ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г.ШЕВЧЕНКО

Физико-математический факультет

Кафедра прикладной математики и информатики

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Методические указания к выполнению индивидуальных заданий

Издание второе
переработанное и дополненное

Тирасполь, 2016

УДК 51 (072)
ББК В1р30
И 6О

Составители:
Г.В.Спиридонова, канд. тех.наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики ФМФ ПГУ им.Т.Г.Шевченко
Н.Г. Леонова, канд. соц. наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики ФМФ ПГУ им.Т.Г.Шевченко

Рецензенты:
В.В. Граневский, канд.ф.наук, доцент кафедры философии Института общественных наук ПГУ им.Т.Г.Шевченко
Г.Х. Гайдаржи, канд. пед. наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики ФМФ ПГУ им.Т.Г.Шевченко

Методы оптимальных решений: Методические указания к выполнению
И 60 индивидуальных заданий/ Сост.: Спиридонова Г.В., Леонова Н.Г. – Тирасполь, 2016. – 84 с.

Представлены методические указания к выполнению индивидуальных заданий по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов-бакалавров экономического и физико-математического факультетов ПГУ им. Т.Г. Шевченко.

Пособие переработано и дополнено согласно стандартам ФГОС-3+, учебным планам специальностей указанных факультетов, соответствующим рабочим программам, с учётом анализа результатов практического внедрения первого варианта пособия в учебный процесс.

Приводятся варианты индивидуальных заданий по темам дисциплины и образцы выполнения заданий.

УДК 51 (072)
ББК В1р30

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им.Т.Г.Шевченко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методические указания к выполнению индивидуальных заданий по дисциплине «Методы оптимальных решений» являются практическим пособием для проведения самостоятельной работы со студентами-бакалаврами экономического и физико-математического факультетов ПГУ им. Т.Г. Шевченко.

Первое издание методических указаний содержало разделы первого семестра дисциплины «Методы оптимальных решений». Во второе издание включены также разделы второго семестра: задача коммивояжёра, задача принятия решений в условиях неопределённости, межотраслевой балансовый метод, задача оптимального поведения потребителя, задача оптимального поведения производителя. По всем темам приведены варианты заданий с параметром N – номер варианта, который определяет преподаватель. Исходные данные вариантов формируются с учётом значения параметра N.

Методические указания также содержат список вопросов для сессионного контроля и список литературы.

Методические указания могут быть использованы при проведении самостоятельной работы, контрольных работ, при контроле текущих и остаточных знаний, для проведения индивидуальных работ и зачётов на дневном и заочном отделениях и других факультетов.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РАБОТ

Тема 1. Решение задач линейного программирования графическим методом

Задание 1.1

В.1-В.20

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 9 + N \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18 + N \\ 2x_1 - x_2 \le 10 + N \end{cases}$$

$z = 4x_1 + 6x_2 \to \max, \min$

Задание 1.2

В.1-В.20

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 16 + N \\ x_1 \le 3 + N \\ 4x_1 + 5x_2 = 20 \end{cases}$$

$z = 3x_1 - 5x_2 \to \min, \max$

Задание 1.3

В.1-В.20

Цех выпускает обувь двух моделей А и Б. На изготовление одной пары обуви модели А рабочий тратит 3 часа, а одной пары обуви модели Б – 2 часа. От реализации одной пары обуви модели А предприятие получает прибыль 10 руб., а от реализации одной пары обуви модели Б – 20 руб Цех должен выпускать не менее 100 пар обуви модели А и не более 200 пар обуви модели Б. Сколько пар обуви модели А и модели Б должен выпускать цех, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если фонд рабочего времени составляет (1030 + 9N) час.

Задание 1.4

В.1-В.10

Швейная фабрика выпускает платья двух моделей А и В, использует для этого ткань двух видов, рабочее время. Затраты ткани каждого вида и рабочего времени на изготовление одного платья, соответствующая прибыль, а также запасы ткани и рабочего времени даны в таблице:

Вид ресурса	*Затраты ресурсов на изготовление 1 платья модели*		*Запасы ресурсов*
	А	*В*	
Ткань 1 вида (м)	*4*	*0*	*500+20N*
Ткань 2 вида (м)	*2*	*4*	*1200+30N*
Рабочее время (чел/час)	*8*	*4*	*1292+60N*
Прибыль	*10*	*3*	

Определить, сколько платьев модели А и В надо выпускать, чтобы получить максимальную прибыль.

В.11-В.20

При подкормке посева надо внести на 1 га почвы не менее 21 единиц химического вещества А, не менее 42 единиц вещества В и не менее 70+N единиц вещества С. Совхоз закупает комбинированные удобрения 2-х видов : 1 и 2. В таблице указано содержание химических веществ и цена на единицу веса каждого вида удобрения. Минимизировать расходы по закупке необходимого совхозу количества удобрений. Задачу решить графически.

Химические вещества	*Содержание вещества в единице веса удобрений вида*		*Минимальная норма внесения химических веществ*
	1	*2*	
А	*1*	*6*	*21*
В	*7*	*3*	*42*
С	*7*	*10*	*70+N*
Цена (в руб)	*3*	*3*	

Тема 2. Решение задач линейного программирования симплексным методом

Задание 2.1

В.1-В.20

В.1 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4};$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_4 \le 24; \end{cases}$$

$$Z = 2x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 \to \max(\min).$$

В.2 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4};$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = 18; \end{cases}$$

$$Z = -x_1 + x_3 + x_4 \to \max(\min).$$

В.3 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5};$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 4, \\ x_2 + 3x_4 = 36, \\ x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 24; \end{cases}$$

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 - x_5 \to \max(\min).$$

В.4 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5};$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 10, \\ 3x_2 + x_3 \le 4, \\ 3x_3 + x_5 = 2; \end{cases}$$

$$Z = x_1 + 2x_3 + x_5 \to \max(\min).$$

В.5 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6};$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_4 - 4x_5 = -10, \\ x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 12, \\ x_2 - x_4 + 3x_5 = 7; \end{cases}$$

$$Z = -2x_2 + 3x_4 - x_5 \to \max(\min).$$

В.6 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5};$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 8, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_4 = -14, \\ -x_1 + x_2 \le 10; \end{cases}$$

$$Z = 5x_1 + 10x_3 + 3x_5 \to \max(\min).$$

B.7 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,6}$;

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 + 6x_5 = 24, \\ -x_2 - x_4 + x_5 \geq -8, \\ 2x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 30; \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 - 2x_6 \rightarrow \max(\min)$.

B.8 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}$;

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 \geq -35, \\ 6x_1 + 2x_3 \leq 10, \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 \rightarrow \max(\min)$.

B.9 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}$;

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 30, \\ x_2 - 4x_3 \leq 16; \end{cases}$$

$Z = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max(\min)$.

B.10 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}$;

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_2 + 7x_4 \geq 24; \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + x_2 - 5x_3 \rightarrow \max(\min)$.

B.11 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}$;

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ x_2 - x_3 + 7x_4 = 24; \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max(\min)$.

B.12 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,5}$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 18; \end{cases}$$

$Z = -x_1 + x_3 + x_4 \rightarrow \max(\min)$.

B.13 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,5}$;

$$\begin{cases} x_1 - 3x_4 + 7x_5 = 4, \\ x_2 + 4x_4 = 3, \\ x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 2; \end{cases}$$

$Z = x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 - x_5 \rightarrow \max(\min)$.

B.14 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,5}$;

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 10, \\ x_2 + x_4 - x_5 = 4, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 2; \end{cases}$$

$Z = x_1 + 2x_3 + x_5 \rightarrow \max(\min)$.

B.15 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,6}$;

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_4 - 4x_5 = 10, \\ x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 12, \\ 2x_2 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 7; \end{cases}$$

$Z = -2x_2 + 3x_4 - x_5 \rightarrow \max(\min)$.

B.16 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,5}$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 4, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = -1; \end{cases}$$

$Z = 5x_1 + 10x_3 + 3x_5 \rightarrow \max(\min)$.

B.17 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,6}$;

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 + 6x_5 = 4, \\ x_2 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ -x_3 + 3x_4 + 3x_5 = -3; \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max(\min)$.

B.18 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,5}$;

$$\begin{cases} 7x_2 + x_3 \leq 3, \\ 4x_2 + 2x_3 \leq 1, \\ 4x_1 + 3x_3 \leq 4; \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 \rightarrow \max(\min)$.

B.19 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}$;

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_3 \leq 30, \\ 3x_2 - 4x_3 \leq 16; \end{cases}$$

$Z = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max(\min)$.

B.20 $x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 = 24; \end{cases}$$

$Z = -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \rightarrow \max(\min)$.

Задание 2.2
В.1-В.20

Мебельная фабрика выпускает шкафы, столы и стулья. Использует для этого доски и ткань и трудовые ресурсы. Затраты ресурсов на изготовление одного изделия каждого вида, прибыль от него и запасы ресурсов даны в таблице:

Определить оптимальный план выпуска продукции. Задачу решить симплекс-методом.

Виды ресурсов	*Затраты ресурсов на 1 изделие*			*Объемы ресурсов*
	шкаф	*стол*	*стул*	
Доски (м)	*3*	*2*	*1*	*600+6N*
Ткань (м)	*0*	*0*	*1*	*300*
Трудовые ресурсы (чел/час)	*2*	*2*	*2*	*900+6N*
Прибыль от изделия (в руб)	*10*	*6*	*8*	

Задание 2.3
В.1-В.10

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 6x_3 + x_4 = 12 + N \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 4 + N \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + x_6 = 15 + N \end{cases}$$

$$z = -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \to \min$$

В.11-В.20

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 \le 30 + N \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le 16 + N \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to \max$$

Тема 3. Решение задач линейного программирования М-методом

Задание 3.1
В.1-В.20

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3},$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 16, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 \ge 36 + 4N, \end{cases}$$

$$z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$$

Задание 3.2
В.1-В.20

Для строительства домов выделено (100+N) строительных площадок. Предлагается 3 типовых проекта. По каждому из них известны длительность закладки фундамента, строительство остальной части здания и жилая площадь дома. Составить план строительства, максимизирующий ввод жилой площади при условии, что домов второго типа надо построить не менее (10+N).Фонд времени, выделенный на закладку фундамента равен (2500+100N), а на строительство остальной части здания (4200+100N).

Вид работы	*Длительность выполнения для проекта*		
	I	*II*	*III*
Закладка фундамента	*20*	*30*	*40*
Строительство	*40*	*20*	*25*
Жилая площадь тыс.кв.м	*7*	*2*	*6*

Тема 4. Двойственность в линейном программировании
Задание 4.1
В.1-В.20

В.1 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 4, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 4; \end{cases}$$

$Z = -x_1 + 8x_2 + 3x_3 \to \max, \min.$

В.2 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 7, \\ x_2 + 2x_3 \ge 10; \end{cases}$$

$Z = 180x_1 + 300x_2 + 400x_3 \to \max, \min.$

В.3 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6; \end{cases}$$

$Z = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max, \min.$

В.4 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le 1; \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max, \min.$

В.5 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \le 24; \end{cases}$$

$Z = 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \max, \min.$

В.6 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 \ge 8, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 4; \end{cases}$$

$Z = 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \max, \min.$

В.7 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 14; \end{cases}$$

$Z = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max, \min.$

В.8 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 12, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \le 36; \end{cases}$$

$Z = 4x_1 + x_2 + x_3 \to \max, \min.$

В.9 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 4, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \le 5; \end{cases}$$

$Z = -2x_1 + x_2 + 4x_3 \to$ max, min.

В.10 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 9, \\ x_2 + 2x_3 \ge 10; \end{cases}$$

$Z = 18x_1 + 30x_2 + 40x_3 \to$ max, min.

В.11 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6; \end{cases}$$

$Z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to$ max, min.

В.12 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le 1; \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to$ max, min.

В.13 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \le 3; \end{cases}$$

$Z = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \to$ max, min.

В.14 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 \ge -2, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 4; \end{cases}$$

$Z = x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to$ max, min.

В.15 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 14; \end{cases}$$

$Z = x_1 + x_2 - 3x_3 \to$ max, min.

В.16 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 12, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \le 6; \end{cases}$$

$Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3 \to$ max, min.

В.17 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge -4, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 4; \end{cases}$$

$Z = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to$ max, min.

В.18 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 4, \\ x_2 + 2x_3 \ge 5; \end{cases}$$

$Z = 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to$ max, min.

В.19 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6; \end{cases}$$

$Z = x_1 - 2x_2 + x_3 \to$ max, min.

В.20 $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 7, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 \le 1; \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to$ max, min.

Задание 4.2
В.1-В.10

В производстве конфет трех сортов: А, В и С принимают участие 4 цеха предприятия. При этом на изготовление конфет 1 ц сорта А цех тратит 2 часа, второй – 2 часа, четвертый цех – 3 часа, третий цех в изготовлении конфет сорта А не участвует.

На изготовление 1 ц конфет сорта В первый цех тратит 4 часа, второй – 1 час, третий – 2 часа, четвертый – 3 часа. На изготовление 1 ц конфет сорта С, каждый из цехов тратит соответственно 2, 1, 2 и 0 часов. Фонд времени каждого цеха составляет соответственно 360-8N, 200+4N, 120+4N, 240+6N часов. От реализации 1 ц конфет каждого сорта прибыль составляет соответственно 6, 8 и 4 руб. Необходимо определить: оптимальный план выпуска конфет; сформулировать экономически двойственную задачу, записать ее математическую модель и оптимальное решение; дать анализ решений пары двойственных задач;

В.11-В.20

В производстве печенья трех сортов: А, В и С принимают участие 4 цеха предприятия. При этом на изготовление печенья 1 ц сорта А цех тратит 2 часа, второй – 4 часа, четвертый цех – 6 часа, третий цех в изготовлении печенья сорта А не участвует.

На изготовлении 1 ц печенья сорта В первый цех тратит 4 часа, второй – 2 час, третий – 2 часа, четвертый – 2 часа. На изготовление 1 ц печенья сорта С, каждый из цехов тратит соответственно 0, 2, 0 и 2 часов. Фонд времени каждого цеха составляет соответственно 1000+6N, 1200+6N, 400+2N, 3000-6N часов. От реализации 1 ц печенья каждого сорта прибыль составляет соответственно 8, 12 и 11 руб. Необходимо определить: оптимальный план выпуска печенья; сформулировать экономически-двойственную задачу, записать ее математическую модель и оптимальное решение; дать анализ решений пары двойственных задач.

Для заданной задачи построить двойственную задачу, решить одну из них и записать оптимальные решения исходной и двойственной задач. В задачах об оптимальном плане выпуска продукции дать анализ решений прямой и двойственной задач.

Тема 5. Анализ устойчивости решения оптимального плана производства

Задание 5.1

В.1-В.20

Цех выпускает 3 вида продукции, использует 3 типа сырья. Известны удельные расходы сырья, их запасы и прибыль, получаемы от реализации единицы продукции.

Наименование ресурсов	Единица измерения	Удельные расходы ресурсов на единицу продукции.			Запасы ресурсов
		I вида	II вида	III вида	
Сырье I типа	кг	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
Сырье II типа	кг	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
Сырье III типа	кг	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
Прибыль	тыс. руб.	C_1	C_2	C_3	

Требуется:

- Найти план производства продукции, обеспечивающий максимальную прибыль от реализации продукции.
- Сформулировать и записать математическую модель и оптимальное решение двойственной задачи.

- Провести анализ решений пары задач.
- Найти интервалы устойчивости оценок ресурсов.
- Определить изменение max прибыли при изменении i-го ресурса на Δb_i .
- Оценить целесообразность выпуска 4-го вида продукции с нормами затрат ресурсов a_{14} , a_{24}, a_{34} и прибыль C_4 для единицы выпуска этой продукции.

№	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3	C_1	C_2	C_3
В.1	8	6	1	4	2	2	1	4	4	474	400	238	3	4	2
В.2	4	6	8	3	4	2	2	8	10	1200	480	1440	4	4	3
В.3	9	7	5	5	3	2	4	2	6	677	300	358	13	12	15
В.4	5	3	1	4	3	1	5	4	2	1500	2100	1800	10	5	4
В.5	9	7	2	3	5	4	2	9	4	1395	750	598	13	16	14
В.6	9	6	3	8	3	4	7	5	5	471	350	355	15	12	14
В.7	2	7	5	10	5	6	5	4	8	1800	1800	1320	15	13	12
В.8	5	3	4	12	7	6	5	6	6	370	885	490	17	18	3
В.9	2	7	6	5	8	3	6	7	4	1500	1350	2100	4	3	5
В.10	4	3	6	5	3	4	1	1	10	880	1400	250	10	8	6
В.11	5	4	1	7	2	1	4	1	1	900	200	150	3	8	6
В.12	6	9	9	2	1	3	0	6	3	600	120	360	12	9	6
В.13	6	3	9	0	4	2	3	2	1	3600	1200	1200	3	4	2
В.14	8	2	4	2	0	1	0	4	2	1160	80	520	6	3	4
В.15	2	4	4	2	1	4	0	2	2	900	600	400	3	4	1
В.16	4	1	2	2	2	3	1	4	2	1260	720	600	6	4	5
В.17	2	2	1	2	3	4	2	1	0	700	1500	600	3	4	3
В.18	3	4	2	1	4	5	2	3	4	960	1440	1200	4	3	3
В.19	4	6	8	3	4	2	2	8	10	1200	480	1440	4	4	3
В.20	9	7	5	5	3	2	4	2	6	677	300	358	13	12	15

№	Δb_1	Δb_2	Δb_3	a_{14}	a_{24}	a_{34}	C_4
В.1	100	-80	40	7	3	5	5
В.2	-100	60	20	5	1	1	6
В.3	300	-100	400	6	2	3	10
В.4	-500	-200	200	7	2	4	8
В.5	-400	150	100	8	5	2	10
В.6	100	-50	120	7	5	3	11
В.7	-800	100	270	4	3	2	12
В.8	100	200	-130	9	2	3	15
В.9	300	140	-500	10	2	3	8
В.10	-180	200	150	6	5	2	5

№	Δb_1	Δb_2	Δb_3	a_{14}	a_{24}	a_{34}	C_4
В.11	100	200	-100	4	3	2	8
В.12	700	300	-60	2	4	1	6
В.13	-1000	200	300	5	1	2	7
В.14	-160	220	-100	5	2	3	8
В.15	100	-100	500	2	4	4	10
В.16	40	-120	700	5	4	3	9
В.17	800	-500	800	6	2	1	5
В.18	-160	160	-200	4	4	5	7
В.19	100	-50	120	7	5	3	11
В.20	-800	100	270	4	3	2	12

Тема 6. Решение транспортных задач

Задание 6.1

В.1-В.20

Совхозы A_1, A_2 , A_3 выделяют соответственно 30, 40, (20+10N) ц молока, используемого для снабжения 4-х населенных пунктов B_1, B_2, B_3 и B_4. Каждому из них необходимо соответственно 30, 30, (20+10N) и 10 ц молока. Матрица тарифов:

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Найти оптимальный план закрепления совхозов за населенными пунктами. Исходный план находить методом северо–западного угла.

Задание 6.2

В.1-В.20

Решить транспортную задачу, условия которой даны в таблице:

a_i \ b_j	140	200 + 10N	170
190 + 10N	5	2	1
210	2	13	8
110	1	2	5

Исходный план находить методом минимального элемента.

Задание 6.3

В.1-В.20

Имеется 3 участка земли, на которых можно засеять кукурузу, пшеницу, ячмень, просо. Площадь участков равна соответственно – 470 га, 180 га и (350 + 5N) га. С учетом наличия семян этими культурами можно засеять соответственно

390, 10, 110 и (420 + 10N) га. Затраты на обработку 1 га площади под соответствующую культуру заданы матрицей:

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} 30 & 18 & 15 \\ 20 & 10 & 18 \\ 15 & 30 & 15 \\ 5 & 50 & 40 \end{pmatrix}$$

Определить, сколько га на каждом участке следует засеять, чтобы общие затраты были минимальны. Исходный план находить методом северо–западного угла.

Задание 6.4
В.1-В.20

В резерве 3–х железнодорожных станций находится соответственно 50, 50 и (30 + N) вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к 4–м пунктам погрузки зерна, каждому из которых требуется соответственно: 10, 50, 30 и (50+N) вагонов. Матрица тарифов:

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 15 & 3 \end{pmatrix}$$

Исходный план находить методом минимального элемента.

Тема 7. Решение задач линейного целочисленного программирования
Задание 7.1
В.1-В.20

Решить методами Гомори и Ленд и Дойг следующие задачи линейного целочисленного программирования. Сопровождайте решение графической иллюстрацией.

В.1

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 + 3x_2 \le 7 \end{cases}$$

$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

В.2

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 7x_1 + 8x_2 \le 28 \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

В.3

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8 \end{cases}$$

$Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

В.4

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 21 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 37 \end{cases}$$

$Z = 7x_1 + 4x_2 \to \max$

В.5

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 15x_1 + 30x_2 \le 96 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$

В.6

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \le 32 \\ 6x_1 - 5x_2 \le 15 \end{cases}$$

$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

B .7

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$$

$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

B.8

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ 5x_1 + 10x_2 \le 32 \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$

B.9

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9 \end{cases}$$

$Z = x_1 + x_2 \to \max$

B.10

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \le 31 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 10 \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$

B.11

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 - 2x_2 \le 3 \end{cases}$$

$Z = 6x_1 + 2x_2 \to \max$

B.12

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 17 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 3 \end{cases}$$

$Z = x_1 + x_2 \to \max$

B .13

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 14 \end{cases}$$

$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$

B.14

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 36 \\ x_2 \le 13 \end{cases}$$

$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$

B.15

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \end{cases}$$

$Z = -2x_1 + x_2 \to \max$

B.16

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 3 \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + 2x_2 \to \max$

B.17

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ x_1 + 3x_2 \le 12 \end{cases}$$

$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

B.18

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 28 \\ x_1 \le 7 \end{cases}$$

$Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

B.19

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 25 \\ -x_1 + 6x_2 \le 15 \end{cases}$$

$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

B.20

$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 9 \end{cases}$$

$Z = x_1 + 3x_2 \to \max$

Задание 7.2

В.1, В.2, В.5, В.7, В.8, В.10, В.11,В.13, В.14, В.16

Условия задачи о выпуске целочисленной продукции даны в таблице. Найти оптимальный план выпуска продукции по критерию суммарной прибыли.

Вид ресурса	*Затраты на 1 партию обуви*			*Наличие кожи*
	Жен.	*Муж.*	*Дет.*	
Кожа I вида $дм^2$	2	4	3	600+N
Кожа II вида $дм^2$	3	2	2	1200
Прибыль в у.е.	3	4	5	–

В.3, В.4, В.6, В.9, В.12, В.15, В.17,В.18, В.19, В.20

Условия задачи о выпуске целочисленной продукции даны в таблице. Найти оптимальный план выпуска продукции по критерию суммарной прибыли от ее реализации.

Вид ресурса	*Затраты ткани на 1 изделие*			*Наличие ткани*
	Вечернее платье	*Костюм*	*Жакет*	
Ткань I вида м	9	5	2	250+N
Ткань II вида м	0	1	2	3+N
Прибыль в у.е.	20	20	2	–

Задание 7.3

В.1-В.20

Станок обрабатывает 6 партий деталей. Времена t_{ij} переналадки станка при переходе от обработки i-ой партии к обработке j-ой партии даны в таблице. Найти порядок обработки партий деталей, при котором суммарное время переналадки будет минимальным.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	—	N	6	2	5	6
2	9	—	4	3	3	*N*
3	10	6	—	4	2	5
4	8	8	5	—	6	7
5	2	3	4	5	—	4
6	4	4	7	8	2	—

Задание 7.4

В.1-В.20

На поточной линии идет розлив $\boldsymbol{n}$ видов соков. Времена переналадки $\boldsymbol{t_{ij}}$ поточной линии при переходе от розлива сока $\boldsymbol{i}$-ого вида к розливу сока $\boldsymbol{j}$-ого вида заданы матрицей $T=(t_{ij})_{n\cdot n}$. Определить последовательность розлива соков, при которой суммарное время переналадки будет наименьшим.

j \ i	1	2	3	4	5
1	—	*N*	3	5	7
2	4	—	*N*	7	9
3	8	6	—	4	4
4	3	7	*N*	—	9
5	4	5	6	7	—

Тема 8. Решение задач методом динамического программирования

Задание 8.1

В.1-В.10

Между четырьмя предприятиями следует распределить 120 тыс. рублей. Значения $g_i(x)$ прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенной суммы X даются в таблице. Составить план распределения средств, максимизирующий общий прирост выпуска продукции. Задачу решить методом динамического программирования.

