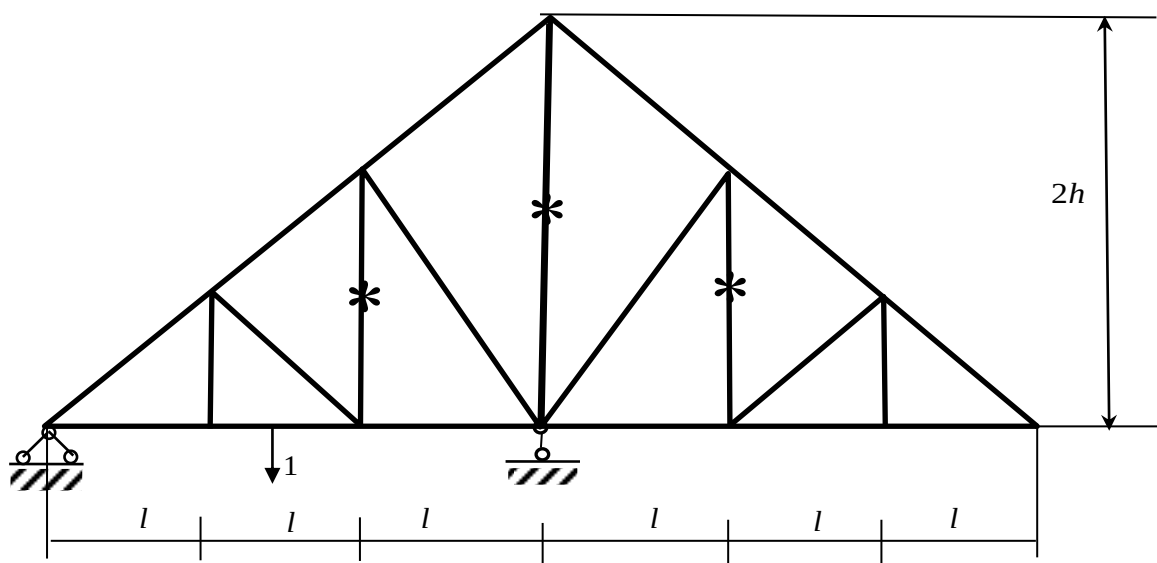


Рис 4.5

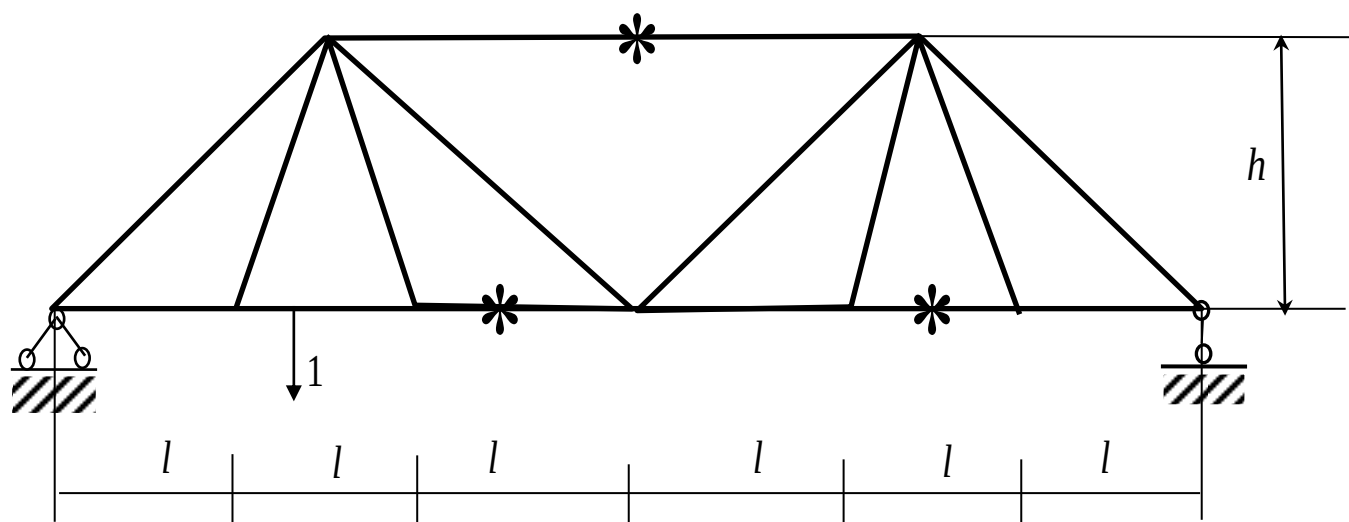


Рис 4.6

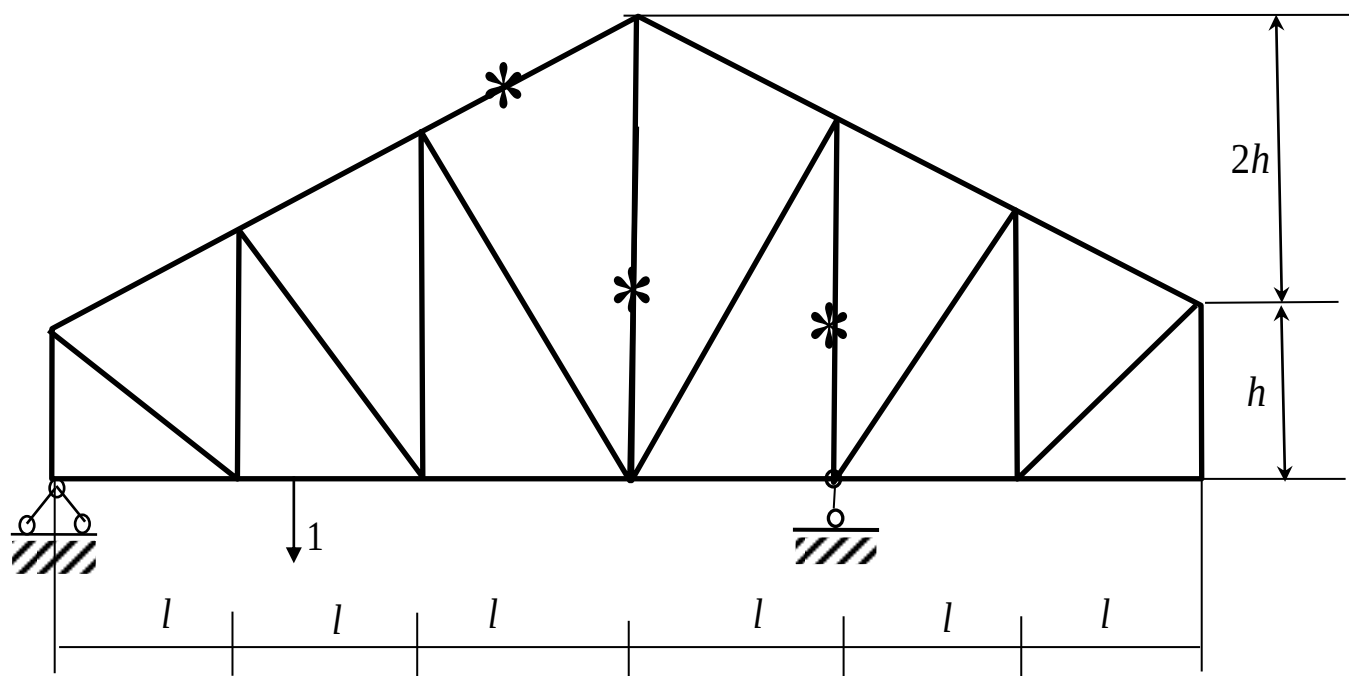


Рис 4.7

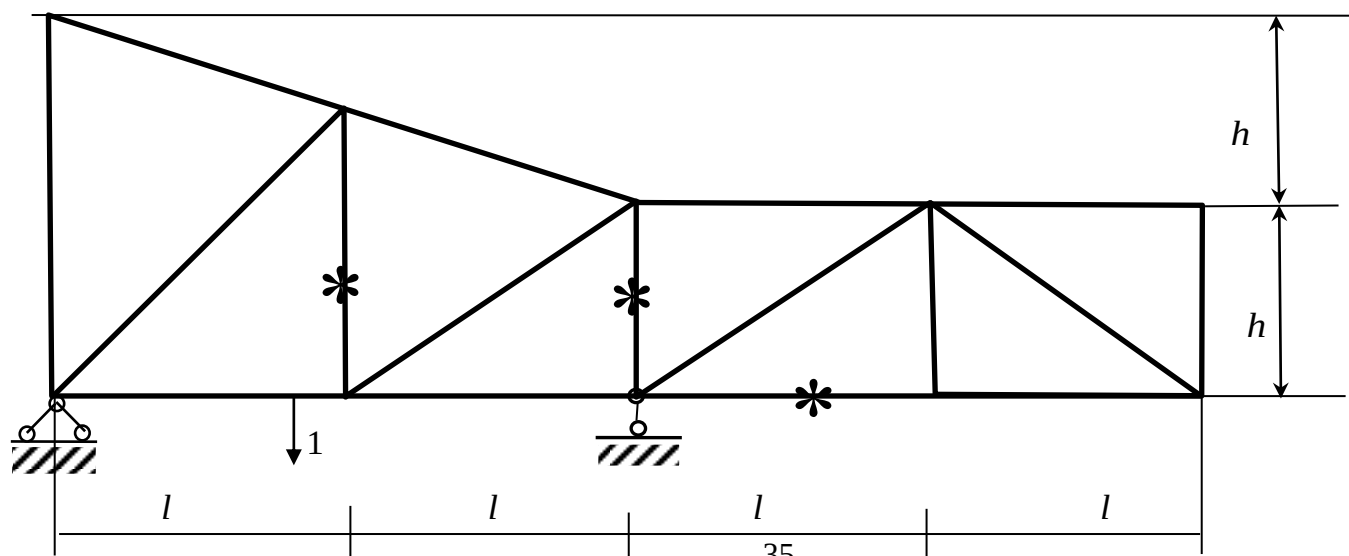


Рис 4.8

Пример решения задачи

Исходные данные: схема фермы на рисунке 4.1; номер варианта 1 $l = 4\text{ м}$, $h = 4\text{ м}$, $F = 4\text{ кН}$

