ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г.Шевченко

Физико-математический факультет

Кафедра прикладной математики и
экономико-математических методов

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов дневного отделения
инженерно-технических специальностей

Тирасполь – 2013 г.

УДК 519.6(076.5)
ББК В 19 я 73-5
Л-12

Составители:
Л.В. Чуйко, кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и экономико-математических методов
Н.П. Капацина, старший преподаватель кафедры прикладной математики и экономико-математических методов
В.В. Афонин, старший преподаватель кафедры математического анализа

Рецензенты:
Г. Н. Ворническу, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа
Т. Д. Бордя, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий и автоматизированного управления производственными процессами ИТИ и ТК

Лабораторный практикум по вычислительной математике для студентов дневного отделения инженерно-технических специальностей / Сост.: Л.В.Чуйко, Н.П. Капацина, В.В. Афонин – Бендеры, ООО «РВТ», 2013. – 42 с.

Лабораторный практикум предназначены студентам дневного отделения инженерно-технического института, для выполнения ими предусмотренных учебным планом лабораторных работ по вычислительной математике. Лабораторный практикум содержит методические рекомендации к выполнению лабораторных работ, а также подробное решение задач, аналогичных тем, которые предлагаются в вариантах лабораторных работ.

Лабораторный практикум будет полезен для студентов заочного отделения, а также лицам, занимающимся дистанционно.

УДК 519.6(076.5)
ББК В 19 я 73-5
Л-12

Утверждено Научно-методическим Советом
ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Составители:
Чуйко Л.В, Капацина Н.П., Афонин В.В.,2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Вычислительная математика» - дисциплина, которая входит в блок общих математических и естественнонаучных дисциплин. Цель преподавания дисциплины – ознакомить студентов с математической постановкой и методами решения широкого круга задач, важных в практической работе инженера, научить их проводить сравнительный анализ эффективности различных методов в приложении к решению конкретной задачи, выбирать наиболее рациональные методы решения задачи и реализовывать выбранный метод с доведением до формулы, графика, числа и таблицы, а также развивать навыки практической работы на современной вычислительной технике. Одной из основных форм обучения студента дневного отделения является выполнение лабораторных работ, которые включают в себя изучение теоретического материала и решение задач с использованием современной вычислительной техники.

Главной целью данного пособия является пробуждение у студентов дневного отделения желания самостоятельно выполнить предлагаемые по учебному плану лабораторные работы. Пособие будет полезно и для студентов заочного отделения, а также для лиц, обучающихся дистанционно.

В так называемом «нулевом варианте», решение которого предлагается в данной работе, приведены краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач шести лабораторных работ. Среди решенных задач немало таких, которые можно назвать типовыми; во всяком случае, ознакомление с ними позволяет студенту при самой минимальной помощи со стороны преподавателя овладеть основными методами решения задач предлагаемых в лабораторных работах.

Как правило, в пособии приводятся задачи, легко реализуемые на ЭВМ. Составители сознательно старались избежать задач повышенной трудности, так как ставили перед собой цель научить студента решать основные задачи по разделам вычислительной математики, дать некоторый минимум, необходимый для усвоения студентом требований вузовской программы цикла общих математических и естественнонаучных дисциплин.. Вместе с тем работа с настоящим пособием не закрывает возможности более углубленного изучения дисциплины.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. Лабораторные работы должны быть выполнены в срок, указанный в учебном графике.
2. На титульном листе каждой лабораторной работы должны быть четко написаны номер и тема, ФИО студента, факультет, курс, группа, номер варианта и ФИО преподавателя.
3. Каждая лабораторная работа должна быть выполнена на листах формата А-4.
4. Все задачи входящие в лабораторные работы, должны быть решены. Перед решением каждой задачи необходимо записать полный текст ее условия Работу следует выполнять четким, разборчивым почерком, указывать формулы, применяемые при решении задачи, соблюдать смысловые интервалы.
5. Все расчеты, проводимые на ЭВМ представить на проверку преподавателю, после чего распечатать и вложить в отчет соответствующей лабораторной работы.
6. При получении лабораторной работы не допущенной к защите, студент должен выполнить ее повторно с учетом замечаний преподавателя.
7. Зачтенная лабораторная работа допускается к устной защите.
8. Студент, выполнивший не свой вариант лабораторной работы, к защите не допускается.
9. Зачтенные лабораторные работы в обязательном порядке предъявляется на зачете по дисциплине.
10. Номер варианта лабораторных работ определяет преподаватель.

СОДЕРЖАНИЕ

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Ю.А. Вычислительные методы для инженеров. М.1994.
2. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М. 1986.
3. Баренгольц Ю.А., Чуйко Л.В. Дифференциальные уравнения: некоторые аналитические и численные методы решения. Бендеры. 2005.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М. 1962.
5. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. М. 1990.
6. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М. 2001.
7. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М. 1970.
8. Данилина Н.И. Численные методы. М. 1968.
9. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М. 1963.
10. Дробышевич В.И., Дымников В.П., Ривин Г.С. Задачи по вычислительной математике. М. 1980.
11. Дьяченко В.Ф. основные понятия вычислительной математики. М. 1972.
12. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.1972.
13. Кантарович В.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М. 1952.
14. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике. М. 1995.
15. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М. 1977.
16. Краскевич В.Е., Зеленский К.Х., Гречко В.И. Численные методы в инженерных исследованиях. Киев. 1986.
17. Норкин С.Б. Элементы вычислительной математики. М. 1963.
18. Рябенький В.С. Введение в вычислительную математику. М. 1987.
19. Турчак Л.И. Основы численных методов. М. 1987.
20. Сорокин В.К. Вычислительная математика. Калинин. 1970.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Лабораторная работа №1

Найти наименьший по абсолютной величине корень нелинейного уравнения $F(x)=0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$ при помощи:

1. метода половинного деления;
2. метода хорд;
3. метода касательных.

Лабораторная работа №2

1. Решить заданную систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса (путем приведения матрицы системы к треугольному виду). Для проверки полученного решения вычислить значения невязок.
2. Используя элементарные преобразования привести (при необходимости) заданную систему линейных алгебраических уравнений к виду, удобному для применения итерационного метода Гаусса-Зейделя, и решить систему этим методом, вычисляя на каждом шаге итерационного процесса значения невязок с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.
3. Сравнить результаты пунктов 1 и 2.

Лабораторная работа №3

1. Для заданной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и значения $n=12$ вычислить приближенное значение функции $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,...n$.
2. Для полученных значений табличной функции $y_i = f(x_i)$ составить таблицу конечных разностей.
3. Для первых четырех узлов x_0, x_1, x_2, x_3 построить интерполяционный многочлен Лагранжа $L(x)$.
4. Вычислить с помощью многочлена Лагранжа значение функции в точке $x_\alpha = x_2 + \frac{h}{2}$.
5. Построить интерполяционный многочлен Ньютона $N(x)$ для интерполирования вперед, с помощью которого рассчитать значение функции в точке $x_\alpha = x_2 + \frac{h}{2}$.

6. Построить интерполяционный многочлен Ньютона $N(x)$ для интерполирования назад, с помощью которого рассчитать значение функции в точке $x_\beta = x_{10} - \frac{h}{2}$.
7. Сравнить значения $L(x_\alpha), N(x_\alpha), N(x_\beta)$ соответственно со значениями $f(x_\alpha), f(x_\beta)$, т.е. найти ошибки аппроксимации.
8. В таблице конечных разностей подчеркнуть одной чертой разности, использованные при построения многочлена Ньютона для интерполирования вперед, и двумя чертами – назад. Дать объяснение результатов по пункту 7.

Лабораторная работа №4

Для заданной функции $y = f(x)$ на $[a;b]$ и значения $n = 12$ построить прямую и параболу по методу наименьших квадратов. Оценить погрешности полученных аппроксимаций; построить исходную табличную функцию, прямую и параболу на одном чертеже; сделать вывод по полученным результатам.

Лабораторная работа №5

Найти приближенное решение $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,...10$ дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[0;1]$ с шагом $h = 0,1$ методом Эйлера с пересчетом.

Лабораторная работа №6

1. Для заданной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и значения $n = 12$ вычислить приближенное значение функции $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,...n$.
2. Вычислить приближенное значение интеграла $I_n = \int_a^b f(x)\,dx$ по формуле прямоугольников в полуцелых узлах;
3. Вычислить приближенное значение интеграла $I_m = \int_a^b f(x)\,dx$ по формуле трапеций;
4. Вычислить приближенное значение интеграла $I_c = \int_a^b f(x)\,dx$ по формуле Симпсона;
5. Сравнить значения I_n, I_m, I_c .

СПИСОК ВОПРОСОВ
необходимых при защите лабораторных работ

1. Уравнения с одним неизвестным. Алгебраические и трансцендентные уравнения.
2. Отделение корней. Метод деления отрезка пополам.
3. Метод хорд.
4. Метод касательных.
5. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений; метод Крамера; метод Гаусса.
6. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений; метод Гаусса – Зейделя и условия его сходимости.
7. Понятие о приближении (аппроксимации) функции. Постановка задачи.
8. Точечная и непрерывная аппроксимации. Понятие интерполяции и экстраполяции.
9. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
10. Интерполяционные многочлены Ньютона.
11. Математическая обработка данных; постановка задачи.
12. Метод наименьших квадратов (для случая прямой). Оценка погрешности данной аппроксимации.
13. Метод наименьших квадратов (для случая параболы). Оценка погрешности данной аппроксимации.
14. Численное интегрирование (площадь криволинейной трапеции; определение определенного интеграла; формула Ньютона-Лейбница и возможности ее применения).
15. Численное интегрирование: методы прямоугольников и трапеций, комбинированная формула.
16. Численное интегрирование: метод Симпсона.
17. Численное интегрирование дифференциальных уравнений: метод Эйлера с пересчетом.
18. Численное интегрирование дифференциальных уравнений: метод Рунге-Кутта.

$$I_m = \int\limits_{0,5}^{2,54} \frac{x^2+1}{x^3\left(2+3x\right)}dx = 0,17\cdot\left(\frac{2,85714+0,04727}{2}+1,20135+0,63665+0,38980+0,26283+\right.$$

$$\left.0,18962+0,14370+0,11300+0,09143+0,07567+0,06377+0,05456\right) = 0,79468.$$

Вычислим приближенное значение заданного определенного интеграла по формуле Симпсона:

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \frac{h}{3}\cdot\left(y_0+y_{12}+4\left(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9+y_{11}\right)+2\left(y_2+y_4+y_6+y_8+y_{10}\right)\right).$$

$$I_c = \int\limits_{0,5}^{2,54} \frac{x^2+1}{x^3\left(2+3x\right)}dx = \frac{0,17}{3}\cdot(2,85714+0,04727+4(1,20135+0,38980+0,18962+0,11300+$$

$$0,07567+0,05456)+2(0,63665+0,26283+0,14370+0,09143+0.06377)) = 0,75917.$$

Итак, $I_n = 0,73520$, $I_m = 0,79468$, $I_c = 0,75917$. Как видим, результаты трех приближенных методов вычисления заданного определенного интеграла достаточно близкие.