В.1

$\overline{X}$	0	20	40	60	80	100	120
$g_1(x)$	0	10	31	42	62	72	76
$g_2(x)$	0	12	26	36	54	76	78
$g_3(x)$	0	11	36	45	60	75	77
$g_4(x)$	0	16	37	46	63	78	80

В.2

$\overline{X}$	0	20	40	60	80	100	120
$g_1(x)$	0	9	18	24	38	50	50
$g_2(x)$	0	11	19	30	44	59	60
$g_3(x)$	0	16	32	40	57	70	70
$g_4(x)$	0	13	27	44	69	73	74

В.3

$\overline{X}$	0	20	40	60	80	100	120
$g_1(x)$	0	7	29	37	41	59	59
$g_2(x)$	0	9	19	28	37	46	48
$g_3(x)$	0	17	27	37	48	66	66
$g_4(x)$	0	16	30	42	65	81	81

B.4

$\overline{X}$	0	20	40	60	80	100	120
$g_1(x)$	0	9	20	35	44	57	58
$g_2(x)$	0	12	25	34	46	57	58
$g_3(x)$	0	11	20	32	48	61	61
$g_4(x)$	0	14	23	40	50	58	58

B.5

$\overline{X}$	0	20	40	60	80	100	120
$g_1(x)$	0	9	18	29	41	60	60
$g_2(x)$	0	8	19	30	47	58	59
$g_3(x)$	0	12	25	51	58	69	70
$g_4(x)$	0	7	15	52	59	59	60

B.6

$\overline{X}$	0	20	40	60	80	100	120
$g_1(x)$	0	11	21	40	54	61	62
$g_2(x)$	0	13	20	42	45	60	61
$g_3(x)$	0	12	22	34	55	56	60
$g_4(x)$	0	10	27	33	57	58	69

B.7

$\overline{X}$	0	20	40	60	80	100	120
$g_1(x)$	0	13	31	42	62	72	76
$g_2(x)$	0	12	26	36	54	76	78
$g_3(x)$	0	11	36	45	60	75	77
$g_4(x)$	0	16	37	46	63	78	80

B. 8

$\overline{X}$	0	20	40	60	80	100	120
$g_1(x)$	0	7	30	37	39	59	59
$g_2(x)$	0	9	19	28	37	46	50
$g_3(x)$	0	17	27	37	45	60	65
$g_4(x)$	0	18	31	40	65	75	80

В.9

$\overline{X}$	0	20	40	60	80	100	120
$g_1(x)$	0	10	21	30	43	55	58
$g_2(x)$	0	12	23	32	45	57	58
$g_3(x)$	0	11	20	33	45	60	65
$g_4(x)$	0	14	25	35	49	58	63

В. 10

$\overline{X}$	0	20	40	60	80	100	120
$g_1(x)$	0	10	19	28	35	50	60
$g_2(x)$	0	9	17	38	47	58	59
$g_3(x)$	0	14	25	51	58	69	71
$g_4(x)$	0	10	15	52	59	59	62

В.11- В.20

Шесть промышленных предприятий следует разместить между четырьмя областями так, чтобы суммарные затраты на их строительство были минимальными. Функция затрат $f_i(\overline{X}), i=\overline{1,4}$ в зависимости от количества размещаемых предприятий дана в таблице. Задачу решите методом динамического программирования.

В.11

$\overline{X}$	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	15	18	21	4	28	3	39
$f_2(x)$	15	16	19	24	27	34	41
$f_3(x)$	15	19	22	26	29	30	38
$f_4(x)$	15	17	23	27	30	32	40

В.12

$\overline{X}$	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	13	21	24	28	31	35	40
$f_2(x)$	13	18	20	27	29	32	37
$f_3(x)$	13	20	23	26	29	33	38
$f_4(x)$	13	18	21	26	30	34	39

В.13

$\overline{X}$	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	11	13	16	19	26	30	34
$f_2(x)$	11	15	18	21	28	31	35
$f_3(x)$	11	14	17	20	25	29	33
$f_4(x)$	11	16	19	24	28	31	36

В.14

$\overline{X}$	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	18	21	27	31	35	37	40
$f_2(x)$	18	22	27	30	33	35	37
$f_3(x)$	18	20	25	2	31	37	39
$f_4(x)$	18	24	26	30	33	36	38

В.15

$\overline{X}$	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	17	21	27	31	35	37	40
$f_2(x)$	17	22	27	30	33	35	37
$f_3(x)$	17	20	25	27	31	37	39
$f_4(x)$	7	24	2	30	33	36	38

В.16

$\overline{X}$	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	14	17	19	23	28	34	40
$f_2(x)$	14	15	21	24	26	32	38
$f_3(x)$	14	16	20	23	27	31	36
$f_4(x)$	14	19	25	28	30	34	40

В.17

$\overline{X}$	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	12	17	21	24	28	33	39
$f_2(x)$	12	16	19	24	27	34	41
$f_3(x)$	12	19	22	26	29	32	38
$f_4(x)$	12	17	23	27	30	32	39

В.18

$\overline{X}$	0	1	2	3		5	
$f_1(x)$	10	16	19	23	28	34	42
$f_2(x)$	10	15	21	24	26	32	36
$f_3(x)$	10	18	21	24	27	31	35
$f_4(x)$	10	19	25	29	32	34	43

В.19

$\overline{X}$	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	1	13	16	19	26	30	34
$f_2(x)$	18	15	18	21	28	31	35
$f_3(x)$	18	14	17	20	25	29	33
$f_4(x)$	18	16	19	24	28	31	36

В.20

$\overline{X}$	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	10	18	21	24	29	33	39
$f_2(x)$	10	16	19	24	30	34	40
$f_3(x)$	10	19	22	26	31	32	38
$f_4(x)$	10	17	23	27	29	32	40

Тема 9. Принятие решений в условиях неопределённости и матричные игры

Задание 9.1

Банк имеет возможность выделить 10 денежных единиц на формирование портфеля акций. Ценные бумаги можно приобрести у компаний $К_1$, $К_2$, $К_3$. Номинальная стоимость акции компании $К_1$ составляет 3 денежных единицы, компании $К_2$ – 2 денежных единицы, $К_3$ – 5 денежных единиц. На конец года рынок ценных бумаг может оказаться в одном из трех состояний $С_1$, $С_2$ или $С_3$, в зависимости от которых дивиденды по ценным бумагам компаний $К_1$, $К_2$, $К_3$ будут разными (в таблице указаны дивиденды в процентах от стоимости соответствующих акций).Используя критерии Вальда, Гурвица (λ=0,7), Сэвиджа и Лапласа, сформировать портфель акций банка, обеспечивающий ему наибольшую прибыль.

В.1- В.10

Состояния	*Дивиденды в % по акциям компаний*		
	$К_1$	*$К_2$*	*$К_3$*
$С_1$	*4+N*	*14–N*	*10*
$С_2$	*20*	*5+N*	*20–N*
$С_3$	*16–N*	*17*	*8+N*

В.11-В.20

Состояния	*Дивиденды в % по акциям компаний*		
	$К_1$	*$К_2$*	*$К_3$*
$С_1$	*8+N*	*15–N*	*9*
$С_2$	*19*	*6+N*	*20–N*
$С_3$	*7+N*	*10*	*8+N*

Задание 9.2
В.1-В.20

Найти оптимальное сочетание площадей под с\х культуры. Состояния погоды и значения прибылей даны в таблице.

Тип с\х культуры	Теплая,сухая	Теплая, влажная	Холодная, сухая	Холодная, влажная
Пшеница	8+N	9+N	3+N	4+N
Рожь	2+N	3+N	4+N	6+N
Кукуруза	10+N	9+N	1+N	1+N

Задание 9.3
В.1-В.20

В магазин можно завезти 3 типа товаров. Если завезенный товар пользуется спросом, то магазин получает прибыль от его реализации, если спроса нет, то понесет убытки от хранения и порчи. Данные о доходах и убытках даны в таблице. Определить типы товаров, которые следует завезти в магазин и процентное соотношение товаров.

Тип товара	1	2	3
Прибыль	5+N	6+N	7+N
Убыток	2	1	1

Тема 10. Межотраслевой балансовый метод

Задание 10.1

На основе отчетного межотраслевого баланса народного (МОБ) хозяйства найти:

- отчетные коэффициенты прямых и полных материальных затрат, дать их экономическую характеристику;
- плановые объемы валовой продукции;
- плановые объемы межотраслевых потоков и чистую продукцию отраслей;
- коэффициенты прямой и полной трудоёмкости;
- коэффициенты прямой и полной фондоемкости;
- затраты труда и фондов на плановый период;
- построить схему МОБ на плановый период.

На плановый период коэффициенты прямых материальных затрат не меняются.

Потребляющие отрасли / *Производящие отрасли*	*Промышленность*	*Строительство*	*Сельское хозяйство*	*Конечная продукция*	*Валовая продукция*	*Плановые объемы конеч. прод.*
Промышленность	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	X_1	$y_{1пл.}$
Строительство	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	X_2	$y_{2пл.}$
Сельское хозяйство	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	X_3	$y_{3пл.}$
Затраты труда	L_1	L_2	L_3			
Стоимость производственных фондов	Φ_1	Φ_2	Φ_3			
Валовая продукция	X_1	X_2	X_3			

№	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_1	y_2	y_3	X_1	X_2	X_3	$y_{1пл}$	$y_{2пл}$	$y_{3пл}$
В.1	11	32	19	25	12	19	13	24	11	141	110	135	200	150	180	135	110	120
В.2	12	34	54	29	14	47	42	39	14	123	78	132	223	168	227	150	110	135
В.3	14	54	73	39	15	77	32	33	16	121	138	125	262	269	206	200	210	150
В.4	10	20	18	15	5	20	20	20	8	152	110	132	200	150	180	20	50	80
В.5	19	39	45	27	16	34	28	35	17	93	87	82	196	164	162	100	150	175
В.6	23	49	54	69	24	77	42	36	22	103	98	132	229	268	232	150	200	200
В.7	17	38	34	29	12	49	47	34	19	133	158	142	222	248	242	200	300	150
В.8	7	18	24	21	9	19	27	24	11	83	58	62	132	107	124	160	120	130
В.9	13	39	44	22	12	45	49	33	11	123	138	122	219	217	215	120	180	110
В.10	21	68	74	49	22	77	34	43	19	183	128	142	346	276	238	290	310	175
В.11	14	28	34	25	10	39	27	44	9	87	58	42	163	132	122	125	130	115
В.12	10	30	18	20	10	9	15	25	10	142	111	130	200	150	180	135	110	125
В.13	20	25	18	10	15	15	15	20	10	137	110	135	200	150	180	120	200	150
В.14	10	20	26	20	15	5	15	10	18	144	110	137	200	150	180	150	200	200
В.15	12	16	4	8	32	10	4	5	6	18	90	15	50	140	30	20	120	45
В.16	15	20	6	10	5	4	3	5	15	80	131	200	121	150	223	130	140	180
В.17	5	20	5	10	5	4	6	15	5	70	106	224	100	125	250	80	150	180
В.18	5	4	5	3	2	1	1	3	2	111	115	114	125	121	120	75	90	60
В.19	30	10	14	10	18	12	25	10	13	146	110	132	200	150	180	180	170	150
В.20	10	12	5	7	5	8	4	2	10	10	10	24	37	30	40	40	36	20

№	L_1	L_2	L_3	Φ_1	Φ_2	Φ_3
В.1	150	180	140	200	225	180
В.2	150	140	60	210	215	170
В.3	60	140	80	200	175	150
В.4	120	130	150	180	160	150
В.5	140	150	100	200	210	190
В.6	170	120	110	210	200	180
В.7	100	60	80	175	120	140
В.8	120	65	90	150	140	120
В.9	140	80	70	200	100	90
В.10	130	140	180	200	150	110
В.11	50	60	70	80	90	100
В.12	77	72	65	100	105	95
В.13	150	180	100	155	145	205
В.14	120	110	110	190	180	150
В.15	85	70	70	110	105	95
В.16	140	120	100	200	215	190
В.17	200	170	150	180	135	145
В.18	70	60	100	150	140	200
В.19	130	140	110	180	200	150
В.20	190	180	170	185	155	115

Тема 11. Оптимальное поведение потребителя

Задание 11.1

Дана функция полезности $U\ (x_1, x_2, x_3)$. Требуется:

1. Решить задачу оптимального поведения при заданных ценах p_1, p_2, p_3 и доходе M.
2. Найти функцию опроса потребителя и вычислить реакции потребителя при изменении дохода и цен в точке оптимума.
3. Вычислить предельные полезности товаров в точке оптимума.
4. Вычислить норму замещения для 2-го и 3-го товаров в точке оптимума.
5. Вычислить коэффициенты эластичности по доходу и ценам для заданных цен и дохода.

$$U = \alpha\, x_1\, x_2 + \beta\, x_1\, x_3 + \gamma\, x_2\, x_3.$$

$p_1 = 130 + N;\quad p_2 = 180 + N;\quad p_3 = 210 + N;\quad M = 6000 + 40\,N$

№	*В.1*	*В.2*	*В.3*	*В.4*	*В.5*	*В.6*	*В.7*	*В.8*	*В.9*	*В.10*
α	4	3	4	3	1	2	2	2	1	5
β	1	2	5	6	2	2	1	3	3	1
γ	6	5	7	5	3	4	3	2	4	8

$$U = \alpha\, x_1\, x_2 + \beta\, x_1\, x_3 + \gamma\, x_2\, x_3$$

$p_1 = 170 + N;\quad p_2 = 230 + N;\quad p_3 = 150 + N;\quad M = 5000 + 50\,N$

№	*В.11*	*В.12*	*В.13*	*В.14*	*В.15*	*В.16*	*В.17*	*В.18*	*В.19*	*В.20*
α	3	2	1	1/2	2	1/2	1	3	1/4	2
β	3	4	4	1/4	1	1/2	2	1	1/4	3
γ	4	5	5	2/3	2	3/4	2	3	1/3	3

Тема 12. Оптимальное поведение производителя

Задание 12.1

Дана производственная функция Кобба-Дугласа: $y=A\cdot x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\beta}$

Найти:1) степень однородности функции;

2) функцию издержек;

3) предельные производительности ресурсов для заданных значений x_1^0 и x_2^0;

4) коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам и эластичности от расширения масштаба производства;

5) предельную норму замещения ресурсов для заданных значений x_1^0 и x_2^0;

6) оптимальный выбор производителя по критерию максимальной прибыли в условиях совершенной конкуренции

$$p=30 +2\,N\,;\ q_1=N\,;\ q_2=5 + N\,;$$

7) функцию спроса на ресурсы и функцию предложения в условиях совершенной конкуренции;
8) реакции производителя при изменении цен на продукцию и на ресурсы и соответствующие коэффициенты эластичности при ценах, заданных в пункте 6.

$$x_1^0 = 20 + N;\ \ x_2^0 = 30 + N.$$

В.1	$y=3{,}5\cdot x_1^{0{,}24}\cdot x_2^{0{,}48}$	***В.11***	$y=2\cdot x_1^{0{,}55}\cdot x_2^{0{,}3}$
В.2	$y=3{,}5\cdot x_1^{0{,}32}\cdot x_2^{0{,}27}$	***В.12***	$y=7\cdot x_1^{0{,}36}\cdot x_2^{0{,}27}$
В.3	$y=4{,}5\cdot x_1^{0{,}25}\cdot x_2^{0{,}35}$	***В.13***	$y=4\cdot x_1^{0{,}25}\cdot x_2^{0{,}37}$
В.4	$y=7\cdot x_1^{0{,}38}\cdot x_2^{0{,}26}$	***В.14***	$y=2\cdot x_1^{0{,}44}\cdot x_2^{0{,}43}$
В.5	$y=2{,}5\cdot x_1^{0{,}4}\cdot x_2^{0{,}35}$	***В.15***	$y=10\cdot x_1^{0{,}18}\cdot x_2^{0{,}43}$
В.6	$y=6{,}5\cdot x_1^{0{,}35}\cdot x_2^{0{,}27}$	***В.16***	$y=8\cdot x_1^{0{,}24}\cdot x_2^{0{,}41}$
В.7	$y=4{,}5\cdot x_1^{0{,}25}\cdot x_2^{0{,}34}$	***В.17***	$y=6\cdot x_1^{0{,}23}\cdot x_2^{0{,}45}$
В.8	$y=4\cdot x_1^{0{,}3}\cdot x_2^{0{,}4}$	***В.18***	$y=9\cdot x_1^{0{,}27}\cdot x_2^{0{,}42}$
В.9	$y=3{,}5\cdot x_1^{0{,}25}\cdot x_2^{0{,}5}$	***В.19***	$y=7\cdot x_1^{0{,}32}\cdot x_2^{0{,}48}$
В.10	$y=5{,}5\cdot x_1^{0{,}15}\cdot x_2^{0{,}4}$	***В.20***	$y=5\cdot x_1^{0{,}31}\cdot x_2^{0{,}47}$

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание по теме 1.

Пример 1. Решить графически ЗЛП:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -2x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 9; \end{cases}$$

$$Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

Решение.

Записываем уравнения граничных прямых:

1) $2x_1 + x_2 = 10$; 2) $-2x_1 + 4x_2 = 8$; 3) $3x_1 - 2x_2 = 9$.

Чтобы их построить, найдем по две точки для каждой прямой:

1) $2x_1 + x_2 = 10$

x_1	x_2
5	0
2	6

2) $-2x_1 + 4x_2 = 8$

x_1	x_2
0	2
–4	0

3) $3x_1 - 2x_2 = 9$

x_1	x_2
1	–3
3	0

Выбираем удобный масштаб, ориентируясь на найденные точки.

Построим первую прямую (рисунок 1). Она разбивает плоскость на две полуплоскости.

Найдем ту полуплоскость, точки которой удовлетворяют условию:

$$2x_1 + x_2 \le 10.$$

Для этого выбираем в качестве проверочной любую точку не лежащую на соответствующей граничной прямой. Удобно взять точку O(0,0). Подставляем координаты точки O в левую часть неравенства: $2x_1 + x_2 \le 10$ и полученное значение сравниваем с правой частью. Получим:

$$2x_1 + x_2 = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 < 10.$$

Координаты точки O удовлетворяют неравенству. Следовательно, искомой полуплоскостью является та, в которой находится точка O. Отмечаем ее стрелками, направленными влево. Аналогично строим вторую и третью прямые и определяем соответствующие полуплоскости.

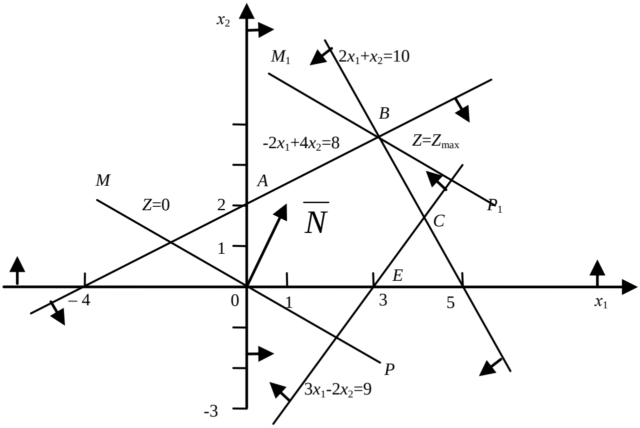


Рис.1.

В задаче имеются ограничения: $x_1 \ge 0$, и $x_2 \ge 0$. Соответствующие им полуплоскости тоже отмечаем стрелками (эти условия определяют первую четверть). Областью решений ЗЛП является пересечение всех полуплоскостей – многоугольник $OABCE$. Строим вектор $\overline{N}$ = (1, 2) и через начало координат – линию уровня $MP \perp \overline{N}$. Передвигая линию MP параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{N}$, находим точку максимума функции Z – точку B. Ее координаты найдем, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ -2x_1 + 4x_2 = 8. \end{cases}$$

B = (3,2;3,6).

Вычисляем: $Z_{max} = Z(B) = x_1 + 2x_2 = 3{,}2 + 2 \cdot 3{,}6 = 10{,}4$.

Ответ: $Z_{max} = Z(B) = 10{,}4$; B = (3,2;3,6).

Пример 2. Решить графически ЗЛП:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + 5x_2 \ge 12; \end{cases}$$

$$Z = 2x_1 + 5x_2 \to \max \text{ и } \min.$$

Решение.

Построим граничные прямые:

1) $3x_1 + 2x_2 = 10$

x_1	x_2
0	5
2	2

2) $x_1 + 5x_2 = 12$

x_1	x_2
2	2
12	0

и определим соответствующие полуплоскости. Область решений является неограниченной.

Строим вектор $\overline{N}$ = (2, 5) и перпендикулярно ему линию уровня MP (рисунок 2). Из чертежа видим, что точкой минимума функции Z является точка B = (2; 2) и сверху функция Z не ограничена: $Z_{\max} \to \infty$.

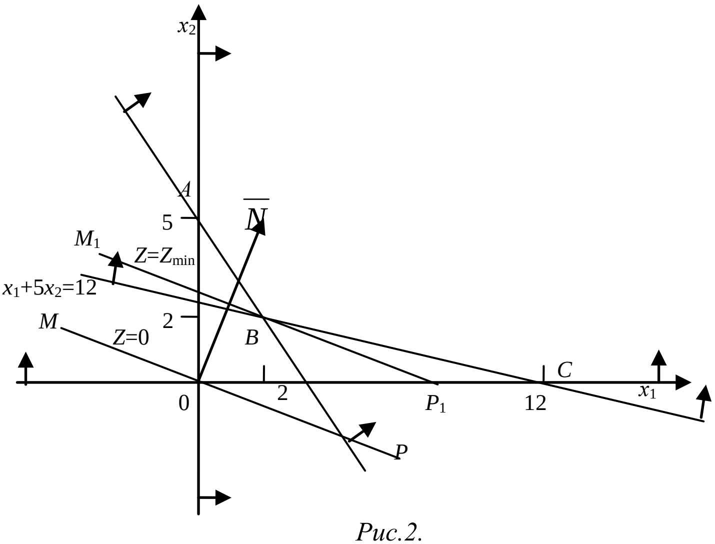


Рис.2.

Находим: $Z_{\min} = Z(B) = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 14$.

Ответ: $Z_{\min} = Z(B) = 14$; $B = (2; 2)$; $Z_{\max} \to \infty$.

Пример 3. Решить графически ЗЛП:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 - \ \ x_2 \leq 2, \\ \qquad\ x_2 \leq 7; \end{cases}$$

$$z = 4x_1 - 4x_2 \to \max.$$

Решение.

Областью решений задачи является многоугольник *ABCF* (рис.3). Построим вектор $\overline{N}$ = (4,- 4), проведем через начало координат линию уровня *MP*($Z = 0$ или $4x_1 - 4x_2 = 0$). Из чертежа видно, что линия уровня параллельна стороне *CF* (ее уравнение: $x_1 - x_2 = 2$), в этом же убеждаемся, сравнивая уравнения $x_1 - x_2 = 2$ и $4x_1 - 4x_2 = 0$. Следовательно, своего максимального значения целевая функция Z достигает в двух вершинах многоугольника *C* и *F* и в любой точке отрезка *CF* (рисунок 3).

Координаты точек $C = (9;7)$ и $F = (4;2)$ найдем, решив соответствующие системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ \quad\; x_2 = 7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 - \; x_2 = 2. \end{cases}$$

Найдем: $Z(C) = 4\cdot 9 - 4\cdot 7 = 8$; $Z(F) = 4\cdot 4 - 4\cdot 2 = 8$.

Максимальное значение функции Z:

$$Z_{\max} = Z(C) = Z(F) = 8.$$

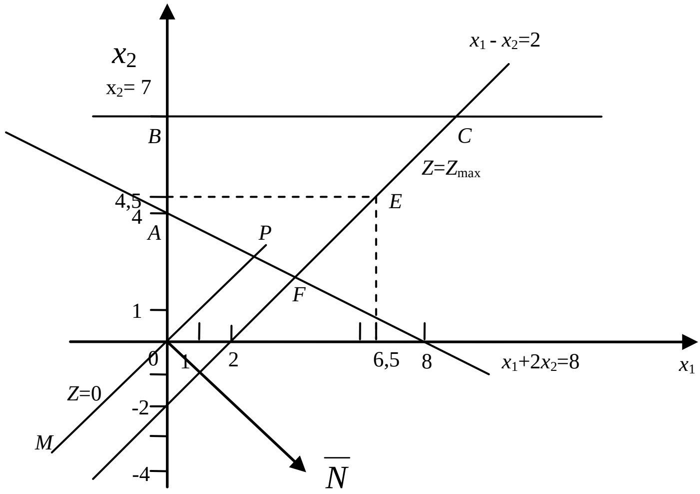


Рис.3.