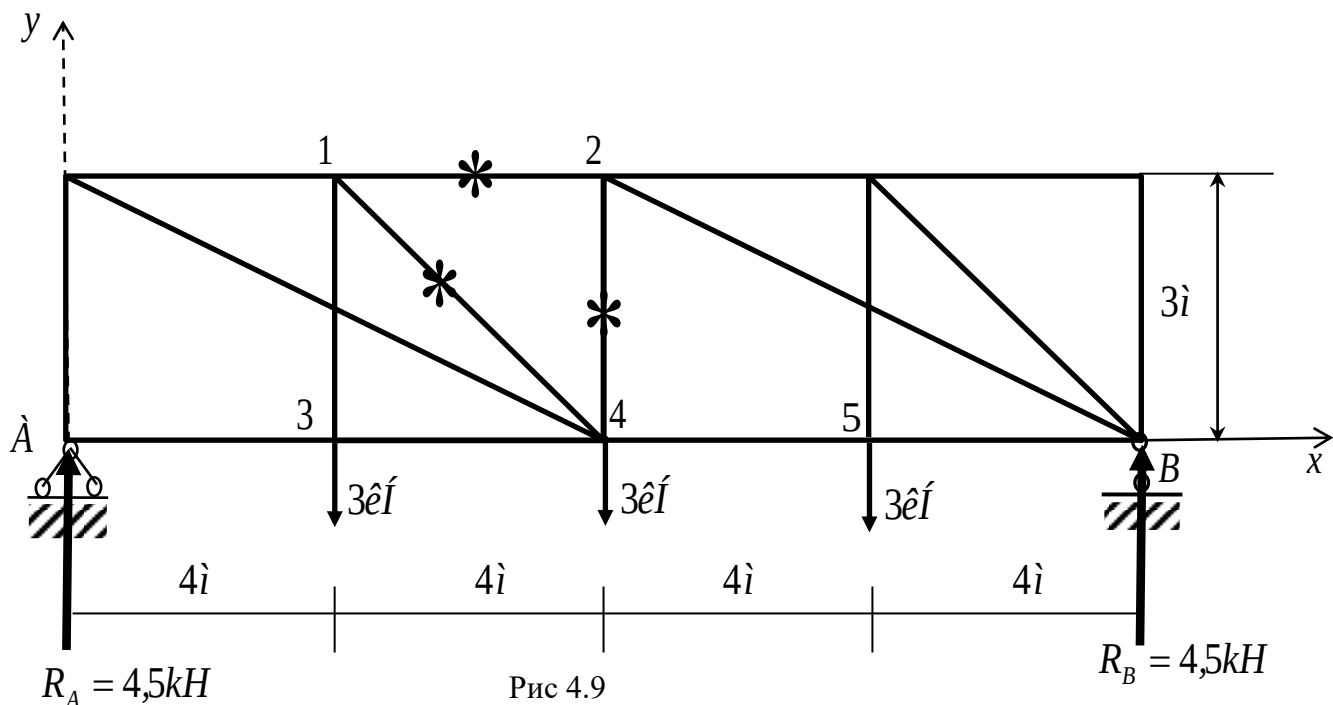
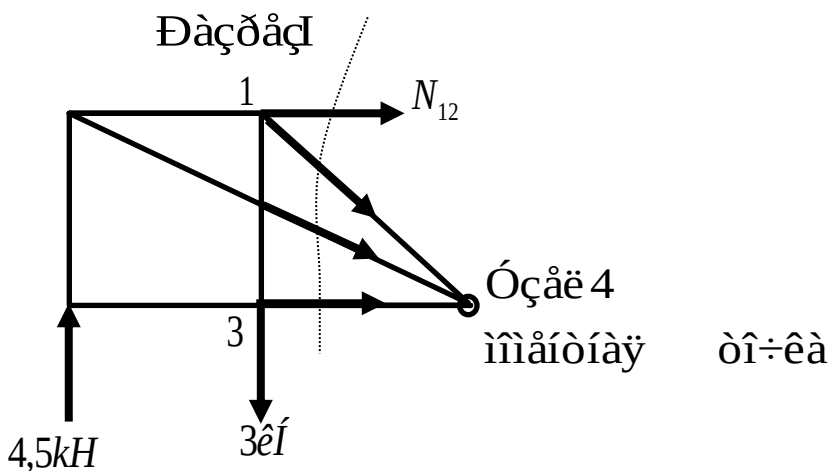


Рис 4.9

Решение.

Составляем расчетную схему для определения опорных реакций.

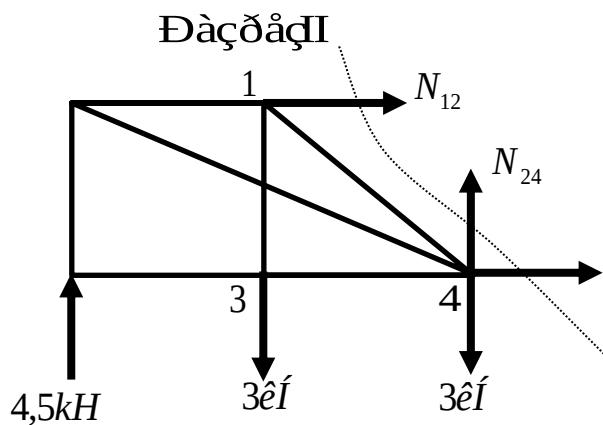
$$R_A = R_B = \frac{F + F + F}{2} = 4,5\text{ кН}, \text{ так как нагрузка симметрична относительно опор.}$$



$$\sum M_4 = 0; N_{12} \cdot 3 + 4,5 \cdot 8 - 3 \cdot 4 = 0$$

$$N_{12} = \frac{12 - 36}{3} = -\frac{24}{3} = -8\text{ кН}$$

Аналитический способ нахождения усилий от неподвижной нагрузки требует рассмотрения равновесия отсеченной части фермы, содержащей определяемой усилие. Последовательность операций по вычислению усилий в искомым стержнях способом моментных точек следующая:



$$\sum F_y = 0;$$

$$N_{24} + 4,5 - 3 - 3 = 0$$

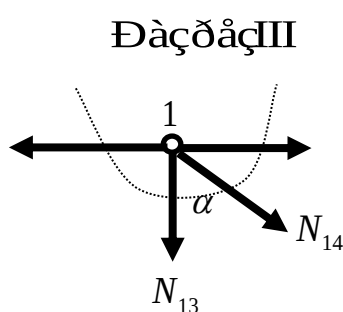
$$N_{24} = 1,5kH$$

1) Проводят сквозное сечение так, чтобы оси всех рассеченных стержней или их продолжения (кроме стержня, в котором требуется определить усилие) пересекались в одной точке. Эту точку принято называть моментной, или точкой Риттера;

2) Часть фермы, имеющую сложную нагрузку, отбрасывают и ее действие на оставшуюся часть заменяют внутренними усилиями в рассеченных стержнях;

3) Составляют уравнения моментов всех сил, приложенных к рассматриваемой части относительно моментной точки и из него находят искомое усилие.

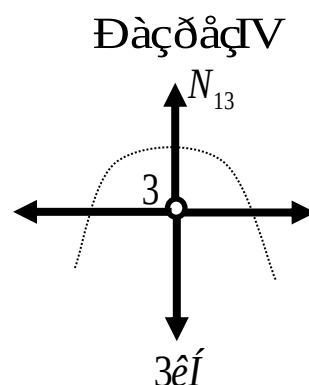
Для обозначения стержней назовем узлы 1, 2, 3, 4, 5 (рисунок 4.9)



$$\sum F_y = 0;$$

$$-N_{13} - N_{14} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$N_{14} = \frac{-N_{13}}{\cos \alpha}$$



$$\sum F_y = 0;$$

$$N_{13} - 3 = 0; N_{13} = 3êÍ$$

$$N_{14} = \frac{-N_{13}}{\cos \alpha} = \frac{-3 \cdot 5}{3} = -5êÍ$$

Линии влияния усилий для отмеченных на рисунке 4.1 стержней.

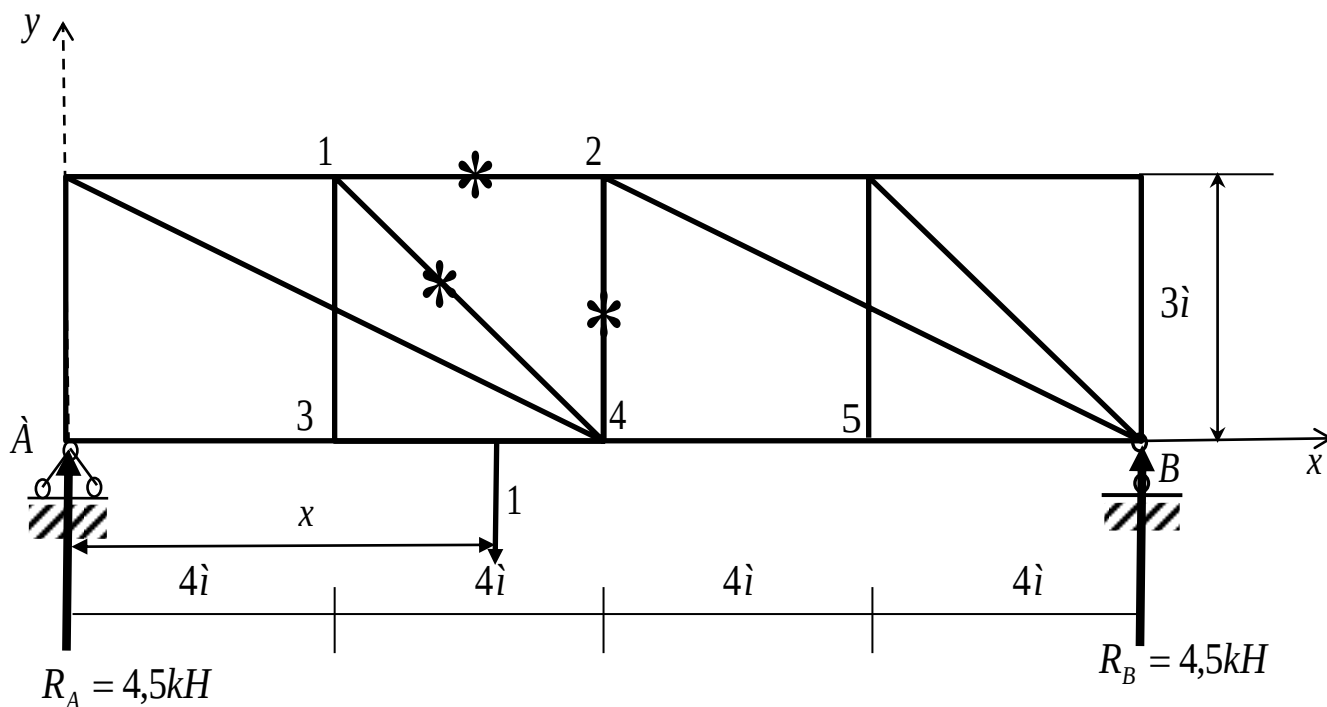
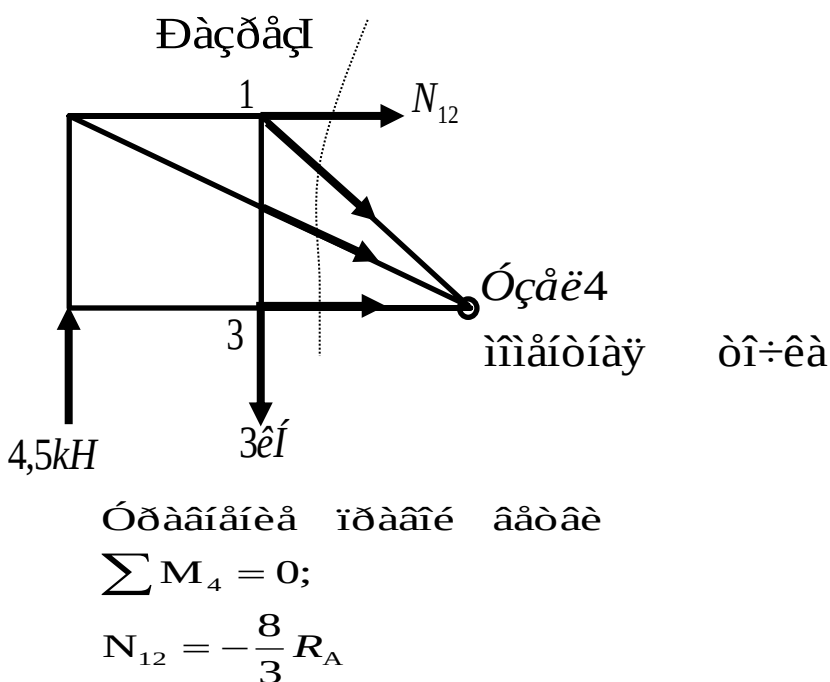


Рис 4.10



Основой для построения линий влияния в стержнях фермы, в большинстве случаев, являются линии влияния опорных реакций, вид и значение которых описан в предыдущих разделах. Задача сводится к нахождению математической зависимости внутреннего усилия от реакции опор через законы равновесия и последующего перемасштабирования линий влияния реакций.

