ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г.Шевченко

Физико-математический факультет

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие

Тирасполь, 2019

УДК [512.64+511.147](075.8)
ББК В142.2я73+И141.51я73
Э45
Составители: **Л.В. Елкина**, ст. преп.
И.И. Журжи, ст. преп.

Рецензенты:
Л.В. Чуйко, канд. пед. наук, доцент кафедры математического анализа и приложений, физико-математического факультета ПГУ им. Т.Г.Шевченко
С.А. Устименко, канд. пед. наук, доцент кафедры ПЭТО, колледжа им. Ю.А. Гагарина, инженерно–технического факультета ПГУ им. Т.Г.Шевченко.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ: учебно-методическое пособие / Сост.: Елкина Л.В., Журжи И.И. Тирасполь, 2019. – 80 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для основного, дополнительного и углубленного изучения данного курса. Содержит варианты для проведения самостоятельной работы студентов, предусмотренной по этой дисциплине.

Работа составлена в соответствии с требованиями Федерального Государственного образовательного стандарта СПО третьего поколения для специальностей 2.15.02.07 «Автоматизация технологических процессов и производств» (по отраслям), 2.15.02.01 «Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования» (по отраслям), 2.15.02.08 «Технология машиностроения», 2.13.02.11 «Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования» (по отраслям), 2.13.02.07 «Электроснабжение» (по отраслям).

Адресуется студентам среднего профессионального образования, а также студентам первых курсов ВО инженерных специальностей.

УДК [512.64+511.147](075.8)
ББК В142.2я73+И141.51я73

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г.Шевченко

© составители:
Елкина Л.В., Журжи И.И., 2019

Введение

Учебно-методическое пособие «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» подготовлено применимо к курсу ЕН.01. «Математика», читаемому в третьем семестре у студентов колледжа им. Ю.А. Гагарина.

Линейная алгебра и аналитическая геометрия – раздел Высшей математики, который является важным в плане общей математической культуры и имеет широкое применение как в «чистой» математике, так и в других отраслях человеческих знаний, начиная с экономики и заканчивая современными методами инженерных и физико-технических исследований. В пособие включён обязательный и необходимый материал по темам «Матрицы и операции над ними», « Решение систем линейных уравнений», «Вектора в n- мерном векторном пространстве», « Основы теории комплексных чисел», который находит в дальнейшем применение в изучении последующих разделов данного курса и в некоторых разделах других дисциплин, в частности, в физике, электротехнике, инженерной графике.

Учебно – методическое пособие включает в себя основную теорию по трем большим темам и примеры решения заданий, а также по 20 вариантов индивидуальных заданий.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины. Количество вариантов исключает переписывание одного и того же варианта, а решенные примеры в сочетании с другими пособиями по данному курсу окажет большую помощь студентам в их самостоятельной работе, как при выполнении индивидуальных, контрольных работ, так и при подготовке к экзамену.

Тема 1. Матрицы и определители

1.1. МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Определение: Матрицей называется таблица чисел, расположенных

в *m* строках и *n* столбцах и обозначается : A=

Число, стоящее на пересечении *i*-той строки и *j*-того столбца, обозначается и называется элементом матрицы;

Определение: Выражение называют размерностью матрицы.

Определение: Элементы вида называют элементами главной диагонали.

Определение: Матрица будет квадратной, если число ее строк равно числу столбцов:

=

Существуют следующие виды матриц**:**

1. Матрица строка: B=

2. Матрица – столбец: C=

3. Нулевая матрица: O= - все элементы равны 0;

4. Единичная матрица

Определение: Квадратная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, а не диагональные – нулю, называется единичной матрицей.

Примеры единичных матриц : второго порядка E =

третьего порядка E =

5. Диагональная матрица - это квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы = 0.

   Например: Д=

Определение: Две матрицы А и В будут равны если равны их размерности и на соответствующих местах располагаются равные элементы.

1.2. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

1. Транспонирование матриц

Определение: Транспонированием матрицы называется замена её строк ее столбцами с сохранением их номеров.
Транспонированная матрица обозначается A^{T}.

Например: А= тогда

1. Сложение матриц

   Определение: Сумой 2-х матриц А и В одного и того же размера назовём матрицу такого же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов первых двух матриц.

   Например А= В= тогда

   А+В= =

Пример . Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix}.$

Найти: A+B и A-B.

Решение.

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 11 & 2 & 1\end{pmatrix};$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -6\\ -3 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

2. Умножение матрицы на число

   Определение: Чтобы умножить матрицу A на число $\alpha \neq 0$ нужно каждый её элемент умножить на это число.

   Например A=

   тогда матрица 3A=

   и матрица -2A=

Пример. $4\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}\cdot 4=\begin{pmatrix}4 & 12 & -20\\ 16 & 8 & 0\end{pmatrix}.$

3. Произведение матриц

Замечание: Умножать можно только те матрицы, у которых количество строк второй матрицы равно количеству столбцов первой матрицы.

Определение: Произведением матрицы A размерности

и матрицы B размерности , называется матрица

C, размерности , элементы которой удовлетворяют равенству:

;(i=1,2,…m; j=1,2,…n)

и обозначается C=AB.

Пример: Найдем произведение матриц

A= и B=

A B= =

=

Заметим, что B A= =

=

Таким образом, становится понятно, что произведение матриц AB и BA это не одно и то же, говоря математическим языком – произведение матриц не коммутативно.

Пример. $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B$.

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -4\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2+5\cdot 4 & 2\cdot 3+5\cdot 6\\ 1\cdot 2+(-4)\cdot 4 & 1\cdot 3+(-4)\cdot 6\\ 3\cdot 2+(-1)\cdot 4 & 3\cdot 3+(-1)\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24 & 36\\ -14 & -21\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Пример. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 4\\ 5 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B$.

Решение. $\begin{pmatrix}0 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 4\\ 5 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 3+2\cdot 2+1\cdot 1+3\cdot 2\\ 1\cdot 3+0\cdot 2+(-1)\cdot 1+4\cdot 2\\ 5\cdot 3+4\cdot 2+3\cdot 1+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\ 10\\ 30\end{pmatrix}.$

Пример. $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B$ *и* $B\cdot A$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+(-1)\cdot 4 & 3\cdot 2+(-1)\cdot(-2)\\ 0\cdot 1+2\cdot 4 & 0\cdot 2+2\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ 8 & -4\end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2\\ 4\cdot 3+(-2)\cdot 0 & 4\cdot(-1)+(-2)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 12 & -8\end{pmatrix}.$$

1.3. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

1. Коммутативность сложения матриц: A+B=B+A

2. Ассоциативность сложения матриц: A+(B+C)=(A+B)+C

3. Не коммутативность умножения A B .

4. Ассоциативность умножения матриц: A (B C)=(A B) C

5. Ассоциативность относительно умножения на число:

A (λ B)=λ (A)

6. Дистрибутивные законы:

(A B) C=AC+BC и A(B+C)=AB+AC.

Пример:

=

Пример: Найти значение функции ,если

X=

Решение:

=

Задания для самостоятельной работы № 1:

Найти произведение матриц:

2.

4

6.

8.

10.

12.

14.

16.

17.

18.

20.

Задания для самостоятельной работы № 2:

Найти значение функции

,если X=

1.

4.

6.

11.

16.

18

Задания для самостоятельной работы № 3:

1. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=3A^{T}+B:\ A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -4 & 8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 9\end{pmatrix}$
2. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=A^{T}+4B:\ A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & -6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6 & 7\\ -4 & 5\end{pmatrix}$
3. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=2A^{T}-B:\ A=\begin{pmatrix}12 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & -2\end{pmatrix}$
4. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=-3A^{T}-B:\ A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 7 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 4 & 7\end{pmatrix}$
5. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=-A^{T}+5B:\ A=\begin{pmatrix}3 & 10\\ -1 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 9\\ -7 & 2\end{pmatrix}$
6. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=2A^{T}-B:\ A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 7 & -5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

7. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=4A^{T}+3B:\ A=\begin{pmatrix}3 & 13\\ 0 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 6 & -4\end{pmatrix}$

8. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=3A^{T}-2B:\ A=\begin{pmatrix}-8 & 2\\ 6 & 11\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 7\\ -8 & 6\end{pmatrix}$

9. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=2A^{T}-3B:\ A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-5 & -3\\ -1 & -4\end{pmatrix}$

10. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=4A^{T}-7B:\ A=\begin{pmatrix}0 & -8\\ 6 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 6 & -8\end{pmatrix}$

11. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=3A^{T}-2B:\ A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -1 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

12. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=-2A^{T}-B:\ A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 8 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}8 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

13. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=-2A^{T}+4B:\ A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 7\end{pmatrix}$

14. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=3A^{T}-3B:\ A=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 4 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -7 & 8\end{pmatrix}$

15. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=2A^{T}-B:\ A=\begin{pmatrix}-8 & 6\\ 8 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -8 & 1\end{pmatrix}$

16. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=A^{T}+4B:\ A=\begin{pmatrix}15 & 4\\ -6 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -2 & 7\end{pmatrix}$

17. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=3A^{T}-B:\ A=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 4 & -7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 6 & -2\end{pmatrix}$

18. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=2A^{T}+5B:\ A=\begin{pmatrix}-9 & 4\\ -2 & -7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 8\\ -5 & 16\end{pmatrix}$

19. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=2A^{T}-B:\ A=\begin{pmatrix}2 & -8\\ 2 & 8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 6 & 0\end{pmatrix}$

20. Найти $A+B,\ A-B,\ A\cdot B,\ C=4A^{T}+3B:\ A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & -4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}9 & 1\\ -7 & 1\end{pmatrix}$

1.4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА.

Определение: Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие некоторое число, вычисляемое по определенному правилу и называемое определителем.

Необходимость введения понятия определителя – числа, характеризующего квадратную матрицу порядка n, тесно связано с решением систем линейных алгебраических уравнений.

Определитель матрицы A будем обозначать: $|A|$ или D.

Определение: Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$ называется элемент a_{11}. Например, для $A=(-4)$ имеем $|A| = -4$.

Определение: Определителем матрицы второго порядка называется число, определяемое по формуле:

$|A| =$.

Например: $|A| =$ .21+8=29.