Координаты любой точки X^*, принадлежащей отрезку *CF*, можно найти по формулам:

$$\begin{cases} X^* = \lambda_1 C + \lambda_2 F, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X^* = \lambda_1 (9;7) + \lambda_2 (4;2), \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0. \end{cases}$$

Например, задавая $\lambda_1 = 1/2$ и $\lambda_2 = 1/2$, получаем точку

$$E = \frac{1}{2}(9;7) + \frac{1}{2}(4;2) = \left(\frac{9}{2};\frac{7}{2}\right) + \left(\frac{4}{2};\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{13}{2};\frac{9}{2}\right) = (6.5;4.5)$$

и убеждаемся, что $Z(E) = 4 \cdot 6{,}5 - 4 \cdot 4{,}5 = 8 = Z_{max}$.

Ответ: $Z_{\max} = Z(X^*) = 8$.

Задание по теме 2.

Решить ЗЛП:

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3};$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 4, \end{cases}$$

$$Z = 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to \max.$$

Решение.

Приведем задачу к стандартному виду:

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5};$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_5 = 4, \end{cases}$$

$$Z = 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max.$$

Исходный опорный план $X_0 = (0, 0, 0, 6, 4)$.

Решение задачи приведено без объяснений в таблице 1.

Таблица 1.

c_i	c_j / x_j / x_i	3	–2	–2	0	0	b_i	$\min b_i/a_{is}$, $a_{ia}>0$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_4	–3	2	1	1	0	6	—
0	x_5	1	–4	1	0	1	4	4 : 1 = 4 min
Z		-3	2	2	0	0	0	
0	x_4	0	–10	4	1	3	18	—
3	x_1	1	– 4	1	0	1	4	—
Z		0	–10	5	0	3	12	

В последней строке переменная x_2 имеет оценку $\Delta_2 = -10 < 0$, но все элементы этого столбца отрицательные (– 10 и – 4**)**; согласно основной теореме целевая функция z неограничена, т.е. $z_{\max} \to \infty$.

Задание по теме 3.

Решить ЗЛП:

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3};$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 21, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 15, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 48; \end{cases}$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \min.$$

Решение.

Приведем ЗЛП к стандартному виду, и умножим на (– 1) целевую функцию

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5};$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 - x_4 \qquad = 21, \\ 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 \qquad\qquad = 15, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 = 48; \end{cases}$$

$$(-Z) = -2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max.$$

Система уравнений не приведена к опорному решению, поэтому введем искусственные переменные $x_6 \geq 0$ и $x_7 \geq 0$ в первое и второе уравнения соответственно и построим M-задачу.

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7};$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 - \quad x_4 \qquad + x_6 \qquad = 21, \\ 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 \qquad\qquad\qquad + x_7 = 15, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 \qquad\qquad = 48; \end{cases}$$

$$-T = -2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - M \cdot x_6 - M \cdot x_7 \to \max.$$

Таблица 2.

	c_j	–2	–3	–5	0	0	–M	–M		
c_i	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	$\min\limits_{a_{is}>0} \frac{b_i}{a_{is}}$
–M	x_6	4	3	1	–1	0	1	0	21	21/4=5.2
–M	x_7	2	3	–1	0	0	0	1	15	5
0	x_5	3	2	2	0	1	0	0	48	15/2=7.5
										48/3=16
–T		–6M +2	–6M +3	5	M	0	0	0	–36M	
–2	x_1	1	3/4	1/4	–1/4	0	1/4	0	21/4	21/4:3/4
–M	x_7	0	3/2	–3/2	1/2	0	-1/2	1	9/2	9/2:3/2
0	x_5	0	–1/4	5/4	3/4	1	-3/4	0	129/4	—
–T		0	–3/2M+3/2	3/2M+9/2	–1/2M+1/2	0	3/2M–1/2	0	–9/2M–21/2	
–2	x_1	1	0	1	–1/2	0	1/2	–1/2	3	—
–3	x_2	0	1	–1	1/3	0	–1/3	2/3	3	—
0	x_5	0	0	1	5/6	1	–5/6	1/6	33	—
–T		0	0	6	0	0	M	M–1	–15	

Исходное опорное решение *М-задачи:* $\tilde{X}_0^* = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 48,\ 21,\ 15)$. Решение задачи приведено в таблице 2.

Выписываем из этой таблицы оптимальное решение M-задачи:

$$\tilde{X}^* = (3, 3, 0, 0, 33, 0, 0); \quad -T\left(\tilde{X}^*\right) = -15 = -T_{\max}.$$

Искусственные переменные $x_6^* = 0$ и $x_7^* = 0$, поэтому оптимальным решением исходной задачи будет вектор $X^* = (3, 3, 0, 0, 33)$; $Z_{\min} = 15$.

Задание по теме 4.

Дана ЗЛП, найти оптималное решение исходной и двойственной задач.

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ -x_1 + 3x_2 = 3; \end{cases}$$

$Z = 5x_1 + 4x_2 \to \max.$

Решение.

Построим математическую модель двойственной задачи. Для этого сначала приведем исходную задачу к стандартному виду, и полученную задачу будем называть задачей 1.

3.1: $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4},$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 24 \to y_1, \\ x_1 + 5x_2 - x_4 = 10 \to y_2, \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \to y_3; \end{cases}$$

$Z = 5x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \max.$

Построим двойственную задачу и назовем ее задачей 2.

$$3.2: \quad \begin{cases} 3y_1 + y_2 - y_3 \geq 5, \\ 2y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 4, \\ y_1 \geq 0; -y_2 \geq 0; \end{cases}$$

$U = 24y_1 + 10y_2 + 3y_3 \to \min.$

В 3.2 переменная y_1 неотрицательная, переменная y_2 неположительная, а на y_3 не накладывается никаких ограничений, т.е. переменная y_3 свободная. Задачи 1 и 2 образуют несимметричную пару двойственных задач. Решим задачу 1 методом искусственного базиса (*M* – методом). Построим *M* – задачу.

M – задача: $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6},$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 24 \to y_1, \\ x_1 + 5x_2 - x_4 + x_5 = 10 \to y_2, \\ -x_1 + 3x_2 + x_6 = 3 \to y_3; \end{cases}$$

$T = 5x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - Mx_5 - Mx_6 \to \max.$

Переменная y_1 соответствует x_3; $y_2 - x_5$; $y_3 - x_6$.

Из таблицы 3 выписываем оптимальное решение *M* – задачи: $\tilde{X}^* = (6; 3; 0; 11; 0; 0)$. Искусственные переменные $x_5^* = x_6^* = 0$, поэтому первые четыре компонента плана $\widetilde{X}^*$ определяют оптимальное решение задачи №1: $X^* = (6; 3; 0; 11)$ и $Z_{\max} = 42$. Последняя таблица дает возможность определить оптимальный план двойственной задачи: i –я компонента оптимального плана двойственной задачи равна сумме произведений элементов c_i на элементы столбца, который был i –м базисным в первой таблице. Первым базисным столбцом в исходной таблице был столбец x_3 , поэтому $y_1^* = 0{\cdot}8/11 + 5{\cdot}3/11 + 4{\cdot}1/11 = 19/11$. Вторым был столбец x_5, поэтому $y_2^* = 0{\cdot}(-1) + 5{\cdot}0 + 4{\cdot}0 = 0$,третьим – столбец x_6, поэтому $y_3^* = 0{\cdot}13/11 + 5{\cdot}(-2/11) + 4{\cdot}3/11 = 2/11$ и $U_{\min} = Z_{\max} = 42$.

Таблица 3.

c_i	c_j / x_j, x_i	5	4	0	0	$-M$	$-M$	b_i	$\frac{b_i}{a_{is}}$, $a_{is}>0$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_3	3	2	1	0	0	0	24	24:2=12
$-M$	x_5	1	5	0	–1	1	0	10	10:5=2
$-M$	x_6	–1	3	0	0	0	1	3	3:3=1 min
T		–5	$-8M-4$	0	M	0	0	$-13M$	
0	x_3	11/3	0	1	0	0	–2/3	22	22:11/3=6
$-M$	x_5	8/3	0	0	–1	1	–5/3	5	5:8/3=15/8
4	x_2	–1/3	1	0	0	0	1/3	1	-
T		$-8/3M-19/3$	0	0	M	0	$8/3M+4/3$	$-5M+4$	
0	x_3	0	0	1	11/8	–11/8	13/8	121/8	121/8:11/8
5	x_1	1	0	0	–3/8	3/8	–5/8	15/8	-
4	x_2	0	1	0	–1/8	1/8	1/8	13/8	-
T		0	0	0	–19/8	$M+19/8$	$M-21/8$	127/8	
0	x_4	0	0	8/11	1	–1	13/11	11	-
5	x_1	1	0	3/11	0	0	–2/11	6	-
4	x_2	0	1	1/11	0	0	3/11	3	-
T		0	0	19/11	0	M	$M+2/11$	42	

Задание по теме 5.

Цех выпускает три вида продукции, использует три типа сырья. Известны удельные расходы сырья, их запасы и прибыль, получаемая от реализации единицы продукции. Требуется:

– Построить математические модели прямой и двойственной задач.

– Найти оптимальные решения задач, решив исходную задачу симплексным методом.

– Провести анализ решений пары двойственных задач.

– Найти интервалы устойчивости оценок ресурсов.

– Определить изменение максимальной прибыли при изменении i–горесурса на $\Delta b_1 = 800$, $\Delta b_2 = -500$, $\Delta b_3 = 800$,

– Оценить целесообразность выпуска четвертого вида продукции с нормами затрат ресурсов a_{14}, a_{24}, a_{34} и прибылью c_4 от реализации единицы этой продукции: $a_{14}=6$, $a_{24}=2$, $a_{34}=1$, $c_4=5$.

Наименование ресурсов	Единица измерения	Удельные расходы ресурсов на единицу продукции			Запасы ресурсов
		I вида	II вида	III вида	
Сырье I типа	кг.	2	2	1	700
Сырье II типа	кг.	2	3	4	1500
СырьеIII типа	кг.	2	1	0	600
Прибыль	тыс. руб.	3	4	3	

Решение.

Пусть предприятие выпускает x_1 единиц продукции I вида, x_2 единиц продукции II вида, x_3 единиц продукции III вида. Количество изделий не может выражаться отрицательным числом, поэтому $x_j \ge 0$ $(j=\overline{1,3})$. На изготовление одной единицы продукции первого вида будет затрачено 2 кг. сырья I типа, а на изготовление x_1 единиц продукции I вида – $2x_1$ кг. сырья I типа. На изготовление одной единицы продукции II вида будет затрачено 2 кг. сырья I типа, а на изготовление x_2 единиц продукции – $2x_2$ кг. сырья I типа. На изготовление одной единицы продукции III вида будет израсходован 1 кг. сырья I типа, а на изготовление x_3 единиц продукции – x_3 кг. сырья I типа. Таким образом, расход первого ресурса составит $(2x_1+2x_2+x_3)$ кг, при этом расход ресурсов не может превысить величину его запасов: $2x_1+2x_2+x_3 \le 700$.

Аналогично, ограничение по расходу сырья II типа можно выразить неравенством: $2x_1+3x_2+4x_3 \le 1500$ и по расходу сырья третьего типа: $2x_1+x_2 \le 600$.

Прибыль от реализации одной единицы продукции I вида составляет 3 тыс. руб. от реализации x_1 единиц продукции I вида – $3x_1$. Прибыль от реализации одной единицы продукции II вида составляет 4 тыс. руб., от реализации x_2 единиц продукции II вида – $4x_2$. Прибыль от реализации одной единицы продукции III вида составляет 3 тыс. руб., от реализации x_3 единиц продукции III вида – $3x_3$ тыс. руб. Таким образом, суммарная прибыль составит $Z=3x_1+4x_2+3x_3$ и по условию задачи она должна быть максимальной.

Получаем математическую модель задачи:

$x_j \ge 0$, $j=\overline{1,3}$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3 \le 700 \\ 2x_1+3x_2+4x_3 \le 1500 \\ 2x_1+x_2 \le 600 \end{cases}$$

$Z = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \longrightarrow \max\cdot$

Приводим задачу к стандартному виду:

$x_j \ge 0$, $j = \overline{1,6}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 700 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 1500 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 600 \end{cases}$$

$Z = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 \longrightarrow \max\cdot$

x_4, x_5, x_6 – неиспользованное сырьё 1-го, 2-го и 3-го типов соответственно.

Построим двойственную задачу.

Обозначим через y_1, y_2, y_3 – цену (или оценку) 1кг сырья 1-го, 2-го и 3-го типов соответственно. Цены неотрицательны: $y_i \ge 0$, $i = \overline{1,3}$.

Стоимость сырья всех трех типов, затраченного на изготовление 1-ой единицы продукции 1-го вида, равна: $2y_1 + 2y_2 + 2y_3$ и она должна быть не менее прибыли от 1-ой единицы продукции, т.е. не менее 3. Получаем неравенство: $2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 3\cdot$ Аналогично получим неравенства: $2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 4$ и $y_1 + 4y_2 \ge 3\cdot$

Стоимость всего имеющегося в наличии сырья равна:

$U = 700y_1 + 1500y_2 + 600y_3$ и её надо минимизировать.

Математическая модель двойственной задачи имеет вид:

$y_i \ge 0$, $i = \overline{1,3}$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 3 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 4 \\ y_1 + 4y_2 \ge 3 \end{cases}$$

$U = 700y_1 + 1500y_2 + 600y_3 \longrightarrow \min$

Приведем двойственную задачу к стандартному виду:

$y_i \ge 0$, $i = \overline{1,6}$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_4 = 3 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 - y_5 = 4 \\ y_1 + 4y_2 - y_6 = 3 \end{cases}$$

$U = 700y_1 + 1500y_2 + 600y_3 + 0\cdot y_4 + 0\cdot y_5 + 0\cdot y_6 \longrightarrow \min\cdot$

Значения y_4, y_5, y_6 показывают, насколько стоимость сырья всех трёх типов, затраченного на изготовление одной единицы продукции I-го, II-го и III-го видов соответственно больше, чем прибыль от соответствующей единицы продукции.

Решаем задачу 1 и задачу 2 в симплексной таблице 4.

Таблица 4.

c_i	c_j / x_j / x_i	3	4	3	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{is}}, a_{is} > 0$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_4	2	2	1	1	0	0	700	700:2=350 – min
0	x_5	2	3	4	0	1	0	1500	1500:3=500
0	x_6	2	1	0	0	0	1	600	600:1=600
Z		-3	-4	-3	0	0	0	0	
4	x_2	1	1	1/2	1/2	0	0	350	350:1/2=700
0	x_5	-1	0	5/2	-3/2	1	0	450	450:5/2=180 – min
0	x_6	1	0	-1/2	-1/2	0	1	250	——
Z		1	0	-1	2	0	0	1400	
4	x_2	6/5	1	0	4/5	-1/5	0	260	
3	x_3	-2/5	0	1	-3/5	2/5	0	180	
0	x_6	4/5	0	0	-4/5	1/5	1	340	
Z		3/5	0	0	7/5	2/5	0	1580	
		y_4^*	y_5^*	y_6^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*		

Оптимальный план исходной задачи:

$\overline{X}^* = (0; 260; 180; 0; 0; 340)$; $Z_{\max} = Z(\overline{X}^*) = 1580$.

Оптимальный план двойственной задачи: $\overline{Y}^* = \left(\frac{7}{5}; \frac{2}{5}; 0; \frac{3}{5}; 0; 0\right)$;

$U_{\min} = U(\overline{Y}^*) = 1580$. $Z_{\max} = U_{\min} = 1580$.

$x_1^* = 0$ – изделия I вида выпускать не следует;

$\left.\begin{matrix} x_2^* = 260 \\ x_3^* = 180 \end{matrix}\right\}$ следует выпускать 260 изделий II вида и 180 – III вида;

$\left.\begin{matrix} x_4^* = 0 \\ x_5^* = 0 \end{matrix}\right\}$ сырье первого и второго типа будет использовано полностью;

$x_6^* = 340$ – остаются неиспользованными 340 кг. сырья III типа.

$\left.\begin{matrix} y_1^* = \frac{7}{5} \\ y_2^* = \frac{2}{5} \end{matrix}\right\}$ оценки 1 кг. сырья I и II типа положительны, так как ресурсы используются полностью, эти ресурсы дефицитные.

$y_3^* = 0$ – сырье III типа имеется в избытке и 340 кг. неиспользованного сырья III типа вклада в прибыль не вносят; поэтому оценка 1 кг этого сырья равна нулю;

$y_4^* = \dfrac{3}{5}$ – стоимость сырья всех 3-х типов, затраченных на изготовление единицы продукции 1 вида больше прибыли от реализации 1 единицы продукции на 3/5, поэтому продукцию I вида выпускать невыгодно.

$\left.\begin{array}{l} y_5^* = 0 \\ y_6^* = 0 \end{array}\right\}$ стоимость сырья всех 3-х типов, затраченного на производство 1 единицы продукции II-го и III-го видов, в точности равна прибыли от реализации единицы этой продукции, поэтому продукцию II-го и III-го видов выпускать выгодно.

$Z_{\max} = U_{\min} = 1580$ тыс. руб.

Суммарная прибыль от реализации всех выпущенных изделий в точности равна минимальной стоимости всего имеющегося сырья и составляет 1580 тыс. руб. Найдем интервалы устойчивости оценок.

Пусть сырьё первого типа изменилось на величину Δb_1. Тогда вектор изменения ресурсов (сырья) $\overline{\Delta b} = \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Delta b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Обозначим первоначальный вектор сырья через $\bar{b} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1500 \\ 600 \end{pmatrix}$.

Новый вектор сырья с учетом изменения сырья I типа можно записать: $\hat{b} = \bar{b} + \Delta\bar{b} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1500 \\ 600 \end{pmatrix} + \Delta b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Из последней симплексной таблицы мы видим, что вектор $\bar{b} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1500 \\ 600 \end{pmatrix}$ преобразовался в вектор $\begin{pmatrix} 260 \\ 180 \\ 340 \end{pmatrix}$, а вектор $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – в вектор $\begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$.

Следовательно, правая часть при изменении сырья I типа на Δb_1 (преобразованный вектор $\hat{b}$) будет иметь вид $\begin{pmatrix} 260 \\ 180 \\ 340 \end{pmatrix} + \Delta b_1 \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$.

Для того, чтобы набор базисных переменных x_2, x_3, x_6 составлял оптимальный план при изменении сырья I типа, необходимо, чтобы выполнялась следующая система неравенств:

$$\begin{cases} 260 + 4/5\Delta b_1 \geq 0 \\ 180 - 3/5\Delta b_1 \geq 0 \\ 340 - 4/5\Delta b_1 \geq 0 \end{cases}.$$

Решив ее найдем: $\Delta b_1^{н} = \max\limits_{q_i>0}\left\{-\dfrac{b_i'}{q_i}\right\} = \max\left\{-\dfrac{260}{4/5}\right\} = -325$

$$\Delta b_1^{в} = \min\limits_{q_i<0}\left\{-\frac{b_i'}{q_i}\right\} = \min\left\{\frac{-180}{-3/5}; \frac{-340}{-4/5}\right\} = 300.$$

-325 $\le \Delta b_1 \le$300.

Итак, интервалом устойчивости оценки y_1^* является:

[700-325; 700+300] = [375; 1000].

На этом интервале оценка y_1^* постоянна и равна 7/5.

Пусть сырье II типа изменилось на величину Δb_2. Тогда вектор изменения ресурсов сырья $\Delta\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \Delta b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Первоначальный вектор сырья $\bar{b} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1500 \\ 600 \end{pmatrix}$.

Новый вектор сырья с учетом изменения сырья II типа можно записать: $\hat{b} = \bar{b} + \Delta\bar{b} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1500 \\ 600 \end{pmatrix} + \Delta b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Из последней симплекс-таблицы мы видим, что вектор $\bar{b} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1500 \\ 600 \end{pmatrix}$ преобразовался в вектор $\begin{pmatrix} 260 \\ 180 \\ 340 \end{pmatrix}$, а вектор $\bar{e}_2$ – в вектор $\begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$.

Следовательно, правая часть при изменении сырья II типа на Δb_2 (преобразованный вектор $\hat{b}$) будет иметь вид: $\begin{pmatrix} 260 \\ 180 \\ 340 \end{pmatrix} + \Delta b_2 \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$.

Для того чтобы набор базисных переменных x_2, x_3, x_6 составлял оптимальный план при изменении сырья II типа, необходимо, чтобы выполнялась следующая система неравенств:

$$\begin{cases} 260 - 1/5\Delta b_2 \ge 0 \\ 180 + 2/5\Delta b_2 \ge 0 \\ 340 + 1/5\Delta b_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Решив ее найдем: $\Delta b_2^{н} = \max\limits_{q_i>0}\left\{-\dfrac{b_i'}{q_i}\right\} = \max\left\{-\dfrac{180}{2/5}; -\dfrac{340}{1/5}\right\} = -450$

$$\Delta b_2^{в} = \min\limits_{q_i<0}\left\{-\frac{b_i'}{q_i}\right\} = \min\left\{\frac{-260}{-1/5};\ \right\} = 1300.$$

-450 $\le \Delta b_2 \le$ 1300.

Итак, интервалом устойчивости оценки y_2^* является:

[1500-450; 1500+1300] = [1050; 2800].

На этом интервале оценка y_2^* постоянна и равна 2/5.

Пусть сырье III типа изменилось на величину Δb_3. Тогда вектор изменения ресурсов сырья $\Delta\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta b_3 \end{pmatrix} = \Delta b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Обозначим первоначальный вектор сырья $\bar{b} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1500 \\ 600 \end{pmatrix}$. Новый вектор сырья с учетом изменения сырья III типа можно записать:

$\hat{b} = \bar{b} + \Delta\bar{b} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1500 \\ 600 \end{pmatrix} + \Delta b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Из последней симплексной таблицы мы видим, что вектор $\bar{b}$ преобразовался в вектор $\begin{pmatrix} 260 \\ 180 \\ 340 \end{pmatrix}$, а вектор $\bar{e}_3$ – в вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (т.е. не изменился). Следовательно, правая часть при изменении сырья III типа на Δb_3 (преобразованный вектор $\hat{b}$) будет иметь вид: $\begin{pmatrix} 260 \\ 180 \\ 340 \end{pmatrix} + \Delta b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для того чтобы набор базисных переменных x_2, x_3, x_6 составлял оптимальный план при изменении сырья III типа, необходимо, чтобы выполнялась следующая система неравенств:

$$\begin{cases} 260 + 0 \cdot \Delta b_3 \geq 0 \\ 180 + 0 \cdot \Delta b_3 \geq 0 \\ 340 + \Delta b_3 \geq 0 \end{cases}.$$

Все $q_i \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta b_3^{в} = +\infty$,

$$\Delta b_3^{н} = \max_{q_i > 0} \left\{ -\frac{b_i'}{q_i} \right\} = \max \left\{ -\frac{340}{1} \right\} = -340,$$

-340 $\leq \Delta b_3 < \infty$.

Итак, интервалом устойчивости оценки y_3^* является:

[600-340; $+\infty$) = [260; $+\infty$).

На этом интервале оценка y_3^* постоянна и равна нулю.

Поскольку изменения ресурсов $\Delta b_1 = 800$ и $\Delta b_2 = -500$ находятся вне интервалов устойчивости оценок $[\Delta b_1^{н}; \Delta b_1^{в}] = [-325; 300]$ и $800 \notin [325; 300]$,

$[\Delta b_2^н;\Delta b_2^в]=[-450;1300]$ и $-500\notin[-450;1300]$, то для оценки изменения максимальной прибыли нельзя использовать формулу $\Delta Z_i = y_i^* \cdot \Delta b_i$.

Изменение максимальной прибыли по этой формуле можно вычислить при $\Delta b_1 = 300$ и $\Delta b_2 = -450$:

$$\Delta Z_1 = \Delta b_1 \cdot y_1^* = 300 \cdot 7/5 = 420$$

$$\Delta Z_2 = y_2^* \cdot \Delta b_2 = 2/5 \cdot (-450) = -180$$

Изменение ресурса $\Delta b_3 = 800$ находится в пределах устойчивости оценки $[\Delta b_3^н;\Delta b_3^в]=[360;+\infty)$ и $800\in[360;\infty)$, поэтому его влияние на величину прибыли определяется произведением оценки y_3^* и величины Δb_3, $\Delta Z_3 = y_3^* \cdot \Delta b_3 = 0 \cdot 800 = 0$.

