Приднестровский государственный университет им. Т.Г.Шевченко

Физико-математический факультет

Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ: НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ И ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

Учебное пособие

Тирасполь, 2013

УДК 517.3 : 517.31 (075.8)
ББК В161.22 я 73
И73

Составители:
Н.Г. Леонова, канд. соц. наук, доцент кафедры прикладной математики и экономико-математических методов ПГУ им.Т.Г.Шевченко
Л.В. Ёлкина, старший преподаватель кафедры прикладной математики и экономико-математических методов ПГУ им.Т.Г.Шевченко

Рецензенты:

Г.В. Спиридонова, канд.тех.наук, доцент кафедры прикладной математики и экономико-математических методов ПГУ им.Т.Г.Шевченко
Ю.В. Настаченко, старший преподаватель кафедры общематематических и естественно-научных дисциплин ПГУ им.Т.Г.Шевченко Бендерский политехнический филиал

И73 **Интегральное исчисление: неопределённый и определённый интегралы:** Учебное пособие / Сост. Н.Г.Леонова, Л.В.Ёлкина. – Тирасполь, ПГУ им. Т.Г.Шевченко, кафедра ПМ и ЭММ, 2013. – 84с.

В учебном пособии рассматриваются теоретические основы и методы решения неопределённых и определённых интегралов. Теоретический материал связан с прикладными аспектами и сопровождается решением различных задач. Приведенные примеры помогут читателю уяснить суть излагаемого материала и перейти к самостоятельному решению подобных задач. Учебное пособие содержит тест для проверки усвоенного теоретического материала.

Настоящее пособие предназначено для преподавателей и студентов инженерно-технического института, аграрно-технологического факультета и Бендерского политехнического филиала очной и заочной форм обучения, а также будет полезно для студентов всех специальностей Приднестровского государственного университета, изучающих курс интегрального исчисления.

УДК 517.3 : 517.31 (075.8)
ББК В161.22 я 73

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им.Т.Г.Шевченко

СОДЕРЖАНИЕ

ЛИТЕРАТУРА

1. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для Втузов, М., Наука, 1966.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа М., Наука, 1985.
4. Герасимович А. И., Рысюк Н.А. Математический анализ, справочное пособие в двух частях, Минск, Вышэйшая школа, 1989.
5. Гусак А. А. Задачи и упражнения по высшей математике, Ч.1, Минск, Вышэйшая школа, 1972.
6. Давыдов Н. А., Коровкин П. П., Никольский В. Н. Сборник задач по математическому анализу, М., Просвещение, 1993.
7. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М., Наука, 1972.
8. Игнатьева А. В. , Краснощекова Т. И., Смирнов В. Ф. Курс высшей математики, М., Высшая школа, 1968.
9. Игнатьева А. В., Краснощёкова Т. И., Смирнов В. Ф. Курс высшей математики, М., 1986.
10. Кручкович Г. И. Сборник задач по курсу высшей математики, М., Высшая школа, 1973.
11. Лихолетов И. И., Мацкевич И. П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике, Минск, Вышэйшая школа, 1976.
12. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике, М., Наука, 1971.
13. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления, для Втузов, М.,"Наука", 1978.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие подготовлено применительно к учебному курсу «Математический анализ» при изложении темы «Интегральное исчисление» для студентов инженерно-строительных и аграрно-технологических специальностей Приднестровского государственного университета.

Интегральное исчисление – раздел Высшей математики, который является важным в плане общей математической культуры и имеет широкое применение как в «чистой» математике, так и в других отраслях человеческих знаний, начиная с экономики и заканчивая современными методами биологических и физико-технических исследований.

В пособие включён обязательный и необходимый материал по теме «Интегральное исчисление», который находит в дальнейшем применение в изучении последующих разделов данного курса и в некоторых разделах других дисциплин.

Данное пособие имеет своей целью помочь студентам инженерно-технического и аграрно-технологического факультетов в освоении теоретического материала при изучении темы «Интегральное исчисление». В учебном пособии рассматриваются различные типы интегралов и способы их решения, в том числе, и приближённые. После изложения теоретической части авторы пособия предлагают тест для проверки усвоенного материала по теме «Интегральное исчисление».

Пособие будет полезно студентам очного и заочного отделения инженерно-технического и других факультетов, где тема «Интегральное исчисление» является частью более общих математических курсов, а также в плане освоения некоторых разделов физики (механики, динамики, аэродинамики). В конце учебного пособия предлагаются вопросы для самостоятельной проверки усвоенного материала.