Варианты уравнений к лабораторной работе №1

1. $2x^3-3x^2-12x-5=0$ **2.** $x^3-3x^2-24x-3=0$

3. $x^3-3x^2+3=0$ **4.** $x^3+3x^2-24x-10=0$

5. $2x^3+9x^2-21=0$ **6.** $x^3+3x^2-2=0$

7. $x^3+3x^2-24x+10=0$ **8.** $2x^3+9x^2-10=0$

9. $x^3+3x^2-3=0$ **10.** $x^3-3x^2-24x-5=0$

11. $x^3-12x-5=0$ **12.** $2x^3-3x^2-12x+12=0$

13. $x^3-3x^2+1,5=0$ **14.** $x^3+3x^2-24x-3=0$

15. $2x^3+9x^2-4=0$ **16.** $x^3+3x^2-1=0$

17. $x^3-12x+6=0$ **18.** $2x^3-3x^2-12x+10=0$

19. $x^3-3x^2+2,5=0$ **20.** $x^3+3x^2-3,5=0$

21. $x^3-3x^2-24x-8=0$ **22.** $x^3-12x+10=0$

23. $2x^3-3x^2-12x+1=0$ **24.** $x^3-4x^2+2=0$

25. $x^3+3x^2-24x+1=0$ **26.** $2x^3+9x^2-6=0$

27. $x^3-3x^2-24x+10=0$ **28.** $x^3-12x-10=0$

29. $2x^3-3x^2-12x+8=0$ **30.** $x^3-3x^2+3,5=0$

Варианты систем линейных алгебраических уравнений к лабораторной работе №2

1. $\begin{cases} 4,2x_1+1,3x_2+2,7x_3=8,5, \\ 6,3x_1+10,7x_2+2,1x_3=11,9, \\ 3,4x_1+2,7x_2+6,9x_3=5,5. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3,5x_1+0,9x_2+1,3x_3=6,4, \\ 6,4x_1+11,5x_2+2,7x_3=8,4, \\ 5,4x_1+3,1x_2+12,7x_3=6,7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2,3x_1+0,2x_2+1,4x_3=3,5, \\ 4,6x_1+11,1x_2+3,4x_3=8,4, \\ 5,3x_1+2,4x_2+9,1x_3=6,3. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 4,9x_1+3,2x_2+0,9x_3=8,1, \\ 5,4x_1+8,9x_2+2,4x_3=7,3, \\ 6,1x_1+1,2x_2+9,8x_3=5,5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 9,2x_1+2,6x_2+5,4x_3=6,7, \\ 3,6x_1+4,7x_2+0,9x_3=3,4, \\ 2,8x_1+6,4x_2+12,3x_3=7,4. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 5,8x_1+2,6x_2+1,7x_3=4,1, \\ 6,7x_1+14,1x_2+3,2x_3=4,5, \\ 3,9x_1+5,4x_2+10,6x_3=7,8. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3,5x_1+1,2x_2+0,9x_3=1,6, \\ 5,6x_1+8,4x_2+2,3x_3=4,6, \\ 4,6x_1+1,3x_2+7,5x_3=6,5. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 6,3x_1+3,4x_2+2,1x_3=5,4, \\ 5,6x_1+7,8x_2+1,3x_3=3,5, \\ 1,8x_1+5,7x_2+9,3x_3=4,9. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7,8x_1+5,6x_2+1,2x_3=3,6, \\ 3,7x_1+6,6x_2+2,1x_3=4,3, \\ 2,1x_1+3,4x_2+7,6x_3=6,8. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 9,6x_1+7,3x_2+1,6x_3=5,9, \\ 5,6x_1+8,4x_2+1,9x_3=4,6, \\ 3,6x_1+2,7x_2+8,1x_3=6,3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5,6x_1+3,2x_2+1,1x_3=2,5, \\ 3,9x_1+8,4x_2+2,4x_3=3,5, \\ 4,1x_1+2,6x_2+9,5x_3=5,7. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 7,4x_1+5,1x_2+1,9x_3=3,5, \\ 5,4x_1+8,4x_2+2,2x_3=3,4, \\ 3,5x_1+4,1x_2+9,9x_3=5,4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 6,3x_1+3,5x_2+1,4x_3=6,1, \\ 3,8x_1+7,4x_2+3,3x_3=5,4, \\ 4,6x_1+2,9x_2+8,7x_3=6,5. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5,3x_1+3,4x_2+0,9x_3=4,1, \\ 3,8x_1+7,5x_2+2,5x_3=3,5, \\ 3,4x_1+4,1x_2+10,3x_3=6,4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4,9x_1+3,6x_2+1,3x_3=4,6, \\ 2,5x_1+3,6x_2+0,9x_3=2,3, \\ 4,6x_1+1,2x_2+8,4x_3=3,6. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 6,5x_1+2,6x_2+3,3x_3=1,9, \\ 5,6x_1+8,4x_2+2,6x_3=3,0, \\ 2,5x_1+3,8x_2+9,4x_3=5,6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5,6x_1+2,3x_2+1,3x_3=3,6, \\ 2,9x_1+6,8x_2+1,3x_3=2,5, \\ 3,4x_1+5,3x_2+12,3x_3=6,4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3,5x_1+1,1x_2+0,9x_3=3,5, \\ 4,6x_1+8,4x_2+2,2x_3=4,6, \\ 1,3x_1+3,6x_2+7,1x_3=5,9. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 8,6x_1+5,2x_2+2,1x_3=3,6, \\ 5,6x_1+9,8x_2+2,2x_3=3,6, \\ 4,3x_1+2,1x_2+9,8x_3=5,6. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4,7x_1+2,3x_2+1,8x_3=3,5, \\ 2,4x_1+6,3x_2+3,1x_3=4,8, \\ 4,6x_1+5,6x_2+13,5x_3=4,8. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 6,4x_1+4,5x_2+1,3x_3=6,2, \\ 3,5x_1+5,8x_2+1,4x_3=3,2, \\ 4,8x_1+1,6x_2+9,7x_3=5,6. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4,8x_1+2,6x_2+0,8x_3=3,4, \\ 1,0x_1+3,5x_2+0,8x_3=4,3, \\ 3,8x_1+1,8x_2+9,7x_3=3,5. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5,8x_1+2,3x_2+1,8x_3=3,8, \\ 3,6x_1+5,9x_2+1,1x_3=4,6, \\ 2,3x_1+5,3x_2+12,3x_3=5,9. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3,6x_1+1,3x_2+0,8x_3=4,6, \\ 3,2x_1+6,4x_2+3,1x_3=4,8, \\ 6,4x_1+1,9x_2+8,9x_3=5,6. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 9,8x_1+6,2x_2+2,3x_3=6,1, \\ 6,3x_1+10,5x_2+3,1x_3=5,4, \\ 3,8x_1+2,6x_2+7,9x_3=6,4. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 7,7x_1+5,3x_2+2,2x_3=3,6, \\ 4,2x_1+6,8x_2+1,4x_3=3,2, \\ 4,7x_1+2,6x_2+10,8x_3=7,1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 10,2x_1+2,5x_2+4,9x_3=8,7, \\ 1,3x_1+7,9x_2+6,4x_3=4,8, \\ 3,6x_1+2,3x_2+6,5x_3=3,8. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 6,8x_1+3,5x_2+2,1x_3=4,6, \\ 5,3x_1+9,4x_2+2,2x_3=6,5, \\ 4,3x_1+2,1x_2+8,7x_3=6,0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 8,7x_1+5,6x_2+2,1x_3=3,6, \\ 5,2x_1+8,6x_2+1,5x_3=4,6, \\ 3,5x_1+3,1x_2+7,8x_3=6,5. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 7,6x_1+3,5x_2+2,6x_3=4,9, \\ 5,6x_1+8,4x_2+1,6x_3=5,4, \\ 3,5x_1+4,3x_2+9,1x_3=5,7. \end{cases}$

Затем, вычислим значения функции в точках $x_{i+0,5}$, т.е. $y_{i+0,5} = f\left(x_{i+0,5}\right) = \dfrac{x_{i+0,5}^2+1}{x_{i+0,5}^3\left(2+3x_{i+0,5}\right)}$.

Например, $y_{0+0,5} = f\left(x_{0+0,5}\right) = f\left(0,585\right) = \dfrac{0,585^2+1}{0,585^3\cdot\left(2+3\cdot 0,585\right)} = 1,78545.$

Результаты занесем в таблицу 6.

Таблица 6.

i	x_i	y_i	$x_{i+0,5}$	$y_{i+0,5}$
0	0,5	2,85714	0,585	1,78545
1	0,67	1,20135	0,755	0,85536
2	0,84	0,63665	0,925	0,49101
3	1,01	0,38980	1,095	0,31692
4	1,18	0,26283	1,265	0,22166
5	1,35	0,18962	1,435	0,16420
6	1,52	0,14370	1,605	0,12691
7	1,69	0,11300	1,775	0,10132
8	1,86	0,09143	1,945	0,08297
9	2,03	0,07567	2,115	0,06932
10	2,20	0,06377	2,285	0,05889
11	2,37	0,05456	2,455	0,05071
12	2,54	0,04727	-	-

Вычислим приближенное значение заданного определенного интеграла по формуле прямоугольников:

$$I_n = \int_a^b f\left(x\right)dx \approx h\left(y_{0+0,5}+y_{1+0,5}+y_{2+0,5}...+y_{11+0,5}\right).$$

$$I_n = \int_{0,5}^{2,54} \frac{x^2+1}{x^3\left(2+3x\right)}dx \approx 0,17(1,78545+0,85536+0,49101+0,31692+0,22166+0,16420+0,12691+$$
$$+0,10132+0,08297+0,06932+0,05889+0,05071) = 0,73520.$$

Вычислим приближенное значение заданного определенного интеграла по формуле трапеций:

$$I_m = \int_a^b f\left(x\right)dx \approx h\cdot\left(\frac{y_0+y_{12}}{2}+y_1+y_2+...+y_{11}\right).$$

Метод прямоугольников (формула прямоугольников):

$$\int_a^b f(x)dx = h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} y_{i+0,5},$$

где $y_{i+0,5} = f\left(x_{i+0,5}\right)$, $x_{i+0,5} = x_i + \frac{h}{2}$.

Например, для $n = 12$

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(y_{0+0,5} + y_{1+0,5} + y_{2+0,5} ... + y_{11+0,5}\right).$$

Метод трапеций (формула трапеций):

$$\int_a^b f(x)dx = h\cdot\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right).$$

Например, для $n = 12$

$$\int_a^b f(x)dx = h\cdot\left(\frac{y_0 + y_{12}}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{11}\right).$$

Метод Симпсона (формула Симпсона):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\cdot\left(y_0 + y_n + 4\left(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}\right)\right),$$

где n -четное число.

Например, для $n = 12$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\cdot\left(y_0 + y_{12} + 4\left(y_1 + y_3 + ... + y_{11}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + ... + y_{10}\right)\right).$$

Решение.

Для подинтегральной функции $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3(2+3x)}$ на отрезке $[0,5;2,54]$ при $n = 12$ вычислим шаг $h = \dfrac{b-a}{12} = \dfrac{2,54-0,5}{12} = 0,17$. Тогда $x_0 = a = 0,5$, $x_1 = x_0 + h = 0,5 + 0,17 = 0,67$, $x_2 = x_1 + h = 0,67 + 0,17 = 0,84$ и.т.д. $x_{12} = b = 2,54$. Далее находим $y_i = \dfrac{x_i^2+1}{x_i^3(2+3x_i)}$. Например,

$$y_0 = \frac{x_0^2+1}{x_0^3(2+3x_0)} = \frac{0,5^2+1}{0,5^3(2+3\cdot 0,5)} = 2,85714,\quad y_1 = \frac{x_1^2+1}{x_1^3(2+3x_1)} = \frac{0,67^2+1}{0,67^3(2+3\cdot 0,67)} = 1,20135$$ и.т.д.

Результаты занесем в таблицу.

Вычислим также значения $x_{i+0,5} = x_i + \frac{h}{2}$. Например, $x_{0+0,5} = x_0 + \frac{h}{2} = 0,5 + \frac{0,17}{2} = 0,585$.