Если запасы сырья I типа увеличатся на 300 кг., а объёмы II и III сырья не изменятся, то прибыль увеличится на 420 тыс. руб.

Если запасы сырья II типа уменьшатся на 450 кг., а объёмы I и III сырья не изменятся, то прибыль уменьшится на 180 тыс. руб.

При увеличении запасов сырья III типа на 800 кг. и неизменных объёмах I и II сырья величина прибыли не изменится.

Для оценки целесообразности введения в план 4-го вида продукции, вычислим «стоимость» расходуемых ресурсов в оптимальных оценках:

$$6\cdot\frac{7}{5}+2\cdot\frac{2}{5}+1\cdot 0=\frac{46}{5}=9{,}2\cdot$$

Так как затраты ресурсов в оптимальных оценках больше прибыли (9,5>5), то введение в план 4-го вида продукции невыгодно.

Задание по теме 6.

Два фермерских хозяйства поставляют ежедневно молоко для снабжения четырех населенных пунктов. Объемы поставок a_i, $i=\overline{1,2}$ (ц), потребности населенных пунктов b_j, $j=\overline{1,4}$ (ц) и затраты C_{ij}, $i=\overline{1,2}$, $j=\overline{1,4}$, на перевозку 1ц (у.е./ц) молока от фермерских хозяйств до населенных пунктов даны в таблице 5.

Таблица 5.

a_i \ b_j	80	75	135	20
150	7 x_{11}	6 x_{12}	5 x_{13}	3 x_{14}
140	6 x_{21}	5 x_{22}	2 x_{23}	3 x_{24}

Решение.

Это Т.З. открытого типа, так как

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = 150+140=290, \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 80+75+135+20=310.$$

Математическая модель задачи:

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,4},$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 140 \\ x_{11} + x_{21} \leq 80 \\ x_{12} + x_{22} \leq 75 \\ x_{13} + x_{23} \leq 135 \\ x_{14} + x_{24} \leq 20 \end{cases}$$

$$Z = 7x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 3x_{14} + 6x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} \to \min.$$

Перейдем к эквивалентной Т.З. закрытого типа. Введем третьего фиктивного поставщика с запасом $a_3 = 310 - 290 = 20$ и с тарифами:

$C_{31} = C_{32} = C_{33} = C_{34} = 0$ (таблица 6).

Таблица 6.

a_i \ b_j	80	75	135	20
150	7 x_{11}	6 x_{12}	5 x_{13}	3 x_{14}
140	6 x_{21}	5 x_{22}	2 x_{23}	3 x_{24}
20	0 x_{31}	0 x_{32}	0 x_{33}	0 x_{34}

Заполнение клеток таблицы методом «северо–западного» угла будем проводить в следующем порядке (таблица 7):

$x_{11} = \min(150,80) = 80,$

$a_1' = 150 - 80 = 70,$ исключаем 1-й столбец;

$x_{12} = \min(70,75) = 70,$

$b_2' = 75 - 70 = 5,$ исключаем 1-ю строку;

$x_{22} = \min(140,5) = 5,$

$a_2' = 140 - 5 = 135,$ исключаем 2-й столбец;

$x_{23} = \min(135,135) = 135.$

Теперь и весь груз от второго поставщика вывезен и потребность третьего потребителя полностью удовлетворена. В этом случае следует исключить что-то одно: или 2-ю строку, или 3-й столбец. Условимся для определенности исключать строку – поставщика, а столбец – потребителя оставлять с потребностью $b_3' = 0$.

Находим $x_{33} = \min(20,0) = 0.$

Исключаем 3-й столбец и заполняем последнюю клетку таблицы:

$x_{34} = \min(20,20) = 20.$

Найденный вырожденный опорный план X_1 записываем в таблицу 7, в которой и будем проверять его на оптимальность.

Таблица 7.

$b'_2 = 5$ $\qquad$ $b'_3 = 0$

$a'_1 = 70$

$a'_2 = 135$

b_j / a_i	80	75	135	20	U_i
150	(7) 80 –Q	(6) 70 +Q	(5) –	(3) –	U_1=0
140	(6) –	(5) 5 –Q	(2) 135 +Q	(3) –	U_2=-1
20	(0) – +Q	(0) –	(0) 0 -Q	(0) 20	U_3=-3
V_j	V_1=7	V_2=6	V_3=3	V_4=3	

$$X_1 = \begin{pmatrix} 80 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 135 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Число базисных заполненных клеток: $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ и в таблице шесть заполненных клеток, включая и клетку (3,3) с базисным нулем.

Вычисляем $Z(X_1) = 1275$.

Потенциалы находим непосредственно в табл. 3 и записываем их в ее последних столбце и строке.Вычисляем оценки свободных клеток:

$\Delta_{13} = -2 < 0$, $\Delta_{14} = 0$, $\Delta_{21} = 0$, $\Delta_{24} = -1 < 0$, $\Delta_{31} = 4 > 0$, $\Delta_{32} = 3 > 0$.

План X_1 не оптимален. Строим в таблице 3 цикл пересчета для клетки (3,1); определяем Q:

$$Q = \min(80;\ 5;\ 0) = 0.$$

В отрицательной клетке (3,3) цикла записана нулевая перевозка (базисный ноль), поэтому $Q = 0$. После пересчета план не изменится, но изменится состав базисных клеток: клетка (3,1) станет базисной, и в не записываем базисный ноль, а в клетке (3,3) ставим прочерк.

План $X_2 = X_1$ записан в таблице 8.

Таблица 8.

b_j / a_i	80	75	135	20	U_i
150	(7) 80 –Q	(6) 70	(5) –	(3) – +Q	U_1=0
140	(6) –	(5) 5	(2) 135	(3) –	U_2=-1
20	(0) 0 +Q	(0) –	(0) –	(0) 20 –Q	U_3=-7
V_j	V_1=7	V_2=6	V_3=3	V_4=7	

Базисных заполненных клеток 6.

$Z(X_2) = Z(X_1) = 1275$.

В табл. 4 находим новые значения потенциалов и вычисляем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{13} = -2 < 0,\ \Delta_{14} = 4 > 0,\ \Delta_{21} = 0,\ \Delta_{24} = 3 > 0,\ \Delta_{31} = -1 < 0,\ \Delta_{33} = -4 < 0.$$

План X_2 не оптимален, строим в табл. 4 цикл пересчета для клетки (1,4) и определяем Q:

$$Q = \min(80,20) = 20.$$

Новый план X_3 получаем в таблице 9.

Таблица 9.

a_i \ b_j	80	75	135	20	U_i
150	^{7} 60	^{6} 70	^{5} –	^{3} 20	$U_1=0$
140	^{6} –	^{5} 5	^{2} 135	^{3} –	$U_2=-1$
20	^{0} 20	^{0} –	^{0} –	^{0} –	$U_3=-7$
V_j	$V_1=7$	$V_2=6$	$V_3=3$	$V_4=3$	

$$X_3 = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 0 & 20 \\ 0 & 5 & 135 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базисных (заполненных) клеток 6.

$Z(X_3) = 1195$; $\Delta Z = Z(X_2) - Z(X_3) = 1275 - 1195 = 80$;

$\Delta Z = \Delta_{14} \cdot Q = 4 \cdot 20 = 80$.

Находим новые значения потенциалов в табл.2.13 и вычисляем оценки Δ_{ij}:

$$\Delta_{13} = -2 < 0,\ \Delta_{21} = 0,\ \Delta_{24} = -1 < 0,\ \Delta_{32} = -1 < 0,\ \Delta_{33} = -4 < 0;\ \Delta_{34} = -4 < 0.$$

План X_3 оптимален, поскольку все оценки $\Delta_{ij} \le 0$.

Ответ. Из первого хозяйства необходимо перевезти 60ц в первый населенный пункт, 70ц – во второй и 20ц – в четвертый; из второго хозяйства следует вывезти 5ц во второй населенный пункт и 135ц в третий. Первый населенный пункт не удовлетворен полностью, он получает только 60ц вместо 80. Суммарная минимальная стоимость транспортировки молока составляет 1195 у.е.

Задание по теме 7.

Пример 1.

Решить З.Л.Ц.П. методом Гомори.

$$Z = 4x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + 4x_2 \le 11 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 13 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 - \text{целые} \end{cases}$$

Решение.

1-й шаг. Приведем к стандартному виду исходную З.Л.П. и решим ее симплекс-методом.

$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,5}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_5 = 13 \end{cases}$$

$Z = 4x_1 + 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max$

	C_j	4	5	0	0	0	b_i	$\min\limits_{a_{is}>0} \dfrac{b_i}{a_{is}}$
C_i	x_j \ x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	3	2	1	0	0	10	10/2
0	x_4	1	4	0	1	0	11	11/4 min
0	x_5	3	3	0	0	1	13	13/3
Z		-4	-5↑	0	0	0	0	
0	x_3	10/4	0	1	-2/4	0	18/4	18/4:10/4=18/10 min
5	x_2	1/4	1	0	1/4	0	11/4	11/4:1/4=11
0	x_5	9/4	0	0	-3/4	1	19/4	19/4:9/4=19/9
Z		-11/4↑	0	0	5/4	0	55/4	
4	x_1	1	0	4/10	-2/10	0	18/10	
5	x_2	0	1	-1/10	3/10	0	23/10	
0	x_5	0	0	-9/10	-3/10	1	7/10	
Z		0	0	11/10	7/10	0	187/10	

Оптимальное решение:

$X^* = (18/10, 23/10, 0, 0, 7/10);\ Z(X^* = 187/10)$

Решение нецелочисленное, переходим ко второму шагу.

2-ой шаг. Строим правильное отсечение по любой из строк, соответствующих нецелочисленной переменной, например по 3-й строке.

$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \alpha_{34}x_4 + \alpha_{35}x_5 \ge \beta_3$

В этом неравенстве α_{31}, α_{32} и α_{35} равны нулю, они соответствуют целым числам $a'_{31} = 0; a'_{32} = 0; a'_{35} = 1$.

$$\alpha_{33} = -\frac{9}{10} - \left[-\frac{9}{10}\right] = -\frac{9}{10} - (-1) = \frac{1}{10}, \qquad \alpha_{34} = -\frac{3}{10} - \left[-\frac{3}{10}\right] = -\frac{3}{10} - (-1) = \frac{7}{10},$$

$$\beta_3 = \frac{7}{10} - \left[\frac{7}{10}\right] = \frac{7}{10} - 0 = \frac{7}{10}.$$

Новое ограничение имеет вид: $\dfrac{1}{10}x_3 + \dfrac{7}{10}x_4 \ge \dfrac{7}{10}$ (*)

3-й шаг. Вводим это ограничение в систему ограничений исходной З.Л.П. Неравенство (*) эквивалентно уравнению:

$$\frac{1}{10}x_3 + \frac{7}{10}x_4 - x_6 = \frac{7}{10},\ x_6 \ge 0.$$

Новая З.Л.П. имеет вид:

$$x_j \geq 0;\ j = \overline{1,6}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_5 = 13 \\ 1/10x_3 + 7/10\,x_4 - x_6 = 7/10 \end{cases}$$

$$Z = 4x_1 + 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to \max$$

Первые 3 уравнения задачи эквивалентны уравнения приведенным к базисным переменным x_1, x_2, x_5, которые выписываем из последней таблицы решения исходной З.Л.П.; с учетом этого задача будет иметь вид:

$$x_j \geq 0;\ j = \overline{1,6}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4/10x_3 - 2/10x_4 = 18/10 \\ x_2 - 1/10x_3 + 3/10\,x_4 = 23/10 \\ -9/10x_3 - 3/10x_4 + x_5 = 7/10 \\ 1/10x_3 + 7/10x_4 - x_6 = 7/10 \end{cases}$$

$$Z = 4x_1 + 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to \max$$

Так как в четвертом уравнении переменная x_6 входит со знаком минус, введем в него базисную искусственную переменную $x_6 \geq 0$ и решим следующую M-задачу.

M-задача:

$$x_j \geq 0;\ j = \overline{1,7}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4/10x_3 - 2/10x_4 = 18/10 \\ x_2 - 1/10x_3 + 3/10\,x_4 = 23/10 \\ -9/10x_3 - 3/10x_4 + x_5 = 7/10 \\ 1/10x_3 + 7/10x_4 - x_6 + x_7 = 7/10 \end{cases}$$

$$T = 4x_1 + 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 - Mx_7 \to \max$$

C_j		4	5	0	0	0	0	$-M$	b_i	$\min\limits_{a_{is}>0} \frac{b_i}{a_{is}}$
C_i	x_j / x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
4	x_1	1	0	4/10	-2/10	0	0	0	18/10	–
5	x_2	0	1	-1/10	3/10	0	0	0	23/10	23/10:3/10= =23/3
0	x_5	0	0	-9/10	-3/10	1	0	0	7/10	–
$-M$	x_6	0	0	1/10	7/10	0	-1	1	7/10	7/10:7/10= =1min
T		0	0	-1/10M+ +11/10	-7/10M+ +7/10	0	M	0	-7/10M+ +187/10	
4	x_1	1	0	3/7	0	0	-2/7	2/7	2	
5	x_2	0	1	-1/7	0	0	3/7	-3/7	2	
0	x_5	0	0	-6/7	0	1	-3/7	3/7	1	
0	x_4	0	0	1/7	1	0	-10/7	10/7	1	
T		0	0	1	0	0	1	M-1	18	

Оптимальное решение M-задачи: $\tilde{X}^*$=(2, 2, 0, 1, 1, 0, 0); $T_{\max} = T(\tilde{X}^*) = 18$.

Искусственная переменная x_7 = 0, поэтому оптимальным решение задачи (4.4) будет соответствующее решение: X^*=(2, 2, 0, 1, 1, 0, 0); $Z_{max} = T_{max}$ = 18.

Значения всех переменных целочисленные, поэтому оптимальное целочисленное решение исходной З.Л.Ц.П.: $X^*_ц$ = (2;2); Z_{max} = 18.

Пример 2.

На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 7 тыс. у.е.. Оборудование должно быть размещено на площади не превышающей 21м^2. Предприятие может приобрести машины 2-х типов: типа А стоимостью 3 тыс. у.е., занимающая площадь 5 м^2 и обеспечивающие производительность 5 тыс. ед. продукции за смену и машины типа Б стоимостью 1 тыс. у.е., занимающая площадь 7 м^2 и обеспечивающие производительность 6 тыс. ед. продукции за смену. Найти оптимальный вариант приобретения оборудования, который обеспечит максимум общей производительности участка.

Решение.

Построим математическую модель задачи. Пусть x_1 – количество приобретаемых машин типа А, x_2 – типа Б. Тогда математическая модель задачи при заданных ограничениях будет иметь вид:

$$x_j \geq 0;\ j = \overline{1,2}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 7, \\ 5x_1 + 7x_2 \leq 21, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$x_1,\ x_2 \text{ – целые},$$

$$Z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max.$$

Решим исходную задачу линейного программирования (ЗЛП) графическим методом.

Областью решений является многоугольник ОАВС (рисунок 4).

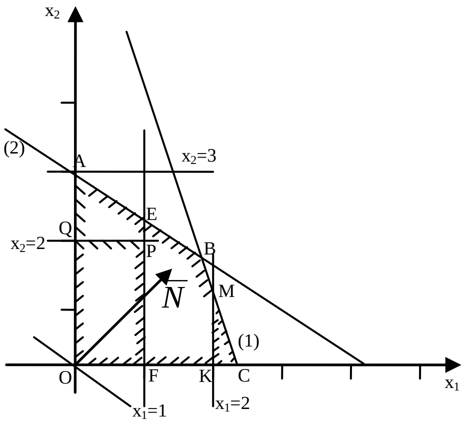


Рис . 4

Оптимальной точкой является точка В(1,75;1,75), Z_{max} = Z(В) = Z^* = 19,25.

Таким образом, $D^{(1)} \to$ OABC; $X^* = B = (1{,}75;1{,}75)$; $\varphi(D^{(1)}) = Z^*$. План X^* не целочисленный, поэтому множество $D^{(1)}$ разобьем на два подмножества: $D_1^{(1)}$ и $D_2^{(1)}$ по любой нецелочисленной координате плана X^*, например, по x_1:

ЗЛП 1.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 7, \\ 5x_1 + 7x_2 \le 21, \\ x_1 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$Z = 5x_1 + 6x_2 \to \max$.

ЗЛП 2.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 7, \\ 5x_1 + 7x_2 \le 21, \\ x_1 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$Z = 5x_1 + 6x_2 \to \max$.

Решаем графически эти задачи. Областью решения задачи 1 является OAEF это подмноество $D_1^{(1)}$, оптимальной точкой является точка E $(1;2\frac{2}{7}) = X_1^{(1)*}$; тогда оценка подмножества: $\varphi(D_1^{(1)}) = Z(X_1^{(1)*}) \approx 18{,}7$. Областью решений задачи 2 является KMC это подмножество $D_2^{(1)}$, оптимальной точкой является точка $M(2;1) = X_2^{(1)*}$; оценка подмножества: $\varphi(D_2^{(1)}) = Z(X_2^{(1)*}) = 16$.

Выбираем подмножества с наибольшей оценкой:

$$\max\left(\varphi\left(D_1^{(1)}\right); \varphi\left(D_1^{(2)}\right)\right) = \max(18{,}7;16) = 18{,}7.$$

Подмножеству с наибольшей оценкой соответствует нецелочисленное решение, следовательно, подмножество $D_1^{(1)}$ разбиваем на 2 подмножества $D_1^{(1,1)}$ и $D_2^{(1,1)}$ по координате $x_2^* = 2\frac{2}{7}$, аналогично тому, как мы разбивали исходное множество $D^{(1)}$. Затем решаем следующие две задачи линейного программирования:

ЗЛП 1.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 7, \\ 5x_1 + 7x_2 \le 21, \\ x_1 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$Z = 5x_1 + 6x_2 \to \max$.

ЗЛП 2.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 7, \\ 5x_1 + 7x_2 \le 21, \\ x_1 \le 1, \\ x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$Z = 5x_1 + 6x_2 \to \max$.

Областью решения задачи 1 является OQPF, это подмножество $D_1^{(1,1)}$, оптимальной точкой является точка $P(1;2) = X_1^{(1,1)*}$; тогда оценка подмножества: $\varphi(D_1^{(1,1)}) = Z(X_1^{(1,1)*}) = 17$.

Областью решений задачи 2 является точка A, которая одновременно является подмножеством $D_2^{(1,1)}$ и оптимальной точкой: $A(0;3) = X_2^{(1,1)*}$; оценка подмножества: $\varphi(D_2^{(1,1)}) = Z(X_2^{(1,1)*}) = 18$.

Среди всех не подвергавшихся делению подмножеств выбираем подмножество с наибольшей оценкой. Находим:

$$\max\left(\varphi\left(D_2^{(1)}\right);\varphi\left(D_1^{(1,1)}\right);\varphi\left(D_2^{(1,1)}\right)\right)=\max(16;17;18)=18.$$

Наибольшая оценка у подмножества $D_2^{(1,1)}$, φ($D_2^{(1,1)}$) = Z($X_2^{(1,1)*}$) = 18. Этому подмножеству соответствует целочисленное решение $X_2^{(1,1)*}$ = (0;3), которое и будет оптимальным решением исходной ЗЛЦП. Схема решения (рисунок 5) – дерево решений имеет вид:

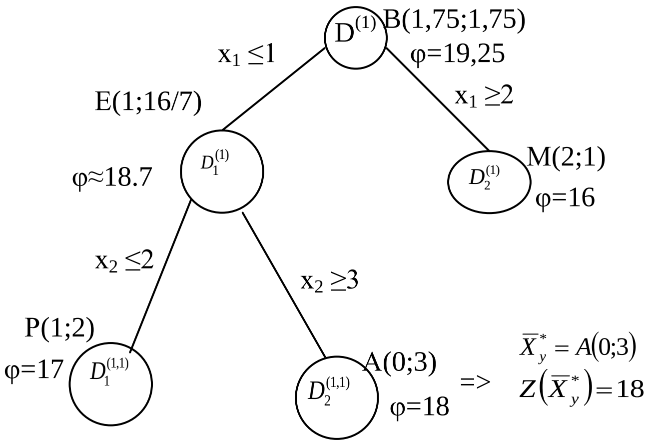


Рис.5.

Ответ: Чтобы производительность участка была максимальной и равной 18 тыс. единиц продукции за смену необходимо закупить 3 машины типа Б. При этом будет израсходовано, 3 тыс. у.е. и полностью занято площадь помещения.

Пример 3.

Коммивояжер должен посетить 4 города, в одном из которых он находится. Найти путь коммивояжера кратчайшей длины.

Решение.

В каждой i-ой строке матрицы L найдем наименьший элемент, обозначим его h_i и запишем рядом с этой строкой следующим образом:

L =>

	1	2	3	4	h_i
1	-	11	12	10	10
2	2	-	7	9	2
3	7	5	-	6	5
4	3	4	5	-	3

Вычитаем из каждого элемента i-ой строки элемент h_i и получаем матрицу L'. Вычисляем: $\sum_{i=1}^{4} h_i = 10 + 2 + 5 + 3 = 20$.

В каждом j-ом столбце матрицы L' найдем наименьший элемент и запишем его в соответствующем столбце следующим образом:

L' =>

	1	2	3	4
1	-	1	2	0
2	0	-	5	7
3	2	0	-	1
4	0	1	2	-
H_j	0	0	2	0

Вычитаем из элементов каждого столбца найденный в нем наименьший элемент и получаем матрицу L''

L'' =>

	1	2	3	4
1	-	1	0	0
2	0	-	3	7
3	2	0	-	1
4	0	1	0	-

Вычисляем: $\sum_{j=1}^{4} H_j = 0 + 0 + 2 + 0 = 2$.

Сумма приведенных констант: $\sum_{i=1}^{4} h_i + \sum_{j=1}^{4} H_j = 20 + 2 = 22$.

Любой путь коммивояжера не короче 22, т.е. $\varphi\left(D^{(1)}\right) = 22$.

Рассмотрим ее нулевые элементы и вычислим для них значения γ_{ij}. В первой строке этой матрицы элемент $l''_{13} = 0$.Наименьший элемент в 1-й строке (кроме $l''_{13} = 0$) $l''_{14} = 0$ и наименьший элемент в 3-м столбце (кроме $l''_{13} = 0$) $l''_{43} = 0$. Сумма этих наименьших элементов $\gamma_{13} = 0 + 0 = 0$.

Аналогично находим:

$$\gamma_{14} = 0 + 1 = 1, \quad \gamma_{21} = 3 + 0 = 3, \quad \gamma_{32} = 1 + 1 = 2, \quad \gamma_{41} = 0 + 0 = 0, \quad \gamma_{43} = 0 + 0 = 0.$$

Из найденных сумм максимальной является $\gamma_{21} = 3$. Она соответствует дуге (2,1). Согласно описанному алгоритму, для данного примера $D_1^{(1)}$ - это множество всех путей коммивояжера, которые не содержат дугу (2,1), а $D_2^{(1)}$ - множество путей, содержащих дугу (2,1).

Сумма приведенных констант матрицы $L_{(2,1)}$ равна 3.

Оценка $\varphi(D_1^{(1)})=\varphi(D^0)+\gamma_{21}=22+3=25$.Матрицу $L_{(2,1)}$ получаем, исключая в матрице L'' 2-ю строку, 1-й столбец и полагая $l''_{12}=\infty$.

Она имеет вид:

$L_{(2,1)} = L'_{(2,1)} = L''_{(2,1)}$

j / i	2	3	4
1	-	0	0
3	0	-	1
4	1	0	-

Оценка $\varphi(D_2^{(1)}) = \varphi(D^{(1)}) + R_3 = 22$.

Схема разбиения множества $D^{(1)}$ представлена на рисунке 6.

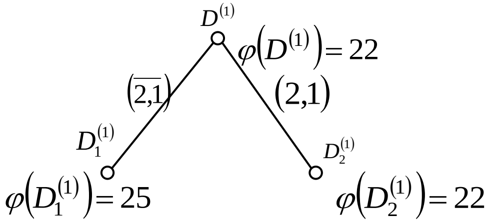


Рис. 6.

Множество $D^{(1)}$ разбито на два подмножества $D_1^{(1)}$ и $D_2^{(1)}$ а (по дуге (k, r)) и вычислены их оценки. Из двух подмножеств $D_1^{(1)}$ и $D_2^{(1)}$ для дальнейшего разбиения выбираем подмножество с наименьшей оценкой.