Пособие поможет преподавателям вузов в разработке структуры и методики изложения учебного материала по теме «Интегральное исчисление», а студентам – в самостоятельной работе над программным материалом, в подготовке к лекционным и практическим занятиям.

ГЛАВА 1. Неопределенный интеграл

1.1. Понятия первообразной и неопределённого интеграла

В дифференциальном исчислении решается следующая задача: по данной функции найти ее производную. Многочисленные вопросы науки и техники приводят к постановке обратной задачи: для функции $f(x)$, определенной на интервале, найти такую функцию $F(x)$, производная которой равнялась бы заданной функции $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Назовем произведение $f(x)dx$ – дифференциальным выражением. Тогда выше поставленную задачу можно сформулировать следующим образом: для данного дифференциального выражения $f(x)dx$ найти такую функцию $F(x)$, дифференциал которой равнялся бы заданному дифференциальному выражению, т.е.

$$dF(x) = f(x)dx. \tag{2}$$

Функция $F(x)$, связанная с функцией $f(x)$ соотношением (1) или (2), называется ее *первообразной.*

Таким образом, ***первообразной от данной функции f(x)*** *называется функция, производная которой равна данной функции, или, что то же самое, дифференциал которой равен дифференциальному выражению $f(x)dx$.*

Так, например, первообразной от функции $f(x) = \sin x$ будет функция $F(x) = -\cos x$, так как $F'(x) = (-\cos x)' = \sin x$, или, что тоже самое, $dF(x) = d(-\cos x) = \sin x dx$.

Отыскание по данной функции ее первообразной составляет одну из основных задач интегрального исчисления. Действие – отыскание первообразной – называется интегрированием функции. При этом, естественно, возникает следующий вопрос: для всякой ли функции существует первообразная?

Утвердительный ответ на этот вопрос для достаточно широкого класса функций дает следующая теорема, принимаемая нами без доказательства.

Теорема 1. *Любая непрерывная на сегменте функция имеет на этом сегменте первообразную.*

Функции, для которых ищутся первообразные, будем считать непрерывными. Если же функция имеет точки разрыва, то её будем рассматривать только в интервалах непрерывности.

Задача отыскания по данной функции ее первообразной решается неоднозначно. В самом деле, если, например, $f(x) = \sin x$, то первообразной для нее является не только функция ($-\cos x$), но также и $(-\cos x + \pi)$, и $(-\cos x + 3)$, и вообще $(-\cos x + C)$, где C – произвольное число. Как мы сейчас докажем, функция $y = \sin x$ не имеет других первообразных, кроме тех, которые могут быть представлены в виде: $-\cos x + C$. Это будет вытекать из следующей общей теоремы.

Теорема 2. *Если функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на сегменте* $[a; b]$, *то всякая другая первообразная для $f(x)$ отличается от $F(x)$ на*

5. $\int_{-a}^{a} 3x^{2n} dx$

Вопрос 33. ***Вычислить интеграл*** $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

1. $-(1+\sqrt{3})$
2. $\frac{7}{2\sqrt{3}} - 1$
3. $\frac{7\sqrt{3}}{2} - 1$
4. $\frac{7\sqrt{3}-6}{12}$
5. $2\sqrt{3}$

Вопрос 34. ***Какой из приведенных ниже интегралов является несобственным, если функция $f(x)$ - непрерывна?***

1. $\int_{0}^{a} f(x)dx$
2. $\int_{-a}^{a} f(x)dx$
3. $\int f(x)dx$
4. $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$
5. $\int_{a}^{b} f(x)dx$

Вопрос 35. ***Чему равен интеграл*** $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{x^3}$

1. $\frac{1}{8}$
2. Интеграл расходится
3. 0
4. 2
5. $\frac{1}{4}$

1. $\dfrac{1+3}{\alpha}$

2. $\dfrac{3}{\alpha^2}$

3. $\dfrac{1+3\alpha}{\alpha^2}$

4. $\dfrac{1+3\alpha}{\alpha}$

5. $\dfrac{1+3}{\alpha^2}$

Вопрос 31. ***Вычислить интеграл, используя правило замены переменных***

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$$

1. $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

2. $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3. $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$

4. $\dfrac{\pi}{3}$

5. $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$

Вопрос 32. ***Не производя вычислений, укажите интеграл, равный нулю.***

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$

2. $\int_{-a}^{a} x^4 e^{x^2} dx$

3. $\int_{-105}^{105} \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(1-x^4\right)}}$

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x\,dx$

постоянное слагаемое, т.е. может быть представлена в виде: $F(x)+C$, *где* C *– постоянное число.*

Если $F(x)$ *– одна из первообразных для функции* $f(x)$, *то выражение* $F(x)+C$, *где* C *– произвольная постоянная, называется* ***неопределенным интегралом*** *от этой функции.*

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ обозначается символом $\int f(x)dx$ (читается: «неопределенный интеграл $f(x)$ на *dx*»).