Определение**:** Определителем матрицы третьего порядка называется число, определяемое по формуле:

=

Это число представляет алгебраическую сумму шести произведений, при этом у первых трех произведений знак не меняется, а у последних – меняется на противоположный. Эту формулу можно легко запомнить, используя следующую схему, называемую правилом треугольника или правилом Саррюса рис.1.:

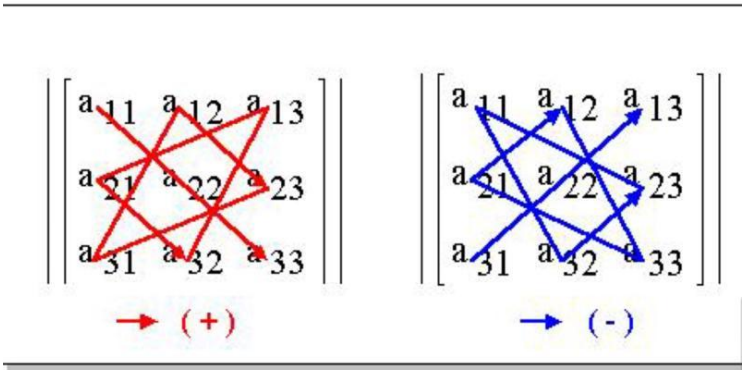


Рисунок 1. Правило треугольника.

Например :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 2 + (-1)\cdot 5\cdot 2 - 2\cdot(-3)\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot 1 =$$

$$= -3 + 6 - 10 + 12 - 15 + 1 = -9$$

Также для вычисления определителей третьего порядка будем пользоваться дописыванием строк - рисунок 2:

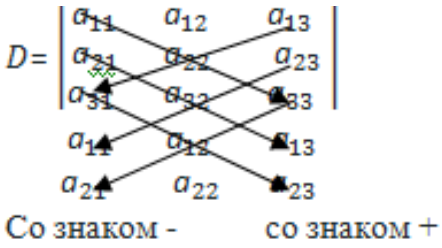


Рисунок 2. Правило дописывания строк.

И дописыванием столбцов – рисунок 3:

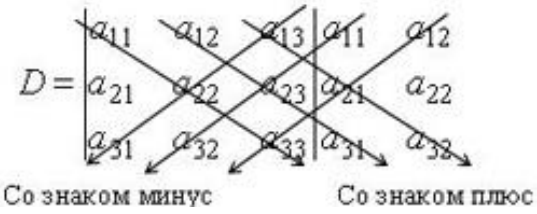


Рисунок 3. Правило дописывания столбцов.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 2 + (-1)\cdot 5\cdot 2 - 2\cdot(-3)\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot 1 =$$

1 -1 2

$$1 \quad -3 \quad 5 \qquad = -3+6-10+12-15+1=-9$$

Определение: *Минором* $M_{i\ j}$ элемента $a_{i\ j}$ определителя D n-го порядка называется определитель порядка $n-1$, который получается из D вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

Определение: *Алгебраическим дополнением* элемента $a_{i\ j}$ определителя D называется его минор $M_{i\ j}$, взятый со знаком $(-1)^{i\ +\ j}$. Алгебраическое дополнение элемента $a_{i\,j}$ будем обозначать $A_{i\,j}$. Таким образом,

$A_{i\,j} = (-1)^{i\,+\,j} M_{i\,j}$.

Вычисления определителей, порядка больше третьего, основаны на том, что определитель порядка n может быть выражен через определители более низких порядков. Обоснование этому дает следующая теорема.

Теорема (разложение определителя по строке или столбцу): Определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения. Иначе говоря, имеет место разложение D по элементам i-й строки:

$$D = a_{i\,1}A_{i\,1} + a_{i\,2}A_{i\,2} + \ldots + a_{i\,n}A_{i\,n} \quad ; \quad (i = 1..n)$$

или j- го столбца:

$$D = a_{1\,j}A_{1\,j} + a_{2\,j}A_{2\,j} + \ldots + a_{n\,j}A_{n\,j} \quad ; (j = 1..n).$$

Например: Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Вычислим данный определитель, например, разложив его по элементам второй строки

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Найдем каждый из определителей третьего порядка, используя правило треугольников.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 =$$

$$= -3 + 6 - 10 + 12 - 15 + 1 = -9$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-3) \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 =$$

$$= -9 + 6 + 5 - 6 - 45 + 1 = -48$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= 3 + 4 - 5 + 2 - 30 - 1 = -27$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot (-1) + 1\cdot (-3)\cdot (-1) - (-1)\cdot 1\cdot (-1) - 2\cdot (-3)\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 3 =$$

$$= 9 - 2 + 3 - 1 + 18 - 3 = 24$$

Тогда исходный определитель четвертого порядка равен:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot (-1)^{2+1}\cdot (-9) + 0\cdot (-1)^{2+2}\cdot (-48) + 3\cdot (-1)^{2+3}\cdot (-27) +$$

$$+ 4\cdot (-1)^{2+4}\cdot 24 = = 18 + 81 + 96 = 195$$

Свойства определителей

1. Определитель не меняется при транспонировании.

2. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

3. Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.

4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число *k*, то сам определитель умножится на *k*.

6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

7. Если все элементы i-й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{i\ j} = b_j + c_j$ ($j = \overline{1,n}$), то определитель равен сумме определителей, у которых все строки, кроме i-ой, - такие же, как в заданном определителе, а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j, в другом - из элементов c_j.

8. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Замечание. Все свойства остаются справедливыми, если вместо строк взять столбцы.

Задания для самостоятельной работы №4:

Вычислить определитель:

1. 2.

3. 4.

5. 6.

7. 8.

9. 10.

11. 12.

13. 14.

15. 16.

17. 18.

19. 20.

1.5. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Рассмотрим матрицу n-го порядка A=

Определение: Если определить квадратной матрицы A отличен от нуля, то матрица называется невырожденной. В противном случае матрица будет вырожденной.

Определение: Если для матрицы A существует такая матрица B, что произведение слева и справа матрицы A на матрицу B равно единичной матрице, то матрицу B назовём обратной матрицей к матрице A:

Обратную матрицу будем обозначать

Теорема: Если матрица A – невырожденная, то существует обратная ей матрица и причем единственная.

Приведем три способа нахождения обратной матрицы:

1. **С помощью алгебраических дополнений**:

Найдем ее по формуле: $\overline{\overline{\quad}}$

Например:

Найти обратную матрицу для матрицы с помощью алгебраических дополнений. Выполнить проверку.

Найдем определитель матрицы

Так как , то матрица является невырожденной и для нее существует обратная. Найдем ее по формуле

$\overline{\overline{\quad}}$

Найдем алгебраические дополнения:

Тогда обратная матрица примет вид:

–

Выполним проверку. Найдем произведение матриц :

, где *E*- единичная матрица.

Ответ:

2. С помощью метода Гаусса:

Для этого составим комбинированную матрицу, где слева находится матрица А, а справа единичную матрица, такого же размера, как матрица А. С помощью элементарных преобразований приводим комбинированную матрицу к такому виду, чтобы слева стала единичная матрица, тогда справа получим искомую обратную матрицу.

Например:

Найти обратную матрицу к матрице А =

Найдем определитель, чтобы убедиться, что матрица невырожденная

Составляем комбинированную матрицу:

Таким образом:

3. **С помощью таблиц Гаусса.**

С помощью формул метода Жордана-Гаусса. Для этого в таблицу Гаусса справа (в столбцы: (n+1)-й, (n+2)-й, …, 2n-й) записываем единичную матрицу n-го порядка. Далее, как при решении системы уравнений, будем преобразовывать все коэффициенты таблицы по формулам метода Жордана-Гаусса, добиваясь, чтобы в левой части таблицы образовывались n единичных столбцов:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\dots\\0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\dots\\0\\0\end{pmatrix};\quad \dots;\quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\dots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Если матрица A – невырожденная, то после n итераций получим слева n единичных столбцов. Если эти n столбцов образуют единичную матрицу (единицы располагаются по главной диагонали), то в правой части таблицы получим обратную матрицу A^{-1}. Когда n единичных столбцов не образуют единичную матрицу (единицы не располагаются по главной диагонали) надо поменять местами строки (но не столбцы) так, чтобы единицы располагались по главной диагонали.

Если матрица A – вырожденная, то после некоторой итерации в левой части таблицы получится нулевая строка (нельзя будет выбрать разрешающий элемент).

Рассмотрим на примере эти способы.

Пример :

Записываем в таблицу Гаусса матрицу A слева и единичную матрицу E третьего порядка справа. Для контроля вычислений рекомендуется вводить контрольный столбец, который для краткости не приводим. Решение представлено в следующих таблицах:

Матрица A	Матрица E
1 2 -1 2 3 1 1 -1 -1	1 0 0 0 1 0 0 0 1
1 2 -1 0 -1 3 0 -3 0	1 0 0 -2 1 0 -1 0 1
1 0 5 0 1 -3 0 0 -9	-3 2 0 2 -1 0 5 -3 1
1 0 0 0 1 0 0 0 1	-2/9 3/9 5/9 3/9 0 -3/9 -5/9 3/9 -1/9

В последней таблице справа расположена матрица A^{-1}, выписываем ее:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -2/9 & 3/9 & 5/9 \\ 3/9 & 0 & -3/9 \\ -5/9 & 3/9 & -1/9 \end{pmatrix}.$$

Пример: Для матрицы $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу B^{-1}.

Решение:

1 способ: Вычисляем определитель, разлагая его по элементам 1-ой строки:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -18+0+18=0;$$

D=0.

Матрица B - вырожденная, обратной к ней не существует.

2 способ: Найдем B^{-1} в таблицах Гаусса, получим следующие таблицы:

Матрица B	Матрица E
(1) 0 -2 -2 3 4 1 3 -2	1 0 0 0 1 0 0 0 1
1 0 -2 0 (3) 0 0 3 0	1 0 0 2 1 0 -1 0 1
1 0 -2 0 1 0 0 0 0	1 0 0 2/3 1/3 0 -3 -1 1

В последней строке слева все элементы равны нулю, значит матрица B вырожденная и обратной не имеет.