Далее рассматриваем все неподвергавшиеся делению подмножества путей коммивояжера $D_1^{(1)}$, $D_1^{(1,2)}$ и $D_2^{(1,2)}$, и для дальнейшего разбиения выбираем из них то, которое имеет наименьшую оценку.

Таким образом, будем действовать до тех пор, пока для разбиения не выберем такое подмножество с наименьшей оценкой, которому будет соответствовать матрица расстояний размера 2×2. Эта матрица и определит окончательно оптимальный путь коммивояжера. Его длина равна оценке подмножества с матрицей размера 2×2.

Наименьшую оценку $\varphi(D_2^{(1)})$ = 22 имеет подмножество $D_2^{(1)}$. Ему соответствует матрица расстояний:

$L''_{(2,1)}$

j / i	2	3	4
1	-	0	0
3	0	-	1
4	1	0	-

Для её нулевых элементов вычисляем γ_{ij}: $\gamma_{13} = 0 + 0 = 0$; $\gamma_{14} = 0 + 1 = 1$; $\gamma_{32} = 1 + 1 = 2$; $\gamma_{43} = 1 + 0 = 1$. Максимальное из этих значений $\gamma_{32} = 2$.

Множество $D_2^{(1)}$ разбиваем на два подмножества $D_1^{(1,2)}$ и $D_2^{(1,2)}$, где $D_1^{(1,2)}$ — это множество путей коммивояжера, содержащих дугу (2, 1), но не содержащих дугу (3, 2), а $D_2^{(1,2)}$ — множества путей коммивояжера содержащих дуги (2, 1) и (3, 2).

Аналогично вышеописанному, вводя запрет на переезд из 3-го города во 2-й, получаем матрицу $L_{(2,1)(3,2)}$, в результате приведения которой получаем последовательно матрицы $L'_{(2,1)(3,2)}$ и $L''_{(2,1)(3,2)}$.

$L_{(2,1)(3,2)}$ =>

	2	3	4	h_i
1	-	0	0	0
3	-	-	1	1
4	1	0	-	0

$L'_{(2,1)(3,2)}$ =>

	2	3	4
1	-	0	0
3	-	-	0
4	1	0	-
H_j	1	0	0

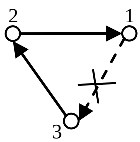
$L''_{(2,1)(3,2)}$ =>

	2	3	4
1	-	0	0
3	-	-	0
4	0	0	-

Сумма приведенных констант $\sum_i h_i + \sum_j H_j = \gamma_{32} = 2$

Оценка $\varphi(D_1^{(1,2)}) = \varphi(D_2^{(1)}) + \gamma_{32} = 22 + 2 = 24$.

Матрицу $L_{(2,1)(3,2)}$ получаем, исключая в матрице $L''_{(2,1)}$ третью строку, второй столбец, полагая $l''_{23} = \infty$. Кроме того, поскольку в путь коммивояжера входят две дуги (2,1) и (3,2) и конец второй дуги совпадает с началом первой, надо запретить переезд из первого города в третий, т.е. полагаем $l''_{13} = \infty$.



Матрица $L_{(2,1)(3,2)}$ =>

$i \backslash j$	3	4
1	-	0
4	0	-

Сумма приведенных констант $R_2 = \sum_i h_i + \sum_j H_j$ для этой матрицы равна 0, т.е. $L_{(2,1)(3,2)} = L'_{(2,1)(3,2)} = L''_{(2,1)(3,2)}$. Оценка $\varphi(D_2^{(1,2)}) = \varphi(D_2^{(1)}) + R_2 = 22$.

Итак, имеем три неподвергающиеся делению подмножества $D_1^{(1)}$, $D_1^{(1,2)}$ и $D_2^{(1,2)}$. Наименьшую оценку $\varphi(D_2^{(1,2)}) = 22$ имеет подмножество $D_2^{(1,2)}$. Кроме того, этому подмножеству соответствует матрица расстояний $L''_{(2,1)(3,2)}$ размерности 2×2. Из этой матрицы выписываем дуги (1, 4) и (4, 3), соответствующие нулевым элементам. Итак, в оптимальный кратчайший путь коммивояжера должны входить дуги (2, 1), (3, 2), (1, 4) и (4, 3). Будем для определенности считать, что свой путь коммивояжер начинал с первого города. Начиная с дуги (1, 4), расположим найденные дуги так, чтобы конец предшествующей дуги совпадал с началом последующей дуги: получим последовательность дуг: (1, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1).

Таким образом, кратчайший путь коммивояжера: $S^*(1, 1) = (1, 4, 3, 2, 1)$ имеет длину $l^* = \varphi(D_2^{(1,2)}) = 22$. Действительно:

$$l^* = l_{14} + l_{43} + l_{32} + l_{21} = 10 + 5 + 5 + 2 = 22.$$

Схема решения (рисунок 7) – дерево решений имеет вид:

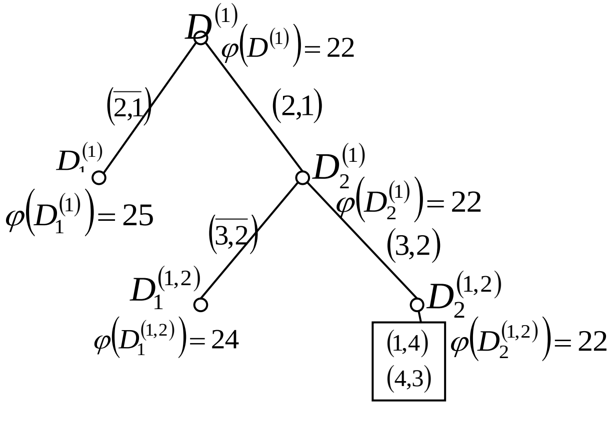
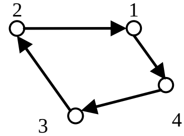


Рис.7.

Допустим, что, начиная с первого города, коммивояжер определяет свой путь выбором ближайшего не пройденного им города. Для данного примера это будет путь $S = (1, 4, 3, 2, 1)$, его длина $l = 28$.



Задание по теме 8.

100 тысяч рублей надо распределить между четырьмя предприятиями. Прирост выпуска продукции $f_j(x_j),\ j=\overline{1,4}$ в зависимости от выделенной суммы x_j дается в таблице. Составить план реализации средств, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

Средства тыс. руб.	1-е предпр.	2-е предпр.	3-е предпр.	4-е предпр.
	$f_1(x_1)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_3)$	$f_4(x_4)$
0	0	0	0	0
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

Решение.

Составим математическую модель задачи:

Пусть x_j – количество денег, выделяемое предприятию j. Тогда

$$\begin{cases} x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4} \\ \sum_{j=1}^{4} x_j \le 100 = b \end{cases}$$

$$z=\sum_{j=1}^{4} f_j(x_j) \to \max$$

Выполним сначала прямой ход. Он состоит из четырех шагов. Используем для каждого k – того шага формулу (1).

<u>Прямой ход</u>

<u>Шаг 1.</u> $K=1$. Формула принимает вид:

$$F_1(\xi)=\max_{0\le x_1\le \xi}\left(f_1(x_1)\right), \text{ так как } F_0=0. \quad (1)$$

Экономический смысл первого шага:

Находим значения максимального прироста выпуска при условии, что различные суммы денег выделяются только первому предприятию. Поскольку для каждого значения ξ, берется $x_1=\xi$, то $F(\xi)=f_1(\xi)$, и таблицу 9 заполняем сразу:

Если ξ =0, то $x_1=0$ и $F_1(0)=f_1(0)=0$.

Если ξ =20, то $x_1=20$ и $F_1(20)=f_1(20)=10$ и так далее.

Таблица 9.

ξ	$F_1(\xi)$	$\hat{x}_1(\xi)$
0	0	0
20	10	20
40	31	40
60	42	60
80	62	80
100	76	100

Шаг 2. *k*=2. Формула Беллмана имеет вид: $F_2(\xi) = \max\limits_{0 \le x_2 \le \xi}\left(f_2(x_2) + F_1(\xi - x_2)\right)$ (2)

Смысл шага 2: денежные средства распределяются оптимально между вторым и первым предприятиями.

Пусть $\xi = 0$, тогда $x_2 = 0$ и $\xi - x_2 = 0 - 0 = 0$. По формуле получаем:

$$F_2(0) = f_2(0) + F_1(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $\xi = 0$ других вариантов нет, поэтому: для $\xi = 0$; $F_2(0) = 0; \hat{x}_2(0) = 0$.

Пусть $\xi = 20$, тогда при $x_2 = 0$; $\xi - x_2 = 20 - 0 = 20$ и получаем первую сумму в выражении (2): $f_2(0) + F_1(20) = 0 + 10 = 10;$ и при $x_2 = 20;$ $\xi - x_2 = 20 - 20 = 0$ получим вторую сумму: $f_2(20) + F_1(0) = 12 + 0 = 12$. Значения F_1 выбираем из таблицы 9. Из полученных двух сумм выбираем максимальную:

$F_2(20) = \max\limits_{x_2 = 0;20}(10;12) = 12$ при $\hat{x}_2 = 20$ и так далее находим по формуле (2) значения $F_2(40); F_2(60); ...; F_2(100)$.

Вычисление этих значений удобно производить с помощью следующей вспомогательной таблицы 10:

Таблица 10.

ξ	0	20	40	60	80	100
0	0+0					
20	0+10	12+0				
0	0+31	12+10	26+0			
60	0+42	12+31	26+10	36+0		
80	0+62	12+42	26+31	36+10	54+0	
100	0+76	12+62	26+42	36+31	54+10	78+0

Выбираем в каждой строке наибольшее значение и соответствующее ему значение $\hat{x}_2$ и заполняем таблицу 11.

Таблица 11.

ξ	$F_2(\xi)$	$\hat{x}_2(\xi)$
0	0	0
20	12	20
40	31	0
60	43	20
80	62	0
100	78	100

Шаг 3. k=3. Формула Беллмана имеет вид:

$$F_3(\xi) = \max_{0 \le x_3 \le \xi}\left(f_3(x_3) + F_2(\xi - x_3)\right) \qquad (3)$$

Теперь деньги оптимально распределяются между третьим и двумя предыдущими предприятиями. Заполняем вспомогательную таблицу 12 для этого шага.

Таблица 12.

ξ \ x_3	0	20	40	60	80	100
0	0+0					
20	0+12	11+0				
40	0+31	11+12	36+0			
60	0+43	11+31	36+12	45+0		
80	0+62	11+43	36+31	45+12	60+0	
100	0+78	11+62	36+43	45+31	60+12	77+0

В каждой строке этой таблицы выбираем наибольшее число и соответствующее ему значение $\hat{x}_3$ и заполняем таблицу 13.

Таблица 13.

ξ	$F_3(\xi)$	$\hat{x}_3(\xi)$
0	0	0
20	12	0
40	36	40
60	48	40
80	67	40
100	79	40

Шаг 4. k=4.Формула Беллмана имеет вид:

$$F_4(\xi) = \max_{0 \le x_4 \le \xi}\left(f_4(x_4) + F_3(\xi - x_4)\right)$$

Заполняем вспомогательную таблицу 14, а затем таблицу 15.

Таблица 14.

x_4 / ξ	0	20	40	60	80	100
0	0+0					
20	0+12	16+0				
40	0+36	16+12	37+0			
60	0+48	16+36	37+12	46+0		
80	0+67	16+48	37+36	46+12	63+0	
100	0+79	16+67	37+48	46+36	63+12	80+0

Таблица 15.

ξ	$F_4(\xi)$	$\hat{x}_4(\xi)$
0	0	0
20	16	20
40	37	40
60	52	20
80	73	40
100	85	40

<u>Обратный ход.</u>

Из последней таблицы 15 находим $z_{\max} = 85$, это значение $F_4(100) = 85$, и соответствующее ему значение: $\hat{x}_4 = x_4^* = 40$.

Итак, четвертому предприятию выделяется 40 тысяч рублей. Остаток денег: $\xi = 100 - x_4^* = 100 - 40 = 60$ распределяем между третьим, вторым и первым предприятиями. Из таблицы 13 находим $\hat{x}_3 = x_3^* = 40$, соответствующее значению ξ =60. Остаток денег: ξ =60-40=20.

Из таблицы 11 находим $\hat{x}_2 = x_2^* = 20$, соответствующее значению ξ =20. И теперь остаток денег ξ =20-20=0. И из таблицы 9 найдем $x_1^* = \hat{x}_1 = 0$.

Итак, получили:

$$x_1^* = 0$$
$$x_2^* = 20$$
$$x_3^* = 40$$
$$x_4^* = 40$$

и максимальный общий прирост выпуска продукции равный 85 .

<u>Проверка:</u>

$$z_{\max} = f_1(0) + f_2(20) + f_3(40) + f_4(40) = 0 + 12 + 36 + 37 = 85.$$

Задание по теме 9.

Пример 1. Задача о формировании портфеля ценных бумаг в условиях неопределенности

Банк имеет возможность выделить на формирование портфеля акций 10 денежных единиц, которые следует полностью реализовать. Ценные бумаги можно приобрести у компаний K_1, K_2, K_3. Номинальная стоимость одной акций компании K_1 составляет 3 денежных единицы, компании K_2 – 2 денежных единицы, K_3 – 5 денежных единиц. На конец года рынок ценных бумаг может оказаться в одном из двух состояний – C_1 или C_2, в зависимости от которых дивиденды по ценным бумагам компаний K_1, K_2, K_3 будут разными.

Состояния рынка	Дивиденды в % по акциям компаний		
	K_1	K_2	K_3
C_1	6	14	8
C_2	19	6	14

Используя критерии Вальда, Гурвица (λ = 0,7), Сэвиджа и Лапласа, сформировать портфель акций банка, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Решение.

Для банка возможны следующие решения (стратегии).

H_1: приобрести по одной акции каждой из компаний (3 + 2 + 5 = 10)

H_2: приобрести по две акции компаний K_1 и K_2, а акции компании K_3 не приобретать ($3{\cdot}2 + 2{\cdot}2 + 5{\cdot}0 = 10$)

H_3: приобрести две акции компании K_3, а акции компании K_1 и K_2 не приобретать ($3{\cdot}0 + 2{\cdot}0 + 5{\cdot}2 = 10$).

H_4: приобрести пять акций компании K_2, а акции компании K_1 и K_3 не приобретать ($3{\cdot}0 + 2{\cdot}5 + 5{\cdot}0 = 10$).

Так как на приобретение акций должно быть израсходовано ровно 10 денежных единиц, и можно приобретать только целое число акций, то других стратегий у банка нет.

Стратегии банка	Количество акций компании			Сумма, затраченная на приобретение пакета акций
	K_1	K_2	K_3	
H_1	1	1	1	10
H_2	2	2	0	10
H_3	0	0	2	10
H_4	0	5	0	10
Цена одной акции	**3**	**2**	**5**	–

Составим матрицу последствий Q.

Состояния рынка / Стратегии банка	C_1	C_2
H_1	q_{11}	q_{12}
H_2	q_{21}	q_{22}
H_3	q_{31}	q_{32}
H_4	q_{41}	q_{42}

$q_{11} = 3\cdot1\cdot0{,}06 + 2\cdot1\cdot0{,}14 + 5\cdot1\cdot0{,}08 = 0{,}86$;
$q_{21} = 3\cdot2\cdot0{,}06 + 2\cdot2\cdot0{,}14 + 5\cdot0\cdot0{,}08 = 0{,}92$;
$q_{31} = 3\cdot0\cdot0{,}06 + 2\cdot0\cdot0{,}14 + 5\cdot2\cdot0{,}08 = 0{,}8$;
$q_{41} = 3\cdot0\cdot0{,}06 + 2\cdot5\cdot0{,}14 + 5\cdot0\cdot0{,}08 = 1{,}4$;
$q_{12} = 3\cdot1\cdot0{,}19 + 2\cdot1\cdot0{,}06 + 5\cdot1\cdot0{,}14 = 1{,}39$;
$q_{22} = 3\cdot2\cdot0{,}19 + 2\cdot2\cdot0{,}06 + 5\cdot0\cdot0{,}14 = 1{,}38$;
$q_{32} = 3\cdot0\cdot0{,}19 + 2\cdot0\cdot0{,}06 + 5\cdot2\cdot0{,}14 = 1{,}4$;
$q_{42} = 3\cdot0\cdot0{,}19 + 2\cdot5\cdot0{,}06 + 5\cdot0\cdot0{,}14 = 0{,}6$.

Таким образом, матрица последствий Q имеет вид:

Состояния рынка / Стратегии банка	C_1	C_2	$a_i = \min\limits_j q_{ij}$	$c_i = \max\limits_j q_{ij}$
H_1	0,86	1,39	0,86	1,39
H_2	0,92	1,38	0,92	1,38
H_3	0,8	1,4	0,8	1,4
H_4	1,4	0,6	0,6	1,4
$q_j = \max\limits_i q_{ij}$	1,4	1,4		

Составим матрицу рисков $R = (r_{ij})_{4\cdot2}$, где $r_{ij} = q_j - q_{ij}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,2}$. Имеем:

$$q_1 = \max_i q_{i1} = \max(0{,}86;\ 0{,}92;\ 0{,}8;\ 1{,}4) = 1{,}4,$$

$$q_2 = \max_i q_{i2} = \max(1{,}39;\ 1{,}38;\ 1{,}4;\ 0{,}6) = 1{,}4.$$

Итак, матрица рисков R имеет вид:

Состояния рынка / Стратегии банка	C_1	C_2	$b_i = \max\limits_j r_{ij}$
H_1	0,54	0,01	0,54
H_2	0,48	0,02	0,48
H_3	0,6	0	0,6
H_4	0	0,8	0,8

Правило Вальда (правило крайнего пессимизма) рекомендует принять решение H_{i_0} такое, что

$$a_{i_0} = \max_i\left(\min_j q_{ij}\right) = \max_i a_i = \max(0{,}86;\ 0{,}92;\ 0{,}8;\ 0{,}6) = 0{,}92 = a_2 \Rightarrow i_0 = 2.$$

Значит, согласно критерию Вальда, оптимальной является стратегия H_2, то есть в портфель должны войти 2 акции компании K_1 и 2 акции компании K_2, а акции компании K_3 банку не следует приобретать.

Правило Гурвица (взвешивающее пессимистические и оптимистические подходы к ситуации) рекомендует принять решение H_{i_0}, при котором достигается

$$\max_i\left(\lambda \min_j q_{ij} + (1-\lambda)\max_j q_{ij}\right) = \max_i\left(\lambda \cdot a_i + (1-\lambda)c_i\right) = \max_i d_i = d_{i_0},$$

где $\lambda = 0{,}7$.

$d_1 = 0{,}7 \cdot 0{,}86 + (1 - 0{,}7) \cdot 1{,}39 = 1{,}019$

$d_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}92 + (1 - 0{,}7) \cdot 1{,}38 = 1{,}058$

$d_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}8 + (1 - 0{,}7) \cdot 1{,}4 = 0{,}98$

$d_4 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 + (1 - 0{,}7) \cdot 1{,}4 = 0{,}84$

$d_{i_0} = \max(1{,}019;\ 1{,}058;\ 0{,}98;\ 0{,}84) = 1{,}058 = d_2 \Rightarrow i_0 = 2.$

Согласно критерию Гурвица, наиболее выгодной является стратегия H_2.

Правило Сэвиджа (правило минимального риска) рекомендует принять решение H_{i_0} такое, что

$$b_{i_0} = \min_i\left(\max_j r_{ij}\right) = \min_i b_i = \min(0{,}54;\ 0{,}48;\ 0{,}6;\ 0{,}8) = 0{,}48 = b_2 \Rightarrow i_0 = 2.$$

Согласно критерию Сэвиджа, наиболее выгодной является стратегия H_2.

В условиях полной неопределенности применяется правило Лапласа. При этом все неизвестные вероятности p_j того, что реальная ситуация развивается по варианту C_j, считаются равными. Так как у нас возможны только 2 состояния C_1 и C_2, то $p_1 = p_2 = 1/2$. Применяем правило максимизации среднего ожидаемого дохода $\overline{Q}_i = M(Q_i)$, $i = \overline{1,4}$.

$$\overline{Q}_1 = q_{11}p_1 + q_{12}p_2 = 0{,}86 \cdot \frac{1}{2} + 1{,}39 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}125$$

$$\overline{Q}_2 = q_{21}p_1 + q_{22}p_2 = 0{,}92 \cdot \frac{1}{2} + 1{,}38 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}15$$

$$\overline{Q}_3 = q_{31}p_1 + q_{32}p_2 = 0{,}8 \cdot \frac{1}{2} + 1{,}4 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}1$$

$$\overline{Q}_4 = q_{41}p_1 + q_{42}p_2 = 1{,}4 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}6 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}0$$

$$\overline{Q}_{i_0} = \max_i \overline{Q}_i = \max(1{,}125;\ 1{,}15;\ 1{,}1;\ 1{,}0) = 1{,}15 = \overline{Q}_2 \Rightarrow i_0 = 2$$

Согласно критерию Лапласа, наиболее выгодной является стратегия H_2.

Таким образом, согласно всем рассмотренным критериям, оптимальной является стратегия H_2, то есть портфель акций банка, обеспечивающий ему наибольшую прибыль, состоит из двух акций компании K_1 и двух акций компании K_2. Акции компании K_3 приобретать невыгодно

Пример 2. Задача по теори игр

Предприятие может выпустить три вида продукции: A_1, A_2, A_3, получая при этом прибыль, зависящую от спроса. Спрос может быть в одном из четырех состояний: B_1, B_2, B_3, B_4. Дана матрица $C = (C_{ij})_{3\cdot 4}$, ее элементы C_{ij} характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i-го вида продукции с j-м состоянием спроса. Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределенным.

C =>

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	3	6	8
A_2	9	10	4	2
A_3	7	7	5	4

Решение.

Задача сводится к игре, в которой предприятие – это игрок A, спрос – игрок B; C – платежная матрица. У игрока A три стратегии; стратегия A_i –выпускать продукцию вида $i, i=\overline{1,3}$; у игрока B четыре стратегии: стратегия B_j – спрос на продукцию вида $j, j=\overline{1,4}$.

Проведем анализ матрицы C, исключив стратегии заведомо невыгодные игрокам.

Стратегия B_2 (2-й столбец матрицы) является явно невыгодной для игрока B по сравнению с первой стратегией B_1, (элементы столбца 2 либо больше, либо равны элементам 1-го столбца), так как цель игрока B уменьшить выигрыш игрока A. Поэтому 2-й столбец исключаем и получаем следующую таблицу, в которой найдем нижнюю α и верхнюю β – цены игры.

B_j / A_i	B_1	B_3	B_4	$\min\limits_j C_{ij}$
A_1	3	6	8	$\alpha_1 = 3$
A_2	9	4	2	$\alpha_2 = 2$
A_3	7	5	4	$\alpha_3 = 4$
$\max\limits_i C_{ij}$	$\beta_1 = 9$	$\beta_2 = 6$	$\beta_3 = 8$	$\alpha=4$ / $\beta=6$

$$\max_i \min_j C_{ij} = \max(3;2;4) = 4 \qquad \alpha = 4$$

$$\min_j \max_i C_{ij} = \min(9;6;8) = 6 \qquad \beta = 6$$

$\alpha \neq \beta$ – седловой точки нет.

Решение игры будем искать в смешанных стратегиях.

Стратегия игрока A:

$$\begin{cases} \overline{X} = (x_1, x_2, x_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Стратегия игрока B:

$$\begin{cases} \overline{Y} = (y_1, y_2, y_3) \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Все значения $C_{ij} > 0$, поэтому записываем пару двойственных задач, эквивалентных игре.

Задача A.

$\tilde{x}_i \geq 0, i=\overline{1,3}$

$$\begin{cases} 3\tilde{x}_1 + 9\tilde{x}_2 + 7\tilde{x}_3 \geq 1 \\ 6\tilde{x}_1 + 4\tilde{x}_2 + 5\tilde{x}_3 \geq 1 \\ 8\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + 4\tilde{x}_3 \geq 1 \end{cases}$$

$F = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \to \min$

Задача B.

$\tilde{y}_j \geq 0, j=\overline{1,3}$

$$\begin{cases} 3\tilde{y}_1 + 6\tilde{y}_2 + 8\tilde{y}_3 \leq 1 \\ 9\tilde{y}_1 + 4\tilde{y}_2 + 2\tilde{y}_3 \leq 1 \\ 7\tilde{y}_1 + 5\tilde{y}_2 + 4\tilde{y}_3 \leq 1 \end{cases}$$

$F = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 \to \max$

Решим задачу B симплекс-методом, приведем к стандартному виду.