Следовательно,

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

При этом $f(x)$ называется *подынтегральной функцией,* $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а символ* $\int$ – *знаком неопределенного интеграла.*

Под знаком интеграла пишется не производная искомой функции, а ее дифференциал.

Полагая, например, $f(x)=\sin x$, имеем

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

Рассмотрим некоторые задачи, приводящие к неопределенному интегралу.

Задача 1. Требуется найти кривую, у которой тангенс угла наклона касательной в каждой ее точке есть заданная функция $f(x)$ абсциссы этой точки.

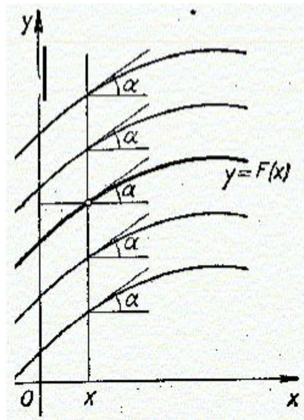


Рис.1

Пусть $y=F(x)$ – уравнение искомой кривой. Согласно геометрическому смыслу производной, тангенс угла наклона касательной к кривой $y=F(x)$ в точке с абсциссой x равен значению производной в этой точке. Значит, нам нужно найти такую функцию $F(x)$, для которой

$$F'(x)=f(x). \qquad (3)$$

Соотношение (3) показывает, что искомая функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$. Следовательно, наша задача свелась к основной задаче интегрального исчисления – к нахождению первообразной от данной функции. Поэтому уравнение искомой кривой имеет вид

$$y=\int f(x)dx, \text{ т.е. } y=F(x)+C.$$

Мы видим, что условию задачи удовлетворяет не одна кривая, а семейство кривых. Если $y=F(x)$ есть одна из таких кривых, то всякая другая может быть получена из нее параллельным переносом вдоль оси *Oy* (рис. 1).

Назовем график первообразной функции *от* $f(x)$ *– интегральной кривой.*

Неопределенный интеграл геометрически представляет совокупность всех интегральных кривых.

Все кривые из этой совокупности могут быть получены из одной интегральной кривой параллельным сдвигом в направлении оси *Oy*.

Для того чтобы из данного семейства кривых выделить одну определенную кривую, нужно к условию задачи присоединить дополнительное условие, например, потребовать, чтобы кривая проходила через данную точку $(x_0; y_0)$. Такое условие называется *начальным*. Задание начального условия, вообще говоря, позволяет выделить из семейства всех интегральных кривых вполне определенную кривую, а именно ту кривую, которая проходит через точку $(x_0; y_0)$. Координаты этой точки должны удовлетворять уравнению искомой кривой $y = F(x) + C$, т.е. $y_0 = F(x_0) + C$. Из этого условия однозначно определяем *C*: $C = y_0 - F(x_0)$. Следовательно, уравнение искомой интегральной кривой имеет вид: $y = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

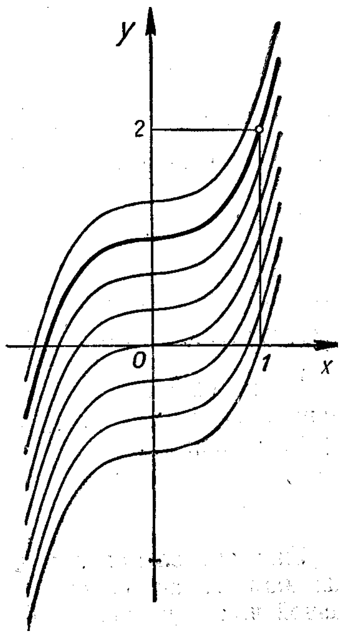


Рис.2

Рассмотрим конкретный пример.

Пример. Через точку (1; 2) провести кривую, у которой угловой коэффициент касательной в каждой точке с абсциссой *x* равен $3x^2$.

Имеем $y'=3x^2$. Легко сообразить, что одной из первообразных для $3x^2$ будет x^3.

Следовательно, $y = \int 3x^2 dx = x^3 + C$.

Итак, кривые, для которых в точках с абсциссой *x* тангенс угла наклона касательной равен $3x^2$, образуют семейство кубических парабол $y = x^3 + C$ (рис.2). Из этого семейства кривых нам нужно выбрать ту кривую, которая проходит через точку (1; 2) (начальное условие). Поэтому $2 = 1^3 + C$, откуда $C = 1$. Таким образом, уравнение искомой кривой будет: $y = x^3 + 1$.