Пример 3: С помощью таблиц Гаусса найти матрицу обратную к матрице $C=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение:

Матрица C	Матрица E
(2) -4 3 1 -2 4 3 -1 5	1 0 0 0 1 0 0 0 1
1 -2 3/2 0 0 5/2 0 5 (1/2)	1/2 0 0 -1/2 1 0 -3/2 0 1
1 17 0 0 (-25) 0 0 10 1	5 0 -3 7 1 -5 -3 0 2
1 0 0 0 1 0 0 0 1	6/25 -17/25 10/25 -7/25 -1/25 5/25 -5/25 10/25 0

Во второй таблице элемент C_{22}=0, поэтому выбираем в качестве разрешающего элемента C_{33}= ½, а в 3-ей таблице выбираем C_{22}=-25. Выписываем матрицу:

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} 6/25 & -17/25 & 10/25 \\ -7/25 & -1/25 & 5/25 \\ -5/25 & 10/25 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6/25 & -17/25 & 2/5 \\ -7/25 & -1/25 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условия $C\cdot C^{-1}=E$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6/25 & -17/25 & 10/25 \\ -7/25 & -1/25 & 5/25 \\ -5/25 & 10/25 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot\frac{6}{25}+(-4)\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)+3\cdot\left(-\frac{5}{25}\right) & 2\cdot\left(-\frac{17}{25}\right)+(-4)\cdot\left(-\frac{1}{25}\right)+3\cdot\frac{10}{25} & 2\cdot\frac{10}{25}+(-4)\cdot\frac{5}{25}+3\cdot 0 \\ 1\cdot\frac{6}{25}+(-2)\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)+4\cdot\left(-\frac{5}{25}\right) & 1\cdot\left(-\frac{17}{25}\right)+(-2)\cdot\left(-\frac{1}{25}\right)+4\cdot\frac{10}{25} & 1\cdot\frac{10}{25}+(-2)\cdot\frac{5}{25}+4\cdot 0 \\ 3\cdot\frac{6}{25}+(-1)\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)+5\cdot\left(-\frac{5}{25}\right) & 3\cdot\left(-\frac{17}{25}\right)+(-1)\cdot\left(-\frac{1}{25}\right)+5\cdot\frac{10}{25} & 3\cdot\frac{10}{25}+(-1)\cdot\frac{5}{25}+5\cdot 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица C^{-1} найдена верно.

Решение:

Матрица F	Матрица E
0 2 -1 0	1 0 0 1
0 2 1 0	1 0 0 -1
0 1 1 0	1/2 0 0 -1
1 0 0 1	0 -1 1/2 0

После второй итерации слева образовались 2 единичных столбца, но единичные элементы не располагаются на главной диагонали. Поменяв местами 1-ю и 2-ю строки в последней таблице слева, получим единичную матрицу

$F^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельной работы №5:

Найти обратную матрицу для заданной матрицы с помощью алгебраических дополнений и методом Гаусса. Выполнить проверку.

1.

3

6.

11.

16.

1.6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система линейных алгебраических уравнений (*СЛУ*) — система уравнений, каждое уравнение в которой является линейно— алгебраическим уравнением первой степени.

Решение систем линейных алгебраических уравнений — одна из классических задач линейной алгебры, во многом определившая её объекты и методы. Кроме того, линейные алгебраические уравнения и методы их решения играют важную роль во многих прикладных направлениях, в том числе в линейном программировании, эконометрике.

Общий вид системы линейных алгебраических уравнений:

(1)

Или , где , (2)

Здесь количество уравнений, а n- количество переменных, - неизвестные, которые надо определить, - коэффициенты при неизвестных, свободные члены, предполагаются известными.

Индексы коэффициентов в системах линейных уравнений *i, j* формируются по следующему соглашению: первый индекс (*i*) обозначает номер уравнения, второй (*j*)— номер переменной, при которой стоит этот коэффициент.

Определение: Система называется ***однородной***, если все её свободные члены равны нулю, иначе —***неоднородной***.

Определение: ***Квадратная система линейных уравнений***— система, у которой количество уравнений совпадает с числом неизвестных (

Система, у которой число неизвестных больше числа уравнений является-недоопределённой, такие системы линейных алгебраических уравнений также называются *прямоугольными*. Если уравнений больше, чем неизвестных, то система является переопределённой.

Решением системы линейных алгебраических называют набор чисел таких что, при их соответствующей подстановке в систему, этот набор обращает все её уравнения в тождества.

Определение: Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет ни одного решения.

Решения считаются различными, если хотя бы одно из значений переменных не совпадает.

Определение: Совместная система с единственным решением называется – совместно определённой, при наличии более одного решения —совместно неопределённой.

Система линейных алгебраических уравнений может быть представлена в матричной форме:

(3)

Здесь A= — это матрица системы, — столбец

неизвестных, а — столбец свободных членов.

Определение: Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных и свободных членов называется расширенной матрицей системы.

Или в более краткой матричной записи: A .

Определение: Ступенчатой называю матрицу, у которой:

а) если есть нулевые строки, то они все располагаются внизу;

б) если есть ненулевые строки, то под каждым элементом вида , находятся только нули

Определение: Рангом ступенчатой матрицы называется число ненулевых строк.

Таким образом, чтобы найти ранг матрицы, нужно привести ее к ступенчатому виду и посчитать количество ненулевых строк.

Например: , значит rang A=2.

Теорема Кронекера — Капелли (устанавливает необходимое и достаточное условие совместности системы линейных алгебраических уравнений посредством свойств матричных представлений): система совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы совпадает с рангом ее расширенной матрицы.

Определение: Системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если множество их решений совпадает, то есть любое решение одной системы одновременно является решением другой, и наоборот.

Также считается, что системы, не имеющие решений, эквивалентны.

Систему, эквивалентную данной, можно получить с помощью следующих действий:

1) заменив одно из уравнений на это уравнение, умноженное на любое отличное от нуля число.
2) заменив одно из уравнений суммой этого уравнения с другим уравнением системы. В общем, замена уравнения системы на линейную комбинацию уравнений даёт систему, эквивалентную исходной.
3) Поменяв местами любые два уравнения системы

Заметим, что все эти преобразования могут быть применены и к матрице системы.

Рассмотрим некоторые методы решения систем линейных уравнений:

1. **Метод Гаусса:** Данный метод состоит в последовательном исключении неизвестных переменных: сначала исключают из всех уравнений системы, начиная со второго, далее исключается из всех уравнений, начиная с третьего, и так далее, пока в последнем уравнении не останется только одна

переменная . Такой процесс преобразования называется прямым ходом метода Гаусса. После завершения прямого хода метода Гаусса из последнего уравнения находят переменную , потом подставляют ее в предпоследнее уравнение и находят переменную , и так далее, из первого уравнения находят . Процесс вычисления неизвестных переменных при движении от последнего уравнения системы к первому называется обратным ходом метода Гаусса.

Пример:

Совершим прямой ход метода Гаусса. Для этого выпишем расширенную матрицу заданной системы уравнений и с помощью элементарных преобразований, приведем ее к ступенчатому виду.

Расширенная матрица имеет вид:

Поменяем первую строку в матрице со второй.

Далее с помощью элементарных преобразований приведем полученную матрицу к ступенчатому виду:

Совершим обратный ход. Выпишем из последней матрицы систему уравнений.

Ответ:

2. **Метод Крамера** (с помощью определителей)

   Рассмотри систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

   Составим определитель системы D= , теперь составим

   определители = и = . Тогда —, — - формулы Крамера для двух неизвестных.

   Рассмотрим систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

   Составим определитель системы D= ,

   теперь составим определители =

   =

Тогда —, —, z =— - формулы Крамера для трех неизвестных.

Пример:

Найдем определитель данной системы

Следовательно, система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера

— — —

Тогда

— —

— —

— —

3. С помощью матричных уравнений (с помощью обратной матрицы)

Пример: Обозначим через ; ; , тогда данная система уравнений в матричной форме имеет вид:

.

Решением этого матричного уравнения является: , где −обратная матрица для матрицы .

Найдем обратную матрицу с помощью алгебраических дополнений по формуле:

Тогда

Решение исходной системы уравнений в матричной форме примет вид:

Следовательно,

Задания для самостоятельной работы № 6.

Решить систему уравнений тремя способами:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) с помощью обратной матрицы.

1. 2.

3. 4.

5. 6.

7. 8.

9. 10.

11. 12.

13. 14.

15. 16.

17. 18.

19. 20.

Тема 2. n- мерное векторное пространство

2.1.ВЕКТОРЫ И СКАЛЯРЫ. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Пусть задана упорядоченная пара чисел , которая однозначно определяет точку А на плоскости. Обозначим через - радиус -вектор этой точки А рисунок 4.

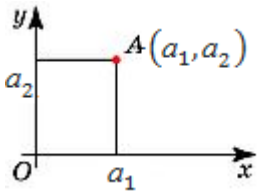


Рисунок 4.Точка на плоскости.

Аналогичным образом тройка чисел , будет однозначно определять точку в пространстве – рисунок 5.

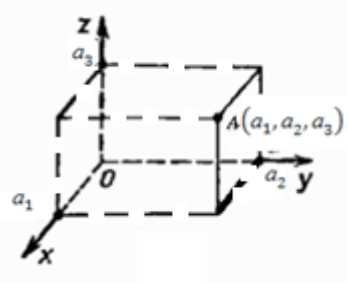


Рисунок 5. Точка в пространстве.

Определение: Упорядоченный набор n чисел назовем n – мерной точкой или n – мерным вектором.

Напомним, что вектором называется направленный отрезок, характеризуемый длиной (модулем) и направлением.

Пусть задан n –мерный вектор . Тогда его длину (модуль) будем находить по формуле:

Два вектора будут равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т.е.

Вектора, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называют *коллинеарными* (.

Два коллинеарных вектора называют сонаправленными (обозначаются), если они направлены в одну сторону и противоположно направленными ( ) - если в разные.

n-мерный вектор у которого *i*-тая координата равна единице, а все остальные равны 0 , называется ортом.

Модуль орта равен 1.

Разложить вектор по системе орт, значит записать в виде

Аналогично случаю на плоскости вводятся операции :

1. Сложения двух векторов:

Причем сложение векторов геометрически выполняется по правилу треугольника – рисунок 6.

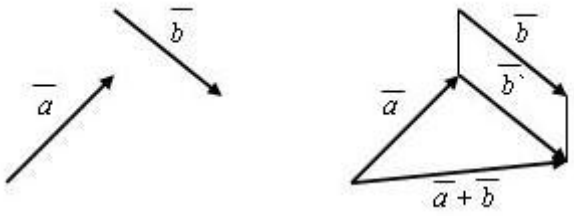


Рисунок 6. Правило треугольника.

Пусть есть произвольные векторы и . Надо от конца вектора отложить вектор , равный вектору . Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора , а конец совпадет с концом вектора `, будет суммой + .

Или по правилу параллелограмма – рисунок 7:

сумма двух векторов и , приведенных к общему началу, есть третий вектор , длина которого равна длине параллелограмма, построенного на векторах и , а направлен он от точки *A* к точке *B*

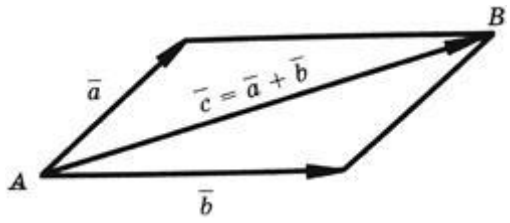


Рисунок 7. Правило параллелограмма.

2. Умножение вектора на число :

Чтобы умножить вектор на число, нужно каждую его координату умножить на это число .