$\tilde{y}_j \geq 0, i=\overline{1,6}$

$$\begin{cases} 3\tilde{y}_1 + 6\tilde{y}_2 + 8\tilde{y}_3 + \tilde{y}_4 = 1 \\ 9\tilde{y}_1 + 4\tilde{y}_2 + 2\tilde{y}_3 + \tilde{y}_5 = 1 \\ 7\tilde{y}_1 + 5\tilde{y}_2 + 4\tilde{y}_3 + \tilde{y}_6 = 1 \end{cases}$$

$F = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 + 0\cdot\tilde{y}_4 + 0\cdot\tilde{y}_5 + 0\cdot\tilde{y}_6 \to \max$

Оптимальное решение задачи B:

$\overline{Y}^* = \left(\frac{1}{27}; \frac{4}{27}; 0; 0; \frac{2}{27}; 0\right)$ и A: $\overline{X}^* = \left(\frac{2}{27}; 0; \frac{3}{27}; 0; 0; \frac{1}{27}\right)$

Или $\tilde{y}_1^*$ = 1/27; $\tilde{y}_2^*$ = 4/27; $\tilde{y}_3^*$ = 0; $F_{\max}$ =5/27 $\tilde{x}_1^*$ = 2/27; $\tilde{x}_2^*$ = 0; $\tilde{x}_3^*$ = 3/27.

Цена игры v = $\frac{1}{F_{\max}} = \frac{27}{5} = 5{,}4$.

Найдем значения x_i и y_j по формулам:

$x_i^* = \tilde{x}_i^* \cdot v$ $\qquad y_1^* = \frac{1}{27}\cdot\frac{27}{5} = \frac{1}{5}$ $\qquad x_1^* = \frac{2}{27}\cdot\frac{27}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$y_j^* = \tilde{y}_j^* \cdot v$ $\qquad y_2^* = \frac{4}{27}\cdot\frac{27}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$ $\qquad x_2^* = 0, y_3^* = 0$

$x_3^* = \frac{3}{27}\cdot\frac{27}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Оптимальные смешанные стратегии игроков записываем с учетом того, что стратегию B_2 – столбец B_2 в исходной матрице C мы исключили, что означает, что состояние спроса B_2 из рассмотрения исключается и соответствующая частота будет равна нулю.

$\overline{X}^* = (0{,}4;0;0{,}6)$; $\qquad \overline{Y}^* = (0{,}2;0;0{,}8;0)$

Цена игры v = 5,4.

Ответ: предприятие должно выпустить 40% продукции A_1 и 60% – вида A_3, продукцию вида A_2 выпускать не следует. При этом спрос в 20% будет находиться в состоянии B_1 и в 80% в состоянии B_3. Максимальная прибыль предприятия 5,4.

Задание по теме 10.

На основе отчетного межотраслевого баланса народного хозяйства рассчитать:

1. Коэффициенты прямых и полных материальных затрат, дать их экономическую характеристику.
2. Коэффициенты прямой и полной фондоемкости производства продукции.
3. Коэффициенты прямой и полной трудоемкости продукции.
4. Плановые объемы валовой продукции.
5. Плановые объемы чистой продукции.
6. Необходимое количество труда и производственных фондов для выполнения плана.
7. Построить схему МОБ на плановый период.

Предполагается, что на плановый период коэффициенты прямых материальных затрат, коэффициенты прямой трудоемкости и фондоемкости совпадают с соответствующими показателями отчетного периода.

Производящая отрасль	Потребляющая отрасль			Конечная продукция	Валовая продукция	Плановые значения конечной продукции
	Промышленность	Селькое хозяйство	Строительство			
Промышлен-ность	$x_{11} = 20$	$x_{12} = 10$	$x_{13} = 10$	$Y_1 = 160$	$X_1 = 200$	$Y_1^{пл} = 100$
Сельское хозяйство	$x_{21} = 30$	$x_{22} = 15$	$x_{23} = 0$	$Y_2 = 135$	$X_2 = 180$	$Y_2^{пл} = 100$
Строитель-ство	$x_{31} = 20$	$x_{32} = 0$	$x_{33} = 15$	$Y_3 = 85$	$X_3 = 120$	$Y_3^{пл} = 50$
Стоимость основных производ-ственных фондов	$\Phi_1 = 150$	$\Phi_2 = 140$	$\Phi_3 = 120$	—	—	—
Затраты труда	$L_1 = 120$	$L_2 = 65$	$L_3 = 90$	—	—	—
Валовая продукция	$X_1 = 200$	$X_2 = 180$	$X_3 = 120$	—	—	—

Решение.

1) Найдем коэффициенты прямых материальных затрат : $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j} \quad (i,\ j = \overline{1,3})$

$a_{11} = \dfrac{x_{11}}{X_1} = \dfrac{20}{200} = 0{,}1;$ $a_{21} = \dfrac{x_{21}}{X_1} = \dfrac{30}{200} = 0{,}15;$ $a_{31} = \dfrac{x_{31}}{X_1} = \dfrac{20}{200} = 0{,}1;$

$a_{12} = \dfrac{x_{12}}{X_2} = \dfrac{10}{180} \approx 0{,}055556;$ $a_{22} = \dfrac{x_{22}}{X_2} = \dfrac{15}{180} = 0{,}083333;$ $a_{32} = \dfrac{x_{32}}{X_2} = \dfrac{0}{180} = 0;$

$a_{13} = \dfrac{x_{13}}{X_3} = \dfrac{10}{120} = 0{,}083333;$ $a_{23} = \dfrac{x_{23}}{X_3} = \dfrac{0}{120} = 0;$ $a_{33} = \dfrac{x_{33}}{X_3} = \dfrac{15}{120} = 0{,}125$.

Матрица коэффициентов прямых материальных затрат имеет вид:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}055556 & 0{,}083333 \\ 0{,}15 & 0{,}083333 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}125 \end{pmatrix},$$

a_{ij} – количество продукции i-й отрасли, которое надо затратить в j-й отрасли для выпуска единицы валовой продукции j-й отрасли.

Чтобы в промышленности произвести единицу её валовой продукции надо затратить 0,1 ед. продукции промышленности, 0,15 ед. продукции сельского хозяйства и 0,1 ед. продукции строительства.

Чтобы в сельском хозяйстве произвести единицу его валовой продукции надо затратить 0,0(5) ед. продукции промышленности, 0,08(3) ед. продукции сельского хозяйства и 0 ед. продукции строительства.

Чтобы в строительстве произвести единицу его валовой продукции надо затратить 0,08(3) ед. продукции промышленности, 0 ед. продукции сельского хозяйства и 0,125 ед. продукции строительства.

Найдем коэффициенты полных материальных затрат $b_{ij}(i, j = \overline{1,3})$, которые образуют матрицу полных материальных затрат $B = (E - A)^{-1}$.

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}055556 & 0{,}083333 \\ 0{,}15 & 0{,}083333 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}055556 & -0{,}083333 \\ -0{,}15 & 0{,}916667 & 0 \\ -0{,}1 & 0 & 0{,}875 \end{pmatrix}.$$

$E - A$			E		
0,9	– 0,055556	– 0,083333	1	0	0
– 0,15	0,916667	0	0	1	0
– 0,1	0	0,875	0	0	1
1	– 0,061728	– 0,092593	1,111111	0	0
0	0,907407	– 0,013889	0,166667	1	0
0	– 0,006173	0,865741	0,111111	0	1
1	0	– 0,093537	1,122449	0,068027	0
0	1	– 0,015306	0,183673	1,102041	0
0	0	0,865646	0,112245	0,006803	1
1	0	0	1,134578	0,068762	0,108055
0	1	0	0,185658	1,102161	0,017682
0	0	1	0,129666	0,007859	1,155206
E			$B = (E - A)^{-1}$		

Матрица полных материальных затрат имеет вид:

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1{,}134578 & 0{,}068762 & 0{,}108055 \\ 0{,}185658 & 1{,}102161 & 0{,}017682 \\ 0{,}129666 & 0{,}007859 & 1{,}155206 \end{pmatrix}.$$

b_{ij} – количество продукции i-й отрасли, которое нужно затратить в j-й отрасли для выпуска в j-й отрасли единицы конечной продукции.

Например: b_{11} = 1,134578 – это количество продукции промышленности, которую надо затратить в промышленности для выпуска единицы её конечной продукции; b_{23} = 0,017682 – это количество продукции сельского хозяйства, которую надо затратить в строительстве для выпуска единицы конечной продукции строительства.

2) Вычислим коэффициенты прямой f_j и полной F_j фондоемкости по формулам:

$$f_j = \frac{\Phi_j}{X_j};\ j = \overline{1,3};\ F_j = \sum_{i=1}^{3} f_i \cdot b_{ij},\ j = \overline{1,3}.$$

$$f_1 = \frac{150}{200} = 0{,}75; \qquad f_2 = \frac{140}{180} = 0{,}777778; \qquad f_3 = \frac{120}{120} = 1.$$

Эти коэффициенты показывают количество фондов, приходящихся на единицу валовой продукции отрасли.

Обозначим: $f = (f_1, f_2, f_3) = (0{,}75; 0{,}777778; 1)$; $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$, тогда $F = f \cdot B$.

$$F = (0{,}75;\ 0{,}777778;\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1{,}134578 & 0{,}068762 & 0{,}108055 \\ 0{,}185658 & 1{,}102161 & 0{,}017682 \\ 0{,}129666 & 0{,}007859 & 1{,}155206 \end{pmatrix}.$$

$$F_1 = 0{,}75 \cdot 1{,}134578 + 0{,}777778 \cdot 0{,}185658 + 1 \cdot 0{,}129666 = 1{,}125000,$$

$$F_2 = 0{,}75 \cdot 0{,}068762 + 0{,}777778 \cdot 1{,}102161 + 1 \cdot 0{,}007859 = 0{,}916667,$$

$$F_3 = 0{,}75 \cdot 0{,}108055 + 0{,}777778 \cdot 0{,}017682 + 1 \cdot 1{,}155206 = 1{,}250000.$$

Эти коэффициенты показывают количество фондов, приходящихся, на единицу конечной продукции соответствующей отросли.

3) Вычислим коэффициенты прямой t_j и полной T_j трудоемкости, аналогично тому, как находили коэффициенты прямой и полной фондоемкости.

$$t_j = \frac{L_j}{X_j};\ j = \overline{1,3}. \qquad t_1 = \frac{120}{200} = 0{,}6; \quad t_2 = \frac{65}{180} = 0{,}361111; \quad t_3 = \frac{90}{120} = 0{,}75.$$

Эти коэффициенты показывают количество труда, приходящегося на единицу валовой продукции. Например: $t_2 = 0{,}361111$ – это количество труда, приходящееся на единицу валовой продукции сельского хозяйства.

Коэффициенты полной трудоемкости: $T = t \cdot B$, где $t = (t_1,\ t_2,\ t_3) = (0{,}6;\ 0{,}361111;\ 0{,}75)$,= $(0{,}6; 0{,}361111; 0{,}75) \cdot \begin{pmatrix} 1{,}134578 & 0{,}068762 & 0{,}108055 \\ 0{,}185658 & 1{,}102161 & 0{,}017682 \\ 0{,}129666 & 0{,}007859 & 1{,}155206 \end{pmatrix}$.

$$T_1 = 0{,}6 \cdot 1{,}134578 + 0{,}361111 \cdot 0{,}185658 + 0{,}75 \cdot 0{,}129666 = 0{,}845039,$$

$$T_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}068762 + 0{,}361111 \cdot 1{,}102161 + 0{,}75 \cdot 0{,}007859 = 0{,}445154,$$

$$T_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}108055 + 0{,}361111 \cdot 0{,}017682 + 0{,}75 \cdot 1{,}155206 = 0{,}937623.$$

Эти коэффициенты показывают количество труда, приходящегося на единицу конечной продукции соответствующей отрасли.

4) Найдем плановые объемы валовой продукции по формуле:

$$X^{\text{пл}} = B \cdot Y^{\text{пл}}$$

$$X^{пл}=\begin{pmatrix}X_1^{пл}\\X_2^{пл}\\X_3^{пл}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}134578 & 0{,}068762 & 0{,}108055\\0{,}185658 & 1{,}102161 & 0{,}017682\\0{,}129666 & 0{,}007859 & 1{,}155206\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}100\\100\\50\end{pmatrix}.$$

$$X_1^{пл} = 1{,}134578 \cdot 100 + 0{,}068762 \cdot 100 + 0{,}108055 \cdot 50 = 125{,}736739 \approx 125{,}737,$$

$$X_2^{пл} = 0{,}185658 \cdot 100 + 1{,}102161 \cdot 100 + 0{,}017682 \cdot 50 = 129{,}666012 \approx 129{,}666,$$

$$X_3^{пл} = 0{,}129666 \cdot 100 + 0{,}007859 \cdot 100 + 1{,}155206 \cdot 50 = 71{,}512770 \approx 71{,}513.$$

Чтобы обеспечить на плановый период выпуск 100 единиц конечной продукции в промышленности, 100 единиц конечной продукции в сельском хозяйства и 50 единиц конечной продукции в строительстве, необходимо произвести в промышленности 125,737 единиц валовой продукции, в сельском хозяйстве 129,666 единиц валовой продукции и в строительстве 71,513 единиц валовой продукции.

5) Плановые объемы межотраслевых потоков найдем по формуле:

$$x_{ij}^{пл} = a_{ij} \cdot X_j^{пл},\ i, j = \overline{1,3}.$$

$$x_{11}^{пл} = a_{11} \cdot X_1^{пл} = 0{,}1 \cdot 125{,}736739 = 12{,}573674 \approx 12{,}574,$$

$$x_{12}^{пл} = a_{12} \cdot X_2^{пл} = 0{,}055556 \cdot 129{,}666012 = 7{,}203667 \approx 7{,}204,$$

$$x_{13}^{пл} = a_{13} \cdot X_3^{пл} = 0{,}083333 \cdot 71{,}512770 = 5{,}959398 \approx 5{,}959.$$

Плановые объемы чистой продукции найдем по формуле:

$$W_j^{пл} = X_j^{пл} - \sum_{i=1}^{3} x_{ij}^{пл}.$$

$$W_1^{пл} = X_1^{пл} - \left(x_{11}^{пл} + x_{21}^{пл} + x_{31}^{пл}\right) = 125{,}737 – (12{,}574 + 18{,}861 + 12{,}574) = 81{,}728,$$

$$W_2^{пл} = X_2^{пл} - \left(x_{12}^{пл} + x_{22}^{пл} + x_{32}^{пл}\right) = 129{,}666 – (7{,}204 + 10{,}805 + 0) = 111{,}657,$$

$$W_3^{пл} = X_3^{пл} - \left(x_{13}^{пл} + x_{23}^{пл} + x_{33}^{пл}\right) = 71{,}513 – (5{,}959 + 0 + 8{,}939) =56{,}615.$$

6) Найдем количество труда и фондов, необходимое для выполнения плана.

а) Необходимое количество труда:

$$L_j^{пл} = t_j \cdot X_j^{пл},\ \ j = \overline{1,3}.$$

$$L_1^{пл} = t_1 \cdot X_1^{пл} = 0{,}6 \cdot 125{,}736739 = 75{,}442043,$$

$$L_2^{пл} = t_2 \cdot X_2^{пл} = 0{,}361111 \cdot 129{,}666012 = 46{,}823838,$$

$$L_3^{пл} = t_3 \cdot X_3^{пл} = 0{,}75 \cdot 71{,}512770 = 53{,}634578.$$

б) Необходимое количество фондов:

$$Ф_j^{пл} = f_j \cdot X_j^{пл},\ \ j = \overline{1,3}.$$

$$Ф_1^{пл} = f_1 \cdot X_1^{пл} = 0{,}75 \cdot 125{,}736739 = 94{,}302554,$$

$$Ф_2^{пл} = f_2 \cdot X_2^{пл} = 0{,}777778 \cdot 129{,}666012 = 100{,}851343,$$

$$\Phi_3^{пл} = f_3 \cdot X_3^{пл} = 1 \cdot 71{,}512770 = 71{,}512770.$$

7) Построим схему межотраслевого баланса (МОБ) на плановый период, округлим плановые показатели таким образом, чтобы в таблице был полный баланс.

Потребл. отрасль / Производ. отрасль	Промышленность	Сельское хозяйство	Строитель-ство	Конечная продукция	Валовая продукция
Промышлен-ность	$x_{11}^{пл}$ =12,574	$x_{12}^{пл}$ = 7,204	$x_{13}^{пл}$ =5,959	$Y_1^{пл}$ =100	$X_1^{пл}$ =125,737
Сельское хозяйство	$x_{21}^{пл}$ =18,861	$x_{22}^{пл}$ = 10,805	$x_{23}^{пл}$ =0	$Y_2^{пл}$ =100	$X_2^{пл}$ =129,666
Строитель-ство	$x_{31}^{пл}$ =12,574	$x_{32}^{пл}$ = 0	$x_{33}^{пл}$ =8,939	$Y_3^{пл}$ =50	$X_3^{пл}$ = 71,513
Чистая продукция	$W_1^{пл}$ =81,728	$W_2^{пл}$ =111,657	$W_3^{пл}$ =56,615		
Затраты труда	$L_1^{пл}$ =75,442	$L_2^{пл}$ =46,824	$L_3^{пл}$ =53,635		
Стоимость основных производ-ственных фондов	$\Phi_1^{пл}$ =94,303	$\Phi_2^{пл}$ =100,851	$\Phi_3^{пл}$ =71,513		
Валовая продукция	$X_1^{пл}$ =125,737	$X_2^{пл}$ =129,666	$X_3^{пл}$ =71,513		

Задание по теме 11.

Дана функция полезности $U(x_1, x_2, x_3)$. Требуется:

1. Решить задачу оптимального поведения при заданных ценах p_1, p_2, p_3 и доходе M.
2. Найти функцию спроса потребителя и вычислить реакции потребителя при изменении дохода и цен в точке оптимума.
3. Вычислить предельные полезности товаров в точке оптимума.
4. Вычислить норму замещения для 2-го 3-го товаров в точке оптимума.
5. Вычислить коэффициенты эластичности по доходу и ценам для заданных цен и дохода.

$$U = 3x_1 x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3$$

$$p_1 = 136, \qquad p_2 = 186, \qquad p_3 = 216, M = 6240.$$

Решение.

1) Решим задачу оптимального поведения потребителя, если цены благ соответственно равны $p_1 = 136$; $p_2 = 186$; $p_3 = 216$ и доход равен $M = 6240$.

Найдем функции спроса потребителя:

$$x_1 = f_1(p_1, p_2, p_3);$$

$$x_2 = f_2(p_1, p_2, p_3);$$

$$x_3 = f_3(p_1, p_2, p_3);$$

где x_1, x_2, x_3 – количество приобретаемого блага 1-го, 2-го и 3-го вида.

Для этого решим следующую задачу оптимального поведения потребителя. Математическая модель задачи имеет вид:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3} \qquad (1)$$

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = M \qquad (2)$$

$$U = 3x_1 x_2 + x_1 x_3 + 4x_2 x_3 \to \max. \qquad (3)$$

Левая часть условия (2) – стоимость приобретаемых благ, а условие (3) означает, что полезность этих благ должна быть максимальной.

Решим задачу методом множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = U(x_1, x_2, x_3) + \lambda(M - x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3);$$

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 3x_1 x_2 + x_1 x_3 + 4x_2 x_3 + \lambda(M - x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 3x_2 + x_3 - \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 3x_1 + 4x_3 - \lambda p_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = x_1 + 4x_2 - \lambda p_3 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = M - x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 + x_3 = \lambda p_1 \\ 3x_1 + 4x_3 = \lambda p_2 \\ x_1 + 4x_2 = \lambda p_3 \\ x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = M \end{cases}$$

Рассмотрим систему, состоящую из первых трех уравнений, и решим её методом Крамера относительно x_1, x_2, x_3. Найдем определители.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 + 12 = 24, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} \lambda p_1 & 3 & 1 \\ \lambda p_2 & 0 & 4 \\ \lambda p_3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4\lambda p_2 + 12\lambda p_3 - 16\lambda p_1,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & \lambda p_1 & 1 \\ 3 & \lambda p_2 & 4 \\ 1 & \lambda p_3 & 0 \end{vmatrix} = 3\lambda p_3 + 4\lambda p_1 - \lambda p_2, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & \lambda p_1 \\ 3 & 0 & \lambda p_2 \\ 1 & 4 & \lambda p_3 \end{vmatrix} = 12\lambda p_1 + 3\lambda p_2 - 9\lambda p_3.$$

Тогда:

$$x_1 = \frac{-16\lambda p_1 + 4\lambda p_2 + 12\lambda p_3}{24} = \frac{\lambda(-16 p_1 + 4 p_2 + 12 p_3)}{24},$$

$$x_2 = \frac{4\lambda p_1 - \lambda p_2 + 3\lambda p_3}{24} = \frac{\lambda(4 p_1 - p_2 + 3 p_3)}{24},$$

$$x_3 = \frac{12\lambda p_1 + 3\lambda p_2 - 9\lambda p_3}{24} = \frac{\lambda(12 p_1 + 3 p_2 9 p_3)}{24}.$$

Подставим эти значения в уравнение: $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = M$.

Получим:

$$\frac{-16\lambda p_1 + 4\lambda p_2 + 12\lambda p_3}{24} \cdot p_1 + \frac{4\lambda p_1 - \lambda p_2 + 3\lambda p_3}{24} \cdot p_2 + \frac{12\lambda p_1 + 3\lambda p_2 - 9\lambda p_3}{24} \cdot p_3 = M.$$

Преобразуем это уравнение, умножим левую и правую части на 24 и проведем действия:

$$-16\lambda p_1^2+4\lambda p_2 p_1+12\lambda p_3 p_1+4\lambda p_1 p_2-\lambda p_2^2+3\lambda p_3 p_2+12\lambda p_1 p_3+3\lambda p_2 p_3-9\lambda p_3^2=24M;$$

$$\lambda\left(-16p_1^2+4p_2 p_1+12p_3 p_1+4p_1 p_2-p_2^2+3p_3 p_2+12p_1 p_3+3p_2 p_3-9p_3^2\right)=24M;$$

$$\lambda=\frac{24M}{-16p_1^2+4p_2 p_1+12p_3 p_1+4p_1 p_2-p_2^2+3p_3 p_2+12p_1 p_3+3p_2 p_3-9p_3^2}.$$

Обозначим

$$V=-16p_1^2-p_2^2-9p_3^2+8p_1 p_2+24p_1 p_3+6p_2 p_3.$$

Тогда $\lambda=\frac{24M}{V}$ и функции спроса потребителя принимают вид:

$$\begin{cases} x_1=\frac{M}{V}\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right) \\ x_2=\frac{M}{V}\left(4p_1-p_2+3p_3\right) \\ x_3=\frac{M}{V}\left(12p_1+3p_2-9p_3\right) \end{cases}.$$

Найдем оптимальный набор благ потребителя:

$\overline{X}^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*)$, где x_1^*,x_2^*,x_3^* – при заданных ценах на блага и доходе:

$p_1=136$; $p_2=186$; $p_3=216$; $M=6240$.

$$V=-16\cdot 136^2-186^2-9\cdot 216^2+8\cdot 136\cdot 186+24\cdot 136\cdot 216+6\cdot 186\cdot 216=398012$$

$$x_1^*=\frac{6240}{398012}\left(-16\cdot 136+4\cdot 186+12\cdot 216\right)\approx 18{,}1863863$$

$$x_2^*=\frac{6240}{398012}\left(4\cdot 136-186+3\cdot 216\right)\approx 15{,}7719868$$

$$x_3^*=\frac{6240}{398012}\left(12\cdot 136+3\cdot 186-9\cdot 216\right)\approx 3{,}8567681$$

Проверим, выполняются ли для найденного оптимального решения $\overline{X}^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*)$ бюджетное ограничение:

$$x_1 p_1+x_2 p_2+x_3 p_3=M$$

$$18{,}1863863\cdot 136+15{,}7719868\cdot 186+3{,}8567681\cdot 216=6240$$

$$6240=6240$$

Если речь идет о неделимых благах, то оптимальный выбор потребителя составит $\overline{X}^*=(18;15;3)$, т.е. ему необходимо приобрести 1-го блага 18 единиц, 2-го – 15 единиц и 3-го – 3 единицы.

Но т.к. мы условились, что речь будет идти о делимых благах, то оптимальный выбор потребителя будет:

$\overline{X}^* = (18{,}186;\,15{,}772;\,3{,}857)$, т.е.