Задача 2. Материальная точка массы *m* движется по вертикальной прямой под действием силы тяжести. Определить путь, пройденный точкой за время *t*, если в начальный момент точка имела скорость $v_0 = 0$. Примем за ось *Ox* вертикальную прямую, по которой движется точка; при этом за положительное направление оси примем направление к земле, а за начало координат примем точку, соответствующую положению материальной точки в начальный момент (при *t*=0, *x*=0). Пройденный точкой путь *x* будет некоторой функцией времени: $x = F(t)$. Наша задача заключается в том, чтобы определить вид этой: функции, т.е. зависимость пройденного пути от времени *t*.

Из физики известно, что скорость падающего тела за каждую секунду

5. $-\int_b^a f(x)dx + 2\int_a^b f(x)dx$

Вопрос 28. ***Не вычисляя интеграл*** $\int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}dx$, ***оценить границы его возможного значения, используя теорему об оценке определенного интеграла.***

1. от 1 до $1\frac{1}{5}$
2. от $1\frac{1}{9}$ до $1\frac{1}{5}$
3. от $\frac{5}{9}$ до $\frac{3}{5}$
4. от $\frac{1}{2}$ до $\frac{3}{5}$
5. от $\frac{5}{9}$ до 1

Вопрос 29. ***Какое из следующих утверждений верно для любой непрерывной функции*** $f(x)$, ***если*** $F(x)$ ***- первообразная от*** $f(x)$.

1. $\int_0^x f(x)dx$ - число
2. $\left(\int_0^x f(x)dx\right)' = F(x)$
3. $\int_0^x f(x)dx = F'(x)$
4. $\int_0^x f(x)dx$ - функция от *x*
5. $\left(\int_0^x f(x)dx\right)' = f'(x) - f'(0)$

Вопрос 30. ***Вычислить интеграл, используя формулу интегрирования по частям*** $\int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin \alpha x dx$ ***и выберите правильный ответ***

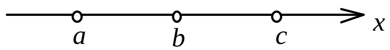
5. $-\int\limits_{-a}^{a} f(t)dt$

где $F(t)$ - первообразная от $f(t)$.

Вопрос 26. ***Чему равен интеграл*** $\int\limits_a^b \left(cu(x)+k\nu(x)+m\omega(x)\right)dx$, где c, k, m - ***константы:***

1. $(c+k+m)\int\limits_a^b \left(u(x)+\nu(x)+\omega(x)\right)dx$
2. $c\int\limits_a^b \left(u(x)+\nu(x)+\omega(x)\right)dx+k\int\limits_a^b \left(u(x)+\nu(x)+\omega(x)\right)dx+m\int\limits_a^b \left(u(x)+\nu(x)+\omega(x)\right)dx$
3. $c\int\limits_a^b u(x)dx+k\int\limits_a^b \nu(x)dx+m\int\limits_a^b \omega(x)dx$
4. $u(x)\int\limits_a^b c\,dx+\nu(x)\int\limits_a^b k\,dx+\omega(x)\int\limits_a^b m\,dx$
5. $\left(u(x)+\nu(x)+\omega(x)\right)\int\limits_a^b (c+k+m)dx$

Вопрос 27. ***Какое из утверждений верно для любой непрерывной функции*** $f(x)$***?***



$\int\limits_a^b f(x)dx$ равен:

1. $\int\limits_a^c f(x)dx-\int\limits_c^b f(x)dx$
2. $-\int\limits_c^a f(x)dx-\int\limits_b^c f(x)dx$
3. $\int\limits_0^c f(x)dx-\int\limits_0^b f(x)dx-\int\limits_0^a b(x)dx$
4. $\int\limits_0^b f(x)dx-\int\limits_a^0 f(x)dx$

возрастает на величину g. Поэтому, если при t=0 скорость материальной точки равна нулю, то к моменту времени t скорость точки v возрастает до значения gt. Таким образом,

$$v = gt. \qquad (4)$$

С другой стороны, мы знаем, что скорость есть производная пути по времени: $v=\frac{dx}{dt}$. Следовательно, приравняв два найденных выражения для скорости, найдем

$$\frac{dx}{dt} = gt. \qquad (5)$$

Соотношение (6) показывает, что искомая функция $x=F(t)$ является первообразной для функции gt. Поэтому

$$x=\int gt\,dt=\frac{gt^2}{2}+C.$$

Постоянную C находим из начального условия: при $t=0$, $x=0$. Следовательно, $0=\frac{g\cdot 0^2}{2}+C$, т.е. C=0.