Замечание: Если

Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются линейными операциями.

3. Скалярное умножение векторов:

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное сумме произведений одноименных координат этих векторов, то есть:

(

Геометрическая интерпретация: Скалярным произведением двух векторов и будет скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

· = | | · | | cos α

Замечание: Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда данные векторы ортогональны. Короткая математическая запись:

Число называется **скалярным квадратом** вектора , и обозначатся как .

Таким образом, **скалярный квадрат вектора равен квадрату длины данного вектора:**

Из данного равенства можно получить формулу для вычисления длины вектора: $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$

Свойства скалярного произведения:

Для произвольных векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и любого числа λ справедливы следующие свойства:

1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ – переместительный или коммутативный закон скалярного произведения.

2) $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$ – распределительный или дистрибутивный закон скалярного произведения. Попросту, можно раскрывать скобки.

3) $(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$ – сочетательный или **ассоциативный** закон скалярного произведения. Константу можно вынести из скалярного произведения.

Чаще всего скалярное произведение используют для нахождения **угла между векторами**

:

cos α=—— ——————————

Расстояние между двумя точками в n- мерном пространстве будем находить как модуль вектора, соединяющего эти точки:

————————————————————,

Где A=(и B =(.

n- мерное пространство на котором введено понятие расстояния между двумя точками - называется *метрическим Евклидовым пространством*.

Пример: Даны координаты точек

A(3;-2;5)	B(8;1;3)	C(6;0;-5)	D(4;0;6)

Требуется:

1. записать векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов;
2. найти угол между векторами $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$,
3. найти проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$.

Решение.

1. Найдем координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

Запишем данные векторы в системе орт и найдем их модули:

;

;

;

2. Найдем угол между векторами $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$ по формуле:

Скалярное произведение векторов:

Тогда

3. Найдем проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$, используя формулу

Задания для самостоятельной работы № 7:

Даны координаты точек A,B,C,D. Требуется:

1. записать векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов;
2. найти угол между векторами $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$,
3. найти проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$;

1	A(2;-3;1)	B(6;1;-1)	C(4;8;-9)	D(2;-1;2)
2	A(5;-1;4)	B(9;3;-6)	C(7;10;-14)	D(5;1;-3)
3	A(1;-4;0)	B(5;0;-2)	C(3;7;-10)	D(1;-2;1)
4	A(-3;-6;2)	B(1;-2;0)	C(-1;5;-8)	D(-3;-4;3)
5	A(-1;1;5)	B(3;5;-7)	C(1;12;-15)	D(-1;3;-4)
6	A(-4;2;-1)	B(0;6;-3)	C(-2;13;-11)	D(-4;4;0)
7	A(0;4;3)	B(4;8;1)	C(2;15;-7)	D(0;6;4)
8	A(-2;0;2)	B(2;4;-4)	C(0;11;-12)	D(-2;2;-1)
9	A(3;3;-3)	B(7;7;-5)	C(5;14;-13)	D(3;5;-2)
10	A(4;-2;5)	B(8;2;3)	C(6;9;-5)	D(4;0;6)
11	A(-5;0;1)	B(-4;-2;3)	C(6;2;11)	D(3;4;9)
12	A(1;-4;0)	B(2;-6;2)	C(12;-2;10)	D(9;0;8)
13	A(-1;-2;-8)	B(0;-4;-6)	C(10;0;2)	D(7;2;0)
14	A(0;2;-10)	B(1;0;-8)	C(11;4;0)	D(8;6;-2)
15	A(3;1;-2)	B(4;-1;0)	C(14;3;8)	D(11;5;6)
16	A(-8;3;-1)	B(-7;1;1)	C(3;5;9)	D(0;7;7)
17	A(2;-1;-4)	B(3;-3;-2)	C(13;1;6)	D(10;3;4)
18	A(-4;5;-5)	B(-3;3;-3)	C(7;7;5)	D(4;9;3)
19	A(-2;-3;2)	B(-1;-5;4)	C(9;-1;12)	D(6;1;10)
20	A(-3;4;-3)	B(-2;2;-1)	C(8;6;7)	D(5;8;5)

Пример: Даны координаты вершин треугольника $A(-2, 5), B(6, 1), C(1, 3)$.

1) Вычислить длину стороны BC.

2) Составить уравнение линии BC.

3) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A, и найти ее длину.

4) Найти точку пересечения медиан.

5) Найти косинус внутреннего угла при вершине B.

6) Найти координаты точки М, расположенной симметрично точке A, относительно прямой BC.

Решение

1. Длина стороны ВС равна модулю вектора $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC} = \{1-5;\ 3-1\}; \overrightarrow{BC} = \{-6;\ 2\}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6^2+2^2} = 2\sqrt{10}$.

2. Уравнение прямой BC: $\frac{x-x_в}{x_c-x_в} = \frac{y-y_в}{y_c-y_в}$; $\frac{x-5}{6} = \frac{y-1}{2}$; $x-3y-2=0$.

3. Уравнение высоты AK запишем как уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,5)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC} = \{6;\ 2\}$: $6(x-2)+2(y-5)=0$; $3x+y-11=0$. Длину высоты AK можно найти как расстояние от точки A до прямой BC: $|AK| = d = \frac{|1\cdot 2-3\cdot 5-2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

4. Найдем координаты точки N – середины стороны BC:

$x_N = \frac{x_в+x_c}{2} = \frac{5+11}{2} = 8$; $y_N = \frac{y_в+y_c}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$; $N(8,2)$.

Точка пересечения медиан O делит каждую медиану на отрезки в отношении $\lambda = 2:1$.

Используем формулы деления отрезка в данном отношении λ:

$x_0 = \frac{x_A+\lambda x_N}{1+\lambda}$; $y_0 = \frac{y_A+\lambda y_N}{1+\lambda}$; $x_0 = \frac{2+2\cdot 8}{3} = 6$; $y_0 = \frac{5+2\cdot 2}{3} = \frac{9}{3} = 3$; $O(6,\ 3)$.

5. Косинус угла при вершине B найдем как косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ $\{2-5;\ 5-1\} = \overrightarrow{BA}\{-3,4\}$; $\overrightarrow{BC}\{6;\ 2\}$

$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-3\cdot 6+4\cdot 2}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\cdot 2\sqrt{10}} = \frac{-10}{10\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Точка M, симметричная точке A относительно прямой BC, расположена на прямой AK, перпендикулярной к прямой BC, на таком же расстоянии от прямой, как и точка A. Координаты точки K найдем как решения системы

$$\begin{cases} x-3y-2=0, \\ 3x+y-11=0. \end{cases}$$

Систему решим по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 35;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2};\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2};$$

$$K\left(\frac{7}{2};\ \frac{1}{2}\right).$$

Точка К является серединой отрезка *AM*.

$$x_K = \frac{x_A + x_M}{2};\ \frac{7}{2} = \frac{2 + x_M}{2};\ x_M = 5;$$

$$y_K = \frac{y_A + y_M}{2};\ \frac{1}{2} = \frac{5 + y_M}{2};\ y_M = -4$$

$M(5, -4)$.

2.2. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пусть $R=\{\ ,\ ,\ ,\ldots\}$- есть непустое множество, элементы которого назовем векторами. $P=\{\alpha,\beta,\gamma\ldots\}$- это некоторое поле, не обязательно поле скаляров.

Пусть в первом множестве *R* определена операция сложения векторов из *R*, то есть указан закон, по которому любой паре векторов из *R* взятых по определенному порядку ставится в соответствие однозначно определенный вектор из *R*.

$\forall\ ,\ ,\ \in R\ \exists!\ /\ +\ =\ \in R$..

2.Определена операция умножения элементов из поля *P* на вектора из *R*.

$\forall\alpha\in P,\ \ \in R\ \exists!\ d/\alpha\ =\ \in R$..

Определение: Множество *R* называется векторным (линейным) пространством над полем P, если относительно введенных операций (операций сложения и умножения) выполняются следующие условия:

1^0. для любых элементов и векторного пространства имеет место коммутативность по сложению: $\forall\ ,\ \in R \Rightarrow\ +\ =\ +\ ;$

2^0. $\forall\ ,\ ,\ c \in R \Rightarrow\ +(\ +\ )=(\ +\ )+$ (ассоциативность по сложению);

3^0. $\exists\ \in R / \forall\ \in R \Rightarrow\ +\ =\ \in R$ (существование нулевого элемента) ;

4^0. $\forall\ \in R\ \exists(-\ ) \in R /\ +(-\ )=$ (существование противоположного элемента);

5^0. $\forall\ \in R\ 1\cdot\ =\ ,\ 1 \in P;$

6^0. $\forall \alpha,\beta \in P,\ \in R \Rightarrow (\alpha\beta)\ = \alpha(\beta\ );$

7^0. $\forall \alpha \in P,\ ,\ \in R \Rightarrow\ \alpha(\ +\ )= \alpha\ + \alpha$ (дистрибутивность относительно сложения векторов);

8^0. $\forall \alpha,\beta \in P,\ \in R\ \Rightarrow\ (\alpha+\beta)\ = \alpha\ + \beta$ дистрибутивность относительно сложения элементов поля).

Свойства векторных пространств.

1.В векторном пространстве существует единственный нулевой элемент.*(∃!)*

*2.*Для каждого из R существует единственный противоположный *(-\ )* из *R*

($\forall\ \in R \exists !(-\ )$*).*

3.*В пространстве выполняется операция вычитание, т.е. для произвольных векторов*

и уравнение вида + = имеет единственное решение

= +*(-\ )*, которое называется разностью.

*4.*Сумма любых *n* векторов из пространства *R* не зависит от того, как ее слагаемые разбиты с помощью скобок на группы.

5. $\forall \alpha \in P \Rightarrow \alpha\cdot\ =\ .$

6. $\forall \quad \in R \Rightarrow 0 \cdot \; =$

7. $\forall \alpha \in P, \quad \in R \; \alpha \; = \; \Leftrightarrow \alpha = 0$ *или* $\quad = \; .$

8. $\forall \alpha \in P, \quad \in R \Rightarrow \alpha(- \;) = -(\alpha \;), (-\alpha) \; = -(\alpha \;).$

9. Операция умножения векторов на скаляр дистрибутивна относительно вычитания векторов: $\alpha(\; - \;) = \alpha \; - \alpha \;$.

10. Операция умножения векторов на скаляр дистрибутивна относительно вычитания

скаляров $(\alpha - \beta) \; = \alpha \; - \beta \;$.