1-го блага – 18,186 единиц,

2-го блага – 15,772 единицы,

3-го блага – 3,857 единиц.

2) Функции спроса потребителя найдены в пункте 1). Вычислим реакции потребителя при изменении дохода M и цен p_1, p_2, p_3 в точке оптимума $\overline{X}^*$.

Реакции потребителя при изменении дохода M:

$$\frac{\partial x_1}{\partial M} = \frac{1}{V}\left(-16p_1 + 4p_2 + 12p_3\right) = \frac{1160}{398012} \approx 0{,}0029145(>0)$$

Поскольку при увеличении дохода спрос на 1-благо возрастает, то это благо ценное.

$$\frac{\partial x_2}{\partial M} = \frac{1}{V}\left(4p_1 - p_2 + 3p_3\right) = \frac{1006}{398012} \approx 0{,}0025276(>0)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial M} = \frac{M}{V}\left(12p_1 + 3p_2 - 9p_3\right) = \frac{246}{398012} \approx 0{,}0006181(>0)$$

2-е и 3-е блага также являются ценными для потребителя. При этом наиболее ценным является 1-е благо, а наименее ценным – 3-е.

Определим реакции потребителя при изменении цены на 1-е благо:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{M}{V^2}\left[\left(-16p_1 + 4p_2 + 12p_3\right)'_{p_1} \cdot V - \left(-16p_1 + 4p_2 + 12p_3\right)\cdot V'_{p_1}\right] =$$

$$= \frac{M}{V^2}\left[-16\cdot V - \left(-16p_1 + 4p_2 + 12p_3\right)\cdot\left(-32p_1 + 8p_2 + 24p_3\right)\right] =$$

$$= \frac{6240}{398012^2}\cdot(-16\cdot 398012 - 2\cdot 1160^2) \approx -0{,}3568546 < 0$$

С увеличением цены на 1-е благо спрос на него уменьшается, значит, 1-е благо нормальное.

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = \frac{M}{V^2}\left[\left(4p_1 - p_2 + 3p_3\right)'_{p_1} \cdot V - \left(4p_1 - p_2 + 3p_3\right)\cdot V'_{p_1}\right] =$$

$$= \frac{M}{V^2}\left[4\cdot V - 2\left(4p_1 - p_2 + 3p_3\right)\cdot\left(-16p_1 + 4p_2 + 12p_3\right)\right] =$$

$$= \frac{6240}{398012^2}\cdot(4\cdot 398012 - 2\cdot 1006\cdot 1160) \approx -0{,}0292228 < 0$$

С ростом цены на 1-е благо спрос на 2-е благо уменьшается, эти блага взаимодополняемые.

$$\frac{\partial x_3}{\partial p_1} = \frac{M}{V^2}\left[\left(12p_1 + 3p_2 - 9p_3\right)'_{p_1} \cdot V - \left(12p_1 + 3p_2 - 9p_3\right)\cdot V'_{p_1}\right] =$$

$$= \frac{M}{V^2}\left[12\cdot A - 2\cdot\left(12p_1 + 3p_2 - 9p_3\right)\cdot\left(-16p_1 + 4p_2 + 12p_3\right)\right] =$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(12\cdot 398012-2\cdot 246\cdot 1160)\approx -0{,}1656540>0$$

С ростом цены на 1-е благо спрос на 3-е благо возрастает, эти блага взаимозаменяемые.

Реакции потребителя при изменении цены на 2-е благо:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}=\frac{M}{V^2}\left[\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)'_{p_2}\cdot V-\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)\cdot V'_{p_2}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[4\cdot V-\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)\cdot\left(-2p_2+8p_1+6p_3\right)\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(4\cdot 398012-2\cdot 1160\cdot 1006)\approx -0{,}0292228<0$$

С увеличением цены на 2-е благо спрос на 1-е благо падает, эти блага взаимодополняемые.

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_2}=\frac{M}{V^2}\left[\left(4p_1-p_2+3p_3\right)'_{p_2}\cdot V-\left(4p_1-p_2+3p_3\right)\cdot V'_{p_2}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[-V-2\cdot\left(4p_1-p_2+3p_3\right)^2\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(-398012-2\cdot 1006^2)\approx -0{,}0954073<0$$

С ростом цены на 2-е благо спрос на него падает, 2-е благо <u>нормальное</u>.

$$\frac{\partial x_3}{\partial p_2}=\frac{M}{V^2}\left[\left(12p_1+3p_2-9p_3\right)'_{p_2}\cdot V-\left(12p_1+3p_2-9p_3\right)\cdot V'_{p_2}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[3V-2\cdot\left(12p_1+3p_2-9p_3\right)\cdot\left(4p_1-p_2+3p_3\right)\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(3\cdot 398012-2\cdot 246\cdot 1006)\approx 0{,}0275373>0$$

С ростом цены на 2-е благо спрос на 3-е благо растет, 3-е и 2-е блага взаимозаменяемые.

Реакции потребителя при изменении цены на 3-е благо:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_3}=\frac{M}{V^2}\left[\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)'_{p_3}\cdot V-\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)\cdot V'_{p_3}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[12V-\left(-16p_1+4p_2+12p_3\right)\cdot\left(-18p_3+24p_1+6p_3\right)\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(12\cdot 398012-2\cdot 1160\cdot 246)\approx 0{,}1656540>0$$

С ростом цены на 3-е благо спрос на 1-е благо возрастает, 1-е и 3-е блага взаимозаменяемые.

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_3}=\frac{M}{V^2}\left[\left(4p_1-p_2+3p_3\right)'_{p_3}\cdot V-\left(4p_1-p_2+3p_3\right)\cdot V'_{p_3}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[3V-2(4p_1-p_2+3p_3)\cdot(12p_1+3p_2-9p_3)\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(3\cdot 398012-2\cdot 1006\cdot 246)\approx 0{,}0275373>0$$

С ростом цены на 3-е благо спрос на 2-е благо растет; эти блага взаимозаменяемые.

$$\frac{\partial x_3}{\partial p_3}=\frac{M}{V^2}\left[(12p_1+3p_2-9p_3)'_{p_3}\cdot V-(12p_1+3p_2-9p_3)\cdot V'_{p_3}\right]=$$

$$=\frac{M}{V^2}\left[-9V-2\cdot(12p_1+3p_2-9p_3)^2\right]=$$

$$=\frac{6240}{398012^2}\cdot(-9\cdot 398012-2\cdot 246^2)\approx -0{,}1458688<0$$

С ростом цены на 3-е благо спрос на него падает; это благо нормальное.

3) Вычислим предельные полезности благ в точке экстремума $\overline{X}^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*)$. Это значения частных производных функции полезности $U(x_1,x_2,x_3)$ по соответствующим аргументам в точке $\overline{X}^*$.

$$\overline{X}^*=(18{,}186386;\ 15{,}771987;\ 3{,}856768)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}=3x_2+x_3; \qquad \frac{\partial U}{\partial x_1}\left(\overline{X}\right)^*=3x_2{}^*+x_3{}^*=51{,}172729$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2}=3x_1+4x_3; \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2}\left(\overline{X}\right)^*=3x_1{}^*+4x_3{}^*=69{,}98623$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_3}=4x_2+x_1; \qquad \frac{\partial U}{\partial x_3}\left(\overline{X}\right)^*=4x_2{}^2+x_1{}^*=81{,}274334$$

На 1 дополнительную единицу 1-го блага приходится 51,172729 единиц дополнительной полезности.

На одну дополнительную единицу 2-го блага приходится 69,98623 дополнительных единиц полезности.

На 1 дополнительную единицу 3-го блага приходится 81,274334 единиц дополнительной полезности.

4) Вычислим нормы замещения благ в точке оптимума $\overline{X}^*$.

Норма замены 1-го блага 2-м:

$$n_{2,1}=-\frac{\partial U}{\partial x_1}:\frac{\partial U}{\partial x_2}=-\frac{3x_2{}^*+x_3{}^*}{3x_1{}^*+4x_3{}^*}=-\frac{51{,}172729}{69{,}98623}=-0{,}731$$

Для замещения 1 единицы 1-го блага необходимо дополнительно приобрести 0,731 единиц 2-го блага, чтобы удовлетворенность осталась на прежнем уровне.

Норма замены 1-го блага 3-м:

$$n_{3,1} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} : \frac{\partial U}{\partial x_3} = -\frac{3x_2^{\ *} + x_3^{\ *}}{4x_2^{\ *} + x_1^{\ *}} = -\frac{51{,}172729}{81{,}2743334} = -0{,}6298$$

Для того, чтобы удовлетворенность осталась прежней, необходимо 0,63 единицы 3-го блага, чтобы заменить 1 единицу 1-го блага.

Норма замены 2-го блага 1-м:

$$n_{1,2} = -\frac{\partial U}{\partial x_2} : \frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{3x_1^{\ *} + 4x_3^{\ *}}{3x_2^{\ *} + x_3^{\ *}} = -\frac{69{,}98623}{51{,}172729} = -1{,}368$$

Для замещения 1 единицы 2-го блага необходимо дополнительно приобрести 1,368 единиц 1-го блага, чтобы удовлетворенность осталась той же.

Норма замены 2-го блага 3-м:

$$n_{3,2} = -\frac{\partial U}{\partial x_2} : \frac{\partial U}{\partial x_3} = -\frac{3x_1^{\ *} + 4x_3^{\ *}}{4x_2^{\ *} + x_3^{\ *}} = -\frac{69{,}98623}{81{,}274334} = -0{,}861$$

Для замещения 1 единицы 2-го блага необходимо дополнительно приобрести 0,861 единиц 3-го блага, чтобы удовлетворенность не изменилась.

Норма замены 3-го блага 1-м:

$$n_{1,3} = -\frac{\partial U}{\partial x_3} : \frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{4x_2^{\ *} + x_1^{\ *}}{3x_2^{\ *} + x_3^{\ *}} = -\frac{81{,}274334}{51{,}172729} = -1{,}588$$

Для замещения 1 единицы 3-го блага необходимо дополнительно приобрести 1,588 единиц 1-го блага, чтобы удовлетворенность осталась той же.

Норма замены 3-го блага 2-м:

$$n_{2,3} = -\frac{\partial U}{\partial x_3} : \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{4x_2^{\ *} + x_1^{\ *}}{3x_1^{\ *} + 4x_3^{\ *}} = -\frac{81{,}274334}{69{,}98623} = -1{,}161$$

Для замещения 1 единицы 3-го блага необходимо дополнительно приобрести 1,161 единиц 21-го блага, чтобы удовлетворенность не изменилась.

5) Вычислим коэффициенты эластичности по доходу и ценам при заданных ценах и доходе: $p_1 = 136$; $p_2 = 186$; $p_3 = 216$; $M = 6240$.

<u>Для блага 1</u>:

$$E_1^M = \frac{\partial x_1}{\partial M} : \frac{x_1}{M} = \frac{0{,}0029145 \cdot 6240}{18{,}1863863} = 1$$

При увеличении дохода на 1 % спрос на 1-е благо возрастает на 1%.

Коэффициенты эластичности по ценам:

$$E_{11}^p = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} : \frac{x_1}{p_1} = \frac{-0{,}3568546 \cdot 136}{18{,}1863863} = -2{,}6686020$$

При росте цены на 1-е благо на 1 % спрос на него уменьшается на 2,669 %.

$$E_{12}^p = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} : \frac{x_1}{p_2} = \frac{-0{,}0292228 \cdot 186}{18{,}1863863} = -0{,}2988737$$

При росте цены на 2-е благо на 1 % спрос на 1-е благо уменьшается на 0,3 %.

$$E_{13}^{p} = \frac{\partial x_1}{\partial p_3} : \frac{x_1}{p_3} = \frac{0{,}1656540 \cdot 216}{18{,}1863863} = 1{,}9674757$$

При росте цены на 3-е благо на 1 % спрос на 1-е благо увеличивается на 1,967 %.

Проверка: $$E_1^M + E_{11}^p + E_{12}^p + E_{13}^p = 0 \cdot$$

$$1 + (-2{,}6686020) - 0{,}2988737 + 1{,}9674757 = 0.$$

(Погрешность возникает в результате округления чисел и работы с этими округленными числами).

Для блага 2:

$$E_2^M = \frac{\partial x_2}{\partial M} : \frac{x_2}{M} = \frac{0{,}0025276 \cdot 6240}{15{,}7719868} = 1$$

При увеличении дохода на 1 % спрос на 2-е благо возрастает на 1%.

$$E_{21}^{p} = \frac{\partial x_2}{\partial p_1} : \frac{x_2}{p_1} = \frac{-0{,}0292228 \cdot 136}{15{,}77119868} = -0{,}2519845$$

При росте цены на 1-е благо на 1 % спрос на 2-е благо уменьшается на 0,25%.

$$E_{22}^{p} = \frac{\partial x_2}{\partial p_2} : \frac{x_2}{p_2} = \frac{-0{,}0954073 \cdot 186}{15{,}7719868} = -1{,}1251437$$

При росте цены на 2-е благо на 1 % спрос на него уменьшается на 1,125 %.

$$E_{23}^{p} = \frac{\partial x_2}{\partial p_3} : \frac{x_2}{p_3} = \frac{0{,}0275373 \cdot 216}{15{,}7719868} = 0{,}3771282$$

При росте цены на 3-е благо на 1 % спрос на 2-е благо увеличивается на 0,37%.

Проверка: $$E_2^M + E_{21}^p + E_{22}^p + E_{23}^p = 0 \cdot$$

$$1 - 0{,}2519845 - 1{,}1251437 + 0{,}3771282 = 0.$$

Для блага 3:

$$E_3^M = \frac{\partial x_3}{\partial M} : \frac{x_3}{M} = \frac{0{,}0006181 \cdot 6240}{3{,}8567681} = 1$$

При увеличении дохода на 1 % спрос на 3-е благо возрастает на 1%.

$$E_{31}^{p} = \frac{\partial x_3}{\partial p_1} : \frac{x_3}{p_1} = \frac{0{,}1656540 \cdot 136}{3{,}8567681} = 5{,}8414064$$

При росте цены на 1-е благо на 1 % спрос на него увеличивается на 5,8 %.

$$E_{32}^{p} = \frac{\partial x_3}{\partial p_2} : \frac{x_3}{p_2} = \frac{0{,}0275373 \cdot 186}{3{,}8567681} = 1{,}3280396$$

При росте цены на 2-е благо на 1 % спрос на 3-е благо растет на 1,3 %.

$$E_{33}^{p} = \frac{\partial x_3}{\partial p_3} : \frac{x_3}{p_3} = \frac{-0{,}1458688 \cdot 216}{3{,}8567681} = -8{,}1694460$$

При увеличении цены на 3-е благо на 1 % спрос на него падает на 8,17 %.

Проверка: $$E_3^M + E_{31}^p + E_{32}^p + E_{33}^p = 0 \cdot$$

$$1 + 5{,}8414064 + 1{,}3280396 - 8{,}1694460 = 0.$$

Все расчеты произведены достаточно точно и правильно.

Задание по теме 12.

Дана производная функции Кобба-Дугласа: $y = A \cdot x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$. Найти:

1. Степень однородности функции.
2. Функцию издержек.
3. Предельные производительности ресурсов для заданных значений x_1^0 и x_2^0.
4. Коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам и эластичности от расширения масштаба производства.
5. Предельную норму замещения ресурсов для заданных значений x_1^0 и x_2^0.
6. Оптимальный выбор производителя по критерию максимальной прибыли в условиях совершенной конкуренции.

$$P = 100 - 1 = 99;\quad q_1 = 10 + 1 = 11;\quad q_2 = 7 + 1 = 8 \cdot$$

7. Реакции производителя при изменении цен на продукцию и на ресурсы и соответствующие коэффициенты эластичности при ценах, заданных в пункте 6.

$$x_1^0 = 20 + 1 = 21,\quad x_2^0 = 30 + 1 = 31,\quad y = 2{,}5 \cdot x_1^{0{,}55} x_2^{0{,}3} \cdot$$

Решение.

1) Определим степень эластичности функции. Сумма коэффициентов эластичности однородной функции равна показателю однородности, т.е.

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_n = k \cdot$$

В нашем случае

$$E_1 + E_2 = k$$

Найдем коэффициенты эластичности заданной производственной функции

$$y = 2{,}5 \cdot x_1^{0{,}55} x_2^{0{,}3}:$$

$$E_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \div \frac{y}{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y} = \frac{2{,}5 \cdot x_1^{0{,}55-1} \cdot 0{,}55 \cdot x_2^{0{,}3} \cdot x_1}{2{,}5 \cdot x_1^{0{,}55} \cdot x_2^{0{,}3}} = 0{,}55$$

$$E_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} \div \frac{y}{x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y} = \frac{2{,}5 \cdot x_1^{0{,}55} \cdot 0{,}3 \cdot x_2^{0{,}3-1} \cdot x_2}{2{,}5 \cdot x_1^{0{,}55} \cdot x_2^{0{,}3}} = 0{,}3$$

$$k = 0{,}55 + 0{,}3 = 0{,}85 \cdot$$

Степень однородности данной производственной функции $k = 0{,}85 \cdot$

2) Найдем функцию издержек $C(y)$. Это функция $C(y) = \min z$, где $z = q_1 x_1 + q_2 x_2$, т.е. решим задачу:

$$\begin{cases} z = q_1 x_1 + q_2 x_2 \to \min, \\ y_0 = 2{,}5 \cdot x_1^{0{,}55} x_2^{0{,}3}, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Условный экстремум найдем методом множителей Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = q_1 x_1 + q_2 x_2 y_0 + \lambda (y_0 - 2{,}5 \cdot x_1^{0,55} x_2^{0,3}).$$

Необходимым условием экстремума функции нескольких переменных является равенство нулю всех ее частных производных.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = q_1 - 2{,}5 \cdot 0{,}55 \cdot x_1^{-0,45} x_2^{0,3} \cdot \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = q_2 - 2{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot x_1^{0,55} x_2^{-0,7} \cdot \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = y_0 - 2{,}5 \cdot x_1^{0,55} x_2^{0,3} = 0. \end{cases}$$

Преобразуем полученную систему уравнений с неизвестными $x_1, x_2\ и\ \lambda$.

$$\begin{cases} q_1 = 2{,}5 \cdot 0{,}55 \cdot x_1^{-0,45} x_2^{0,3} \cdot \lambda = \dfrac{2{,}5 \cdot 0{,}55 \cdot x_1^{0,55} x_2^{0,3} \cdot \lambda}{x_1} = \lambda \cdot \dfrac{0{,}55 \cdot y_0}{x_1}, \\ q_2 = 2{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot x_1^{0,55} x_2^{-0,7} \cdot \lambda = \dfrac{2{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot x_1^{0,55} x_2^{0,3} \cdot \lambda}{x_2} = \lambda \cdot \dfrac{0{,}3 \cdot y_0}{x_2}, \\ y_0 = 2{,}5 \cdot x_1^{0,55} x_2^{0,3}. \end{cases}$$

Подставим выражения для $x_1\ и\ x_2$ в третье уравнение системы:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \cdot \dfrac{0{,}55 \cdot y_0}{q_1}; \\ x_2 = \lambda \cdot \dfrac{0{,}3 \cdot y_0}{q_2}; \\ y_0 = 2{,}5 \cdot \left(\lambda \cdot \dfrac{0{,}55 \cdot y_0}{q_1} \right)^{0,55} \cdot \left(\lambda \cdot \dfrac{0{,}3 \cdot y_0}{q_2} \right)^{0,3}. \end{cases}$$

Упростим последнее равенство

$$y_0 = 2{,}5 \cdot \left(\lambda \cdot \frac{0{,}55 \cdot y_0}{q_1} \right)^{0,55} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{0{,}3 \cdot y_0}{q_2} \right)^{0,3} =$$

$$= 2{,}5 \cdot \lambda^{0,55} \cdot \frac{0{,}55^{0,55} \cdot y_0^{0,55}}{q_1^{0,55}} \cdot \lambda^{0,3} \cdot \frac{0{,}3^{0,3} \cdot y_0^{0,3}}{q_2^{0,3}} =$$

$$= 2{,}5 \cdot \lambda^{0,85} \cdot \frac{y_0^{0,85} \cdot 0{,}55^{0,55} \cdot 0{,}3^{0,3}}{q_1^{0,55} \cdot q_2^{0,3}}.$$

Найдем λ из уравнения $y_0 = 2{,}5 \cdot \lambda^{0,85} \cdot \dfrac{y_0^{0,85} \cdot 0{,}55^{0,55} \cdot 0{,}3^{0,3}}{q_1^{0,55} \cdot q_2^{0,3}}$. Получим:

$$\lambda=\left(y_0\cdot\frac{q_1^{0,55}\cdot q_2^{0,3}}{0,55^{0,55}\cdot 0,3^{0,3}\cdot 2,5\cdot y_0^{0,85}}\right)^{\frac{1}{0,85}}=\frac{1}{y_0}\cdot\left(\frac{q_1^{0,55}\cdot q_2^{0,3}\cdot y_0}{2,5\cdot 0,55^{0,55}\cdot 0,3^{0,3}}\right)^{\frac{1}{0,85}}=$$

$$=\frac{1}{y_0}\cdot\frac{q_1^{0,647059}\cdot q_2^{0,352941}\cdot y_0^{1,1764705}}{2,5^{1,1764705}\cdot 0,55^{0,647059}\cdot 0,3^{0,352941}}=\frac{q_1^{0,647059}\cdot q_2^{0,352941}\cdot y_0^{0,1764705}}{1,3050245}.$$

Подставляем $\lambda=\frac{q_1^{0,647059}\cdot q_2^{0,352941}\cdot y_0^{0,1764705}}{1,3050245}$ в выражения для x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_1=\lambda\cdot\frac{0,55\cdot y_0}{q_1}=\frac{q_1^{0,647059}\cdot q_2^{0,352941}\cdot y_0^{0,1764705}}{1,3050245}\cdot\frac{0,55\cdot y_0}{q_1}; \\ x_2=\lambda\cdot\frac{0,3\cdot y_0}{q_2}=\frac{q_1^{0,647059}\cdot q_2^{0,352941}\cdot y_0^{0,1764705}}{1,3050245}\cdot\frac{0,3\cdot y_0}{q_2}. \end{cases}$$

Итак, оптимальный набор ресурсов по критерию минимизации издержек, обеспечивающий заданный выпуск продукции y_0:

$$\begin{cases} x_1^*=0,421448\cdot\frac{y_0^{1,1764705}\cdot q_2^{0,352941}}{q_1^{0,352941}}; \\ x_2^*=0,229881\frac{y_0^{1,1764705}\cdot q_1^{0,647059}}{q_2^{0,647059}}. \end{cases}$$

Тогда минимальные затраты:

$$z_{\min}=q_1\cdot x_1^*+q_2\cdot x_2^*=$$

$$=q_1\cdot 0,421448\cdot\frac{y_0^{1,1764705}\cdot q_2^{0,352941}}{q_1^{0,352941}}+q_2\cdot 0,229881\frac{y_0^{1,1764705}\cdot q_1^{0,647059}}{q_2^{0,647059}}=$$

$$=0,651329\cdot y_0^{1,1764705}\cdot q_1^{0,647059}\cdot q_2^{0,352941}.$$

Таким образом, функция издержек производства имеет вид:

$$C(y)=0,651329\cdot y^{1,1764705}\cdot q_1^{0,647059}\cdot q_2^{0,352941}.$$

3) Найдем предельные производительности ресурсов для заданных значений $x_1^0=21$ и $x_2^0=31$, то есть в точке $X_0=(21;31)$.

Предельная производительность 1-го ресурса:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=2,5\cdot 0,55\cdot x_1^{0,55-1}\cdot x_2^{0,3}=1,375\cdot x_1^{-0,45}\cdot x_2^{0,3}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_{X_0} = 1{,}375 \cdot 21^{-0{,}45} \cdot 31^{0{,}3} = 0{,}9788418.$$

На одну единицу дополнительно использованного ресурса 1-го вида приходится 0,9788418 ед. дополнительно выпущенной продукции.

Предельная производительность 2-го ресурса:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot x_1^{0{,}55} \cdot x_2^{0{,}3-1} = 0{,}75 \cdot x_1^{0{,}55} \cdot x_2^{-0{,}7}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|_{X_0} = 0{,}75 \cdot 21^{0{,}55} \cdot 31^{-0{,}7} = 0{,}3616834$$

На одну единицу дополнительно использованного ресурса 1-го вида приходится 0,3616834 ед. дополнительно выпущенной продукции.