Варианты функций к лабораторным работам №3, №4, №6

1. $y = \dfrac{11+3x^2}{x\left(3+7x^2\right)}$ $[1;2,8]$

2. $y = \dfrac{(10x-3)^3}{\left(1+2x^2\right)^2}$ $[0,7;3,1]$

3. $y = \dfrac{x^4+9x^3}{\left(2+x^2\right)^3}$ $[1;2,92]$

4. $y = \dfrac{4x+5}{2x^2+3x+3}$ $[1,2;2,52]$

5. $y = \dfrac{(1+2x)^3}{(3+4x)^2}$ $[1;2,56]$

6. $y = \dfrac{x^2+1}{x\left(2+3x^2\right)}$ $[0,5;2,54]$

7. $y = \dfrac{4x^2+1}{2x^2+3x^3-1}$ $[1;2,44]$

8. $y = \dfrac{2x^2+3}{x(3+8x)}$ $[1,3;3,1]$

9. $y = \dfrac{(2x-1)^3}{\left(2+x^2\right)^2}$ $[0,9;3,3]$

10. $y = \dfrac{(2x-1)^2}{2x^2+4x+1}$ $[1,2;3,36]$

11. $y = \dfrac{(2+x)^3}{(4+3x)^2}$ $[0,8;3,32]$

12. $y = \dfrac{3\left(x^2+1\right)}{5x^2(3+2x)}$ $[0,4;1,84]$

13. $y = \dfrac{4x^2-1}{2x^2+2x+3}$ $[-0,5;1,42]$

14. $y = \dfrac{9x+4}{x(4x+5)}$ $[1,4;3,44]$

15. $y = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+2}}$ $[2,2;4,36]$

16. $y = \dfrac{1,5x+2}{\sqrt{x^2+1}}$ $[0,8;3,32]$

17. $y = \dfrac{4x+0,5}{\sqrt{x^2+1,5}}$ $[2,6;4,4]$

18. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2,5}}$ $[1,4;2,96]$

19. $y = \dfrac{(x+3)^2}{\sqrt{x^2+1}}$ $[0,4;2,44]$

20. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}$ $[0,6;2,28]$

21. $y = \dfrac{5x}{\sqrt{x^2+2,4}}$ $[0,8;2,96]$

22. $y = \dfrac{4-x}{\sqrt{x^2+1}}$ $[2,2;4,72]$

23. $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+2,5}$ $[0,2;1,52]$

24. $y = \dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ $[-0,4;1,04]$

25. $y = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{2x^2+3}}$ $[2,2;4,12]$

26. $y = \dfrac{7x}{\sqrt{x^2+3}}$ $[0,8;3,08]$

27. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$ $[-0,4;1,64]$

28. $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2,8}$ $[0,2;2,48]$

29. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{(x+2)(x-1)}}$ $[2,4;4,32]$

30. $y = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x+2}$ $[0,2;2,36]$

Варианты дифференциальных уравнений к лабораторной работе №5

1. $y' = x + y^2, y(0) = 0,5$

2. $y' = 2x + 0,1y^2, y(0) = 0,2$

3. $y' = 2x + y, y(0) = 0,3$

4. $y' = x^2 + xy, y(0) = 0,2$

5. $y' = 0,2x + y^2, y(0) = 0,1$

6. $y' = 2x^2 - y^2, y(0) = 0,4$

7. $y' = x^2 + 2y, y(0) = 0,1$

8. $y' = xy + y^2, y(0) = 0,6$

9. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0,7$

10. $y' = x^2 + 0,2y^2, y(0) = 0,2$

11. $y' = 0,3x + y^2, y(0) = 0,4$

12. $y' = 0,1x + 0,2y^2, y(0) = 0,3$

13. $y' = x + 0,3y^2, y(0) = 0,3$

14. $y' = 2x^2 + xy, y(0) = 0,5$

15. $y' = 0,1x^2 + 2xy, y(0) = 0,8$

16. $y' = x^2 + 0,2xy, y(0) = 0,6$

17. $y' = 3x^2 + 0,1xy, y(0) = 0,2$

18. $y' = x^2 + 3xy, y(0) = 0,3$

19. $y' = x^2 + 0,1y^2, y(0) = 0,7$

20. $y' = 2x^2 + 3y^2, y(0) = 0,2$

21. $y' = 0,2x^2 + y^2, y(0) = 0,8$

22. $y' = 0,3x^2 + 0,1y^2, y(0) = 0,3$

23. $y' = xy + 0,1y^2, y(0) = 0,5$

24. $y' = 0,2xy + y^2, y(0) = 0,4$

25. $y' = 0,1xy + 0,3y^2, y(0) = 0,2$

26. $y' = 0,3xy + y^2, y(0) = 0,6$

27. $y' = xy + 0,2y^2, y(0) = 0,7$

28. $y' = 0,1x^2 + 2y^2, y(0) = 0,2$

29. $y' = 3x + 0,1y^2, y(0) = 0,4$

30. $y' = 0,2x^2 + 3y^2, y(0) = 0,2$

Лабораторная работа №6

1. Для заданной функции $y = \dfrac{x^2+1}{x^3(2+3x)}$ на отрезке $[0,5;2,54]$ и значения $n = 12$ вычислить приближенное значение функции $y_i = \dfrac{x_i^2+1}{x_i^3(2+3x_i)}$, $i = 0,1,...12$.
2. Вычислить приближенное значение интеграла $I_n = \int\limits_{0,5}^{2,54} \dfrac{x^2+1}{x^3(2+3x)}dx$ по формуле прямоугольников в полуцелых узлах;
3. Вычислить приближенное значение интеграла $I_m = \int\limits_{0,5}^{2,54} \dfrac{x^2+1}{x^3(2+3x)}dx$ по формуле трапеций;
4. Вычислить приближенное значение интеграла $I_c = \int\limits_{0,5}^{2,54} \dfrac{x^2+1}{x^3(2+3x)}dx$ по формуле Симпсона;
5. Сравнить значения I_n, I_m, I_c.

Краткие теоретические сведения

Из курса математического анализа известно, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b существует и имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$- первообразная для функции $f(x)$.

Для большинства элементарных функций первообразную $F(x)$ не удается выразить через элементарные функции. Кроме того, при практических расчетах подынтегральная функция задается в виде таблицы или сама по себе достаточно сложная. Все это приводит к необходимости замены интегрирования численными методами.

Задача численного интегрирования состоит в следующем: найти определенный интеграл на отрезке $[a;b]$, если подинтегральная функция на отрезке $[a;b]$ задана таблично.

Формулы приближенного интегрирования называются квадратурными. Рассмотрим простейшие из них.

i	x_i	y_i	$f_i = f\left(x_i, y_i\right)$	$\tilde{y}_{i+1}$	$f_{i+1} = f\left(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}\right)$
0					
1					
2					
.					
.					
.					
n					

Решение.

Из условия $x_0 = 0$ и $y_0 = 0,4$ находим:

$$f_0 = f\left(x_0, y_0\right) = x_0^2 + y_0 = 0^2 + 0,4 = 0,4,$$

$$\tilde{y}_1 = y_0 + h \cdot f\left(x_0, y_0\right) = 0,4 + 0,1 \cdot 0,4 = 0,44,$$

$$\tilde{f}_1 = f\left(x_1, \tilde{y}_1\right) = x_1^2 + \tilde{y}_1 = 0,1^2 + 0,44 = 0,45,$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f\left(x_0, y_0\right) + f\left(x_1, \tilde{y}_1\right)] = 0,4 + \frac{0,1}{2}\left(0,4 + 0,45\right) = 0,4425.$$

Аналогично находим:

$$f_1 = f\left(x_1, y_1\right) = x_1^2 + y_1 = 0,1^2 + 0,4425 = 0,4525,$$

$$\tilde{y}_2 = y_1 + h \cdot f\left(x_1, y_1\right) = 0,4425 + 0,1 \cdot 0,4525 = 0,48775,$$

$$\tilde{f}_2 = f\left(x_2, \tilde{y}_2\right) = x_2^2 + \tilde{y}_2 = 0,2^2 + 0,48775 = 0,52775,$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}[f\left(x_1, y_1\right) + f\left(x_2, \tilde{y}_2\right)] = 0,4425 + \frac{0,1}{2}\left(0,4525 + 0,52775\right) = 0,49151.$$

Продолжаем этот процесс до нахождения y_{10}. Данные вычислений заносим в таблицу 4.

Таблица 4.

i	x_i	y_i	$f_i = f\left(x_i, y_i\right)$	$\tilde{y}_{i+1}$	$f_{i+1} = f\left(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}\right)$
0	0	0,4	0,4	0,44	0,45
1	0,1	0,4425	0,45250	0,48775	0,52775
2	0,2	0,49151	0,53151	0,54466	0,63466
3	0,3	0,54982	0,63982	0,61380	0,77380
4	0,4	0,62050	0,78050	0,69855	0,94855
5	0,5	0,70696	0,95696	0,80265	1,16256
6	0,6	0,81294	1,17294	0,93023	1,42023
7	0,7	0,94259	1,43259	1,08585	1,72585
8	0,8	1,10052	1,74052	1,27457	2,08457
9	0,9	1,29177	2,10177	1,50195	2,50195
10	1	1,52196	-	-	-

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ (НУЛЕВОЙ ВАРИАНТ)

Лабораторная работа №1

Найти наименьший по абсолютной величине корень нелинейного уравнения $x^3 + x^2 - 3 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,01$ при помощи:

1. метода половинного деления;
2. метода хорд;
3. метода касательных.

Краткие теоретические сведения

Процесс нахождения приближенных корней уравнения разбивается на два этапа:

1. отделение корней;
2. уточнение корней по заданной степени точности.

Отделить корни – это значит разбить всю область допустимых значений на отрезки, в каждом из которых содержится один корень. Отделение корней проводится графически. Для этого все члены заданного уравнения

$$F(x) = 0 \qquad \textbf{(1.1)}$$

разбивают на две группы, одну из них записывают в левой части уравнения, а другую в правой. Таким образом, уравнение (1) представляют в виде

$$f_1\left(x\right) = f_2\left(x\right).$$

После этого на одном чертеже строят графики двух функций $y = f_1\left(x\right)$ и $y = f_2\left(x\right)$. Абсциссы точек пересечения графиков этих двух функций и служат корнями данного уравнения. Если искомый корень $r \in \left[a; в\right]$, то его можно уточнить с точностью до ε различными методами. Например, методом половинного деления, методом хорд, методом касательных и др.

Пусть уравнение (1.1) имеет на отрезке $\left[a; в\right]$ единственный корень $x = r$ и функция $y = F(x)$ непрерывна на отрезке $\left[a; в\right]$. Разделим отрезок $\left[a; в\right]$ пополам точкой $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$. Если $F(x_0) \neq 0$ (что наиболее верно), то возможны два случая: 1) $F(a)$ и $F(x_0)$ имеют разные знаки, а $F(x_0)$ и $F(b)$ одинаковые знаки; 2) $F(a)$ и $F(x_0)$ имеют одинаковые знаки, а $F(x_0)$ и $F(b)$ разные знаки. Выбираем тот из двух отрезков $\left[a; x_0\right]$ или $\left[x_0; в\right]$, на концах которого значения функции $F(x)$ имеют разные знаки. Полученный отрезок принимает за новый отрезок $\left[a; в\right]$, делим его пополам точкой x_1 и далее поступаем также, как было указано выше. В результате процесса половинного деления получаем последовательность точек $x_0, x_1, \ldots x_n, x_{n+1}$. Критерием окончания метода половинного деления является выполнение условия

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \leq \varepsilon \qquad \textbf{(1.2)}$$

(ε - заданная точность), тогда искомый корень $r = x_{n+1}$.

Для уточнения корня r уравнения (1) методом хорд функция $F(x)$ на отрезке $\left[a; в\right]$ должна быть непрерывной и иметь производные первого и второго порядков. В методе хорд существуют два случая:

I. Первая и вторая производные функции $F(x)$ имеют одинаковые знаки на рассматриваемом отрезке $\left[a; в\right]$, содержащем искомый корень, т.е. $F'(x) > 0$ и $F''(x) > 0$ или $F'(x) < 0$ и $F''(x) < 0$. В этом случае искомый корень уравнения (1) вычисляется по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)(b - x_n)}{F(b) - F(x_n)}, \qquad \mathbf{(1.3)}$$

где $x_0 = a$ - начало рассматриваемого отрезка.

II. Первая и вторая производные функции $F(x)$ имеют разные знаки на рассматриваемом отрезке $[a;в]$, содержащем искомый корень, т.е. $F'(x) > 0$ и $F''(x) < 0$ или $F'(x) < 0$ и $F''(x) > 0$. В этом случае искомый корень уравнения (1) вычисляется по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)(a - x_n)}{F(a) - F(x_n)}, \qquad \mathbf{(1.4)}$$

где $x_0 = b$ - конец рассматриваемого отрезка.

Критерием окончания указанного процесса является выполнение условия (2). Тогда искомый корень $r = x_{n+1}$.

Для уточнения корня r уравнения (1.1) методом касательных функция $F(x)$ на отрезке $[a;в]$ должна иметь непрерывные производные первого и второго порядков, сохраняющие на указанном отрезке постоянные знаки. В методе касательных, также как и в методе хорд существуют два случая:

I. Первая и вторая производные функции $F(x)$ имеют одинаковые знаки на рассматриваемом отрезке $[a;в]$, содержащем искомый корень, т.е. $F'(x) > 0$ и $F''(x) > 0$ или $F'(x) < 0$ и $F''(x) < 0$. В этом случае искомый корень уравнения (1) вычисляется по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \qquad \mathbf{(1.5)}$$

где $x_0 = b$ - конец рассматриваемого отрезка.