В данной задаче связь усилия в стержне 1-2 с реакцией R_A , когда груз находится справа от разреза I, определена из равенства нулю моментов относительно точки (узла 4) для левой отсеченной части фермы. В результате полу-

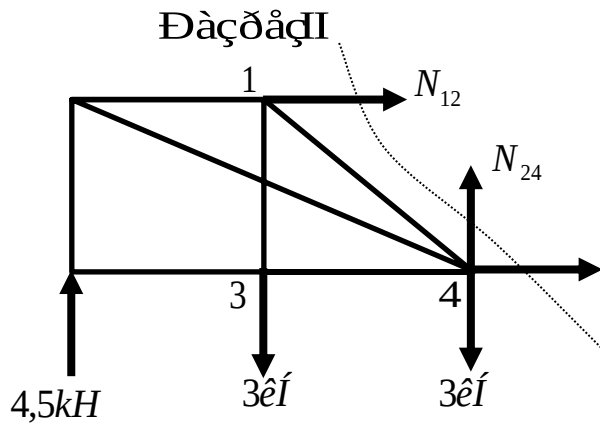


Рисунок I

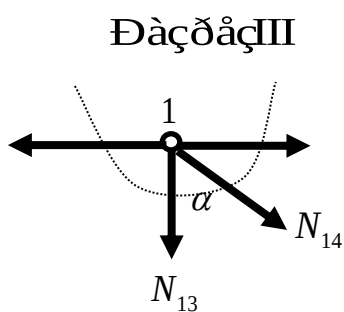
Рисунок I

$$\sum F_y = 0;$$

$$N_{24} = -R_A$$

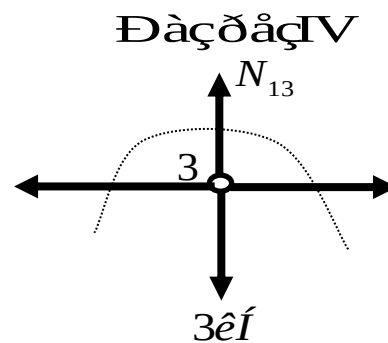
усилия с усилием в стержне 1-3 из равновесия узла 1, а линия влияния усилия в стержне 1-3 строится при рассмотрении узла 3.

чено уравнение правой части, а левая ветвь, как известно, пересекается с правой в точке, лежащей на одной вертикали с моментной точкой (узлом 4), для усилия в стержне 2-4 линии влияния параллельны, поскольку связь с реакцией определяется уравнением равновесия $\sum F_y = 0$. Для построения линий влияния в стержне 1-4 использована связь этого



$$\sum F_y = 0;$$

$$N_{14} = -\frac{5}{3} N_{13}$$



$$\sum F_y = 0;$$

$$N_{13} = 1$$

Определим усилия в отмеченных стержнях по формуле влияния от сил $F = 3 \text{ kN}$ и сравним значения усилий, полученных аналитическим способом.

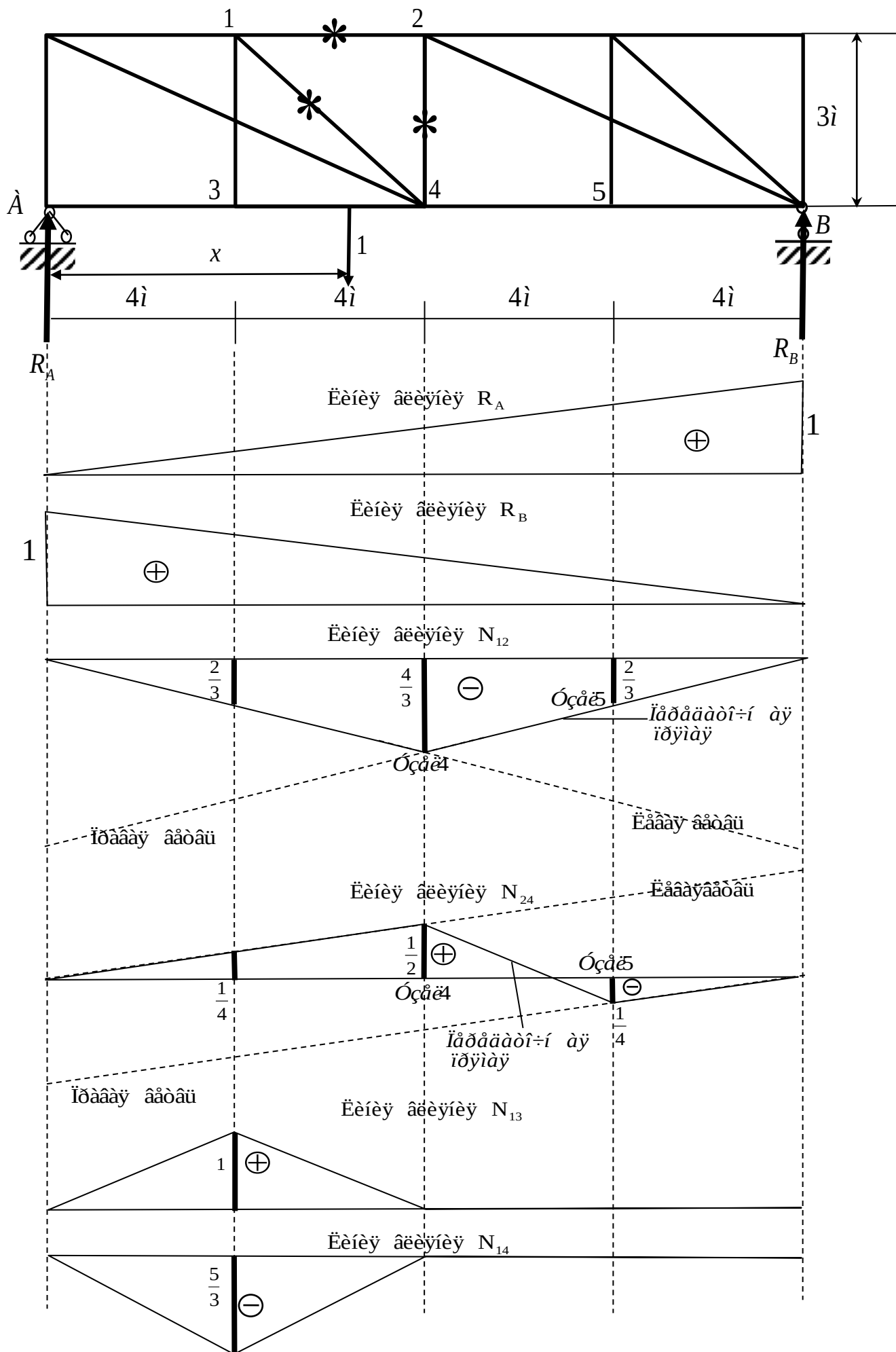
$$N_{12} = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -2 - 4 - 2 = -8 \text{ kN};$$

$$N_{24} = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 1,5 \text{ kN};$$

$$N_{13} = 3 \cdot 1 = 3 \text{ kN};$$

$$N_{14} = 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -5 \text{ kN};$$

Расчеты выполнены верно.



Раздел 5. Расчет статически неопределимых рамных систем.

Этот раздел предусмотрен для студентов, желающих доказать, что они способны решать задачи статики – геометрически неизменяемых статически неопределимых систем повышенной сложности.

Формулировка задачи: Для одной из стержневых систем, изображенных на рисунках 5.1 – 5.4 требуется:

- установить порядок расчета статически неопределимой стержневой системы;
- построить эпюру изгибающих моментов для заданной рамы, жесткость ее стержней указана на соответствующем рисунке.

Исходные данные для расчета принять из таблицы № 5.

Таблица №5.

Номер варианта	1	2	3	4
$l, м$	10	6	12	4
$l_1, м$	10,44	3	16	-
$h, м$	7,5	6	9	5
$h_1, м$	3	4	-	8
$q, кН/м$	-	2	3	-
$F, кН$	3	-	-	4

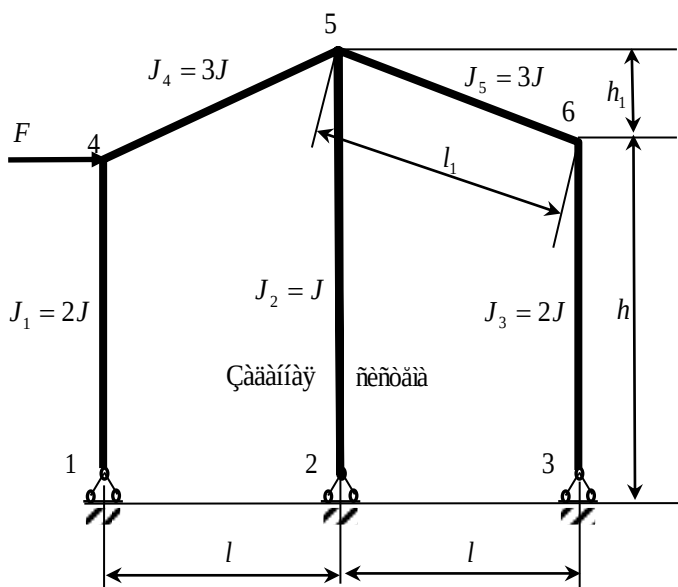


Рис 5.1

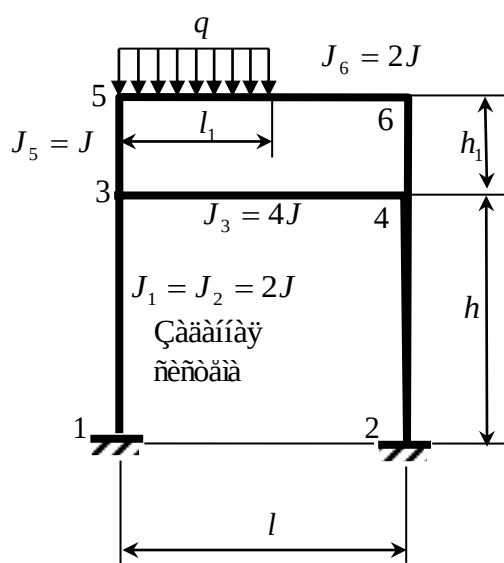


Рис 5.2

- основная система поочередно нагружается единичными усилиями $X_1 = 1$, ..., $X_k = 1$, ..., $X_n = 1$ и от каждого из них отдельно строятся единичные эпюры изгибающих моментов $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$, ..., $\overline{M}_n$, помимо этого строится грузовая эпюра изгибающих моментов M_p ;

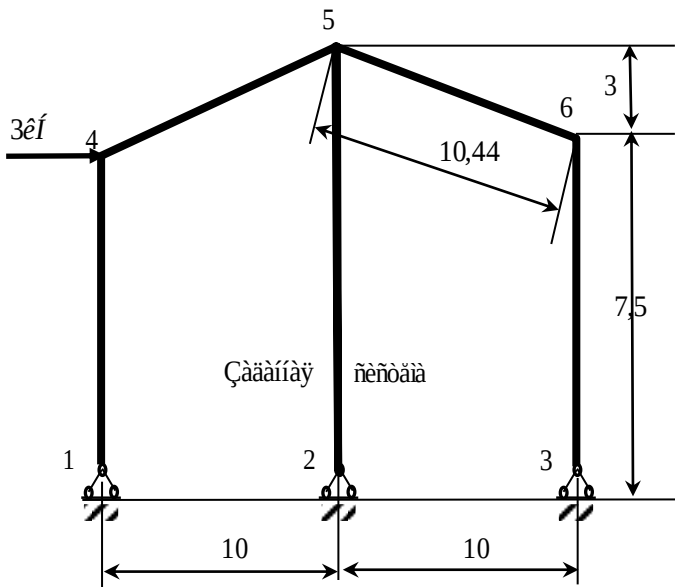


Рис 5.1

неизвестных X_1, X_2 , ..., X_k , ..., X_n ;

- для получения суммарной эпюры изгибающих моментов ординаты каждой из единичных эпюр умножаются на найденное значение соответствующего неизвестного и

все результаты, по отдельным точкам осей системы, суммируются с добавлением к ним ординат грузовой эпюры моментов.

2) Заданную систему трижды статически неопределимую, обращаем в основную статически определимую, изображенную на рисунке 5.5, путем отбрасывания в системе "лишних" связей, заменив их неизвестными силами X_1, X_2, X_3 .