Таким образом, путь x, пройденный точкой к моменту времени t, выразится следующей формулой, хорошо известной из курса физики

$$x=\frac{gt^2}{2}.$$

Уже эти элементарные примеры показывают, что поставленная нами задача об отыскании для данной функции ее первообразной имеет не только формально математический интерес, как операция, обратная дифференцированию, но что к этой задаче мы непосредственно приходим при решении целого ряда вопросов естествознания и техники.

1.2. Интегрирование элементарных функций.

Свойства неопределённого интеграла

Отыскание первообразной для данной функции есть задача значительно более трудная, чем задача нахождения по данной функции ее производной. В дифференциальном исчислении были найдены производные основных элементарных функций и установлены правила дифференцирования суммы, произведения, частного и суперпозиции функций. Эти правила позволили автоматически определять производные любых элементарных функций.

Для отыскания первообразных от элементарных функций таких простых и универсальных правил и рецептов не существует. Так, например, нет никаких определенных правил для отыскания первообразных от произведения, частного, суперпозиции двух элементарных функций. Более того, можно привести многочисленные примеры таких элементарных функций, первообразные для которых не являются элементарными функциями, хотя и существуют в силу теоремы, приведенной в предыдущей главе под номером 1. Например, первообразная для e^{-x^2} существует, но не является элементарной функцией. Этот вопрос будет рассмотрен далее.

Для облегчения интегрирования составляется таблица так называемых основных интегралов. Эта таблица получается из основных формул дифференциального исчисления.

$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,(\alpha \neq -1)$. В частности, при $\alpha = 0$: $\int dx = x + C$. (I)

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \qquad \text{(II)}$$

$$\int \sin xdx = -\cos xdx + C. \qquad \text{(III)}$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C. \qquad \text{(IV)}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \qquad \text{(V)}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \qquad \text{(VI)}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C. \qquad \text{(VII)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C. \qquad \text{(VIII)}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \qquad \text{(IX)}$$

$$\int e^x dx = e^x + C. \qquad \text{(X)}$$

Расширенная таблица основных интегралов приводится в приложении.

Доказательство этих формул сводится к проверке того, что дифференциал правой части равен подынтегральному выражению того неопределенного интеграла, который стоит в левой части равенства. Например, формула II следует из соотношения $d\ln|x| = \dfrac{dx}{x}$, которое выполняется для всех *x*, где функция $\ln|x|$ определена и непрерывна (т.е. для $x \neq 0$).

Рассмотрим основные свойства неопределенного интеграла.

3. $\int_0^{Y_B} ydx$
4. $\int_{Y_A}^{Y_B} xdy$
5. $\int_{Y_A}^{Y_B} ydx$

Вопрос 23. ***Какое из утверждений верно? Интеграл*** $\int_3^5 (f(x) - \varphi(x))dx$ - это:

1. Функция от x
2. Функция от $f(x)$
3. Функция от $f(x)$ и $\varphi(x)$
4. Функция от $y = f(x) - \varphi(x)$
5. Число

Вопрос 24. ***Каков геометрический смысл определенного интеграла от функции*** $y = f(x)$ *в интервале* $[a,b]$ ***в системе декартовых координат***?

1. Длина линии $y = f(x)$ в интервале $[a,b]$
2. Алгебраическая площадь фигуры, ограниченной линией $y = f(x)$ в интервале $[a,b]$
3. Среднее значение функции $f(x)$ в интервале $[a,b]$
4. Произведение среднего значения функции в интервале $[a,b]$ на длину интервала
5. Максимальное значение функции $f(x)$ в интервале $[a,b]$

Вопрос 25. ***Чему равен интеграл*** $\int_a^a f(t)dt$ ***для любой непрерывной функции*** $f(x)$:

1. 0
2. $2\int_0^a f(t)dt$
3. $F(a)$
4. $F(0)$

4. $\int\limits_C^D f(x)dx - \int\limits_A^B \varphi(x)dx$

5. $\int\limits_A^B f(x)dx - \int\limits_B^A \varphi(x)dx$

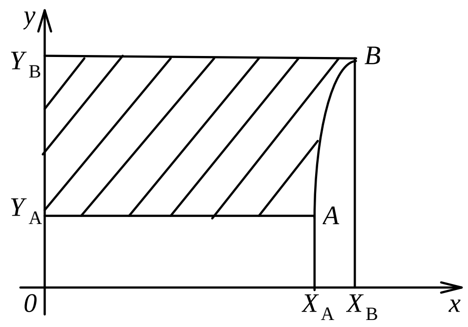
Вопрос 20. ***Если задана функция скорости $v = f(t)$ при движении тела от точки А до точки В, что можно узнать интегрированием этой функции по времени?***