II. Первая и вторая производные функции $F(x)$ имеют разные знаки на рассматриваемом отрезке $[a;в]$, содержащем искомый корень, т.е. $F'(x) > 0$ и $F''(x) < 0$ или $F'(x) < 0$ и $F''(x) > 0$. В этом случае искомый корень уравнения (1.1) вычисляется также по формуле (1.5), только $x_0 = a$ - начало рассматриваемого отрезка. Критерием окончания указанного процесса является выполнение условия (1.2). Тогда искомый корень $r = x_{n+1}$.

Решение.

Заданное уравнение представим в виде $x^3 = -x^2 + 3$. На одном чертеже (рис.1.) построим графики функций $y = x^3$ и $y = -x^2 + 3$. Где $y = x^3$ - кубическая гипербола; $y = -x^2 + 3$ - парабола с вершиной в точке (0;3) и ветвями направленными вниз. Точку пересечение графиков двух функций спроектируем на ось ОХ. Абсцисса r точки пересечения графиков функций и будет приближенным корнем заданного уравнения. Корень $r \in [1;1,3]$ (отрезок определяется из рисунка). Уточним корень r тремя методами.

1. *Метод половинного деления.*

Изобразим отрезок $[1;1,3]$ на рисунке 2.

Лабораторная работа №5

Найти приближенное решение $y_i = y(x_i), i = 1,2,...10$ дифференциального уравнения $y' = x^2 + y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0,4$ на отрезке $[0;1]$ с шагом $h = 0,1$ методом Эйлера с пересчетом.

Краткие теоретические сведения

Уравнение, в котором неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала, называется *дифференциальным уравнением*.

Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной (или дифференциала), входящей в уравнение.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, может быть записано в виде $y' = f(x, y)$. Методы точного решения (интегрирования) дифференциальных уравнений пригодны лишь для сравнительно небольшой части уравнений, встречающихся на практике. Поэтому большое значение имеют методы приближенного решения дифференциальных уравнений, которые в зависимости от формы представления решения можно разделить на две группы:

1. аналитические методы, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения;
2. численные методы, дающие приближенное решение в виде таблицы.

Решить дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ численным методом – это значит для заданной последовательности аргументов $x_0, x_1, x_2, ...x_n$ и числа y_0, не определяя функцию $y = y(x)$, найти такие значения $y_1, y_2, ...y_n$, что $y_i = y(x_i), i = 1,2,...n$ и $y(x_0) = y_0$. Таким образом, численные методы позволяют вместо нахождения функции $y = y(x)$ получить таблицу значений этой функции для заданной последовательности аргументов с шагом h.

Согласно методу Эйлера с пересчетом каждое приближенное значение y_{i+1} решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ находится в два этапа: сначала вычисляется промежуточное значение

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),$$

Затем искомое приближение

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})].$$

Результаты и значения промежуточных вычислений представляются в виде таблицы:

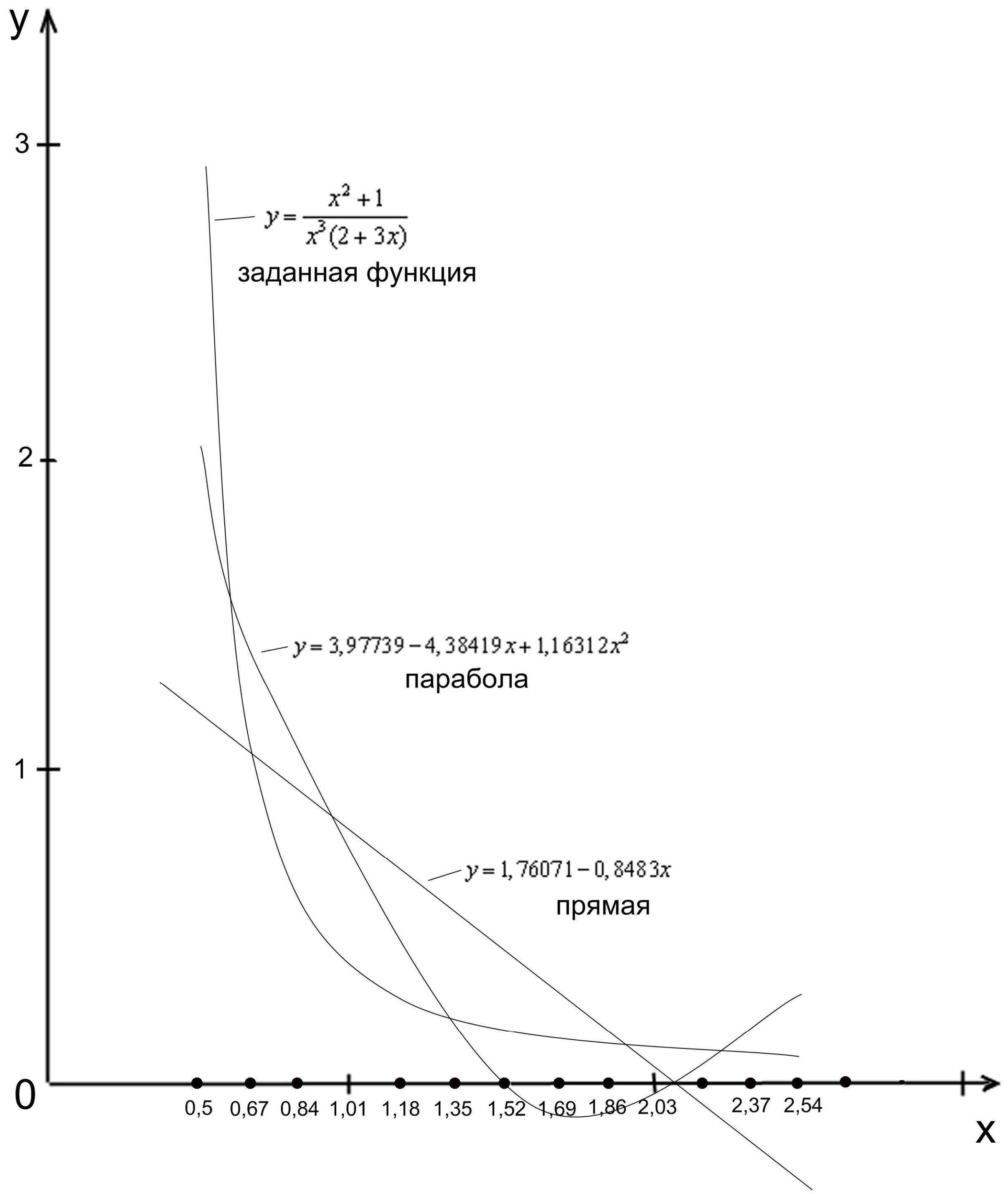

Рис.7.

Варианты уравнений к лабораторной работе №1

1. $2x^3-3x^2-12x-5=0$

2. $x^3-3x^2-24x-3=0$

3. $x^3-3x^2+3=0$

4. $x^3+3x^2-24x-10=0$

5. $2x^3+9x^2-21=0$

6. $x^3+3x^2-2=0$

7. $x^3+3x^2-24x+10=0$

8. $2x^3+9x^2-10=0$

9. $x^3+3x^2-3=0$

10. $x^3-3x^2-24x-5=0$

11. $x^3-12x-5=0$

12. $2x^3-3x^2-12x+12=0$

13. $x^3-3x^2+1,5=0$

14. $x^3+3x^2-24x-3=0$

15. $2x^3+9x^2-4=0$

16. $x^3+3x^2-1=0$

17. $x^3-12x+6=0$

18. $2x^3-3x^2-12x+10=0$

19. $x^3-3x^2+2,5=0$

20. $x^3+3x^2-3,5=0$

21. $x^3-3x^2-24x-8=0$

22. $x^3-12x+10=0$

23. $2x^3-3x^2-12x+1=0$

24. $x^3-4x^2+2=0$

25. $x^3+3x^2-24x+1=0$

26. $2x^3+9x^2-6=0$

27. $x^3-3x^2-24x+10=0$

28. $x^3-12x-10=0$

29. $2x^3-3x^2-12x+8=0$

30. $x^3-3x^2+3,5=0$

Варианты систем линейных алгебраических уравнений к лабораторной работе №2

1. $\begin{cases}4,2x_1+1,3x_2+2,7x_3=8,5,\\6,3x_1+10,7x_2+2,1x_3=11,9,\\3,4x_1+2,7x_2+6,9x_3=5,5.\end{cases}$

2. $\begin{cases}3,5x_1+0,9x_2+1,3x_3=6,4,\\6,4x_1+11,5x_2+2,7x_3=8,4,\\5,4x_1+3,1x_2+12,7x_3=6,7.\end{cases}$

3. $\begin{cases}2,3x_1+0,2x_2+1,4x_3=3,5,\\4,6x_1+11,1x_2+3,4x_3=8,4,\\5,3x_1+2,4x_2+9,1x_3=6,3.\end{cases}$

4. $\begin{cases}4,9x_1+3,2x_2+0,9x_3=8,1,\\5,4x_1+8,9x_2+2,4x_3=7,3,\\6,1x_1+1,2x_2+9,8x_3=5,5.\end{cases}$

5. $\begin{cases}9,2x_1+2,6x_2+5,4x_3=6,7,\\3,6x_1+4,7x_2+0,9x_3=3,4,\\2,8x_1+6,4x_2+12,3x_3=7,4.\end{cases}$

6. $\begin{cases}5,8x_1+2,6x_2+1,7x_3=4,1,\\6,7x_1+14,1x_2+3,2x_3=4,5,\\3,9x_1+5,4x_2+10,6x_3=7,8.\end{cases}$

7. $\begin{cases}3,5x_1+1,2x_2+0,9x_3=1,6,\\5,6x_1+8,4x_2+2,3x_3=4,6,\\4,6x_1+1,3x_2+7,5x_3=6,5.\end{cases}$

8. $\begin{cases}6,3x_1+3,4x_2+2,1x_3=5,4,\\5,6x_1+7,8x_2+1,3x_3=3,5,\\1,8x_1+5,7x_2+9,3x_3=4,9.\end{cases}$

$x_1 = 1,225$ корнем заданного уравнения с точностью до ε. Для этого находим

$$|x_1 - x_0| = |1,15 - 1,225| = 0,075 > \varepsilon = 0,01.$$

Таким образом, указанная разница $|x_1 - x_0|$ больше $\varepsilon = 0,01$, поэтому процесс половинного деления продолжается. Из двух отрезков $[1,15;1,225]$ и $[1,225;1,3]$ выбираем один так, как указанно выше. Находим $F(1,225) = 1,225^3 + 1,225^2 - 3 = 0,3389 > 0$, т.е. выбираем отрезок $[1,15;1,225]$. Изображаем этот отрезок на рисунке 4.

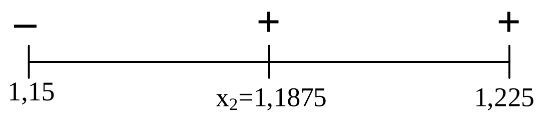

Рис. 4.

Разделим отрезок $[1,15;1,225]$ пополам точкой $x_2 = \dfrac{1,15 + 1,225}{2} = 1,1875.$ Находим $|x_2 - x_1| = |1,1875 - 1,225| = 0,0375 > \varepsilon = 0,01$ т.е. процесс половинного деления продолжаем. Вычисляем $F(1,1875) = 1,1875^3 + 1,1875^2 - 3 = 0,0847 > 0$ и выбираем отрезок $[1,15;1,1875]$. Изобразим этот отрезок на рисунке 5. Разделим отрезок $[1,15;1,1875]$ пополам точкой $x_3 = \dfrac{1,15 + 1,1875}{2} = 1,1688$

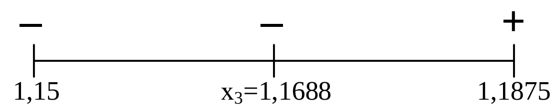

Рис. 5.

Находим $|x_3 - x_2| = |1,1688 - 1,1875| = 0,0187 > \varepsilon$, т.е. процесс половинного деления продолжаем. Вычисляем $F(1,1688) = 1,1688^3 + 1,1688^2 - 3 = -0,0372 < 0$ и выбираем отрезок $[1,1688;1,1875]$. Изобразим этот отрезок на рисунке 6.

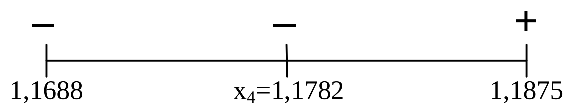

Рис.6.