X_1 - две горизонтальные силы, расположенные кососимметрично;

X_2 - вертикальная сила на средней опоре;

- перемножением единичных эпюр вычисляются все коэффициенты δ_{ik} системы канонических уравнений;

- перемножением единичных и грузовой эпюр определяются грузовые члены Δ_{iF} системы канонических уравнений;

- решается система канонических уравнений, в результате чего находятся значения

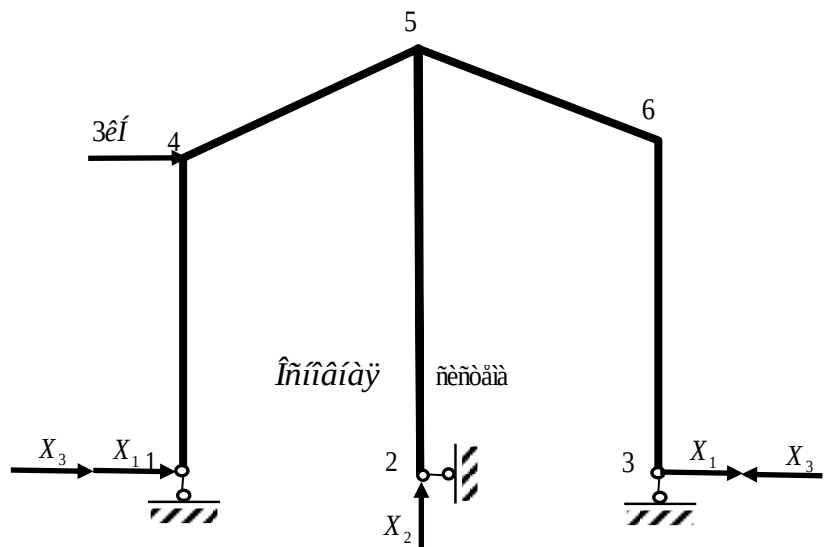


Рис 5.5

X_3 - две горизонтальные силы, расположенные симметрично.

Выбрано такое расположение сил, чтобы получить единичные эпюры симметричными или кососимметричными. Для удобства вычислений внешнюю нагрузку также разбиваем на симметричную (рисунок 5.6) и кососимметричную (рисунок 5.7). Единичные эпюры изгибающих моментов $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$ от каждой силы X_1, X_2, X_3 отдельно приведены на рисунках 5.8 (а, б, в).

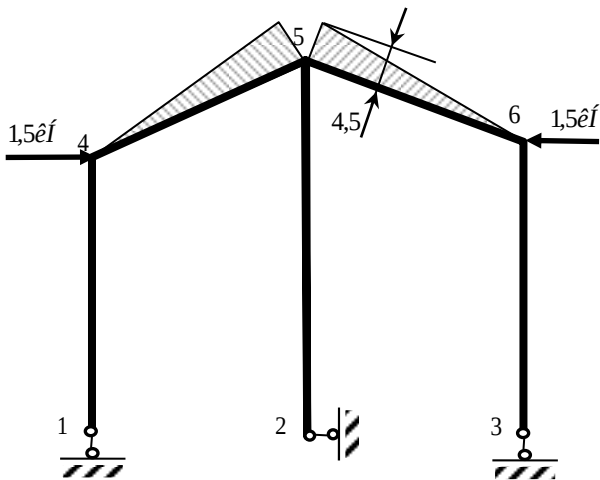


Рис 5.6

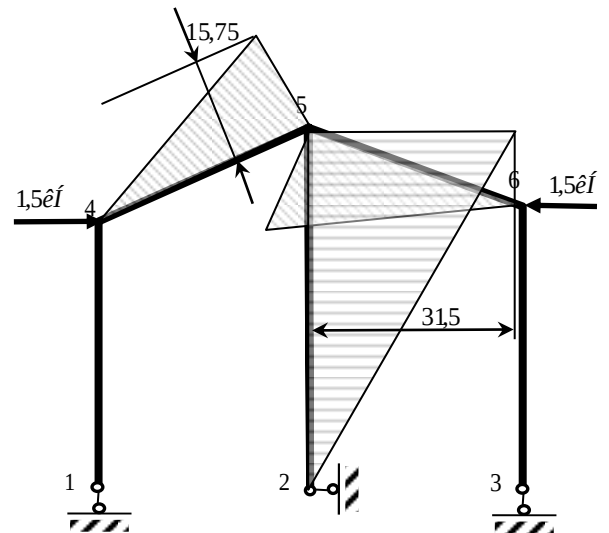


Рис 5.7

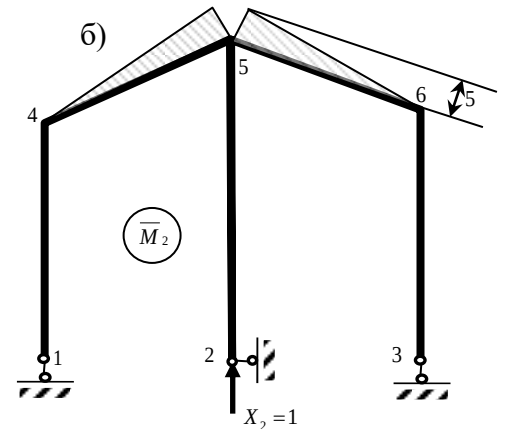
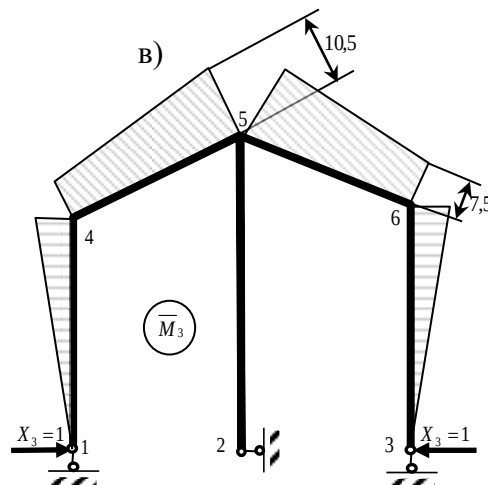
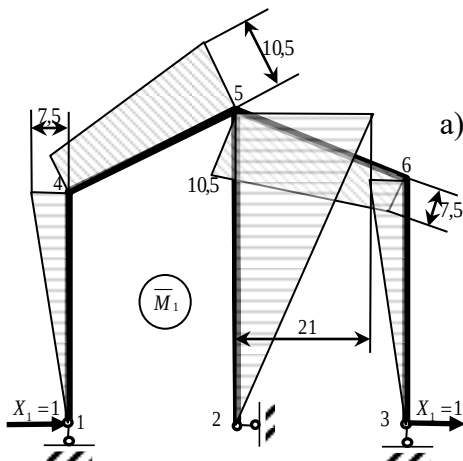


Рис 5.8

Для вычисления грузовых перемещений Δ_{1F} , Δ_{2F} , Δ_{3F} будем умножать эпюру от $\bar{X}_1$ на эпюру, приведенную на рисунке 5.7 (от кососимметричной нагрузки), а эпюры от $\bar{X}_2$ и $\bar{X}_3$ (как симметричные) на эпюру, изображенную на рисунке 5.6. Очевидно, что $\delta_{12} = \delta_{13} = 0$.

Составляем канонические уравнения:

$$X_1 \delta_{11} = -\Delta_{1F};$$

$$X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} = -\Delta_{2F};$$

$$X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{33} = -\Delta_{3F};$$

Вычисляем перемещения (коэффициенты) δ_{11} , δ_{22} , δ_{33} , δ_{23} системы канонических уравнений (увеличенные в $E \cdot J$ раз).

$$\delta_{11} = 2 \cdot \frac{7,5 \cdot 7,5}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7,5 + \frac{10,44}{6 \cdot 3} (2 \cdot 7,5 \cdot 7,5 + 2 \cdot 10,5 \cdot 10,5 + 2 \cdot 7,5 \cdot 10,5) \cdot 2 + \frac{21 \cdot 10,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 21 = 22531$$

$$\delta_{22} = \frac{10,44 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 2 = 58$$

$$\delta_{33} = 2 \cdot \frac{10,44 \cdot 7,5}{2 \cdot 3} \cdot 8,5 + 2 \cdot \frac{10,44 \cdot 10,5}{2 \cdot 3} \cdot 9,5 + 2 \cdot \frac{7,5 \cdot 7,5}{2 \cdot 2} \cdot 5 = 709,6$$

$$\delta_{23} = 2 \cdot \frac{10,44 \cdot 5 \cdot 9,5}{2 \cdot 3} = 165,3$$

$$\Delta_{1F} = 2 \cdot \frac{10,44 \cdot 15,75 \cdot 9,5}{2 \cdot 3} + \frac{10,5 \cdot 31,5 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 2835,9$$

$$\Delta_{2F} = 2 \cdot \frac{10,44 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 52,2$$

$$\Delta_{3F} = 2 \cdot \frac{10,44 \cdot 4,5 \cdot 9,5}{2 \cdot 3} = 148,72$$

Подставим найденные коэффициенты δ_{ik} и Δ_{iF} в канонические уравнения, определим значения неизвестных X_1, X_2, X_3 :

$$22531X_1 = -2835,9;$$

$$58X_2 + 165,3X_3 = -52,2;$$

$$165,3X_2 + 709,6X_3 = -148,77;$$

Решая эти уравнения, получаем $X_1 = -1,259$, $X_2 = -0,9$, $X_3 = 0$

1) Определяем изгибающие моменты:

$$M_{45} = 1,259 \cdot 7,5 = 9,44 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{54} = 1,259 \cdot 10,5 + 0,9 \cdot 5 - 4,5 - 15,75 = -2,53 \text{êí} \cdot \text{ì} ;$$

$$M_{56} = -1,259 \cdot 10,5 + 0,9 \cdot 5 - 4,5 + 15,75 = 2,53 \text{êí} \cdot \text{ì} ;$$

$$M_{65} = -1,259 \cdot 7,5 = -9,44 \text{êí} \cdot \text{ì} ;$$

$$M_{52} = -1,259 \cdot 21 + 31,5 = 5,06 \text{êí} \cdot \text{ì} .$$

2) Получить значения эпюры изгибающих моментов заданной рамы также можно было, если помножить каждую единичную эпюру $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$ на соответствующее значение неизвестного X_1, X_2, X_3 , а затем полученные эпюры сложить и прибавить к ним эпюру от нагрузки F, например, все ординаты эпюры $\overline{M}_1$ умножить на (-1,259).

Окончательная эпюра изгибающих моментов приведена на рисунке 5.9.