1. Время движения тела от точки A до точки B
2. Скорость в точке B
3. Ускорение
4. Путь пройденный телом при движении от точки A до точки B
5. Расстояние между точками A и B

Вопрос 21. ***По какой переменной нужно проинтегрировать функцию силы, чтобы получить работу, совершенную при перемещении тела из точки А в точку В?***

1. По пути
2. По времени
3. По скорости
4. По силе
5. По работе

Вопрос 22. ***Чему равна площадь заштрихованной фигуры?***



1. $\int\limits_{X_A}^{X_B} y dx$

2. $\int\limits_0^{X_B} f(x)dx$

1. *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.*

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

2. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции плюс произвольная постоянная.*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Например:

$$\int dx = x + C, \quad \int d\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,x + C.$$

Свойства 1 и 2 означают, что дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными действиями.

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла, т.е.*

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

(k *– постоянное, отличное от нуля*).

4. *Неопределенный интеграл алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждого слагаемого в отдельности, т.е.*

$$\int [f(x) + g(x) - \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int \varphi(x)dx.$$

Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции.

5. *(Инвариантность формул интегрирования). Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C \;=>\; \int f(u)du = F(u) + C,$$

где u *– дифференцируемая функция.*

1.3. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод замены переменной,интегрирование по частям

Рассмотрим основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод замены переменной, интегрирование по частям, которые во многих случаях позволяют сводить заданные интегралы к табличным.

1. Непосредственное интегрирование.

Используя основные свойства неопределенного интеграла и таблицу основных интегралов, можно решать примеры на непосредственное интегрирование. Рассмотрим некоторые такие примеры.

Пример 1. $\int (x^2 + 5x - 7)dx.$

Применяя правила А и В, имеем:

$$\int\left(x^2+5x-7\right)dx=\int x^2dx+5\int xdx-7\int dx.$$

Но

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C_1,\quad 5\int xdx=5\left(\frac{x^2}{2}+C_2\right)=\frac{5}{2}x^2+5C_2,\quad 7\int dx=7x+7C_3.$$

Таким образом,

$$\int\left(x^2+5x-7\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-7x+\left(C_1+5C_2-7C_3\right).$$

При каждом интегрировании мы получали свою произвольную постоянную. Но в конечном итоге мы пишем только одну произвольную постоянную, так как, если C_1 C_2 и C_3 произвольные постоянные, то и $C=C_1+5C_2-7C_2$ также является произвольной постоянной. Поэтому окончательно

$$\int\left(x^2+5x-7\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-7x+C.$$

Правильность полученного результата нетрудно проверить дифференцированием. Действительно:

$$d\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-7x+C\right)=\left(x^2+5x-7\right)dx.$$

Пример 2. $\int\frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx.$

Так как

$$\frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}=\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{5x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}+5x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}},\text{ то}$$

$$\int\frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+5x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx+5\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{10x^{\frac{3}{2}}}{3}-$$

$$-2x^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5}+\frac{5x}{3}-1\right)+C.$$

Проверка:

$$d\left[2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5}+\frac{5x}{3}-1\right)+C\right]=d\left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{10x^{\frac{3}{2}}}{3}-2x^{\frac{1}{2}}+C\right)=\left(x^{\frac{3}{2}}+5x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

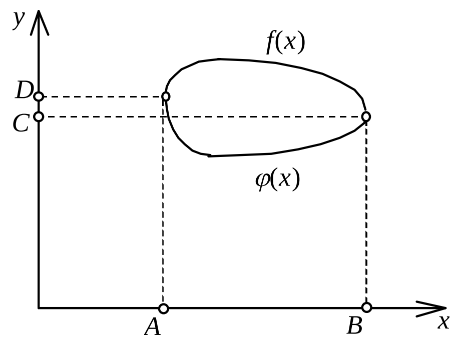
$$=\frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx$$

4. $-\frac{1}{8}\cos^8 x-\frac{1}{6}\cos^6 x+C$
5. $\frac{1}{6}\cos^6 x+\frac{1}{11}\cos^{11} x+C$

Вопрос 18. ***Найти интеграл*** $\int\frac{dx}{5+4\cos ax}$

1. $\frac{2}{3a}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right)+C$
2. $\operatorname{arstg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right)+C$
3. $\frac{3}{2a}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right)+C$
4. $\frac{2}{3a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$
5. $\frac{2}{3a}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right)+C$

Вопрос 19. ***Чему равна площадь фигуры на рисунке?***



1. $\int_A^B f(x)dx$
2. $\int_C^D\left(f(x)-\varphi(x)\right)dx$
3. $\int_A^B f(x)dx-\int_A^B\varphi(x)dx$

Вопрос 14. ***Какой из примеров используется при интегрировании четной степени синуса или косинуса?***

1. Понижение подынтегральной функции (вдвое) заменой $\sin^2 x \left(\cos^2 x\right)$ по тригонометрическим формулам.
2. Отделение одного из множителей $\sin x \left(\cos x\right)$ и замены его новой переменной.
3. Замена $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$ новой переменной.
4. Разложение на слагаемые по формулам произведения тригонометрических функций.
5. Интегрирование по частям.