Разделим отрезок $[1,1688;1,1875]$ пополам точкой $x_4 = \dfrac{1,1688 + 1,1875}{2} = 1,1782$. Находим $|x_4 - x_3| = |1,1782 - 1,1688| = 0,0094 < \varepsilon = 0,01$ и поэтому процесс половинного деления закончен.

Итак, согласно методу половинного деления приближенным корнем заданного уравнения является $r = x_4 = 1,1782$.

2. *Метод хорд.*

Согласно методу хорд, необходимо найти $F'(x)$ и $F''(x)$ в какой либо точке заданного отрезка.

Для упрощения дальнейших вычислений будем рассматривать отрезок $[1;1,2]$, т.к. по методу половинного деления корень $r \in [1;1,2]$. Находим $F'(x) = 3x^2 + 2x$ и $F''(x) = 6x + 2$, а также вычислим значения этих производных, например, в точке $x = 1,1 \in [1;1,2]$, т.е.

$$F'(1,1) = 3 \cdot 1,1^2 + 2 \cdot 1,1 = 5,83 > 0,$$

$$F'(1,1) = 6 \cdot 1,1 + 2 = 8,6 > 0.$$

Как видим, первая и вторая производная одного знака (больше нуля), поэтому, согласно I-му

После этого на одном чертеже строят графики исходной функции $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3(2 + 3x)}$, прямую $\tilde{y} = 1,76071 - 0,84830x.$ и параболу $\tilde{y} = 3,97739 - 4,38419x + 1,16312x^2$ на заданном отрезке $[0,5;2,54]$.

Графики заданной функции, прямой и параболы изображены на рис 7. На рисунке видно, что парабола лучше «отслеживает» точки исходной табличной функции по сравнению с прямой. Так, в данном случае лучшей для приближения заданной функции является параболическая зависимость (из двух предложенных по заданию видов зависимостей), что подтверждается величинами погрешностей аппроксимации - погрешности для параболы меньше погрешностей для прямой.

Таблица 3.

i	x_i	y_i	y_i^2	$\tilde{y} = 1,76071 - 0,8483x$		$\tilde{y} = 3,97739 - 4,38419x + 1,16312x^2$	
				$\tilde{y}_i$	$\varepsilon_i^2 = (y_i - \tilde{y}_i)^2$	$\tilde{y}_i$	$\varepsilon_i^2 = (y_i - \tilde{y}_i)^2$
0	0,50	2,85714	8,16325	1,33656	2,31216	2,07608	0,61005
1	0,67	1,20135	1,44324	1,19235	0,00008	1,56211	0,13015
2	0,84	0,63665	0,40532	1,04814	0,16932	1,11537	0,22917
3	1,01	0,38980	0,15194	0,90393	0,26433	0,73586	0,11976
4	1,18	0,26283	0,06908	0,75972	0,24690	0,42357	0,02584
5	1,35	0,18962	0,03596	0,61551	0,18138	0,17852	0,00012
6	1,52	0,14370	0,02065	0,47129	0,10732	0,00069	0,02045
7	1,69	0,11300	0,01277	0,32708	0,04583	-0,10990	0,04968
8	1,86	0,09143	0,00836	0,18287	0,00836	-0,15327	0,05988
9	2,03	0,07567	0,00573	0,03866	0,00137	-0,12941	0,04206
10	2,20	0,06377	0,00407	-0,10555	0,02867	-0,03833	0,01042
11	2,37	0,05456	0,00298	-0,24976	0,09261	0,11999	0,00428
12	2,54	0,04727	0,00223	-0,39397	0,19469	0,34553	0,08896
$\sum$	19,76	6,12679	10,32558	-	3,65302	-	1,39082

Вычислим значения погрешностей для прямой:

$$\Phi(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{12} \varepsilon_i^2 = 3,65302,$$

$$\Delta y = \sqrt{\frac{\Phi(a_0, a_1)}{n+1}} = \sqrt{\frac{3,65302}{13}} = 0,5301,$$

$$\Delta y = \sqrt{\frac{\Phi(a_0, a_1)}{\sum_{i=0}^{12} y_i^2}} \cdot 100\% = \sqrt{\frac{3,65302}{10,32558}} \cdot 100\% = 57,98\%.$$

Вычислим значения погрешностей для параболы:

$$\Phi(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{12} \varepsilon_i^2 = 1,39082,$$

$$\Delta y = \sqrt{\frac{\Phi(a_0, a_1, a_2)}{n+1}} = \sqrt{\frac{1,39082}{13}} = 0,3271,$$

$$\Delta y = \sqrt{\frac{\Phi(a_0, a_1, a_2)}{\sum_{i=0}^{12} y_i^2}} \cdot 100\% = \sqrt{\frac{1,39082}{10,32558}} \cdot 100\% = 36,70\%.$$

случаю, искомый корень будем вычислять по формуле (1.3), где $x_0 = a$ - начало отрезка $[1;1,2]$, т.е. $x_0 = 1, b = 1,2.$ Находим

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)(b - x_0)}{F(b) - F(x_0)} = 1 - \frac{F(1)(1,2-1)}{F(1,2) - F(1)} = 1 - \frac{-1 \cdot 0,2}{0,168 - (-1)} = 1,1712.$$

Значения функции $F(1)$ и $F(1,2)$ находим согласно выражению (1.6), т.е.

$$F(1) = 1^3 + 1^2 - 3 = -1,$$

$$F(1,2) = 1,2^3 + 1,2^2 - 3 = 0,168.$$

Проверим выполнение условия (1.2). А именно,

$$|x_1 - x_0| = |1,1712 - 1| = 0,1712 > \varepsilon = 0,01,$$

а значит, данный процесс продолжаем и аналогично по формуле (1.3) находим

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)(b - x_1)}{F(b) - F(x_1)} = 1,1712 - \frac{F(1,1712)(1,2 - 1,1712)}{F(1,2) - F(1,1712)} = 1,1712 - \frac{-0,0217 \cdot 0,0288}{0,168 - (-0,0217)} = 1,1745.$$

$$F(1,1712) = 1,1712^3 + 1,1712^2 - 3 = -0,0217.$$

Вновь проверяем выполнение условия (1.2):

$$|x_2 - x_1| = |1,1745 - 1,1712| = 0,0033 < \varepsilon = 0,01.$$

таким образом, условие (1.2) выполняется и данный процесс можно завершить.

Итак, согласно методу хорд, приближенным корнем заданного уравнения будет $r = x_2 = 1,1745.$

3. *Метод касательных*.

В данном методе, так же как и в методе хорд, мы будем использовать расчетную формулу, соответствующую I- му случаю (первая и вторая производная одного знака), т.е. формулу (1.5), при $x_0 = b = 1,2.$ Находим

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} = 1,2 - \frac{F(1,2)}{F'(1,2)} = 1,2 - \frac{0,168}{6,72} = 1,1750,$$

где $F(1,2) = 0,168$, а $F'(1,2)$ находим при помощи выражения $F'(x) = 3x^2 + 2x$, т.е. $F'(1,2) = 3 \cdot 1,2^2 + 2 \cdot 1,2 = 6,72$.

Далее проверяем выполнение условия (1.2):

$$|x_1 - x_0| = |1,1750 - 1,2| = 0,025 > \varepsilon = 0,01,$$

а значит, данный процесс продолжаем. Находим

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)} = 1,175 - \frac{F(1,1750)}{F'(1,1750)} = 1,1750 - \frac{0,0029}{6,4919} = 1,1746.$$

$$F(1,1750) = 1,1750^3 + 1,1750^2 - 3 = 0,0029,$$

$$F'(1,1750) = 3 \cdot 1,1750^2 + 2 \cdot 1,1750 = 6,4919.$$

Вновь проверяем выполнение условия (2):

$$|x_2 - x_1| = |1,1746 - 1,1750| = 0,0004 < \varepsilon = 0,02.$$

Итак, условие (1.2) выполняется, а значит, данный процесс можно завершить. Таким образом, приближенным корнем заданного уравнения является $r = x_2 = 1,1745.$

Ответ метода:

1. половинного деления $r = x_4 = 1,1782;$
2. хорд $r = x_2 = 1,1745;$
3. касательных $r = x_2 = 1,1745.$

Лабораторная работа №2

1. Решить заданную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 7,6x_1+0,5x_2+2,4x_3=1,9, \\ 2,2x_1+9,1x_2+4,4x_3=9,7, \\ -1,3x_1+0,2x_2+5,8x_3=-1,4, \end{cases}$$

методом Гаусса (путем приведения матрицы системы к треугольному виду). Для проверки полученного решения вычислить значения невязок.
2. Используя элементарные преобразования привести (при необходимости) заданную систему линейных алгебраических уравнений к виду, удобному для применения итерационного метода Гаусса-Зейделя, и решить систему этим методом, вычисляя на каждом шаге итерационного процесса значения невязок с точностью $\varepsilon = 0,1$.
3. Сравнить результаты пунктов 1 и 2.

Краткие теоретические сведения

Системой линейных уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется конечная совокупность уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \qquad \textbf{(2.1)}$$

где a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, b_i свободные члены.

Решением системы уравнений (2.1) называется упорядоченный набор чисел, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяющий всем уравнениям данной системы, т.е. обращающий их в верные равенства.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если более одного решения. Неопределенная система линейных уравнений всегда имеет бесконечное множество решений.

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если каждое решение первой системы является решением второй, и обратно.

К *элементарным преобразованиям* системы относятся:

1. перестановка двух уравнений системы;
2. умножение обеих частей одного из уравнений на любое число отличное от нуля;
3. прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженного на некоторое число.

Элементарные преобразования переводят данную систему уравнений в эквивалентную систему.

Любую систему линейных уравнений при помощи конечного числа элементарных преобразований можно привести к ступенчатому, в частности, к треугольному, виду. Особенность такой системы заключается в том, что в левой части каждого последующего уравнения число членов уменьшается на один. Например,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ \quad 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ \quad\quad 6x_3 + x_4 = -4, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1-2x_2+5x_3=19, \\ \quad 3x_2-4x_3=-15, \\ \quad\quad 2x_3=6. \end{cases}$$

Этот прием называется прямым ходом метода Гаусса. А нахождение переменных, начиная с последнего уравнения системы и заканчивая первым, называется обратным ходом метода Гаусса.

Для нахождения уравнения прямой $\tilde{y}=a_0+a_1x$ из таблицы вставляем данные в систему

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i, \\ a_0\sum_{i=0}^{n} x_i + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} 13,00a_0+19,76a_1=6,12679, \\ 19,76a_0+35,295a_1=4,85082. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $a_0=1,76071$; $a_1=-0,84830$. Следовательно, уравнение эмпирической прямой имеет вид: $\tilde{y}=1,76071-0,84830x$.

Для нахождения уравнения параболы $\tilde{y}=a_0'+a_1'x+a_2'x^2$ из таблицы 2 вставляем данные в систему

$$\begin{cases} a_0'(n+1)+a_1'\sum_{i=0}^{n} x_i + a_2'\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i, \\ a_0'\sum_{i=0}^{n} x_i + a_1'\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2'\sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i, \\ a_0'\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1'\sum_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2'\sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} 13a_0'+19,76a_1'+35,295a_2'=6,12679, \\ 19,76a_0'+35,295a_1'+69,6382a_2'=4,85082, \\ 35,295a_0'+69,6382a_1'+146,10699a_2'=5,01493. \end{cases}$$

Решим систему и получим: $a_0=3,97739$; $a_1=-4,38419$; $a_2=1,16312$. Таким образом, уравнение эмпирической параболы имеет вид: $\tilde{y}=3,97739-4,38419x+1,16312x^2$. Для вычисления погрешностей заполним таблицу 3.

Далее, сравнивают полученные результаты, и указывают - какая из полученных приближенных зависимостей лучше и почему.

Решение.

Пусть задана функция $y=\dfrac{x^2+1}{x^3\left(2+3x\right)}$

на отрезке $\left[0,5;2,54\right]$ при $n=12$. Вычислим шаг $h=\dfrac{b-a}{12}=\dfrac{2,54-0,5}{12}=0,17$. Тогда $x_0=a=0,5,\ x_1=x_0+h=0,5+0,17=0,67,\ x_2=x_1+h=0,67+0,17=0,84$ и.т.д. $x_{12}=b=2,54$. Далее находим $y_i=\dfrac{x_i^2+1}{x_i^3\left(2+3x_i\right)}$.Например,

$y_0=\dfrac{x_0^2+1}{x_0^3\left(2+3x_0\right)}=\dfrac{0,5^2+1}{0,5^3\left(2+3\cdot0,5\right)}=2,85714,\ y_1=\dfrac{x_1^2+1}{x_1^3\left(2+3x_1\right)}=\dfrac{0,67^2+1}{0,67^3\left(2+3\cdot0,67\right)}=1,20135$ и.т.д.