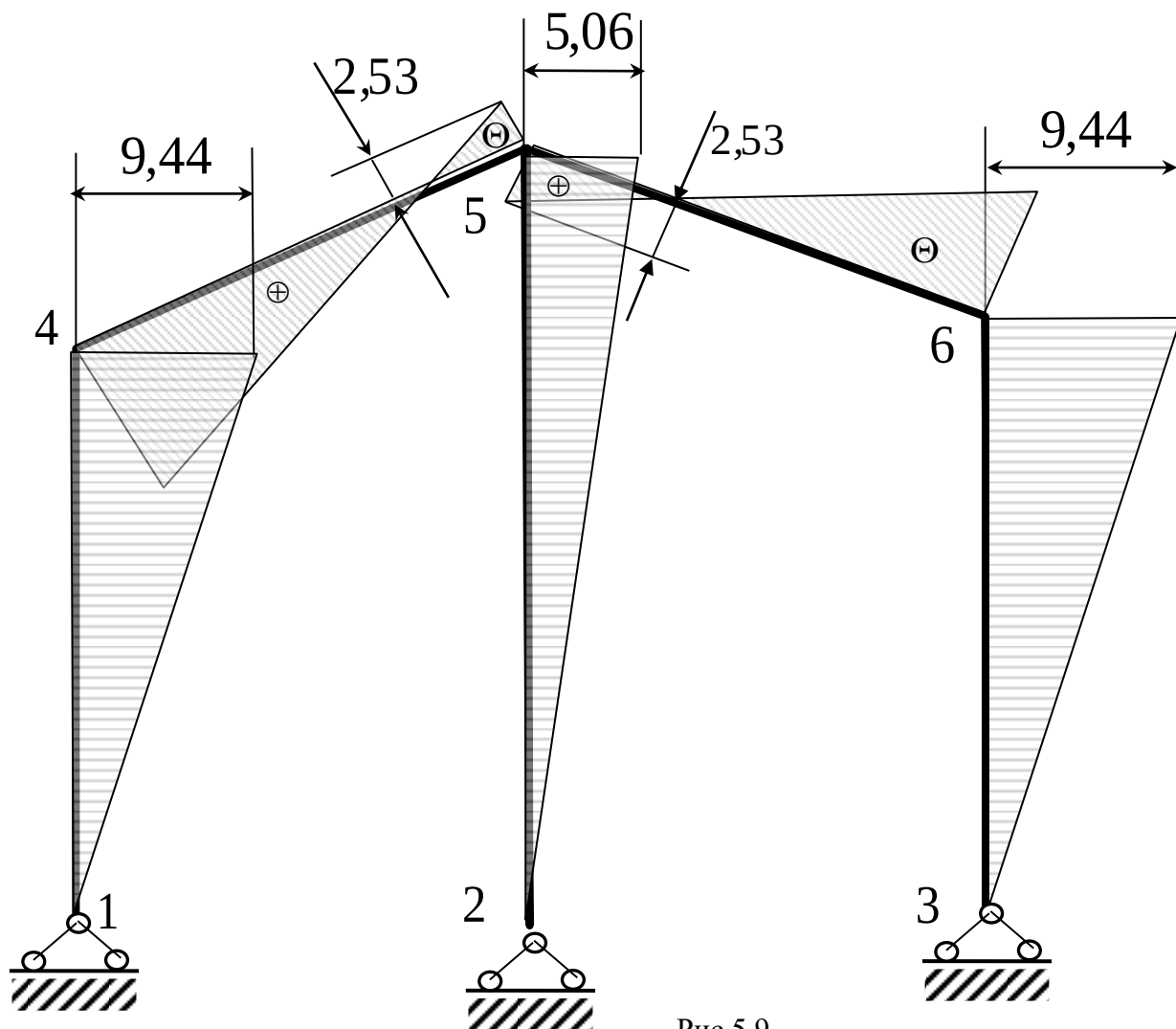


Рис 5.9

Раздел 6. Расчет перемещений от нагрузки.

Формулировка задачи. Для одной из рам, изображенных на рисунках 6.1 – 6.8, определить линейное перемещение сечения "m" и угол поворота сечения "n". Расчет перемещений выполнить с учетом податливости сжато-растянутых стержней и упругих связей (пружин).

Для расчета принять:

- жесткость изгибаемых стержней EJ постоянной по длине и одинаковой для всех элементов рамы;
- жесткость сжато-растянутых стержней $E \cdot A = \frac{EJ}{l^2}$;
- податливость пружин $\frac{l^3}{EJ}$;

Исходные данные для расчета принять из таблицы № 6.

Таблица № 6

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
q, кН/м	3	2	3	4	4	3	2	1
l, м	2	4	2	1	1	2	3	4
h, м	2	4	3	1	2	2	4	2

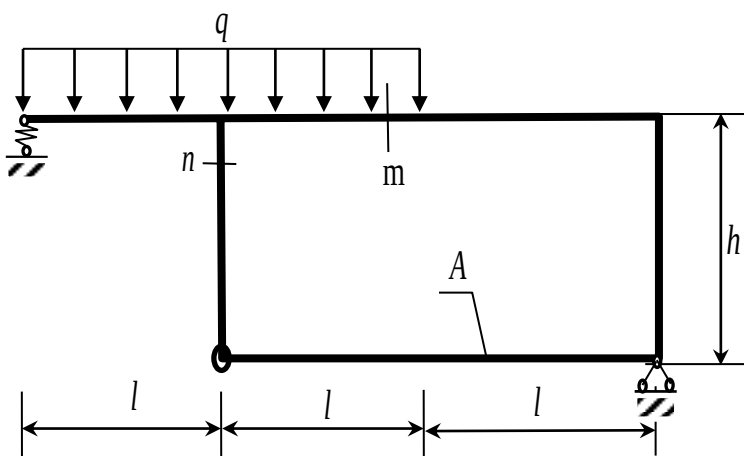


Рис 6.1

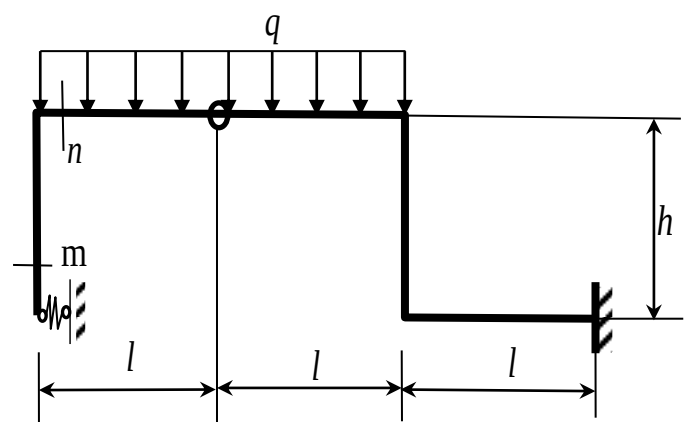


Рис 6.2

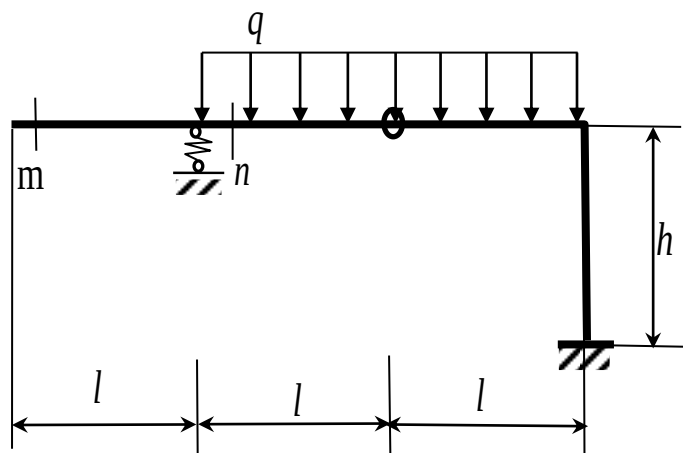


Рис 6.3

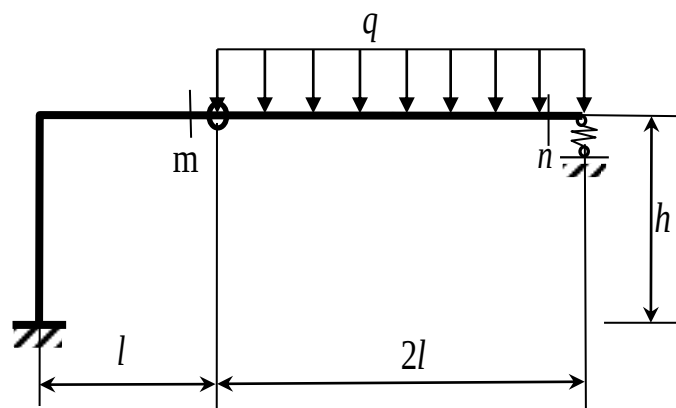


Рис 6.4

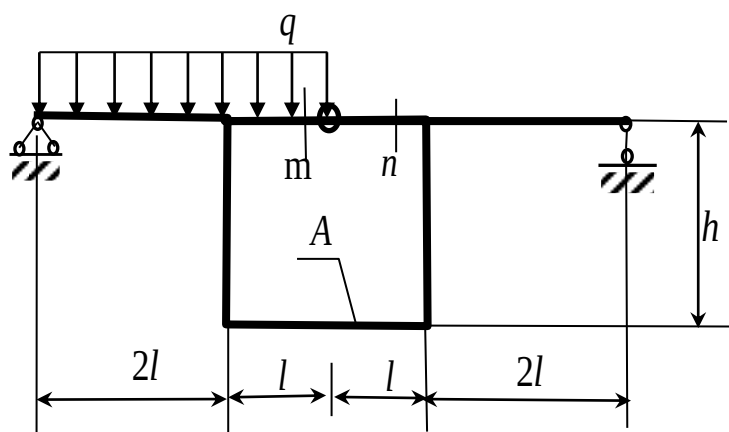


Рис 6.5

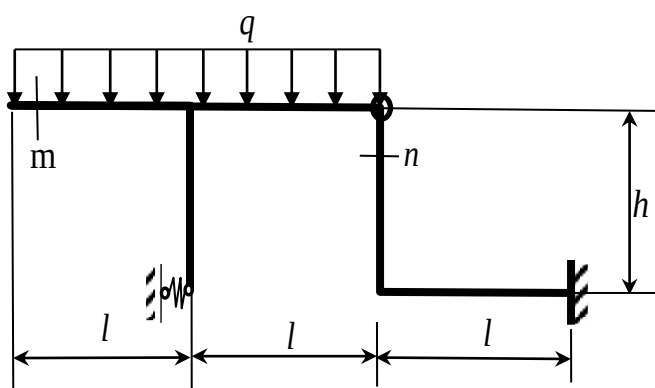


Рис 6.6

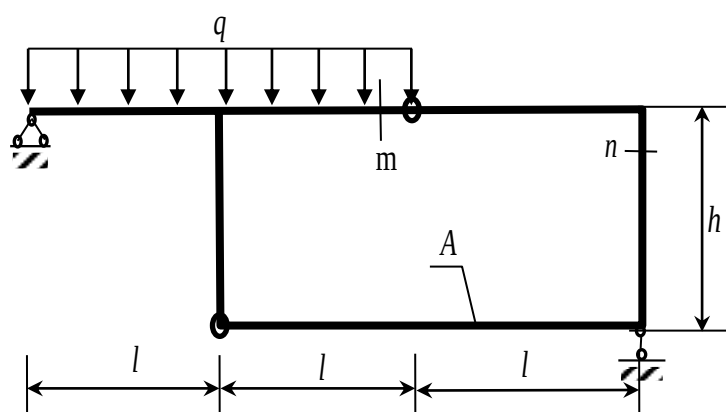


Рис 6.7

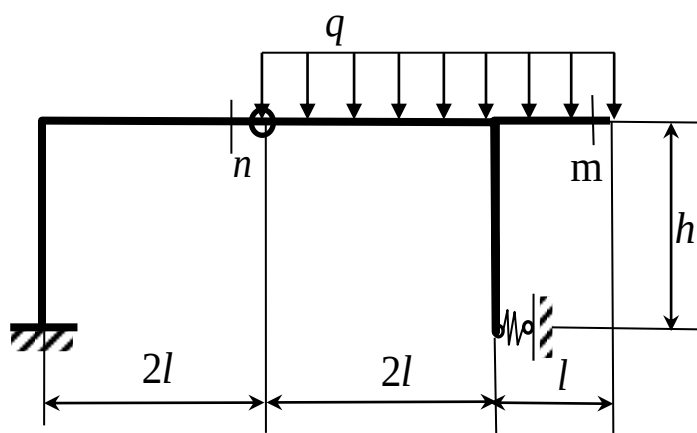


Рис 6.8

Пример решения задачи.

Исходные данные: схема рамы на рисунке 6.1; $q = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $l = 2 \text{ м}$; $h = 2 \text{ м}$.

Расчетная схема рамы:

При построении эпюр изгибающих моментов использован прием, состоящий в том, что предварительно определена продольная сила в сжато-растянутом стержне ab . Для этого было записано выражение изгибающего момента отно-

сительно шарнира в отсеченной части, отделенной разрезом от рамы по шарниру и элементу ab , и этот момент приравнен нулю.