2.3. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СИСТЕМ ВЕКТОРОВ

Определение: Вектор векторного пространства *R* над полем *P* есть линейная комбинация векторов $_{1, \; 2,\ldots, \; s}$ (линейно выражается через вектора $_{1, \; 2,\ldots, \; s}$) пространства *R*, если в поле *P* существуют $\mu_1, \; \mu_2, \ldots, \mu_s$ такие что $= \mu_1 \; _1 + \mu_2 \; _2 + \ldots + \mu_s \; _s$.

Определение: Система векторов $_{1, \; 2,\ldots, \; s}$ *(1)* из пространства R над полем *P* называется линейно-зависимой, если в поле *P* можно найти такие элементы $_{1, \; 2,\ldots, \; s} \in P$, среди которых хотя бы один ненулевой, причем имеет место равенство:

$$\alpha_1 \quad _+ \alpha_2 \quad + \ldots + \alpha_s \quad = \qquad (2).$$

Определение: Система векторов (1) называется линейно-независимой, если равенство (2) имеет место только при $\alpha_i = 0, \; i = 1,2,\ldots,s.$

Пример. а) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Вектора A_1, A_2, A_3 образуют линейно зависимую систему, так как $0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0{,}5A_3 =$.

b) $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 =$

имеет место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, то есть E_1, E_2, E_3, E_4- линейно независимая система.

Теорема: Система векторов (1) пространства R над полем P являются линейно зависимой тогда и только тогда, когда хотя бы один вектор системы является линейной комбинацией остальных.

Следствие1. Система (1) линейно не зависима тогда и только тогда, когда не один из векторов системы не являются линейной комбинацией остальных.

Свойства линейной зависимости в пространстве R.

1. Если в системе (1) хотя бы один из векторов нулевой, то система (1) линейно зависимая (так как если $a_1 =$, то в равенстве (2) $\alpha_1 \neq 0$, например, $1 \cdot \ + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s =$).
2. Система, состоящая из одного вектора, линейно независима тогда и только тогда, когда этот вектор ненулевой.
3. Если некоторая подсистема системы векторов (1) линейно зависимая, то система(1) тоже линейно зависимая .

   Следствие: Если некоторая система векторов линейно независима, то всякая ее подсистема линейно независима.
4. Если система (1) является линейно независимой, а система $_{1,\ 2,\ldots,}$, – линейно зависима, то вектор – линейная комбинация векторов системы (1).
5. Система (1) линейно зависима тогда, когда некоторый вектор является линейной комбинацией предшествующих векторов.

6. Если является линейной комбинацией системы векторов (1), а вектор a_i – линейная комбинация остальных векторов системы (1), то вектор является линейной комбинацией этих остальных векторов системы (1).

Основная теорема о линейной зависимости системы: Пусть даны две системы векторов (2) и (3), причем $m>n$.Если каждый вектор системы (2) линейно выражается через векторы системы (3), то система (2) линейно зависима.

Следствие 1. Если система (2) линейно независима и каждый вектор системы линейно выражается через векторы система (3), то $m<n$.

Следствие 2. Если системы (2) и (3) линейно независимы, векторы системы (2) линейно выражаются через векторы системы (3), а векторы системы (3) линейно выражаются через векторы системы (2), тогда $m=n$.

2.4. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть R – векторное пространство над полем P.

Определение: Система векторов (1) называется базисом пространства R, если:

1. Система (1) линейно независима;
2. Каждый вектор пространства R является линейной комбинацией системы (1), т.е. любой вектор из пространства R представляется в виде $=\alpha_1 \ _+\alpha_2 \ +...+\alpha_n$, где α_i из поля P.

Примеры:

а) система векторов $=(1,0,0,...,0)$, $=(0,1,0,...,0)$, $=(0,0,1,...,0),...$, $=(0,0,0,...,1)$ является базисом, так как: из (1) $\alpha_1 \ +\alpha_2 \ +...+\alpha_n \ =$

следует $(\alpha_1, \alpha_2, ...,\alpha_n)=(0,0,...0)$, т.е. $\alpha_i=0$;

2) возьмем произвольный вектор $=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ из R, тогда он может быть представлен в виде $=\lambda_1 \quad +\lambda_2 \quad +\ldots+\lambda_n \quad ;$

d) рассмотрим в пространстве квадратных матриц L_2 над полем действительных чисел векторы

$$E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

которые образуют базис согласно примеру *(b)*, причем любой вектор $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=aE_1+bE_2+cE_3+dE_4,$

т.е. E_1,E_2,E_3,E_4 - базис в пространстве L_2.

Теорема 1: Если система векторов (1) является базисом пространства R над полем P, то любая независимая система векторов, состоящая из n-элементов этого пространства тоже является базисом пространства R над полем P.

Теорема 2: Любые два базиса линейного пространства R имеют одинаковое число векторов.

Доказательство: Пусть имеются произвольные базисы (2) и (3).

Покажем, что $m=n$. По определению базиса системы (2) и (3) линейно независимые и каждый вектор системы (2) линейно выражается через векторы системы (3) и наоборт: каждый вектор системы (3) линейно выражается через векторы системы (2), тогда в силу следствия 2 основной теоремы о линейной зависимости следует что $m=n$.

Определение: Непустое пространство R над полем P называется n-мерным , если :

1. в пространстве R существует по крайней мере одна линейно независимая система из n-векторов,

2. любая система из *n+1* вектора является линейно зависимой.

Число *n* называют размерностью пространства *R (dimR=n).*

Размерность нулевого пространства по определению считается равным нулю.

Теорема 3: Размерность пространства *R* над полем *P* равна n тогда, когда это пространство имеет базис из *n* векторов.

Пусть *( )=( ) –* базис векторного пространства R_n над полем *P*, тогда для любого $\in R_n$ существуют $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in P$, что $=\alpha_1 +\alpha_2 +\ldots+\alpha_n$ (1).

Числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ назовем координатами вектора в базисе *( ).*

Строку $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ назовем координатной строкой вектора .

1.Вектору однозначно соответствует строка его координат в базисе *( )* и наоборот каждая строка $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, состоящая из *n* элементов поля *P*, является координатной строкой единственного вектора.

Доказательство: Пусть $(\acute{\alpha}_1,\acute{\alpha}_2,\ldots,\acute{\alpha}_n)$- вторая координатная строка вектора в базисе *( )*, тогда имеет место следующее $=\acute{\alpha}_1 {}_1+\acute{\alpha}_2 {}_2+\ldots+\acute{\alpha}_n {}_n$ (2). Из (1) и (2) следует

$(\alpha_1-\acute{\alpha}_1) {}_1+(\alpha_2-\acute{\alpha}_2) {}_2+\ldots+(\alpha_n-\acute{\alpha}_n) {}_n=$.

Так как векторы образуют базис R_n, то эта система векторов линейно независима, т.е.

$\alpha_1-\acute{\alpha}_1=0 \Rightarrow \alpha_1=\acute{\alpha}_1$,

$\alpha_2-\acute{\alpha}_2=0 \Rightarrow \alpha_2=\acute{\alpha}_2$,

- - - - - - - - - - - -,

$\alpha_n-\acute{\alpha}_n=0 \Rightarrow \alpha_n=\acute{\alpha}_n$.

Обратно: пусть $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – упорядоченный набор поля P. Учитывая то, что в пространстве R_n вектор $=\alpha_1 +\alpha_2 +\ldots+\alpha_n$ и в силу однозначности алгебраических операций вектор единственный.

2.Координатная строка суммы векторов равна сумме координатных строк слагаемых, а координатная строка произведения вектора на число (элемент из поля P) равна произведению координатной строки вектора на это число.

2.5.СВЯЗЬ МЕЖДУ КООРДИНАТАМИ ВЕКТОРА В РАЗНЫХ БАЗИСАХ

Пусть R_n – n-мерное векторное пространство над полем P, тогда пространство R_n имеет базис из n векторов. Следует отметить, что в R_n имеются различные базисы, состоящие из n векторов.

Пусть $( )=( )$ (старый базис), $(\dot{e})=(\dot{e}_1, \dot{e}_2,\ldots,\dot{e}_n)$(новый базис), – произвольный вектор из пространства R_n. Известно, что каждый вектор однозначно выражается через базис, тогда существуют такие $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in P$, что вектор $=\alpha_1 +\alpha_2 +\ldots+\alpha_n$ (1) в базисе . Кроме того существуют $\acute{\alpha}_1,\acute{\alpha}_2,\ldots,\acute{\alpha}_n \in P$, что $x=\acute{\alpha}_1\dot{e}_1+\acute{\alpha}_2\dot{e}_2+\ldots+\acute{\alpha}_n\dot{e}_n$ (2) в базисе $(\dot{e})$.

Так как – это базис пространства R_n, а $\dot{e}_1, \dot{e}_2,\ldots,\dot{e}_n \in R_n$, то каждый вектор из $(\dot{e})$ линейно выражается через векторы базиса $( )$.

$$\begin{cases} e_1 = t_{11}e_1+t_{12}e_2+\ldots+t_{1n}e_n \\ e_2 = t_{21}e_1+t_{22}e_2+\ldots+t_{2n}e_n \\ \text{----------} \\ e_n = t_{n1}e_1+t_{n2}e_2+\ldots+t_{nn}e_n \end{cases} \qquad (3)$$

Составим матрицу системы (3), строками которой являются координатные строки векторов $\dot{e}_1, \dot{e}_2,\ldots,\dot{e}_n$ в базисе (e).

Матрицу $T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12}\dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22}\dots & t_{2n} \\ t_{n1} & t_{n2}\dots & t_{nn} \end{pmatrix}$ назовем матрицей перехода от базиса $(\ )$ к базису $(\dot{e})$.

Теорема: Матрица перехода от одного базиса к другому не вырождена.

Доказательство: Пусть матрица T вырождена, тогда ее определитель равен нулю и координатные строки матрицы T линейно зависимы, т.е. существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ по крайней мере одно из которых отлично от нуля. Причем имеет место следующее равенство:

$$\lambda_1(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n}) + \lambda_2(t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2n}) + \dots + \lambda_n(t_{n1}, t_{n2}, \dots, t_{nn}) = (0, 0, \dots, 0).$$

Отсюда следует: $t_{11}\lambda_1 + t_{21}\lambda_2 + \dots + t_{n1}\lambda_n = 0,$

$$t_{12}\lambda_1 + t_{22}\lambda_2 + \dots + t_{n2}\lambda_n = 0,$$

$$- - - - - - - - - - - - - - -,$$

$$t_{1n}\lambda_1 + t_{2n}\lambda_2 + \dots + t_{nn}\lambda_n = 0.$$

Поэтому в силу формулы (3)

$$\lambda_1\dot{e}_1 + \lambda_2\dot{e}_2 + \dots + \lambda_n\dot{e}_n = \lambda_1(t_{11}e_1 + t_{12}e_2 + \dots + t_{1n}e_n) + \lambda_2(t_{21}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{2n}e_n) + \dots + \lambda_n(t_{n1}e_1 + t_{n2}e_2 + \dots + t_{nn}e_n) = (\lambda_1 t_{11} + \lambda_2 t_{21} + \dots + \lambda_n t_{n1})e_1 + (\lambda_1 t_{12} + \lambda_2 t_{22} + \dots + \lambda_n t_{n2})e_2 + \dots + (\lambda_1 t_{1n} + \lambda_2 t_{2n} + \dots + \lambda_n t_{nn})e_n.$$

Так как все $\lambda_i = 0$, то система оказывается линейно независимой, а мы предположили обратное (пришли к противоречию). Тогда матрица T не вырождена.