Заполним таблицу 2.

Таблица 2.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
0	0,5	2,85714	0,2500	0,12500	0,06250	1,42857	0,71429
1	0,67	1,20135	0,4489	0,30076	0,20151	0,80490	0,53929
2	0,84	0,63665	0,7056	0,59270	0,49787	0,53479	0,44922
3	1,01	0,38980	1,0201	0,03030	1,04060	0,39370	0,39763
4	1,18	0,26283	1,3924	0,64303	1,93878	0,31014	0,36596
5	1,35	0,18962	1,8225	0,46038	3,32151	0,25599	0,34558
6	1,52	0,14370	2,3104	3,51181	5,33795	0,21842	0,33200
7	1,69	0,11300	2,8561	4,82681	8,15731	0,19097	0,32274
8	1,86	0,09143	3,4596	6,43486	11,96883	0,17006	0,31631
9	2,03	0,07567	4,1209	8,36543	16,98182	0,15361	0,31183
10	2,20	0,06377	4,8400	10,64800	23,42560	0,14029	0,30865
11	2,37	0,05456	5,6169	13,31210	31,54957	0,12931	0,30646
12	2,54	0,04727	6,4516	16,38710	41,62314	0,12007	0,30497
$\sum$	19,76	6,12679	35,2950	69,63820	146,10699	4,85082	5,01493

Практически удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Методы решения систем линейных уравнений делятся на две группы – прямые и итерационные. Прямые методы используют конечные соотношения (формулы) для вычисления неизвестных. Они дают решение после выполнения заранее известного числа операций. Эти методы сравнительно просты и универсальны, т.е. пригодны для решения широкого класса линейных систем. Существенным недостатком прямых методов является накапливание погрешностей в процессе решения, поскольку вычисления на любом этапе используют результаты предыдущих операций.

Прямые методы решения линейных систем иногда называют точными, поскольку решение выражается в виде точных формул через коэффициенты системы. К прямым методом относятся правило Крамера (решение систем при помощи определителей), метод Гаусса (приведение матрицы системы к треугольному или ступенчатому виду) и др.

Итерационные методы – это методы последовательных приближений. В них необходимо задать некоторое приближенное решение – начальное приближение. После этого с помощью некоторого алгоритма проводится один цикл вычислений, называемый итерацией. В результате итерации находят новое приближение. Итерации проводятся до получения решения с требуемой точностью.

Одним из самых распространенных итерационных методов, отличающийся простотой и легкостью программирования, является метод Гаусса-Зейделя. Для решения системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases} \qquad \textbf{(2.2)}$$

итерационным методом Гаусса-Зейделя диагональные элементы a_{11},a_{22},a_{33} должны быть отличны от нуля (в противном случае можно переставить уравнения системы). Далее необходимо выразить неизвестные x_1,x_2,x_3 соответственно из 1-го, 2-го, 3-го уравнений системы (2.2):

$$x_1=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3), \qquad \textbf{(2.3)}$$

$$x_2=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1-a_{23}x_3), \qquad \textbf{(2.4)}$$

$$x_3=\frac{1}{a_{33}}(b_3-a_{31}x_1-a_{32}x_2). \qquad \textbf{(2.5)}$$

Для дальнейшего решения задаются некоторые начальные (нулевые) приближения неизвестных: $x_1=x_1^{(1)},x_2=x_2^{(1)},x_3=x_3^{(1)}$. Подставляя эти значения в правую часть выражения (2.3), получаем новое (первое) приближение для x_1:

$$x_1^{(1)}=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2^{(0)}-a_{13}x_3^{(0)}).$$

Используя это значение для $x_1^{(1)}$ и приближение $x_3^{(0)}$ для x_3, находим из (2.4) первое приближение для x_2:

$$x_2^{(1)}=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1^{(1)}-a_{23}x_3^{(0)}).$$

И наконец, используя вычисленные значения $x_1=x_1^{(1)},x_2=x_2^{(1)}$, находим с помощью выражения (2.5) первое приближение для x_3:

$$x_3^{(1)}=\frac{1}{a_{33}}(b_3-a_{31}x_1^{(1)}-a_{32}x_2^{(1)}).$$

На этом заканчивается первая итерация системы (2.3)-(2.5). Используя, теперь, значения

$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$, проводится вторая итерация, в результате которой будут найдены вторые приближения к решению: $x_1 = x_1^{(2)}, x_2 = x_2^{(2)}, x_3 = x_3^{(2)}$ и т.д. Приближение с номером k можно представить в виде:

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}),$$
$$x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)}),$$
$$x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}).$$

После каждой k - той итерации вычисляются значения свободных членов системы (2.2):

$$b_1^{(k)} = a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)},$$
$$b_2^{(k)} = a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)},$$
$$b_3^{(k)} = a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} + a_{33}x_3^{(k)}$$

и значения невязок $r_1^{(k)} = b_1 - b_1^{(k)}, r_2^{(k)} = b_2 - b_2^{(k)}, r_3^{(k)} = b_3 - b_3^{(k)}$. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения всех невязок, взятые по модулю, не станут меньше либо равны заданной точности. Т.е.

$$\left|r_1^{(k)}\right| = \left|b_1 - b_1^{(k)}\right| \le \varepsilon,$$
$$\left|r_2^{(k)}\right| = \left|b_2 - b_2^{(k)}\right| \le \varepsilon,$$
$$\left|r_3^{(k)}\right| = \left|b_3 - b_3^{(k)}\right| \le \varepsilon.$$

Если хотя бы одна из невязок k-той итерации, взятая по модулю, больше заданной точности ε, то итерационный процесс необходимо продолжить.

Для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы были не меньше сумм модулей всех остальных коэффициентов:

$$\begin{aligned} |a_{11}| &\ge |a_{12}| + |a_{13}|, \\ |a_{22}| &\ge |a_{21}| + |a_{23}|, \\ |a_{33}| &\ge |a_{31}| + |a_{32}|. \end{aligned} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Эти условия являются достаточными для сходимости метода, но они не являются необходимыми, т.е. для некоторых систем итерации сходятся и при нарушении условий (2.6).

Решение.

1. Решим заданную систему методом Гаусса, в основе которого лежит приведение матрицы системы к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7{,}6 & 0{,}5 & 2{,}4 & 1{,}9 \\ 2{,}2 & 9{,}1 & 4{,}4 & 9{,}7 \\ -1{,}3 & 0{,}2 & 5{,}8 & -1{,}4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7{,}6 & 0{,}5 & 2{,}4 & 1{,}9 \\ 0 & 68{,}08 & 28{,}16 & 69{,}54 \\ 0 & 2{,}17 & 47{,}2 & -8{,}17 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7{,}6 & 0{,}5 & 2{,}4 & 1{,}9 \\ 0 & 68{,}08 & 28{,}16 & 69{,}54 \\ 0 & 0 & 3151{,}3248 & -706{,}9520 \end{array}\right).$$

В результате последовательного исключения неизвестных матрица системы приведена к треугольному виду. На этом заканчивается этап прямого хода вычислений по методу Гаусса. На следующем этапе, который носит название обратного хода метода Гаусса, из третьей строки последней матрицы находим

$$3151{,}3248x_3 = -706{,}9520 \Rightarrow x_3 = -0{,}2243.$$

Из второй и первой строк последней матрицы последовательно находим

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
0 1 2 . . . n							
Σ	$\sum_{i=0}^{n} x_i$	$\sum_{i=0}^{n} y_i$	$\sum_{i=0}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=0}^{n} x_i^3$	$\sum_{i=0}^{n} x_i^4$	$\sum_{i=0}^{n} x_i y_i$	$\sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i$

Последняя строка таблицы представляет собой суммы элементов соответствующего столбца. После этого, системы решаются любым известным методом, например, методом Крамера (при помощи определителей) или методом Гаусса (в матрицах). Найденные коэффициенты вставляют в соответствующие уравнения прямой $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$ и параболы $\tilde{y} = a_0' + a_1' x + a_2' x^2$.

Чтобы выбрать из двух найденных зависимостей (прямолинейной и параболической) - наилучшую, вычисляют погрешности полученных зависимостей:

а) критерий метода наименьших квадратов

$$\Phi(a_0, ..., a_m) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2.$$

(Для прямой $m = 1$, а для параболы $m = 2$);

б) абсолютную среднеквадратическую ошибку

$$\Delta y = \sqrt{\frac{\Phi(a_0, ..., a_m)}{n+1}};$$

в) относительную среднеквадратическую ошибку

$$\delta y = \sqrt{\frac{\Phi(a_0, a_1, ..., a_m)}{\sum_{i=0}^{n} y_i^2}} \cdot 100\%.$$

Данные для расчета погрешностей оформляют в виде следующей таблицы:

i	x_i	y_i	y_i^2	$\tilde{y} = a_0 + a_1 x$		$\tilde{y} = a_0' + a_1' x + a_2' x^2$	
				$\tilde{y}_i$	$\varepsilon_i^2 = (y_i - \tilde{y}_i)^2$	$\tilde{y}_i$	$\varepsilon_i^2 = (y_i - \tilde{y}_i)^2$
0 1 2 . n							
Σ							

Лабораторная работа №4

Для заданной функции $y = \dfrac{x^2+1}{x^3(2+3x)}$ на отрезке $[0,5;2,54]$ и значения $n = 12$ построить прямую и параболу по методу наименьших квадратов. Оценить погрешности полученных аппроксимаций (найденных приближенных зависимостей); построить исходную табличную функцию, прямую и параболу на одном чертеже, сделать вывод по полученным результатам.

Краткие теоретические сведения

Анализ экономических и технических процессов приводит к необходимости выявления существенных факторов, влияющих на исследуемый процесс, а также к выбору формы связи между факторами и к оценке параметров полученных уравнений связи.

Если уравнение связи между двумя варьируемыми величинами x и y представляет собой сложную функциональную зависимость $y = f(x)$, то ее можно на заданном отрезке $[a;b]$ приближенно заменить более простыми математическими зависимостями такими, например, как прямолинейная или параболическая. Для построения таких зависимостей существует ряд методов. Рассмотрим наиболее распространенный метод – метод наименьших квадратов.

Для заданной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и значения n вычисляют приближенные значения функции $y_i = f(x_i)$ $i = 0,1,2,...,n$, округляя их до пяти знаков после запятой, где $x_i = x_0 + ih$; $x_0 = a$; $x_n = b$, $h = (b-a)/n$.

Записывают уравнения прямой $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$ и параболы $\tilde{y} = a_0' + a_1' x + a_2' x^2$. Для нахождения уравнения прямой $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$ по методу наименьших квадратов необходимо решить систему линейных уравнений второго порядка с двумя неизвестными a_0 и a_1:

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Для нахождения уравнения параболы $\tilde{y} = a_0' + a_1' x + a_2' x^2$ по методу наименьших квадратов необходимо решить систему линейных уравнений третьего порядка с тремя неизвестными a_0', a_1', a_2':

$$\begin{cases} a_0'(n+1) + a_1' \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_2' \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i, \\ a_0' \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_1' \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2' \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i y_i, \\ a_0' \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1' \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2' \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Чтобы решить представленные две системы уравнения необходимо выполнить расчеты, представляющие собой следующую таблицу:

$$68,06x_2 + 28,16x_3 = 69,54 \Rightarrow 68,06x_2 + 28,16\cdot(-0,2243) = 69,54 \Rightarrow x_2 = 1,1146;$$

$$7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9 \Rightarrow 7,6x_1 + 0,5\cdot 1,1146 + 2,4\cdot(-0,2243) = 1,9 \Rightarrow x_1 = 0,2475.$$

Таким образом, получено следующее решение заданной системы:

$$x_1 = 0,2475,$$
$$x_2 = 1,1146,$$
$$x_3 = -0,2243.$$

Для проверки полученного решения вычислим значения невязок:

$$r_1 = b_1 - \tilde{b}_1,$$
$$r_2 = b_2 - \tilde{b}_2,$$
$$r_3 = b_3 - \tilde{b}_3.$$

Предварительно найдем величины $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$, которые являются значениями левых частей уравнений системы при подстановке в них вычисленных значений неизвестных x_1, x_2, x_3.

$$\tilde{b}_1 = 7,6\cdot 0,2475 + 0,5\cdot 1,1146 + 2,4\cdot(-0,2243) = 1,89998,$$
$$\tilde{b}_2 = 2,2\cdot 0,2475 + 9,1\cdot 1,1146 + 4,4\cdot(-0,2243) = 9,70044,$$
$$\tilde{b}_3 = -1,3\cdot 0,2475 + 0,2\cdot 1,1146 + 5,8\cdot(-0,2243) = -1,39977.$$

Вычислим невязки:

$$r_1 = b_1 - \tilde{b}_1 = 1,9 - 1,89998 = 0,00002,$$
$$r_2 = b_2 - \tilde{b}_2 = 9,7 - 9,70044 = 0,0004,$$
$$r_3 = b_3 - \tilde{b}_3 = -1,4 - (-1,39977) = -0,00023.$$

Все полученные невязки достаточно малы, поэтому решение заданной системы методом Гаусса найдено верно.