Эпюра изгибающих моментов $M_F(\hat{e}\hat{l} \cdot \hat{i})$ и значение продольной силы $N_{ab}(\hat{e}\hat{l})$ в элементе ab от нагрузки на рис 6.9:

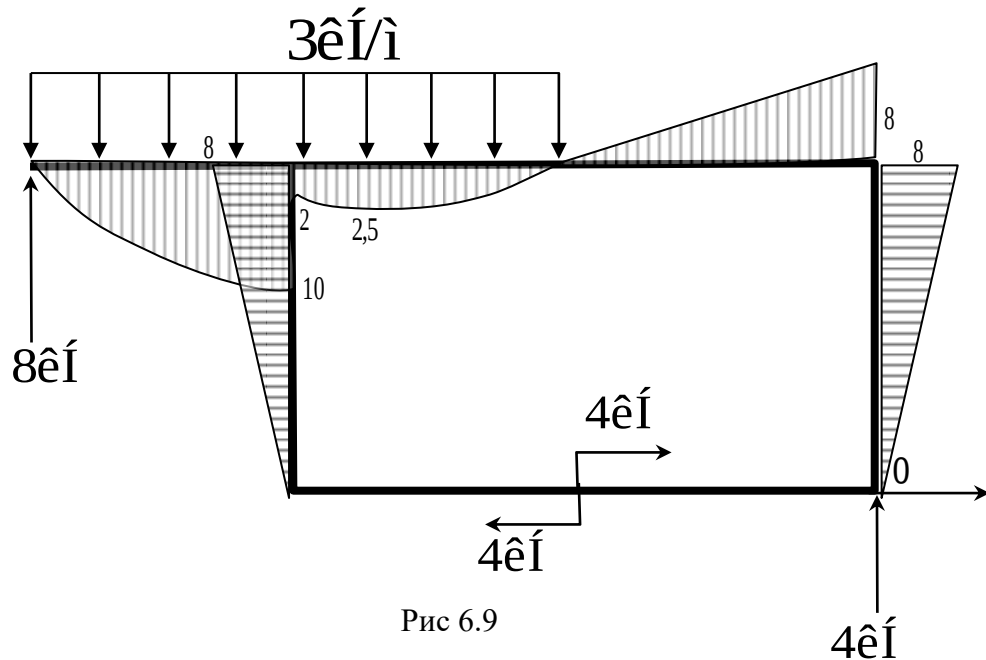


Рис 6.9

Эпюра изгибающих моментов и значение продольной силы в элементе ab от единичной силы, приложенной в сечении "m":

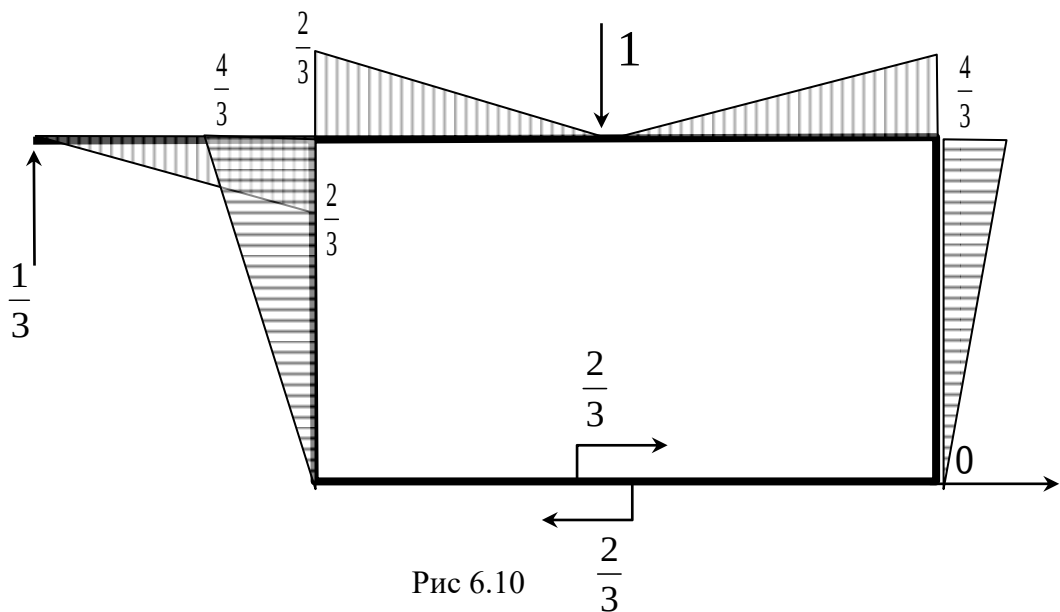
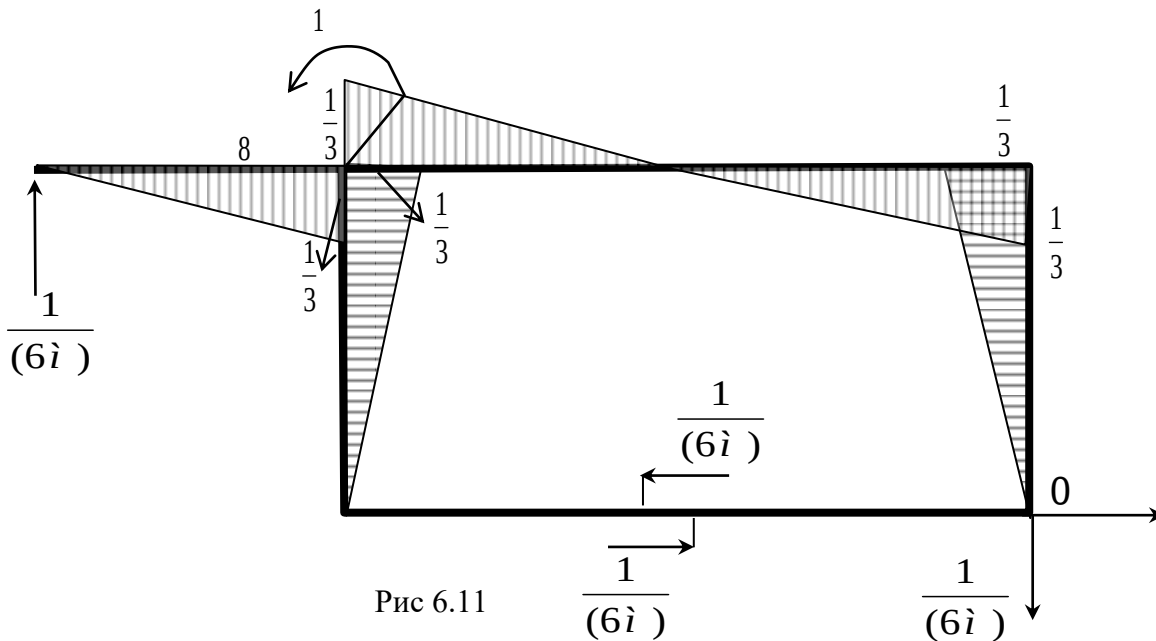


Рис 6.10

Эпюра изгибающих моментов и значение продольной силы в элементе ab от единичного момента, приложенного в сечении "n":



Линейное перемещение сечения "m" (Δ_m) и угловое перемещение сечения "n" (φ_n), находятся по формуле Мора:

$$\Delta, \varphi = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_F}{E \cdot J} dx + \left(\frac{l}{E \cdot A} \cdot N_1 \cdot N_F \right)_{ab} + \frac{l^3}{E \cdot J} \cdot R_1 \cdot R_F,$$

где M_1 - эпюра моментов от единичного воздействия (рисунок 6.10);

M_F – эпюра моментов от заданной нагрузки (рисунок 6.9);

N_F – продольная сила в элементе ab от заданной нагрузки (рисунок 6.9);

N_1 – продольная сила в элементе ab от единичного воздействия (рисунок 6.10);

R_1, R_F – реакция в пружине соответственно от единичного воздействия и заданной нагрузки.

В формуле Мора первый член учитывает влияние на величину перемещения изгиба стержней рамы. Для участков с криволинейной эпюрой изгибающих моментов этот член вычисляют по формуле Симпсона, то есть:

$$\int \frac{M_1 \cdot M_F}{E \cdot J} dx = \frac{l}{6EJ} [(M_1 \cdot M_F)_H + 4(M_1 \cdot M_F)_C + (M_1 \cdot M_F)_K];$$

где $(M_1 \cdot M_F)_H; (M_1 \cdot M_F)_C; (M_1 \cdot M_F)_K$ - произведения значений изгибающих моментов соответственно в начале, середине и конце участка.

На участках с прямолинейной эпюрой M_F вычисление интеграла проще произвести по правилу Верещагина, то есть: $\int \frac{M_1 \cdot M_F}{E \cdot J} dx = \frac{\omega \cdot y}{E \cdot J}$, где ω - площадь эпюры M_F , y – ордината на эпюре M_1 под (над) центром тяжести эпюры M_F . Второй член формулы Мора учитывает влияние на величины отыскиваемого перемещения податливости сжато-растянутых стержней рамы. Этот член записан в форме решения интеграла Мора $\int \frac{M_1 \cdot M_F}{E \cdot J} dx$ для случая, когда $N_1 = N_F = const$.

Третий член в формуле Мора учитывает влияние на величину отыскиваемого перемещения податливости упругих связей (пружин). Он также представлен в форме решения интеграла Мора по аналогии с предыдущим решением второго члена формулы Мора, если заменить N_1 на R_1 и N_F на R_F , а вместо $E \cdot A$ подставить жесткость пружины $\frac{E \cdot J}{l^2}$.

Определяем линейное перемещение сечения "m" заданной рамы, используя значения эпюр рисунков 6.9, 6.10 и 6.11:

$$\Delta_m = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{8} \cdot 8 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 \right] + \frac{2}{6EJ} \left[\left(0 - 4 \cdot 2,5 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} \right) + \left(0 + 4 \cdot 6,5 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{2}{3} \right) \right] + \frac{4 \cdot 2^2}{EJ} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2^3}{EJ} \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{88,89}{EJ} \text{ (i)}$$

Определяем угол поворота сечения "n":

$$\varphi_m = -\frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \right] + \frac{2}{6EJ} \left[\left(0 - 4 \cdot 2,5 \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot \frac{1}{3} \right) + \left(0 + 4 \cdot 6,5 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{3} \right) \right] + \frac{4 \cdot 2^2}{EJ} \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} + \frac{2^3}{EJ} \cdot 8 \cdot \frac{1}{6} = \frac{17,89}{EJ} \text{ (ддд)}$$

Раздел 7. Расчет перемещений от изменения температуры.

Формулировка задачи. Для одной из рам, изображенных на рисунках 7.1 – 7.10 требуется определить линейное перемещение сечения "m" и угол поворота сечения "n". При расчете перемещений принять:

- высоту поперечного сечения всех стержней $h_c = 0,1l$;
- положение центра тяжести поперечного сечения посередине его высоты;
- коэффициент линейного расширения одинаков для всех элементов системы и равен $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- параметр температуры $t = 10^0 \text{ } ^\circ\text{C}$ (на схемах рам температура снаружи t_i не показана).

Исходные данные для расчета в таблице №7.

Таблица №7.