Следствие: Для матрицы T существует обратная матрица T^{-1}, так как она не вырождена.

Найдем связь между координатами вектора в базисах *( )* и *(ė)*. Из формул (1), (2) следует $\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\ldots+\alpha_n e_n= \acute{\alpha}_1 \dot{e}_1+\acute{\alpha}_2 \dot{e}_2+\ldots+\acute{\alpha}_n \dot{e}_n$. Подставим (3) в последнее равенство, тогда $\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\ldots+\alpha_n e_n= \acute{\alpha}_1(t_{11}e_1+t_{12}e_2+\ldots+t_{1n}e_n)+\acute{\alpha}_2(t_{21}e_1+t_{22}e_2+\ldots+t_{2n}e_n)+\ldots+\acute{\alpha}_n(t_{n1}e_1+t_{n2}e_2+\ldots+t_{nn}e_n)=$

{группируем слагаемые при $e_1, e_2, \ldots, e_n$}

$=(t_{11}\acute{\alpha}_1+t_{21}\acute{\alpha}_2+\ldots+t_{n1}\acute{\alpha}_n)e_1+(t_{12}\acute{\alpha}_1+t_{22}\acute{\alpha}_2+\ldots+t_{n2}\acute{\alpha}_n)e_2+\ldots+(t_{1n}\acute{\alpha}_1+t_{2n}\acute{\alpha}_2+\ldots+t_{nn}\acute{\alpha}_n)e_n.$

Отсюда следует

$\alpha_1= t_{11}\acute{\alpha}_1+t_{21}\acute{\alpha}_2+\ldots+t_{n1}\acute{\alpha}_n,$

$\alpha_2= t_{12}\acute{\alpha}_1+t_{22}\acute{\alpha}_2+\ldots+t_{n2}\acute{\alpha}_n,$ *(4)*

- - - - - -- - - - - - - - - -,

$\alpha_n= t_{1n}\acute{\alpha}_1+t_{2n}\acute{\alpha}_2+\ldots+t_{nn}\acute{\alpha}_n.$

Пусть $=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ – координатная строка вектора *x* в базисе *(e),* а $=(\acute{\alpha}_1,\acute{\alpha}_2,\ldots,\acute{\alpha}_n)$ – координатная строка вектора x’ в базисе *(ė).*

Из (4) следует $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)= (\acute{\alpha}_1,\acute{\alpha}_2,\ldots,\acute{\alpha}_n)\bullet \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12}\ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22}\ldots & t_{2n} \\ t_{n1} & t_{n2}\ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$

Или $= ’\bullet T$ (5). Формула (5) позволяет найти координатную строку вектора в базисе *( ),* зная его координатную строку в базисе *(ė)* и матрицу перехода от *( )* к *(ė).*

Из (5) следует $x\bullet T^{-1}= x’\bullet T \bullet T^{-1} \Rightarrow x’= x\bullet T^{-1}$ (6). Формула (6) позволяет найти координатную строку вектора *x’* в базисе *(ė)*, зная координаты вектора в базисе *( )* и матрицу перехода от *( )* к *(ė).*

Пример. Рассмотрим трехмерное пространство R_3 , (( ) базис в R_3. Пусть

$\dot{e}_1 = {}_1 + {}_2 + {}_3$, $\dot{e}_2 = {}_1 - {}_2$, $\dot{e}_3 = - {}_1$ и $(\dot{e})=(\dot{e}_1, \dot{e}_2, \ldots, \dot{e}_n)$- новый базис.

Найти координатную строку вектора $=2 {}_1 - {}_2 + 3 {}_3$ в базисе $(\dot{e})$. Матрица перехода $T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$T^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, тогда $(\acute{\alpha}_1, \acute{\alpha}_2, \acute{\alpha}_3)=(2,-1,3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}=(-3,-2,-7)$.

Пример: Дана система из векторов 1) ${}_1=(1,2,3,4)$, ${}_2=(0,1,2,0)$;

2) ${}_1=(1,5,-1)$, ${}_2=(3,0,4)$, ${}_3=(11,10,10)$.

Выяснить является ли эта система линейно независимой или линейно зависимой.

Решение: 1) система линейно независима, если нулевая линейная комбинация $\alpha_1 {}_1 + \alpha_2 {}_2 =$ (*) имеет место только в случае, когда $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$.

Подставим координаты векторов ${}_1$, ${}_2$ в (*).

$\alpha_1(1,2,3,4)+\alpha_2(0,1,2,0)=(0,0,0,0) \Rightarrow (\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1, 4\alpha_1)+(0, \alpha_2, 2\alpha_2, 0)=(0,0,0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha_1, 2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2, 4\alpha_1)=(0,0,0,0)$.

Получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, система $_1$, $_2$ линейно независима.

2) составим нулевую линейную комбинацию

$$\beta_1 \ _1+\beta_2 \ _2+\beta_3 \ _3= \ \Rightarrow \ \beta_1(1,5,-1)+\beta_2(3,0,4)+\beta_3(11,10,10)=(0,0,0) \ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta_1+3\beta_2+11\beta_3=0 \\ 5\beta_1+10\beta_3=0 \\ -\beta_1+4\beta_2+10\beta_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1+3\beta_2+11\beta_3=0 \\ \beta_1=-2\beta_3 \\ \beta_2=-3\beta_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\beta_3=0 \\ \beta_1=-2\beta_3 \\ \beta_2=-3\beta_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_3=\beta_3 \\ \beta_1=-2\beta_3 \\ \beta_2=-3\beta_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \beta_3$ может быть любым отличным от нуля числом, например, β_3=1, тогда β_1=-2, β_2=-3, т.е. система $_1$, $_2$, $_3$ линейно зависима.

Пример 2: Дана система векторов $_1$=(-1,2,0), $_2$=(3,1,-1), $_3$=(4,0,2), =(-6,10,-6). Показать, что векторы $_1$, $_2$, $_3$ образуют базис в трехмерном пространстве и найти координаты вектора в этом базисе.

Решение: составим нулевую линейную комбинацию

$$\alpha_1 \ _1+\alpha_2 \ _2+\alpha_3 \ _3= \ \Rightarrow \ \alpha_1(-1,2,0)+\alpha_2(3,1,-1)+\alpha_3(4,0,2)=(0,0,0) \ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3=0 \\ 2\alpha_1+\alpha_2=0 \\ -\alpha_2+2\alpha_3=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) => \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) => \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & 0 \end{array}\right)$$

$$=> \begin{cases} -\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3=0 \\ -\alpha_2+2\alpha_3=0 \\ 22\alpha_3=0 \end{cases} => \begin{cases} \alpha_1=0 \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=0 \end{cases}$$

Система $_1$, $_2$, $_3$ линейно независима, а значит в трехмерном пространстве базис.

Найдем координаты вектора в этом базисе, то есть коэффициенты разложения вектора по базису $_1$, $_2$, $_3$.

$= \beta_1 \ _1 + \beta_2 \ _2 + \beta_3 \ _3 \Rightarrow \beta_1(-1,2,0) + \beta_2(3,1,-1) + \beta_3(4,0,2) = (-6,10,-6) \Rightarrow$

$$\begin{cases} -\beta_1 + 3\beta_2 + 4\beta_3 = -6 \\ 2\beta_1 + \beta_2 = 10 \\ -\beta_2 + 2\beta_3 = -6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 7 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 22 & -44 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\beta_1 + 3\beta_2 + 4\beta_3 = -6 \\ -\beta_2 + 2\beta_3 = -6 \\ 22\beta_3 = -44 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \beta_1 = 4 \\ \beta_2 = 2 \\ \beta_3 = -2 \end{cases}$$

Тогда $= 4 \ _1 + 2 \ _2 - 2 \ _3$.

Пример 3:

Найти все λ при которых вектор линейно выражается через вектора $_1$, $_2$, $_3$, причем $_1 = (2,3,5)$, $_2 = (3,7,8)$, $_3 = (1,-6,1)$, $= (7,-2,\lambda)$.

Решение:

$\beta_1 \ _1 + \beta_2 \ _2 + \beta_3 \ _3 \Rightarrow \beta_1(2,3,5) + \beta_2(3,7,8) + \beta_3(1,-6,1) = (7,-2,\lambda) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3 = -7 \\ 3\beta_1 + 7\beta_2 - 6\beta_3 = -2 \\ 5\beta_1 + 8\beta_2 + \beta_3 = \lambda \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 15 & 25 & 0 & 40 \\ 3 & 5 & 0 & \lambda - 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 3 & 5 & 0 & \lambda - 7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 15 \end{array}\right)$$

Последнее уравнение системы имеет вид: $0\beta_1+0\beta_2+0\beta_3=\lambda-15$. Система совместно неопределенная (т.е. имеет бесчисленное решение) в случае, когда $\lambda=15$. При любых $\lambda\neq15$ система не имеет решение.

Пример 4: Найти все базисы системы векторов: $_1=(1,2,3)$, $_2=(2,3,4)$, $_3=(3,2,3)$, $_4=(1,1,1)$.

Решение: Известно, что в трёхмерном пространстве любая тройка линейно независимых векторов является базисом. Найдем число комбинаций (сочетаний) троек векторов данной системы по формуле $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ =>

$C_4^3=\frac{4!}{3!(4-3)!}=4$ комбинации: 1) $_1$, $_2$, $_3$;

2) $_1$, $_2$, $_4$; 3) $_1$, $_3$, $_4$; 4) $_2$, $_3$, $_4$.

Проверим, являются ли эти тройки векторов линейно независимыми.