2. Рассмотрим ту же систему:

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9, \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7, \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4. \end{cases}$$

Решим заданную систему уравнений методом Гаусса-Зейделя, с точностью $\varepsilon = 0,1$. Для начала необходимо преобразовать исходную систему к виду, удобному для применения метода Гаусса-Зейделя. В этом случае диагональные коэффициенты системы должны превосходить по модулю сумму всех других (не диагональных) коэффициентов для каждого уравнения. Как мы видим, наша система уже имеет диагональный вид, т.к.

$$|7,6| > |0,5| + |2,4|,$$
$$|9,1| > |2,2| + |4,4|,$$
$$|5,8| > |-1,3| + |0,2|.$$

Так как для данной системы выполнены достаточные условия сходимости метода Гаусса-Зейделя, то итерационный процесс будет сходиться к единственному решению системы при любом начальном приближении. Основная идея метода Гаусса-Зейделя состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса приближенное значение любого неизвестного, полученного к данному моменту, сразу же используется для расчета приближенного значения другого неизвестного.

Выразим из первого уравнения системы x_1, из второго x_2, из третьего x_3.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}25 - 0{,}0658x_2 - 0{,}3158x_3, \\ x_2 = 1{,}0659 - 0{,}2418x_1 - 0{,}4835x_3, \\ x_3 = -0{,}2414 + 0{,}2241x_1 - 0{,}0345x_2. \end{cases}$$

Возьмем в качестве начального приближения значения $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$. Имеем 1-й шаг итерационного процесса. Нулевое (начальное) приближение задано. Находим первое приближение:

$$x_1^{(1)} = 0{,}25 - 0{,}0658x_2^{(0)} - 0{,}3158x_3^{(0)},$$
$$x_2^{(1)} = 1{,}0659 - 0{,}2418x_1^{(1)} - 0{,}4835x_3^{(0)},$$
$$x_3^{(1)} = -0{,}2414 + 0{,}2241x_1^{(1)} - 0{,}0345x_2^{(1)}.$$

Подставляя числовые значения получаем:

$$x_1^{(1)} = 0{,}25 - 0{,}0658 \cdot 0 - 0{,}3158 \cdot 0 = 0{,}25,$$
$$x_2^{(1)} = 1{,}0659 - 0{,}2418 \cdot 0{,}25 - 0{,}4835 \cdot 0 = 1{,}0055,$$
$$x_3^{(1)} = -0{,}2414 + 0{,}2241 \cdot 0{,}25 - 0{,}0345 \cdot 1{,}0055 = -0{,}2201.$$

Вычислим значения $\tilde{b}_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, 3)$, путем подстановки значений $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ в левые части исходной системы, тогда получим:

$$\tilde{b}_1^{(1)} = 7{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}5 \cdot 1{,}0055 + 2{,}4 \cdot (-0{,}2201) = 1{,}87451,$$
$$\tilde{b}_2^{(1)} = 2{,}2 \cdot 0{,}25 + 9{,}1 \cdot 1{,}0055 + 4{,}4 \cdot (-0{,}2201) = 8{,}73161,$$
$$\tilde{b}_3^{(1)} = -1{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 1{,}0055 + 5{,}8 \cdot (-0{,}2201) = -1{,}40048.$$

Найдем невязки первой итерации:

$$\left|r_1^{(1)}\right| = \left|b_1 - \tilde{b}_1^{(1)}\right| = \left|1{,}9 - 1{,}87451\right| = 0{,}02549 < 0{,}1,$$
$$\left|r_1^{(1)}\right| = \left|b_1 - \tilde{b}_1^{(1)}\right| = \left|9{,}7 - 8{,}73161\right| = 0{,}96839 < 0{,}1,$$
$$\left|r_1^{(1)}\right| = \left|b_1 - \tilde{b}_1^{(1)}\right| = \left|-1{,}4 - (-1{,}40048)\right| = 0{,}00048 < 0{,}1.$$

Как видим, значения невязок второго и третьего уравнения превосходит заданную точность, значит, итерационный процесс необходимо продолжить.

2-й шаг итерационного процесса. Находим второе приближение, используя $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ первого шага итерационного процесса:

$$x_1^{(2)} = 0{,}25 - 0{,}0658x_2^{(1)} - 0{,}3158x_3^{(1)},$$
$$x_2^{(2)} = 1{,}0659 - 0{,}2418x_1^{(2)} - 0{,}4835x_3^{(1)},$$
$$x_3^{(2)} = -0{,}2414 + 0{,}2241x_1^{(2)} - 0{,}0345x_2^{(2)}.$$

Подставляя числовые значения находим:

$$x_1^{(2)} = 0{,}25 - 0{,}0658 \cdot 1{,}0055 - 0{,}3158 \cdot (-0{,}2201) = 0{,}2533,$$
$$x_2^{(2)} = 1{,}0659 - 0{,}2417 \cdot 0{,}2533 - 0{,}4835 \cdot (-0{,}2201) = 1{,}1111,$$
$$x_3^{(2)} = -0{,}2414 + 0{,}2241 \cdot 0{,}2533 - 0{,}0345 \cdot 1{,}1111 = -0{,}2230.$$

Вычислим значения $\tilde{b}_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, 3)$ путем подстановки значений $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}$ в левые части исходной системы, тогда получим:

$$\tilde{b}_1^{(2)} = 7{,}6 \cdot 0{,}2533 + 0{,}5 \cdot 1{,}1111 + 2{,}4 \cdot (-0{,}2230) = 1{,}94543,$$
$$\tilde{b}_2^{(2)} = 2{,}2 \cdot 0{,}2533 + 9{,}1 \cdot 1{,}1111 + 4{,}4 \cdot (-0{,}2230) = 9{,}68707,$$
$$\tilde{b}_3^{(2)} = -1{,}3 \cdot 0{,}2533 + 0{,}2 \cdot 1{,}1111 + 5{,}8 \cdot (-0{,}2230) = -1{,}40047.$$

Вычислим значения невязок на втором шаге итерации:

$$N(x_{10} + th) = y_{10} + t\Delta y_9 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_8 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_7 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{3!}\Delta^4 y_6 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{t(t+1)(t+2)\ldots(t+9)}{10!}\Delta^{10} y_0, \qquad \textbf{(3.9)}$$

где $t = \dfrac{x_\beta - x_{10}}{h} = \dfrac{2{,}795 - 2{,}90}{0{,}21} = -0{,}5.$

Подставляя в (3.9) вместо t и разностей $\Delta y_9, \Delta^2 y_8, \Delta^3 y_7, \ldots \Delta^{10} y_0$ их значения из таблицы №1 (они таблице выделены жирным шрифтом, так например, $\Delta y_9 = -0{,}15319, \Delta^2 y_8 = 0{,}02050$ и.т.д.) вычислим:

$$N(x_{10} + tn) = N(2{,}795) = 2{,}75462 + (-0{,}5)(-0{,}15319) + \frac{-0{,}5(-0{,}5+1)}{2!}0{,}02050 +$$
$$+ \frac{-0{,}5(-0{,}5+1)(-0{,}5+2)}{3!}(-0{,}00389) + \frac{-0{,}5(-0{,}5+1)(-0{,}5+2)(-0{,}5+3)}{4!}0{,}00078 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{-0{,}5(-0{,}5+1)(-0{,}5+2)\ldots(-0{,}5+9)}{10!}0{,}00116 = 2{,}83120.$$

Итак, получены следующие приближения:

$$L(1{,}325) = 4{,}61697; \quad N(1{,}325) = 4{,}62472; \quad N(2{,}795) = 2{,}83120.$$

В то же время истинные значения функции:

$$f(1{,}325) = \frac{0{,}5 \cdot 1{,}325 + 7}{\sqrt{1{,}325^2 + 1}} = 4{,}61594; \; f(2{,}795) = \frac{0{,}5 \cdot 2{,}795 + 7}{\sqrt{2{,}795^2 + 1}} = 2{,}82887.$$

Найдем ошибки аппроксимации:

для многочлена Лагранжа $\varepsilon = \left|L(x_\alpha) - y(x_\alpha)\right| = \left|4{,}61697 - 4{,}61594\right| = 0{,}00103;$

для многочлена Ньютона I $\varepsilon = \left|N_I(x_\alpha) - y(x_\alpha)\right| = \left|4{,}62472 - 4{,}61594\right| = 0{,}00878;$

для многочлена Ньютона II $\varepsilon = \left|N_{II}(x_\beta) - y(x_\beta)\right| = \left|2{,}83120 - 2{,}82887\right| = 0{,}00233.$

Таблица №1

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$	$\Delta^7 y_i$	$\Delta^8 y_i$	$\Delta^9 y_i$	$\Delta^{10} y_i$	$\Delta^{11} y_i$	$\Delta^{12} y_i$
0	0,8	5,77843												
			-0,49806											
1	1,01	5,28037		0,04188										
			-0,45618		0,01140									
2	1,22	4,82419		0,05328		-0,01192								
			-0,40290		-0,00052		0,00714							
3	1,43	4,42129		0,05276		-0,00478		-0,00359						
			-0,35014		-0,00530		0,00355		0,00148					
4	1,64	4,07115		0,04746		-0,00123		-0,00211		-0,00025				
			-0,30268		-0,00653		0,00144		0,00123		-0,00055			
5	1,85	3,76847		0,04093		0,00021		-0,00088		-0,00080		**0,00116**		
			-0,26175		-0,00632		0,00056		0,00043		**0,00061**		-0,00157	
6	2,06	3,50672		0,03461		0,00077		-0,00045		**-0,00019**		-0,00041		0,00136
			-0,22714		-0,00555		0,00011		**0,00024**		0,00020		-0,00021	
7	2,27	3,27958		0,02906		0,00088		**-0,00021**		0,00001		-0,00062		
			-0,19808		-0,00467		**-0,00010**		0,00025		-0,00042			
8	2,48	3,08150		0,02439		**0,00078**		0,00004		-0,00041				
			-0,17369		**-0,00389**		-0,00006		-0,00016					
9	2,69	2,90781		**0,02050**		0,00072		-0,00012						
			-0,15319		-0,00317		-0,00018							
10	**2,90**	**2,75462**		0,01733		0,00054								
			-0,13586		-0,00263									
11	3,11	2,61876		0,01470										
			-0,12116											
12	3,32	2,49760												

конечные разности всех возможных порядков. Поместим полученную информацию в единую таблицу 1 (таблицу конечных разностей).