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Температура снаружи, t_i	t	t	-t	t	2t	-2t	4t	3t	3t	-3t
Температура внутри, t_a	-4t	-2t	-3t	-2t	4t	4t	-4t	-3t	-t	t
l , м	2	3	3	2	4	3	2	3	4	3
h , м	2	3	4	2	3	2	2	2	4	2

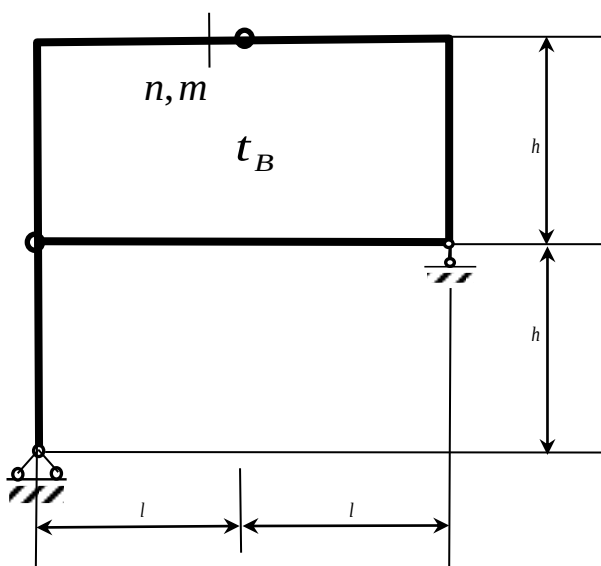


Рис 7.1

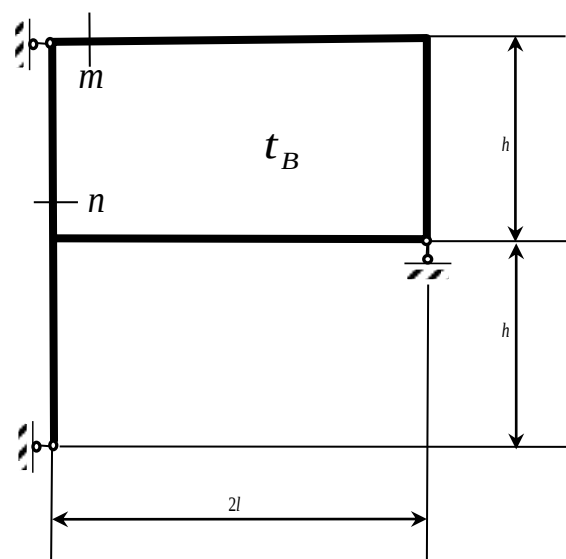


Рис 7.2

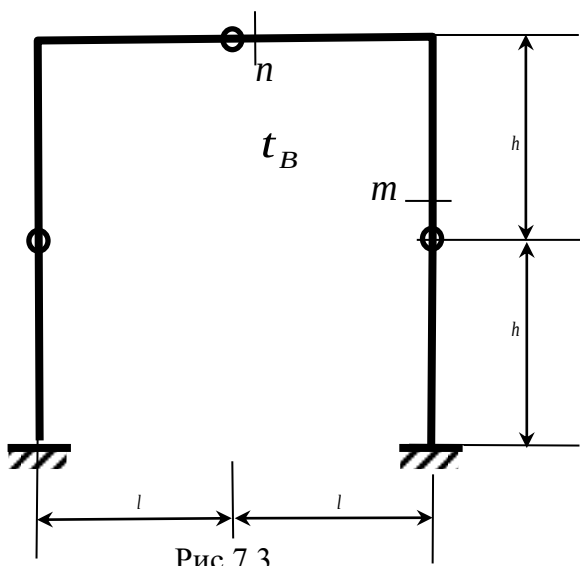


Рис 7.3

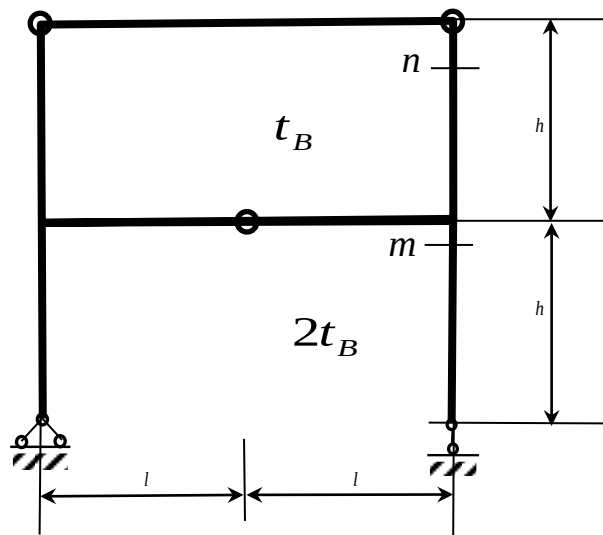


Рис 7.4

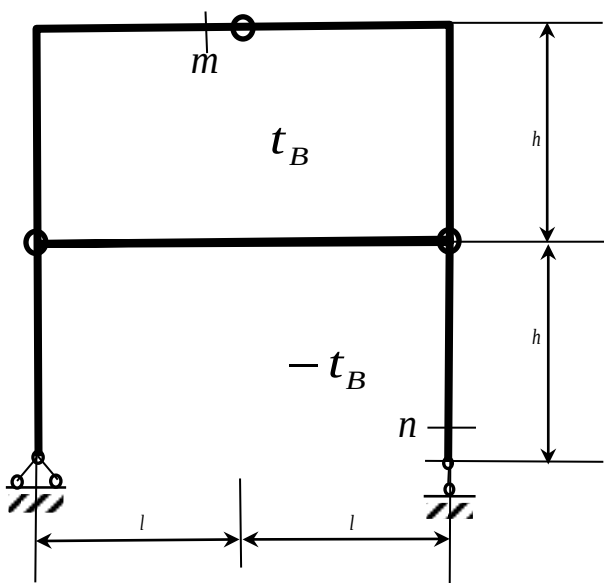


Рис 7.5

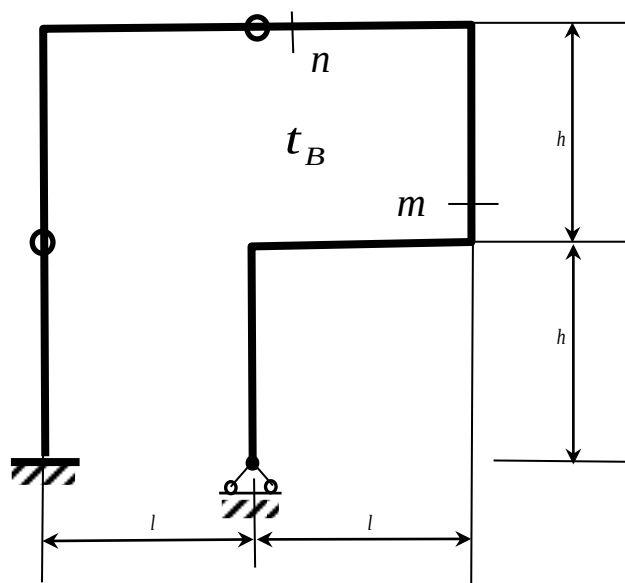


Рис 7.6

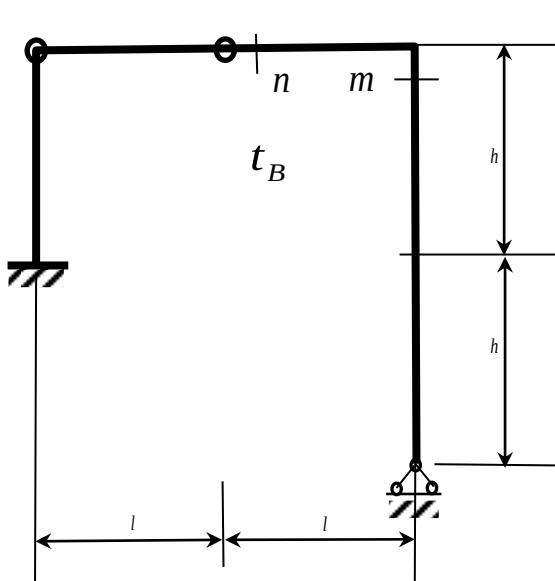


Рис 7.7

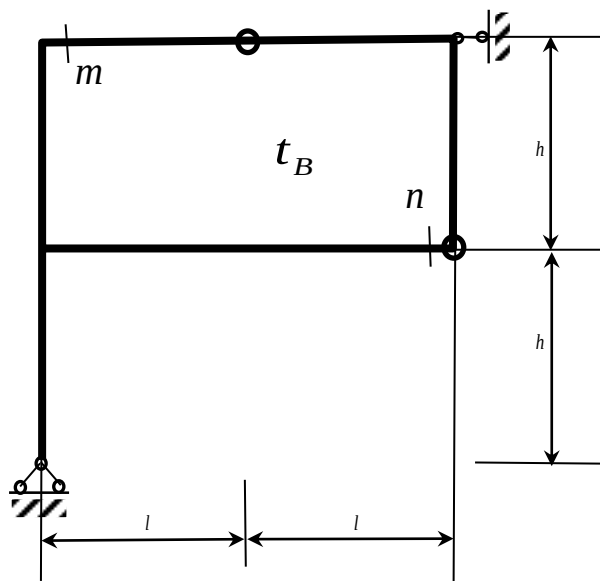


Рис 7.8

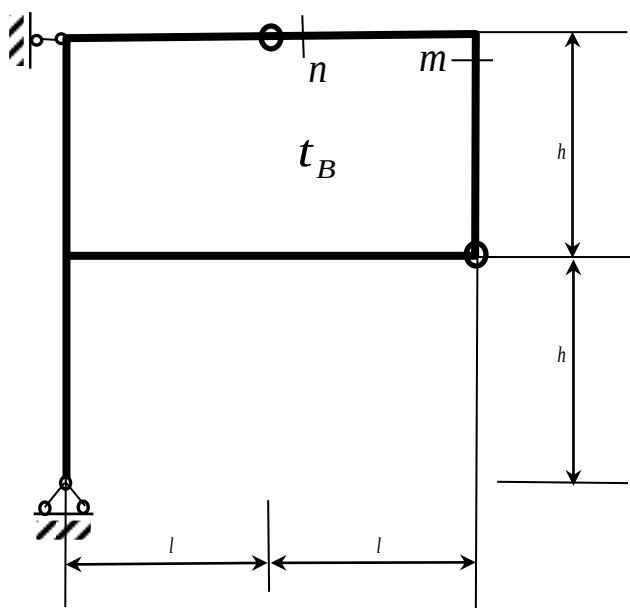


Рис 7.9

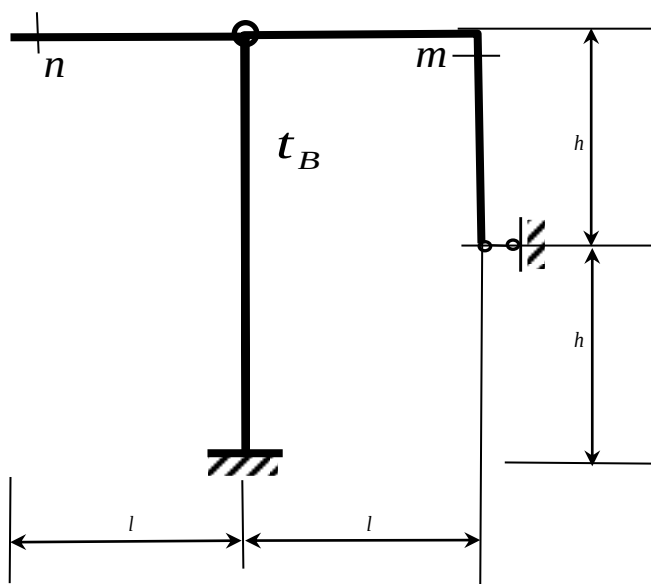


Рис 7.10

Пример решения задачи.