Если тройки векторов линейно зависимы, то их координатные строки также линейно зависимы, тогда определитель, составленный из этих строк, будет равен нулю. Вычислим определители для каждой комбинации векторов:

1) $_1$, $_2$, $_3$=> $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&2&3\end{vmatrix}$ $=(9+24+12)-(27+12+8)=45-47=-2\neq0$

=>система $_1$, $_2$, $_3$- базис;

2) $_1$, $_2$, $_4$=> $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&1&1\end{vmatrix}$ $=(3+8+6)-(9+4+4)=17-17=0$

=>система $_1$, $_2$, $_4$-не базис;

3) $_1, _3, _4 => \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+6+9)-(6+6+3)=17-15=2\neq 0$

=>система $_1, _3, _4$ - базис

4) $_2, _3, _4 => \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (4+9+12)-(8+9+6)=25-23=2\neq 0$

=>система $_2, _3, _4$ - базис

Ответ: все тройки векторов кроме $_1, _2, _4$ являются базисами.

Пример 5. Дана система векторов

$$\overline{X_1} = (2; 3; 6; -10),$$

$$\overline{X_2} = (-2; 4; 0; -5),$$

$$\overline{X_3} = (1; 5; -1; 3),$$

$$\overline{X_4} = (-1; 2; -2; 3).$$

Найти линейную комбинацию: $2 \cdot \overline{X_1} - \overline{X_2} + 3 \cdot \overline{X_3} + 0 \cdot \overline{X_4}$.

Решение. $\overline{Y} = 2 \cdot \overline{X_1} - \overline{X_2} + 3 \cdot \overline{X_3} + 0 \cdot \overline{X_4} = 2 \cdot (2; 3; 6; -10) - (-2; 4; 0; -5) + 3 \cdot (1; 5; -1; 3) + 0 \cdot (-1; 2; -2; 3) = (4; 6; 12; -20) - (-2; 4; 0; -5) + (3; 15; -3; 9) + (0; 0; 0; 0) = (4+2+3+0; 6-4+15+0; 12-0-3+0; -20+5+9+0) = (9; 17; 9; -6)$

Вектор $\overline{Y} = (9; 17; 9; -6)$ разлагается по системе векторов $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \overline{X_3}, \overline{X_4}$, и коэффициентами разложения являются числа: $\lambda_1=2$; $\lambda_2=-1$; $\lambda_3=3$; $\lambda_4=0$.

Задания для самостоятельной работы № 8:

Показать, что векторы $_1$, $_2$, $_3$ образуют базис и найти координаты вектора в этом базисе:

1. $_1$=(1,0,1), , $_2$=(3,-2,2), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
2. $_1$=(1,0,2), , $_2$=(4,-2,3), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
3. $_1$=(1,0,3), , $_2$=(5,-2,4), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
4. $_1$=(1,0,4), , $_2$=(6,-2,5), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
5. $_1$=(1,0,5), , $_2$=(7,-2,6), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
6. $_1$=(1,0,6), , $_2$=(8,-2,7), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
7. $_1$=(1,0,7), , $_2$=(9,-2,8), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
8. $_1$=(1,0,8), , $_2$=(10,-2,9), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
9. $_1$=(1,0,9), , $_2$=(11,-2,10), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
10. $_1$=(1,0,10), , $_2$=(12,-2,11), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
11. $_1$=(1,0,-1), , $_2$=(-1,-2,0), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
12. $_1$=(1,0,-2), , $_2$=(0,-2,-1), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
13. $_1$=(1,0,-3), , $_2$=(-1,-2,-2), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
14. $_1$=(1,0,-4), , $_2$=(-2,-2,-3), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
15. $_1$=(1,0,-5), , $_2$=(-3,-2,-4), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
16. $_1$=(1,0,-6), , $_2$=(-4,-2,-5), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
17. $_1$=(1,0,-7), , $_2$=(-5,-2,-6), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).
18. $_1$=(1,0,-8), , $_2$=(-6,-2,-7), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).

19. $_1$=(1,0,-9), , $_2$=(-7,-2,-8), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).

20. $_1$=(1,0,-10), , $_2$=(-8,-2,-9), $_3$=(0,0,-1), =(1,-2,3).

ТЕМА 3. Комплексные числа

3.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Комплексными числами называются числа вида $z = x + i\,y$, где $i^2 = -1$, x, y – действительные числа, $x = \mathrm{Re}\, z$ – действительная часть, $y = \mathrm{Im}\, z$ – мнимая часть комплексного числа.

По определению, два комплексных числа: $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ – равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексное число $\bar{z}$ называется сопряженным комплексному числу z, если $\mathrm{Re}\,\bar{z} = \mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\,\bar{z} = -\mathrm{Im}\, z$. Другими словами, если $z = x + i\,y$, то $\bar{z} = x - i\,y$.

Всякому комплексному числу $x + i\,y$ можно поставить в соответствие единственную точку плоскости $M(x, y)$ и обратно, всякую точку $M(x, y)$ плоскости XOY можно рассматривать как геометрический образ единственного комплексного числа $x + i\,y$ рисунок 8.

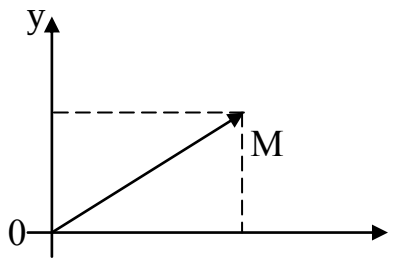


Рисунок 8. Точка на плоскости

Для сокращения вместо “точка, соответствующая комплексному числу $x + i\,y$”, говорят просто “точка $x + i\,y$”. При этом множество всех действительных чисел изображается точками оси абсцисс, которая поэтому называется действительной осью, множество чисто мнимых чисел $i\,y$ точками оси ординат, называемой мнимой осью. Заметим, что одна точка мнимой оси, а именно начало координат, изображает действительное число

нуль. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется комплексной плоскостью.

В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением числа $x + i\,y$ радиус-вектор точки $M(x, y) - \overrightarrow{OM}$ x, y .

Пример: Построить точки $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -2i$, рисунок 9.

В дальнейшем, наряду с представлением комплексных чисел в декартовых координатах, полезно иметь их представление в обобщенных полярных координатах.

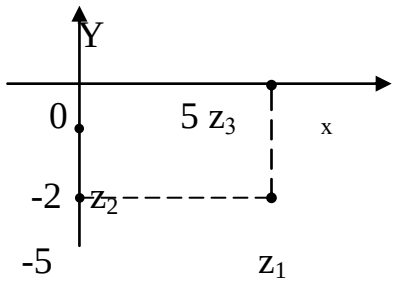


Рисунок 9.

Изображение комплексного числа.

Рассмотрим число $x + i\,y$, которому на плоскости соответствует точка $M(x, y)$. Ее координаты в полярной системе координат ρ, φ (рисунок 10).

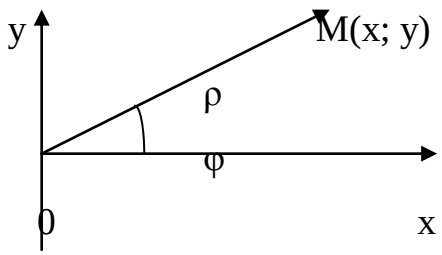


Рисунок 10. Точка в полярной системе координат.

Тогда $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

$$z = x + i\,y = \rho\cos\varphi + i\,\rho\sin\varphi = = \rho\,\cos\varphi + i\sin\varphi\ .$$

Полярный радиус $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ называется *модулем* комплексного числа и обозначается $\left|z\right| = \rho$.

Полярный угол φ называется *аргументом* комплексного числа и обозначается $\varphi = \mathrm{Arg}\ z$. Тогда

$$z = \rho\,\cos\varphi + i\sin\varphi\ = \left|z\right|\,\cos\mathrm{Arg}\ z + i\sin\mathrm{Arg}\ z$$

Эта форма называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Модуль комплексного числа определяется однозначно:

$$\left|z\right| = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π. Главным значением аргумента называется значение, заключенное в интервале $-\pi,\ \pi$. Обозначается оно $\arg z$. Таким образом, $-\pi < \arg z \le \pi$.

Очевидно, $\mathrm{Arg}\ z = \arg z + 2k\pi$.

Главное значение аргумента определяется однозначно.

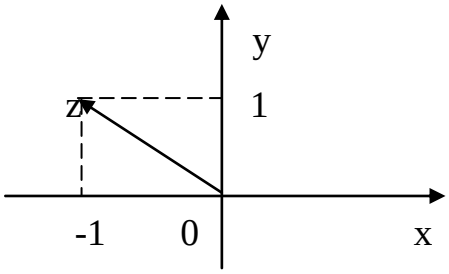
Так как $\mathrm{tg}\ \arg z = \dfrac{y}{x}$,

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x,\ y \in \text{I, IV четвертям,} \\ \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если} \quad x,\ y \in \text{II четверти,} \\ \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если} \quad x,\ y \in \text{III четверти.} \end{cases}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа будет иметь вид

$$z = |z| \cos \arg z + 2k\pi + i \sin \arg z + 2k\pi \quad .$$

Пример: Написать в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 + i$.



Решение. Изобразим число на рисунке 11. $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -1,$

$$\arg z = \operatorname{arctg} -1 + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi.$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \right) \right).$$

Рисунок 11. Число z.

Пусть $z = x + i\,y = |z| \cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z$. Используя формулу Эйлера $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$, получаем так называемую *показательную форму* записи комплексного числа:

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$$

Пример: Представить в показательной форме комплексное число $z = -1 - i$.

Решение

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = 1,$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi,$$

$$-1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i}.$$

Сложение и умножение комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов с учетом $i \cdot i = -1$. При

записи результата следует отделить действительную часть от мнимой, т. е. собрать отдельно члены, содержащие множитель i, и члены, не содержащие множитель i:

$$x_1 + i\,y_1 \;+\; x_2 + i\,y_2 \;=\; x_1 + x_2 \;+ i\;y_1 + y_2\;,$$

$$x_1 + i\,y_1 \;\cdot\; x_2 + i\,y_2 \;=\; x_1\,x_2 - y_1\,y_2 \;+ i\;x_1\,y_2 + y_1\,x_2\;,$$

$$x_1 + i\,y_1 \;-\; x_2 + i\,y_2 \;=\; x_1 - x_2 \;+ i\;y_1 - y_2\;.$$

В частности, $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. Операции сложения и вычитания сводятся к сложению и вычитанию векторов, изображающих эти числа.

Пример: $\dfrac{3-i}{1+2i} = \dfrac{3-i\;\;1-2i}{1+2i\;\;1-2i} = \dfrac{3-6i-i-2}{1+4} = \dfrac{1-7i}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}i.$

Для модуля и аргумента произведения и частного справедливы следующие утверждения:

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,\;\; \operatorname{Arg} z_1 \cdot z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$

2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|},\;\; \operatorname{Arg}\dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2\,.$

Пусть $z = |z|\;\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z\;\;.$

Тогда $z^2 = z \cdot z = |z|^2\;\cos 2 \operatorname{Arg} z + i \sin 2\;\operatorname{Arg} z\;\;.$

Можно доказать методом полной математической индукции, что для любого целого $n > 0 : z^n = |z|^n\;\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z$ (формула Муавра). Формула справедлива и для целых отрицательных n.