Вопрос 15. ***Какой интеграл не выражается в элементарных функциях?***

1. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
2. $\int x\sin x dx$
3. $\int x^n \ln x dx$
4. $\int x^{-1}e^x dx$
5. $\int e^{5x}\cos^{4x} dx$

Вопрос 16. ***Найти интеграл*** $\int \sin^2 3x dx$

1. $\frac{x}{2}-\frac{1}{12}\sin 6x + C$
2. $x-\frac{1}{6}\sin 6x + C$
3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\sin 6x + C$
4. $\frac{x}{2}-\frac{1}{12}\cos^2 6x + C$
5. $\frac{1}{6}\cos^6 x+\frac{1}{11}\cos^{11} x + C$

Вопрос 17. ***Найти интеграл*** $\int \sin^3 x\cos^5 x dx$

1. $-6\cos^6 x+8\cos^8 x + C$
2. $\frac{1}{8}\cos^8 x-\frac{1}{6}\cos^6 x + C$
3. $-8\cos^8 x+6\cos^6 x + C$

Пример 3. $\int \frac{x^2dx}{1+x^2} = \int \frac{\left(x^2+1\right)-1}{1+x^2}dx = \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}.$ $= x - \operatorname{arctg} x + C$.

Разложив подынтегральное выражение, мы свели интеграл к табличным интегралам (формулы I и VII).

2. Интегрирование подстановкой (заменой переменной).

Во многих случаях удается введением вместо *x* новой переменной *z*, связанной с *x* некоторым соотношением, свести интеграл $\int f(x)dx$ к новому интегралу, который содержится в таблице или легко находится другим методом. Этот метод интегрирования получил название *метода замены переменной* или метода интегрирования *подстановкой*.

Введем вместо *x* новую переменную z, связанную с *x* соотношением $x=\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – непрерывная, строго монотонная функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'(z)$. Покажем, что тогда имеет место равенство

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(z)\right]\varphi'(z)dz. \tag{1}$$

Формула (1) называется формулой замены переменного. Для доказательства соотношения (1) достаточно убедиться, что дифференциалы обеих его частей равны.

Дифференцируя левую часть соотношения (1), имеем:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

Но так как $x=\varphi(z)$, то $dx=\varphi'(z)dz$. Это дает

$$d\int f(x)dx = f(x)dx = f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz. \tag{2}$$

С другой стороны, дифференцируя правую часть соотношения (1), имеем:

$$d\int f\left[\varphi(z)\right]\varphi'(z)dz = f\left[\varphi(z)\right]\varphi'(z)dz. \tag{3}$$

Соотношения (2) и (3) показывают, что

$$d\int f(x)dx = d\int f\left[\varphi(z)\right]\varphi'(z)dz,$$

откуда следует равенство интегралов:

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(z)\right]\varphi'(z)dz.$$

Таким образом, формула (1) доказана.

Допустим, что функция $x=\varphi(z)$ такова, что интеграл, стоящий в правой части соотношения (1), легко находится. Пусть

$$\int f\left[\varphi(z)\right]\varphi'(z)dz = \Phi(z)+C.$$

Тогда для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ достаточно разрешить уравнение

$x=\varphi(z)$ относительно *z*, т.е. найти обратную функцию $z=\omega(x)$[1)] и подставить ее в $\Phi(z)$:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz = \Phi(z)+C = \Phi[\omega(x)]+C.$$

Замечание. Формулу (1) легко запомнить. Ее правая часть получается, если в интеграле $\int f(x)dx$ формально заменить *x* на $\varphi(z)$, а *dx* на $\varphi'(z)dz$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Положив $x=az$, находим $dx = adz$. Применяя, формулу (1), получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{adz}{\sqrt{a^2-a^2z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

но интеграл $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z + C$, согласно формуле VIII.

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z + C.$$

Возвращаясь снова к переменной *x*, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Пример 2. $\int \cos mx dx$.