Исходные данные: схема рамы на рисунке 7.1; $t_i = t^0 \tilde{N}$, $t_A = -4t^0 \tilde{N}$; $t = 10^0 \tilde{N}$;

$$l = 2\tilde{i} ; h = 2\tilde{i}$$

Расчетная схема рамы:

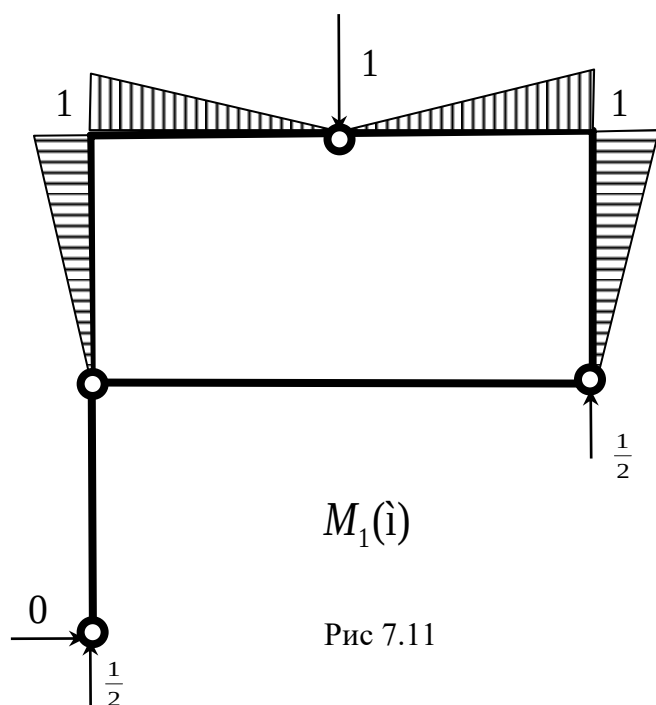
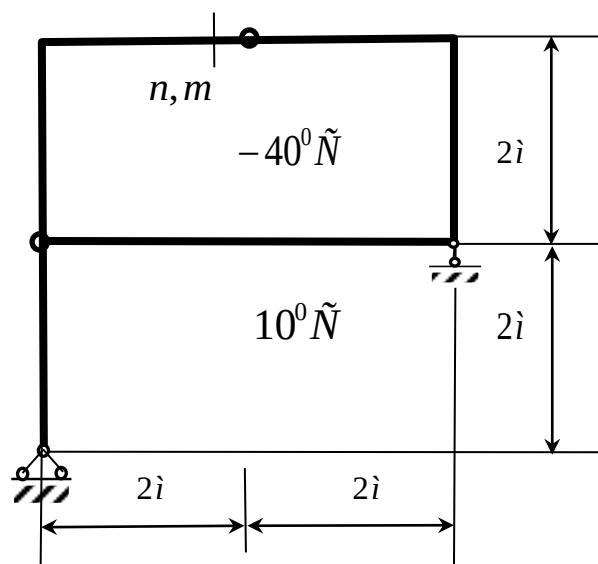


Рис 7.11

Эпюры изгибающих моментов в раме от единичной силы, приложенной в сечении "m" рис 7.11 (для определения вертикального перемещения сечения "m")

Эпюры продольной силы в раме от единичной силы, приложенной в сечении "m" рис 7.12 (для определения вертикального перемещения сечения "m").

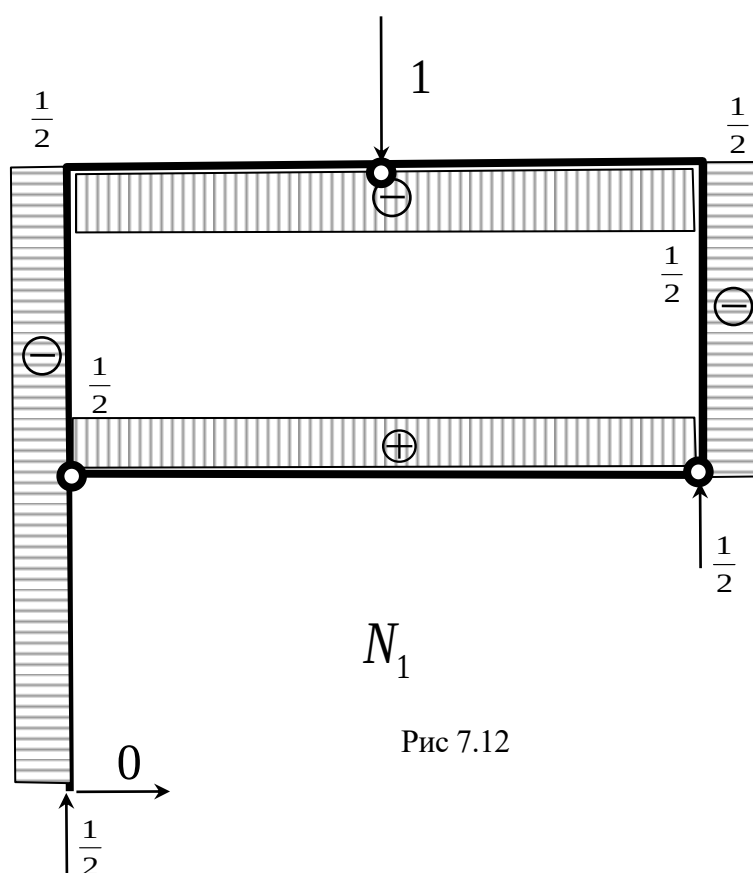


Рис 7.12

Эпюры изгибающих моментов в раме от единичного момента, приложенного в сечении "n" рис 7.13 (для определения угла поворота сечения "n").

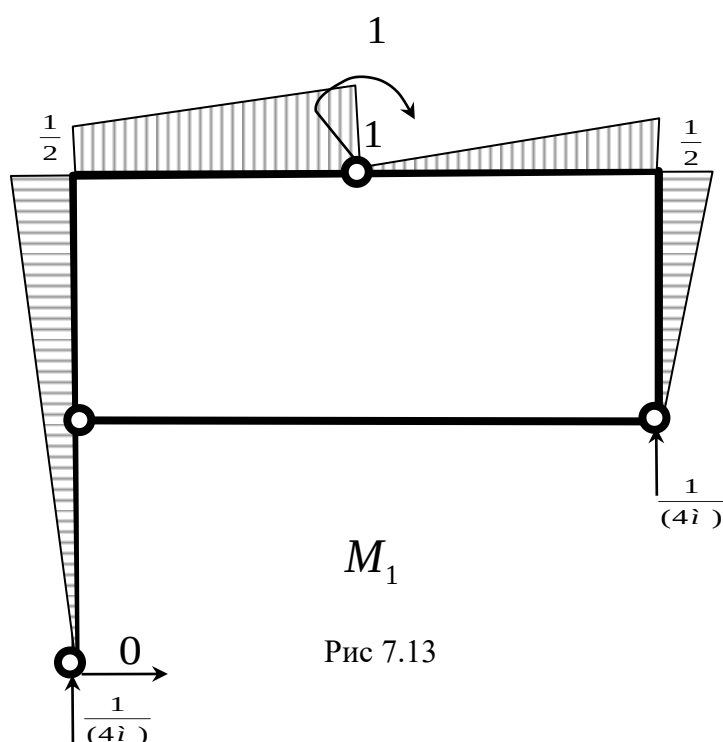


Рис 7.13

Эпюры продольной силы в раме от единичной силы, приложенной в сечении "n" рис 7.14 (для определения угла поворота сечения "n").

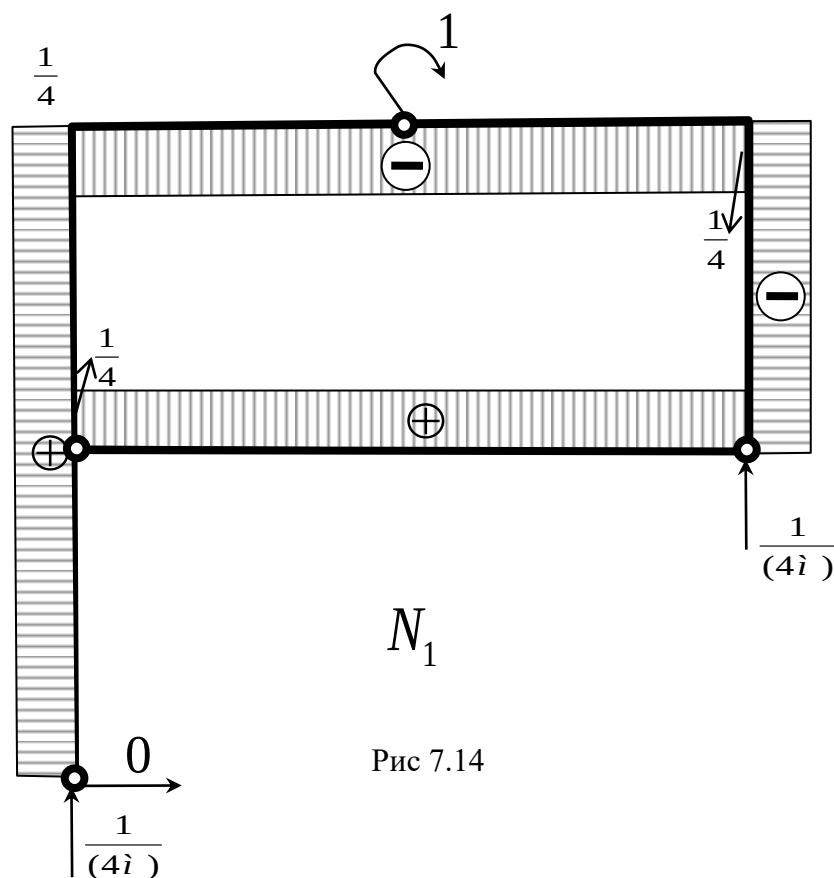


Рис 7.14

Линейное перемещение сечения "m" (Δ_m) и угловое перемещение сечения "n" (φ_n) находим формуле Мора:

$$\Delta, \varphi = \sum \alpha \cdot t' \cdot \omega_{N_1} + \sum \frac{\alpha \cdot t''}{h} \cdot \omega_{M_1},$$

где α - коэффициент линейного расширения;

$t'' = \frac{t_i + t_a}{2}$ - температура на оси стержня;

$t' = t_i - t_a$;

ω_{N_1} , ω_{M_1} - площадь эпюры соответственно N_1 и M_1 на рассматриваемом участке (стержне).

В формуле Мора первый член учитывает влияние температурного удлинения (укорочения) рамы на величину отыскиваемого перемещения, а второй член

формулы Мора учитывает влияние на перемещение температурного искривления стержней.

Знак первого члена формулы Мора устанавливается в зависимости от знака температуры на оси стержня (t') и знака эпюры продольной силы; знак второго члена зависит от направления температурной кривизны и кривизны от изгиба, вызванного единичной силой. Если на каком-либо участке эти кривизны совпадают, то знак первого члена формулы Мора принимается положительным, в противном случае – отрицательным. Подставляем в формулу Мора числовые значения:

$$\Delta_m = \alpha(-15^0 C)(-\frac{1}{2} \cdot 6l) + 4 \cdot \frac{\alpha \cdot 50^0 C}{0,2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 645\alpha(i) = 645 \cdot 10^{-5} i = 6,45i$$

$$\varphi_n = \alpha(-15^0 C)(2 \cdot \frac{1}{4}) + \frac{\alpha \cdot 50^0 C}{0,2} (\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2) = 442,5\alpha(\delta\ddot{a}\ddot{a}) = 0,004425\delta\ddot{a}\ddot{a}$$

Литература

1. Александров А.Е., Потапов В.Д., Державин Б.П. "Сопротивление материалов" изд. Москва, "Высшая школа", 2008 г.
2. Маковкин Г.А., Бабанов В.В. "Теоретическая механика для архитекторов" в 2-х книгах, изд Москва, центр "Академия", 2008 г.
3. Мещерский И.В. «Задачи по теоретической механике» изд. «Лань», 2008 г.
4. Сидоров В.Н. «Лекции по сопротивлению материалов и теории упругости». Изд. М. -2002 г.
5. Беляев Н.М. «Сборник задач по сопротивлению материалов», изд.М., 1968
6. Дарков А.В. Шапошников Н.Н. «Строительная механика» изд.М., 1986 г.
г.
7. Мухин Н.В. «Статика сооружений в примерах». Изд «Высшая школа», 1972 г.
8. Программного обеспечение: Microsoft office, расчетные моделирующие программы.