4) Найдем коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам и эластичности от расширения масштабов производства.

Коэффициенты эластичности выпуска продукции по 1-му ресурсу:

$$E_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \div \frac{y}{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{y} = \frac{2{,}5 \cdot x_1^{0{,}55-1} \cdot 0{,}55 \cdot x_2^{0{,}3} \cdot x_1}{2{,}5 \cdot x_1^{0{,}55} \cdot x_2^{0{,}3}} = 0{,}55$$

При увеличении объема использования ресурса 1-го вида на 1 % выпуск продукции увеличивается на 0,55 %.

Коэффициенты эластичности выпуска продукции по 2-му ресурсу:

$$E_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} \div \frac{y}{x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{y} = \frac{2{,}5 \cdot x_1^{0{,}55} \cdot 0{,}3 \cdot x_2^{0{,}3-1} \cdot x_2}{2{,}5 \cdot x_1^{0{,}55} \cdot x_2^{0{,}3}} = 0{,}3$$

При увеличении объема использования ресурса 2-го вида на 1 % выпуск продукции возрастает на 0,3 %.

Общая эластичность от расширения масштабов производства:

$$E = E_1 + E_2 = 0{,}55 + 0{,}3 = 0{,}85 < 1 \cdot$$

Т.к. $E < 1$, то имеет место случай убывающей эффективности от расширения масштабов производства. В результате увеличения использования ресурсов каждого вида на 1 % в целом выпуск продукции возрастает на 0,85 %.

5) Найдем предельные нормы замещения ресурсов для заданных значений

$$x_1^0 = 21; \; x_2^0 = 31$$

Норма замены первого ресурса вторым:

$$n_{2,1} = -\frac{\partial y}{\partial x_1} : \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{2{,}5 \cdot 0{,}55 \cdot x_1^{0{,}55-1} \cdot x_2^{0{,}3}}{2{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot x_1^{0{,}55} \cdot x_2^{0{,}3-1}} = -\frac{1{,}375}{0{,}75} \cdot \frac{x_2}{x_1} = -\frac{1{,}375}{0{,}75} \cdot \frac{31}{21} = -2.706349$$

Для замены одной единицы ресурса первого вида требуется 2,7063 единиц ресурса второго вида, чтобы выпуск продукции остался на прежнем уровне.

Норма замены второго ресурса первым:

$$n_{1,2}=-\frac{\partial y}{\partial x_2}:\frac{\partial y}{\partial x_1}=-\frac{2{,}5\cdot 0{,}3\cdot x_1^{0,55}\cdot x_2^{0,3-1}}{2{,}5\cdot 0{,}55\cdot x_1^{0,55-1}\cdot x_2^{0,3}}=-\frac{0{,}75}{1{,}375}\cdot\frac{x_1}{x_2}=-\frac{0{,}75}{1{,}375}\cdot\frac{21}{31}=-0{,}369501$$

Чтобы освободить единицу ресурса 2-го вида, при условии, что выпуск продукции не изменился, необходимо дополнительно использовать 0,3695 ед. ресурса 1-го вида.

6) Найдем оптимальный выбор производителя по критерию максимальной прибыли в условиях совершенной конкуренции при заданных ценах на продукцию и ресурсы: $p=99$, $q_1=11$, $q_2=8$.

Модель оптимального выбора производителя в условиях совершенной конкуренции имеет вид:

$$\Pi = p\cdot y-\sum_{j=1}^{n} q_i x_i,$$

где $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $q_j>0$, $x_j\ge 0$, $j=\overline{1,n}$

В нашем случае

$$\Pi = p\cdot y-(q_1x_1+q_2x_2)\to\max,$$

где $y=2{,}5\cdot x_1^{0,55}\cdot x_2^{0,3}$,

$q_1>0$, $q_2>0$, $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$.

Или $\Pi = p\cdot 2{,}5\cdot x_1^{0,55}\cdot x_2^{0,3}-q_1x_1-q_2x_2\to\max$, где $q_1>0$, $q_2>0$, $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$.

Необходимым условием экстремума функции нескольких переменных является равенство нулю всех ее частных производных.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Pi}{\partial x_1}=p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}55\cdot x_1^{-0,45}\cdot x_2^{0,3}-q_1=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\Pi}{\partial x_2}=p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}3\cdot x_1^{0,55}\cdot x_2^{-0,7}-q_2=0.\end{cases}$$

Преобразуем полученную систему уравнений с неизвестными x_1 *и* x_2.

$$\begin{cases}q_1=p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}55\cdot x_1^{-0,45}\cdot x_2^{0,3}\\ q_2=p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}3\cdot x_1^{0,55}\cdot x_2^{-0,7}\end{cases}.$$

Разделим первое уравнение на второе.

$$\begin{cases}\dfrac{q_1}{q_2}=\dfrac{p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}55\cdot x_1^{-0,45}\cdot x_2^{0,3}}{p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}3\cdot x_1^{0,55}\cdot x_2^{-0,7}}\\[2ex] q_1=p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}55\cdot x_1^{-0,45}\cdot x_2^{0,3}\end{cases} <=> \begin{cases}x_2=\dfrac{0{,}3\cdot x_1q_1}{0{,}55\cdot q_2}\\[2ex] q_1=p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}55\cdot x_1^{-0,45}\cdot x_2^{0,3}\end{cases}.$$

Подставим x_2 во второе уравнение системы

$$q_1=p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}55\cdot x_1^{-0,45}\cdot\left(\frac{0{,}3x_1q_1}{0{,}55q_2}\right)^{0,3}=p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}55\cdot x_1^{-0,45}\cdot\frac{0{,}3^{0,3}x_1^{0,3}q_1^{0,3}}{0{,}55^{0,3}q_2^{0,3}}=$$

$$= p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}55\cdot x_1^{-0{,}15}\cdot 0{,}3^{0{,}3}\cdot 0{,}55^{-0{,}3}\cdot q_1^{0{,}3}\cdot q_2^{-0{,}3} =$$
$$= p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}3^{0{,}3}\cdot 0{,}55^{0{,}7}\cdot q_1^{0{,}3}\cdot q_2^{-0{,}3}\cdot x_1^{-0{,}15}.$$

Откуда $x_1^{0{,}15} = p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}3^{0{,}3}\cdot 0{,}55^{0{,}7}\cdot q_1^{-0{,}7}\cdot q_2^{-0{,}3}$.

$$x_1 = \left(\frac{p\cdot 2{,}5\cdot 0{,}3^{0{,}3}\cdot 0{,}55^{0{,}7}}{q_1^{0{,}7}\cdot q_2^{0{,}3}}\right)^{\frac{1}{0{,}15}} = \frac{p^{\frac{20}{3}}\cdot 2{,}5^{\frac{20}{3}}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}55^{\frac{14}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}}\cdot q_2^2} = \frac{2{,}486195\cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}}\cdot q_2^2}.$$

Итак,

$$x_1^* = \frac{2{,}486195\cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}}\cdot q_2^2}.$$

Тогда

$$x_2^* = \frac{0{,}3\cdot x_1^*\cdot q_1}{0{,}55\cdot q_2} = \frac{0{,}3\cdot q_1}{0{,}55\cdot q_2}\cdot\frac{2{,}486195\cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}}\cdot q_2^2} = \frac{1{,}356106\cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{11}{3}}\cdot q_2^3},$$

Функции спроса на ресурсы имеют вид

$$x_1^* = \frac{2{,}486195\cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}}\cdot q_2^2} \qquad x_2^* = \frac{1{,}356106\cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{11}{3}}\cdot q_2^3}$$

Подставив в эти функции значения $q_1 = 11$, $q_2 = 8$, $p = 99$, найдем оптимальный выбор производителя по критерию максимизации прибыли в условиях совершенной конкуренции:

$$x_1^* = \frac{2{,}486195\cdot 99^{\frac{20}{3}}}{11^{\frac{14}{3}}\cdot 8^2} = 10808298{,}11 \qquad x_2^* = \frac{1{,}356106\cdot 99^{\frac{20}{3}}}{11^{\frac{11}{3}}\cdot 8^3} = 8106221{,}41$$

При этом будет выпушено продукции:

$$y^* = 2{,}5\cdot\left(x_1^*\right)^{0{,}55}\cdot\left(x_2^*\right)^{0{,}3} = 2{,}5\cdot 10808298{,}11^{0{,}55}\cdot 8106221{,}41^{0{,}3} = 2183494{,}304$$

и максимальная прибыль составит:

$$\Pi^* = p\cdot y^* - q_1\cdot x_1^* - q_2\cdot x_2^* =$$
$$= 99\cdot 2183494{,}3 - 11\cdot 10808298{,}11 - 8\cdot 8106221{,}41 = 32424889{,}06.$$

7) Функции спроса на ресурсы имеют вид:

$$x_1 = \frac{2{,}486195\cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}}\cdot q_2^2} \qquad x_2 = \frac{1{,}356106\cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{11}{3}}\cdot q_2^3}$$

Функция предложения продукции:

$$y = 2{,}5 \cdot x_1^{0{,}55} \cdot x_2^{0{,}3} = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2{,}486195 \cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{14}{3}} \cdot q_2^2} \right)^{0{,}55} \left(\frac{1{,}356106 \cdot p^{\frac{20}{3}}}{q_1^{\frac{11}{3}} \cdot q_2^3} \right)^{0{,}3} =$$

$$= \frac{4{,}520354 \cdot p^{\frac{17}{3}}}{q_1^{\frac{11}{3}} \cdot q_2^2} \cdot$$

8) Найдем реакции производителя при изменении цен на продукцию и на ресурсы и коэффициенты эластичности при ценах $p = 99$, $q_1 = 11$, $q_2 = 8$.

Реакция производителя при изменении цены продукции.

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p} = \frac{2{,}486195 \cdot \frac{20}{3} \cdot p^{\frac{20}{3}-1}}{q_1^{\frac{14}{3}} \cdot q_2^2} = \frac{49{,}723900 \cdot 99^{\frac{17}{3}}}{3 \cdot 11^{\frac{14}{3}} \cdot 8^2} = 727831{,}5224 > 0$$

Так как $\frac{\partial x_1^*}{\partial p} > 0$, то при росте цены продукции спрос на 1-й фактор производства возрастает, то есть этот ресурс (фактор) является ценным.

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial p} = \frac{1{,}356106 \cdot \frac{20}{3} \cdot p^{\frac{20}{3}-1}}{q_1^{\frac{11}{3}} \cdot q_2^3} = \frac{27{,}12212 \cdot 99^{\frac{17}{3}}}{3 \cdot 11^{\frac{11}{3}} \cdot 8^3} = 545873{,}495 \quad > 0$$

Так как $\frac{\partial x_2^*}{\partial p} > 0$, то при росте цен на продукцию спрос на 2-й фактор производства возрастает, то есть этот ресурс (фактор) является ценным.

$$\frac{\partial y^*}{\partial p} = \frac{4{,}520354 \cdot \frac{17}{3} \cdot p^{\frac{17}{3}-1}}{q_1^{\frac{11}{3}} \cdot q_2^2} = \frac{76{,}84602 \cdot 99^{\frac{14}{3}}}{3 \cdot 11^{\frac{11}{3}} \cdot 8^2} = 124981{,}1554 \quad > 0$$

При росте цены продукции объем ее выпуска увеличивается.

Реакция производителя при изменении цен на факторы производства.

$$\frac{\partial y^*}{\partial q_1} = 4{,}520354 \cdot P^{\frac{17}{3}} \cdot (-\frac{11}{3}) \cdot q_1^{-\frac{11}{3}-1} \cdot q_2^{-2} =$$

$$= -\frac{4{,}520354 \cdot 11 \cdot 99^{\frac{17}{3}}}{3 \cdot 11^{\frac{14}{3}} \cdot 8^2} = -727831{,}4346 \quad (< 0)$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial q_2} = 4{,}520354 \cdot P^{\frac{17}{3}} \cdot (-2) \cdot q_1^{-\frac{11}{3}} \cdot q_2^{-2-1} =$$

$$= -\frac{4{,}520354 \cdot 2 \cdot 99^{\frac{17}{3}}}{11^{\frac{11}{3}} \cdot 8^3} = -545873{,}576 \quad < 0$$

При увеличении цен на факторы производства выпуск продукции уменьшается.

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial q_1} = 2{,}486195 \cdot \left(-\frac{14}{3}\right) \cdot q_1^{-\frac{14}{3}-1} \cdot q_2^{-2} \cdot P^{\frac{20}{3}} =$$

$$= 2{,}486195 \cdot \left(-\frac{14}{3}\right) \cdot 11^{-\frac{17}{3}} \cdot 8^{-2} \cdot 99^{\frac{20}{3}} = -4585338{,}591 < 0$$

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial q_2} = 1{,}356106 \cdot P^{\frac{20}{3}} \cdot q_1^{-\frac{11}{3}} \cdot (-3) \cdot q_2^{-4} = \frac{1{,}356106 \cdot 99^{\frac{20}{3}} \cdot (-3)}{11^{\frac{11}{3}} \cdot 8^4} = -3039833{,}028 \quad < 0$$

То есть с ростом цен на факторы производства спрос на каждый из них падает.

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial q_2} = 2{,}486195 \cdot P^{\frac{20}{3}} \cdot q_1^{-\frac{14}{3}} \cdot (-2) \cdot q_2^{-3} = \frac{2{,}486195 \cdot (-2) \cdot 99^{\frac{20}{3}}}{11^{\frac{14}{3}} \cdot 8^3} =$$

$$= -2702074{,}527 \ (< 0)$$

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial q_1} = 1{,}356106 \cdot P^{\frac{20}{3}} \cdot \left(-\frac{11}{3}\right) \cdot q_1^{-\frac{11}{3}-1} \cdot q_2^{-3} =$$

$$= 1{,}356106 \cdot 99^{\frac{20}{3}} \cdot \left(-\frac{11}{3}\right) \cdot 11^{-\frac{14}{3}} \cdot 8^{-3} = -2702073{,}802 \quad (< 0)$$

Значит, 1-й и 2-й факторы производства взаимодополняемы (т.к. с ростом цены на 2-й фактор производства спрос на 1-й фактор производства уменьшается и наоборот).

Определим коэффициенты эластичности по ценам на продукцию и на ресурсы.

Для функции спроса на первый фактор производства:

$$E_1^p = \frac{\partial x_1^*}{\partial p} : \frac{x_1^*}{p} = \frac{\partial x_1^*}{\partial p} \cdot \frac{p}{x_1^*} = 727831{,}5224 \cdot \frac{99}{10808298{,}11} = 6{,}66666667$$

При увеличении цены продукции на 1% спрос на первый фактор производства возрастает на 6,666667%.

$$E_1^{q_1} = \frac{\partial x_1^*}{\partial q_1} : \frac{x_1^*}{q_1} = \frac{\partial x_1^*}{\partial q_1} \cdot \frac{q_1}{x_1^*} = -4585338{,}591 \cdot \frac{11}{10808298{,}11} = -4{,}666666667$$

При увеличении цены первого фактора производства на 1% спрос на него уменьшается на 4,666667%.

$$E_1^{q_2} = \frac{\partial x_1^*}{\partial q_2} : \frac{x_1^*}{q_2} = \frac{\partial x_1^*}{\partial q_2} \cdot \frac{q_2}{x_1^*} = -2702074{,}527 \cdot \frac{8}{10808298{,}11} = -2$$

При увеличении цены второго фактора производства на 1% спрос на первый фактор производства падает на 2%.

Проверим основное свойство коэффициентов эластичности функции спроса на первый фактор производства. Эта функция однородная нулевой степени. Поэтому сумма всех её коэффициентов эластичности равна нулю. Действительно,

$$E_1^p + E_1^{q_1} + E_1^{q_2} = 6{,}666667 - 4{,}666667 - 2 = 0 \cdot$$

Для функции спроса на второй фактор производства:

$$E_2^p = \frac{\partial x_2^*}{\partial p} : \frac{x_2^*}{p} = \frac{\partial x_2^*}{\partial P} \cdot \frac{p}{x_2^*} = 545873{,}495 \cdot \frac{99}{8106221{,}407} = 6{,}666666667$$

При увеличении цены продукции на 1% спрос на второй фактор производства возрастает на 6,666667%.

$$E_2^{q_1} = \frac{\partial x_2^*}{\partial q_1} : \frac{x_2^*}{q_1} = \frac{\partial x_2^*}{\partial q_1} \cdot \frac{q_1}{x_2^*} = -2702073{,}802 \cdot \frac{11}{8106221{,}407} = -3{,}666666667$$

При увеличении цены первого фактора производства на 1% спрос на второй фактор производства уменьшается на 3,666667%.

$$E_2^{q_2} = \frac{\partial x_2^*}{\partial q_2} : \frac{x_2^*}{q_2} = \frac{\partial x_2^*}{\partial q_2} \cdot \frac{q_2}{x_2^*} = -3039833{,}028 \cdot \frac{8}{8106221{,}407} = -3$$

При увеличении цены второго фактора производства на 1% спрос на него уменьшается на 3%.

Проверим основное свойство коэффициентов эластичности функции спроса на второй фактор производства.

$$E_2^p + E_2^{q_1} + E_2^{q_2} = 6{,}66666 - 3{,}66666 - 3 = 0$$

Для функции предложения продукции:

$$E_y^p = \frac{\partial y^*}{\partial p} : \frac{y^*}{p} = \frac{\partial y^*}{\partial p} \cdot \frac{p}{y^*} = 124981{,}1554 \cdot \frac{99}{2183494{,}304} = 5{,}66666666$$

При увеличении цены продукции на 1% спрос на неё возрастает на 5,666667%.

$$E_y^{q_1} = \frac{\partial y^*}{\partial q_1} : \frac{y^*}{q_1} = \frac{\partial y^*}{\partial q_1} \cdot \frac{q_1}{y^*} = -727831{,}4346 \cdot \frac{11}{2183494{,}304} = -3{,}66666666$$

При увеличении цены первого фактора производства на 1% спрос на продукцию уменьшается на 3,666667%.

$$E_y^{q_2} = \frac{\partial y^*}{\partial q_2} : \frac{y^*}{q_2} = \frac{\partial y^*}{\partial q_2} \cdot \frac{q_2}{y^*} = -545873{,}576 \cdot \frac{8}{2183494{,}304} = -2$$

$$E_y^{q_2} = \frac{\partial y^*}{\partial q_2} : \frac{y^*}{q_2} = \frac{\partial y^*}{\partial q_2} \cdot \frac{q_2}{y^*} = -545873{,}576 \cdot \frac{8}{2183494{,}304} = -2$$

При увеличении цены второго фактора производства на 1% спрос на продукцию уменьшается на 2%.

Проверим основное свойство коэффициентов эластичности функции предложения продукции.

$$E_y^p + E_y^{q_1} + E_y^{q_2} = 5{,}666667 - 3{,}666667 - 2 = 0.$$

СПИСОК ВОПРОСОВ СЕСИОННОГО КОНТРОЛЯ

1. Задача об оптимальном плане выпуска продукции.
2. Общая задача линейного программирования (ЗЛП). ЗЛП в стандартной форме.
3. Различные формы записи ЗЛП.
4. Приведение любой ЗЛП к стандартному виду. Переход от ЗЛП в стандартном виде к ЗЛП с ограничениями-неравенствами.
5. Геометрическая интерпретация ЗЛП.
6. Графический метод решения ЗЛП.
7. Свойства решений ЗЛП (4 теоремы)
8. Симплекс-метод, 2 этапа метода: Нахождение исходного опорного плана, канонический вид ЗЛП. Симплекс-алгоритм.
9. Основная теорема симплекс-метода. Симплекс-таблица.
10. Альтернативный оптимум в ЗЛП, вырожденность в ЗЛП.
11. Метод искусственного базиса. М-задача.
12. Теорема о связи между решениями исходной задачи и М-задачи.
13. Двойственность в линейном программировании. Симметричная пара двойственных задач.
14. Правила построения двойственных задач.
15. Несимметричная пара двойственных задач.
16. Экономическая интерпретация двойственных задач.
17. Теорема о связи между целевыми функциями пары двойственных задач.
18. Теорема, содержащая достаточный признак оптимальности решений пары двойственных задач.
19. Двойственный симплекс-метод.
20. Первая теорема двойственности. Вторая теорема двойственности. Следствия из второй теоремы двойственности и их экономический смысл.
21. Анализ устойчивости оптимального плана производства (3 вопроса).
22. Транспортная задача (ТЗ). Постановка и математическая модель задачи.
23. Условия разрешимости ТЗ (теорема).
24. Особенности ограничений ТЗ.
25. Метод северо-западного угла.
26. Условия оптимальности плана перевозок ТЗ – теорема.
27. Метод потенциалов.
28. Открытая модель ТЗ.

29.Задачи с целочисленными переменными, типы задач и их особенности.
30.Общая схема метода «ветвей и границ». Метод Ленд и Дойг.
31.Метод Гомори.
32.Элементы динамического программирования. Принцип Беллмана.
33.Решение экономических задач методом динамического программирования.
34.Основные понятия исследования операций (ИО).
35.Задачи ИО в условиях определенности, риска и неопределенности. Критерии Вальда, Гурвица, Сэвиджа и Лапласа.
36.Схема МОБ. Коэффициенты прямых и полных материальных затрат. Коэффициенты прямой и полной трудоемкости и фондоемкости.
37.Задача максимизации конечной продукции - задача Канторовича.
38.Постановка задачи оптимального выбора потребителя.
39.Пространство благ. Доступные наборы благ.
40.Отношение предпочтения в пространстве благ.
41.Функции полезности потребителя. Основные свойства функции полезности. Предельная полезность блага.
42.Кривые безразличия. Предельные нормы замены благ.
43.Модель поведения потребителя и ее анализ.
44.Понятие функции спроса потребителя. Основное свойство.
45.Реакции потребителя при изменении дохода и цен.
46.Коэффициенты эластичности функции спроса и их основное соотношение.
47.Связь оптимального выбора потребителя с индексами реального дохода и цен.
48.Цели производителя. Основные рыночные структуры, в которых функционирует производитель.
49.Производственная функция и ее основные свойства. Однородные производственные функции.
50.Типовые производственные функции.
51.Задача максимизации объема выпуска продукции при заданных объемах затрат ресурсов. Ее модель и анализ.
52.Задача минимизации затрат для обеспечения заданного объема выпуска продукции. ее модель и анализ.
53.Функция издержек производства.
54.Модель поведения производителя в условиях совершенной конкуренции, постановка и математическая модель задачи, анализ решения задачи.
55.Функции спроса на факторы производства. Функция предложения на ресурсы.
56.Модель поведения производителя в условиях монополии: постановка задачи, ее модель и анализ.

57.Модель поведения производителя в условиях монопсонии: постановка задачи, ее анализ и модель.
58.Модель олигополии.
59.Модель дуополии Курно и ее анализ.
60.Динамика поведения производителей в моделях Курно.Задачи с целочисленными переменными, типы задач и их особенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Ф. Гамецкий, Д.И. Соломон. Исследование операций, т.2. Изд. «Еврика» Кишинёв, 2008.–592 с.
2. Г.В. Спиридонова, Н.В. Семенова. Линейное программирование в экономике. Учебное пособие. Издательство ПГУ, Тирасполь, 2006.–124 с.
3. Г.В. Спиридонова, Н.В. Семенова, Старчук Т.И. Транспортная задача и её приложения. Учебно-методическое пособие. Компьютерная версия. Кафедра прикладной математики и ЭММ ПГУ. Тирасполь, 2008.–114с.
4. А.Ф. Гамецкий, В.А. Слободенюк, Г.В. Спиридонова. Исследование операций. Учебное пособие. Кишинёвский государственный университет им. В.И. Ленина. Кафедра прикладной математики и ЭММ . Кишинёв, 1982.–114 с.
5. Г.В. Спиридонова, П.В. Макаров, Н.В. и К. Методы оптимизации. Учебное пособие. Бендеры, Полиграфист, 2012.– 168 с.
6. Г.В. Спиридонова, А.И. Кудрик. Элементы динамического программирования. Методическое пособие. Компьютерная версия. Кафедра прикладной математики и ЭММ ПГУ. Тирасполь, 2008.–114с.
7. Г.В. Спиридонова, Н.В. Семенова, Старчук Т.И. Программа, методические указания и контрольные задания по математике . Учебно-методическое пособие. Ч.4. Издательство ПГУ, Тирасполь, 2007.–96 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Спиридонова Галина Васильевна,
Леонова Наталья Григорьевна

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Методические указания

Усл. печ. л. 5.0.

Тирасполь ПГУ им. Т. Г. Шевченко