Многочлен Лагранжа для четырех узлов $(n=3)$ x_0, x_1, x_2, x_3 имеет вид:

$$L_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3. \qquad \mathbf{(3.7)}$$

Вычислим значение заданной функции с помощью многочлена Лагранжа в точке $x=x_\alpha=x_2+\frac{h}{2}=1{,}22+\frac{0{,}21}{2}=1{,}325.$ Для этого подставим в формулу (3.7) значения $x=1{,}325,\ x_0=0{,}8,\ x_1=1{,}01,\ x_2=1{,}22,\ x_3=1{,}43,\ y_0=5{,}77843,\ y_1=5{,}28037,\ y_2=4{,}82419,\ y_3=4{,}42129.$

Получим:

$$L_3(x_\alpha)=L_3(1{,}325)=\frac{(1{,}325-1{,}01)(1{,}325-1{,}22)(1{,}325-1{,}43)}{(0{,}8-1{,}01)(0{,}8-1{,}22)(0{,}8-1{,}43)}5{,}77843+$$
$$+\frac{(1{,}325-0{,}8)(1{,}325-1{,}22)(1{,}325-1{,}43)}{(1{,}01-0{,}8)(1{,}01-1{,}22)(1{,}01-1{,}43)}5{,}28037+\frac{(1{,}325-0{,}8)(1{,}325-1{,}01)(1{,}325-1{,}43)}{(1{,}22-0{,}8)(1{,}22-1{,}01)(1{,}22-1{,}43)}4{,}82419+$$
$$+\frac{(1{,}325-0{,}8)(1{,}325-1{,}01)(1{,}325-1{,}22)}{(1{,}43-0{,}8)(1{,}43-1{,}01)(1{,}43-1{,}22)}4{,}42129=4{,}61697.$$

Перейдем теперь к вычислениям по формулам Ньютона. Так как точка $x_\alpha=1{,}325$ находится в левой части отрезка $[\text{ő}_0;\text{ő}_n]=[0{,}8;3{,}32]$, то целесообразно использовать для вычисления приближенного значения функции в этой точке первую интерполяционную формулу Ньютона для Интерполирования вперед. При этом в качестве точки ő_0 берем ближайший к точке x_α узел слева - это будет точка $x_2=1{,}22$.

Разности, которые соответствуют интерполяционному многочлену Ньютона для интерполирования вперед при выбранной начальной точке x_2 подчеркнуты в таблице № 1 одной чертой. Тогда искомый многочлен Ньютона для интерполирования вперед запишется в виде:

$$N(x_2+tn)=y_2+t\Delta y_2+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2y_2+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3y_2+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4y_2+\ldots$$
$$\ldots.+\frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-9)}{10!}\Delta^{10}y_2, \qquad \mathbf{(3.8)}$$

где $t=\frac{(\text{ő}_\alpha-\text{ő}_2)}{h}=\frac{(1{,}325-1{,}22)}{0{,}21}=0{,}5.$

Подставляя в (3.8) вместо t и разностей $\Delta y_2,\Delta^2y_2,\Delta^3y_2,\ldots\Delta^{10}y_2$ их значения из таблицы №1 (они в таблице подчеркнуты одной чертой, так например, $\Delta y_2=-0{,}40290,\Delta^2y_2=0{,}05276$) вычислим:

$$N(x_2+th)=N(1{,}325)=4{,}82419+0{,}5\cdot(-0{,}40290)+\frac{0{,}5(0{,}5-1)}{2!}0{,}05276+\frac{0{,}5(0{,}5-1)(0{,}5-2)}{3!}(-{,}00530)+$$
$$=\frac{0{,}5(0{,}5-1)(0{,}5-2)(0{,}5-3)}{4!}(-0{,}00123)+\ldots\ldots+\frac{0{,}5(0{,}5-1)(0{,}5-2)\ldots(0{,}5-9)}{10!}(-0{,}00062)=4{,}62472.$$

Далее рассмотрим точку $x_\beta=x_{10}-\frac{h}{2}=2{,}90-\frac{0{,}21}{2}=2{,}795$. Эта точка находится в нижней части таблицы 1 (в правой части отрезка $[0{,}8;3{,}32]$). Поэтому для приближенного вычисления значения функции в точке $x_\beta=2{,}795$ целесообразно воспользоваться второй формулой Ньютона для интерполирования назад. Роль точки x_n в данном случае будет играть точка $x_{10}=2{,}90$, а разности, которые будут использованы для записи многочлена Ньютона подчеркнуты в таблице 1 двумя чертами. Тогда многочлен Ньютона для интерполирования назад запишется в виде:

$$\left|r_1^{(2)}\right|=\left|b_1-\tilde b_1^{(2)}\right|=\left|1{,}9-1{,}94543\right|=0{,}04543<0{,}1,$$
$$\left|r_1^{(2)}\right|=\left|b_1-\tilde b_1^{(2)}\right|=\left|9{,}7-9{,}68707\right|=0{,}01293<0{,}1,$$
$$\left|r_1^{(2)}\right|=\left|b_1-\tilde b_1^{(2)}\right|=\left|-1{,}4-(-1{,}40047)\right|=0{,}00047<0{,}1.$$

Для получения приближения условия точности выполнены, поэтому значения $x_1^{(2)},x_2^{(2)},x_3^{(2)}$ принимаем в качестве приближенного решения заданной системы с точностью $\varepsilon=0{,}1$.

3. Сравним результаты метода Гаусса и Гаусса-Зейделя:

$x_1=0{,}2475,$	$x_1=0{,}2533,$
$x_2=1{,}1146,$	$x_2=1{,}1111,$
$x_3=-0{,}2243;$	$x_3=-0{,}2230.$

Как мы видим, результаты достаточно близки. Небольшое расхождение связано с тем, что при использовании метода Гаусса-Зейделя происходит промежуточное округление результатов с целью облегчения дальнейшей работы и не самой малой заданной точности. Метод Гаусса-Зейделя легко программируется на ЭВМ, тогда результаты получаются более точными.

Лабораторная работа №3

1. Для заданной функции $y=f(x)$, а именно, $y=\frac{0{,}5x+7}{\sqrt{x^2+1}}$ на отрезке $[0{,}8;3{,}32]$ ($[a;b]$) и значения $n=12$ вычислить приближенные значения функции $y_i=f(x_i)=\frac{0{,}5x_i+7}{\sqrt{x_i^2+1}}$, округляя их до пяти знаков после запятой, $i=0,1,\ldots n$.

2. Для полученных значений табличной функции $y_i=f(x_i)$ в узлах x_i составить таблицу конечных разностей:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	….	$\Delta^n y_i$
0						
1						
.						
.						
.						
n						

3. Для первых четырех узлов x_0,x_1,x_2,x_3 построить интерполяционный многочлен Лагранжа $L_3(x)$.

4. Вычислить с помощью многочлена Лагранжа значение функции в точке $x_\alpha=x_2+\frac{h}{2}$.

5. Построить интерполяционный многочлен Ньютона $N(x)$ для интерполирования вперед, с помощью которого рассчитать значение функции в точке $x_\alpha=x_2+\frac{h}{2}$.

6. Построить интерполяционный многочлен Ньютона $N(x)$ для интерполирования назад и рассчитать с его помощью, значение функции в точке $x_\beta=x_{10}-\frac{h}{2}$.

7. Сравнить значения $L_3(x_\alpha)$, $N(x_\alpha)$, $N(x_\beta)$ соответственно со значениями $f(x_\alpha)$, $f(x_\beta)$.

8. В таблице конечных разностей выделить (например, подчеркнуть одной чертой) разности, использованные при построении многочлена Ньютона для интерполирования вперед и назад (например, двумя чертами).

Краткие теоретические сведения

Интерполирование представляет собой одну из задач приближения (аппроксимации) функций. Если величина y является функцией аргумента x, то это означает, что любому значению x из области определения функции поставлено в соответствие значение y. Однако на практике часто неизвестна явная связь между y и x, т.е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости $y = f(x)$. В некоторых случаях даже при известной зависимости $y = f(x)$ она настолько громоздка, что ее применение в практических расчетах затруднительно.

Наиболее распространенным и практически важным случаем, когда вид связи между y и x неизвестен, является задание этой связи в виде некоторой таблицы $\{x_i, y_i\}$. Эти значения либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике могут понадобиться значения величины y и в других точках, отличных от точек x_i. Этой цели и служит задача о приближении (аппроксимации) функций: данную функцию $f(x)$ требуется приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой функцией $\varphi(x)$ так, чтобы отклонение (в некотором смысле) $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция $\varphi(x)$ при этом называется аппроксимирующей.

Для практики весьма важен случай аппроксимации функции многочленом

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m. \qquad \textbf{(3.1)}$$

Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$, то аппроксимация называется точечной. К ней относится интерполирование. При построении приближения на непрерывном множестве точек (например, на отрезке $[a;b]$) аппроксимация называется *непрерывной (или интегральной).*

Интерполирование является одним из основных типов точечной аппроксимации. Задачу интерполирования можно сформулировать так: для данной функции $y = f(x)$ требуется построить многочлен (3.1), принимающий в заданных точках x_i те же значения y_i, что и функция $f(x)$, т.е.

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,2,\ldots,n. \qquad \textbf{(3.2)}$$

При этом предполагается, что среди точек x_i нет одинаковых. Эти точки называются *узлами* интерполяции, а многочлен $\varphi(x)$ - интерполяционным многочленом.

Интерполяционные формулы (функции, в частности многочлены) используют, прежде всего, для вычисления приближенных значений табличной функции $y_i = f(x_i)$ в промежуточных точках между узлами интерполяции, а также и для решения многих других задач.

В теории интерполяции доказано, что для табличной функции $y_i = f(x_i)$, где $i = 0,1,2,\ldots,n$, т.е. функции заданной в $(n+1)$ узле x_i, среди которых нет совпадающих, можно построить единственный интерполяционный многочлен степени n (степень n на единицу меньше общего числа узлов).

Существуют различные виды записи и построения единственного интерполяционного многочлена степени n для табличной функции $y_i = f(x_i)$, заданной в $(n+1)$ узле $x_i, i = 0,1,2,\ldots n$.

Один из них известен как *многочлен (формула) Лагранжа:*

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}. \qquad \textbf{(3.3)}$$

Этот многочлен обращается в нуль во всех узлах интерполяции, за исключением одного i - го, где он должен равняться единице.

Другой вид записи интерполяционного многочлена n-ой степени использует понятия конечных разностей. Кроме того, в данном случае предполагается, что все узлы равноотстоящие,

т. е. $x_{i+1} - x_i = h = const, i = 0,1,2,\ldots,n-1$. Число h называется *шагом интерполяции.*

Рассмотрим следующие разности значений функции $y_i = f(x_i)$:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0;\ \Delta y_1 = y_2 - y_1;\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Эти величины называются разностями *первого порядка*. При помощи разностей первого порядка можно составить разности второго порядка

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0;\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1;\ \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}.$$

При помощи разностей второго порядка можно составить разности третьего порядка

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i, \quad i = 0,1,2,\ldots,n-3,$$

и т.д., можно составить разности любого порядка.

Используя конечные разности и предполагая, что узлы - равноотстоящие, можно представить другой вид интерполяционного многочлена, носящего название интерполяционного многочлена (формулы) Ньютона:

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Эту формулу можно записать в более удобном для практического использования виде:

$$N(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad \textbf{(3.4)}$$

где $t = \dfrac{(x-x_0)}{h}$.

С целью повышения точности расчетов и уменьшения числа членов в формуле (4), ограничиваются случаем $t < 1$, т. е. используют формулу (3.4) при $x_0 \le x < x_1$. Для других значений аргумента, например, $x_1 \le x < x_2$, вместо значения x_0 принимается x_1. Таким образом, интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в виде

$$N(x_i + th) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_i + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_i + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_i, \qquad \textbf{(3.5)}$$

где $t = \dfrac{(x-x_i)}{h}$. Выражение (3.5) называется *первым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования вперед*. Эту формулу обычно используют для вычисления значений функции в точках левой половины рассматриваемого отрезка. Для правой половины рассматриваемого отрезка разности лучше вычислять справа на лево. В этом случае $t = \dfrac{(x-x_n)}{h}$, т.е. $t < 0$ и интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в виде

$$N(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \qquad \textbf{(3.6)}$$

Эта формула называется *вторым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования назад.*

Решение.

Вычислим шаг $h = \dfrac{(b-a)}{n} = \dfrac{(3,32-0,8)}{12} = 0,21$. Так как $x_0 = a = 0,8$, то $x_1 = x_0 + h = 0,8 + 0,21 = 1,01, x_2 = x_1 + h = 1,01 + 0,21 = 1,22$ и т.д. $x_{12} = x_{11} + h = b = 3,32$.

Вычислим значения заданной функции в узлах x_i, т.е. $y_i = \dfrac{0,5x_i + 7}{\sqrt{x_i^2 + 1}}$. Например, $y_0 = \dfrac{0,5x_0 + 7}{\sqrt{x_0^2 + 1}} = \dfrac{0,5 \cdot 0,8 + 7}{\sqrt{0,8^2 + 1}} = 5,77843$. Полученные данные заносим в таблицу и по ним составляем