Пример: Вычислить $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^{5}$.

Решение $\left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|=\sqrt{3+1}=2,$

$$\arg\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6},$$

$$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2\mathrm{k}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2\mathrm{k}\pi\right)\right),$$

$$\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^{5}=2^{5}\left(\cos\left(-\frac{5}{6}\pi+10\mathrm{k}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi+10\mathrm{k}\pi\right)\right)=$$

$$=32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=-16\sqrt{3}-16\mathrm{i}.$$

Корнем n-й степени из комплексного числа называется такое число w, для которого $\mathrm{w}^{\mathrm{n}}=\mathrm{z}$.

Используя формулу Муавра, получим

$$\left|\mathrm{w}\right|=\sqrt[\mathrm{n}]{\left|\mathrm{z}\right|},\quad \operatorname{Arg}\mathrm{w}=\frac{\operatorname{Arg}\mathrm{z}}{\mathrm{n}}=\frac{\arg\mathrm{z}+2\mathrm{k}\pi}{\mathrm{n}},\quad \mathrm{k}=0,1,2,\ldots,\mathrm{n}-1.$$

Для других значений k аргументы будут отличаться от полученных на число кратное 2π, и, следовательно, получатся значения корня, совпадающие с рассмотренными. Итак, корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Пример**:** Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$ и построить их.

Решение: $\left|-8\right|=8,\quad \arg\left(-8\right)=\pi,$

$$-8=8\left(\cos\left(\pi+2\mathrm{k}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+2\mathrm{k}\pi\right)\right),$$

$$\sqrt[3]{-8}=2\left(\cos\frac{\pi+2\mathrm{k}\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2\mathrm{k}\pi}{3}\right),$$

$$k=0,\quad w_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3},$$

$$k=1,\quad w_2=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=2\ (-1+i\cdot 0\ )=-2,$$

$$k=2,\quad w_3=2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}.$$

Пример: Найти модуль и аргумент чисел $z_1=-1+i$ и $z_2=1+\sqrt{3}i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

2) Найти: а). $\bar{z}_1\cdot z_2^2$; б). z_2/z_1; в). $\sqrt[3]{z_1}$

Решение:

1) Изобразим числа на комплексной плоскости – рисунок 12. При этом числу $z_1=-1+i$ будет соответствовать точка $M_1(-1;1)$, числу $z_2=1+\sqrt{3}i$ - точка $M_2(1;\sqrt{3})$.

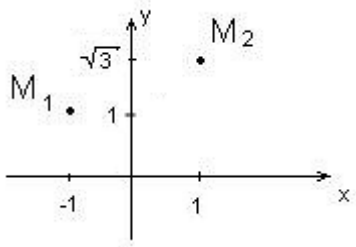


Рисунок 12. Изображение комплексных чисел.

Для нахождения модуля и аргумента заданных чисел воспользуемся формулами:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } \varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{при } x > 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, & \text{при } x < 0,\ y > 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi, & \text{при } x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Получим: для $z_1 = -1 + i$

модуль $r_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

аргумент $\varphi_1 = \arg z_1 = arctg\frac{-1}{1} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$,

Для :

модуль $r_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$,

аргумент $\varphi_2 = \arg z_2 = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$.

Чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической и показательной применим формулы:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $z = re^{i\varphi}$.

Подставляя полученные значения для модуля и аргумента, получим:

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, и $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$,

$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, и $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2)а) $\bar{z}_1 \cdot z_2^2 = (1 - i)(\sqrt{3}i)^2 = (1 - i)\left(1^2 + 2\sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2\right) =$

$= (1 - i)(2\sqrt{3}i - 3) = (1 - i)(\sqrt{3}i - 2) =$

$= -2\sqrt{3}i + 2 - 2\sqrt{3}i^2 + 2i = -2\sqrt{3}i + 2 + 2\sqrt{3} + 2i =$

$= (2 + 2\sqrt{3}) + (2 - 2\sqrt{3})i;$

б)

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{1+\sqrt{3}i}{-1+i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{-1-i-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i^2}{(-1)^2-i^2}=$$

$$=\frac{-1-i-\sqrt{3}i+\sqrt{3}}{1+1}=\frac{-1+\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i;$$

в) Применим формулу

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,\ldots,(n-1).$$

$$\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}+i\sin\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}\right)$$

при $k=0$

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4}{3}+i\sin\frac{3\pi/4}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

при $k=1$:

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4+2\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi/4+2\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

при $k=2$:

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4+4\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi/4+4\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

Задания для самостоятельной работы №9:

1. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 1 - 2i$ и $z_2 = 4 - 2i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $\bar{z}_1^3 \cdot z_2^2$, z_1 / z_2, $\sqrt[3]{z_2 - \bar{z}_1}$.

2. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 4 + 4i$ и $z_2 = 2 - 2i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot z_2^2$, $z_2 / \bar{z}_1$, $\sqrt[4]{\bar{z}_1 - 1}$.

3. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 3 - 4i$ и $z_2 = -4 + 3i$ Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $(z_1 \cdot z_2)^2$, $\bar{z}_2 / z_1$, $\sqrt[4]{\bar{z}_2}$.

4. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 7 + i$ и $z_2 = 1 + 7i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[3]{z_1 + z_2}$.

5. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 3 + i$ и $z_2 = 1 - 3i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $z_1 / \bar{z}_2$, $\sqrt{\overline{z_1 + z_2}}$.

6. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 7 + 24i$ и $z_2 = 24 - 7i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot \bar{z}_2^2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[4]{\bar{z}_1 - z_2}$.

7. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 4 + 3i$ и $z_2 = 3 + 4i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^2 \cdot z_2$, $\bar{z}_2 / \bar{z}_1$, $\sqrt[5]{z_2}$.

8. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = -4 - 4i$ и $z_2 = 2 + 3i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$, z_2 / z_1, $\sqrt[3]{z_1 + 2z_2}$.

9. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ и $z_2 = \sqrt{8} - \sqrt{8}i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $\bar{z}_2 / z_1$, $\sqrt{z_1 - z_2}$.

10. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 3 + 2i$ и $z_2 = -5 + 5i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot z_2^2$, $\bar{z}_2 / \bar{z}_1$, $\sqrt[4]{\bar{z}_1 - i}$.

11. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = -3-4i$ и $z_2 = -3+4i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $(z_1 \cdot z_2)^2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[5]{z_1 + z_2}$.

12. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 2\sqrt{3}-2i$ и $z_2 = 3-3\sqrt{3}i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $\overline{z_1 \cdot z_2}$, z_1^2 / z_2, $\sqrt[3]{z_2}$.

13. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 4-3i$ и $z_2 = 1-7i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^3 \cdot \bar{z}_2$, $\bar{z}_2 / z_1$, $\sqrt[3]{z_1 - z_2}$.

14. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = -3+3i$ и $z_2 = 2+i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot z_2$, $z_1^2 / \bar{z}_2$, $\sqrt[5]{z_1 - \bar{z}_2}$.

15. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 3+3i$ и $z_2 = 4-3i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot \bar{z}_2$, $\left(z_1 / z_2\right)^2$, $\sqrt[4]{z_1 + \bar{z}_2}$.

16. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$ и $z_2 = \sqrt{3} + 2i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot z_2^2$, $z_2 / \bar{z}_1$, $\sqrt[5]{\bar{z}_2}$.

17. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 3 - i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $\overline{(z_1 \cdot z_2)}^2$, $z_1 / \bar{z}_2$, $\sqrt[5]{z_1 - z_2}$.

18. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 5 - 6i$ и $z_2 = -2 + 2i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[3]{z_1 + z_2}$.

19. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = 4 - 4i$ и $z_2 = 3 + 2i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, z_1 / z_2, $\sqrt[4]{z_1}$.

20. а) Найти модуль и аргумент чисел $z_1 = \sqrt{3} + 3i$ и $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$. Изобразить числа на комплексной плоскости. Представить числа в тригонометрической и показательной форме.

б) Найти: $z_1 \cdot \bar{z}_2$, $\left(z_2 / z_1\right)^2$, $\sqrt[5]{\bar{z}_1}$.

Литература

1. Арамович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1968. 41 с.
2. Баврин И.И. Высшая математика. М., Просвещение, 1980.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для и инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1964. – 608 с.
4. Веснина А.А., Хаустова Н. М., Теория функций комплексного переменного. Методические указания для дистанционного обучения студентов 1-2 курсов экономических и технических специальностей. Омск., 2005
5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1966. – 872 с.
6. Елкина Л.В. Специальные разделы математики. - Тирасполь, 2015г. – 100 с.
7. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. -М., Наука., 1986.
8. Лобоцкая Н.Л., Морозов Ю.В., Дунаев А.А.. Высшая математика-Минск, Вышэйшая школа, 1987.
9. Магазинников Л.И. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования. Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 1999. – 205 с.
10. Панов В.Ф. Математика древняя и юная. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006.
11. Письменный Д.Т. – Ч.2 – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006.
12. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 2. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 464 с.

13. Семенова Н.В. Векторы. Матрицы. Методическое пособие. –Тирасполь, 1997г. – 37 с

14. www.wikipedia.ru

Оглавление

Тема 1. Матрицы и определители 4
1.1. МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ 4
1.2. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ 5
1.3. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ 8
Задания для самостоятельной работы № 1: 10
Задания для самостоятельной работы № 2: 11
Задания для самостоятельной работы № 3: 12
1.4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА. 14
Задания для самостоятельной работы №4: 19
1.5. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА 20
Задания для самостоятельной работы №5: 28
1.6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 29
Задания для самостоятельной работы № 6. 38
2.1.ВЕКТОРЫ И СКАЛЯРЫ. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ 39
Задания для самостоятельной работы № 7: 45
2.2. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО 47
2.3. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СИСТЕМ ВЕКТОРОВ 49
2.4. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА 51
2.5.СВЯЗЬ МЕЖДУ КООРДИНАТАМИ ВЕКТОРА В РАЗНЫХ БАЗИСАХ 54
Задания для самостоятельной работы № 8: 62
ТЕМА 3. Комплексные числа 64
3.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ 64
Задания для самостоятельной работы №9: 73
Литература 77

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Учебно-методическое пособие

Составители:

Елкина Лариса Владимировна

Журжи Инна Ивановна

Усл. печ. л. Тираж 20 экз. Заказ № .

3300, г. Тирасполь, ул. Горького, 56. ООО «Литера»