Полагая $x=\frac{z}{m}$, $dx=\frac{dz}{m}$ и применяя формулу (1), имеем:

$$\int \cos mx dx = \int \cos z \frac{dz}{m} = \frac{1}{m}\int \cos z dz = \frac{1}{m}\sin z + C = \frac{1}{m}\sin mx + C.$$

Если под интегралом стоит суперпозиция двух функций, умноженная на производную от внутренней функции, то вычисления обычно упрощаются, если заменить внутреннюю функцию новой переменной. Действительно, применяя тогда формулу замены переменной, получим:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(z)dz,$$

где $z=\varphi(x)$. Заметим, что эта формула отличается от формулы (1) только обозначением независимых переменных.

Пример 3. $\int \sin^3 x \cos x dx$.

Замечая, что $d\sin x = \cos x dx$, полагаем $z=\sin x$.

[1)] Существование обратной функции вытекает из строгой монотонности и непрерывности функции $x=\varphi(z)$.

5. $-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

Вопрос 11. ***Найдите интеграл*** $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$

1. $x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$
2. $2x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$
3. $x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}\right|+C$
4. $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3x}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$
5. $x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3}\ln^2\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+C$

Вопрос 12. ***Какая подстановка позволяет найти интеграл*** $\int \frac{2x}{x^2-x+1}dx$?

1. $x-1=t$
2. $x-\frac{1}{4}=t$
3. $x-\frac{1}{2}=t$
4. $x+1=t$
5. $x+\frac{1}{2}=t$

Вопрос 13. ***Найти интеграл*** $\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx$

1. $\ln x-2\ln x+1+2\ln\left(x^2-x+1\right)+C$
2. $-x^{-2}+2(x+1)^{-2}-2x\left(x^2-x+1\right)^{-2}+C$
3. $\ln|x|-2\ln|x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$
4. $\ln\frac{|x|\cdot\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$
5. $\ln\frac{|x|\cdot\sqrt{x^2-x+1}}{(x+1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

4. $t = 4e^{x}$
5. $\left(3+4e^{x}\right)^{-1}$

Вопрос 7. ***Какую из подстановок целесообразно использовать для замены переменной в интеграле*** $\int \mathrm{tg}^3\varphi d\varphi$?

1. $t = \mathrm{tg}^{3\varphi}$
2. $t = \mathrm{tg}^2\varphi$
3. $\varphi = \mathrm{tg}\, t$
4. $\varphi = \mathrm{tg}^3 t$
5. $\varphi = \mathrm{arctg}\, t$

Вопрос 8. ***Какое из выражений целесообразно принять за u при интегрировании по частям интеграла*** $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$?

1. $u = \ln x$
2. $u = \frac{\ln x}{x}$
3. $u = x^3$
4. $u = x^{-3}$
5. $u = \frac{\ln x}{x^2}$

Вопрос 9. ***Какое из выражений целесообразно принять за u при интегрировании по частям интеграла*** $\int x^2 e^{3x}dx$?

1. $u = x$
2. $u = e^{x}$
3. $u = x^2$
4. $u = e^{3x}$
5. $u = x^2 e^{2x}$

Вопрос 10. ***Какое из выражений является интегралом*** $\int x\cdot \mathrm{arctg}\, x dx$?

1. $\frac{x^2+1}{2}\mathrm{arctg}\, x + C$
2. $x\cdot \mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$
3. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x - \frac{x}{2}+C$
4. $-\frac{x}{2}+\frac{x^2+1}{2}\mathrm{arctg}\, x + C$

Это дает: $dz = \cos x dx$ и

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int z^3 dz.$$

Удачной заменой переменного мы свели наш интеграл к интегралу от степенной функции.
Так как

$$\int z^3 dz = \frac{z^4}{4}+C,$$

то

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4}+C.$$

Пример 4. $\int \mathrm{tg}\, x dx.$

$$\int \mathrm{tg}\, x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

Замечая, что $\sin x dx = -d\cos x,$ положим $t=\cos x.$ Это дает $dt = -\sin x dx$ и, следовательно,

$$\int \mathrm{tg}\, x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int\frac{dt}{t} = -\ln|t|+C = -\ln|\cos x|+C.$$

Таким образом,

$$\int \mathrm{tg}\, x dx = -\ln|\cos x| + C. \qquad \text{(XI)}$$

Пример 5. $\int \mathrm{ctg}\, x dx.$

Полагая $t=\sin x,$ имеем: $dt = \cos x dx$

$$\int \mathrm{ctg}\, x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|\sin x|+C.$$

Итак,

$$\int \mathrm{ctg}\, x dx = \ln|\sin x| + C. \qquad \text{(XII)}$$

Пример 6. $\int (2x+5)^{15}dx.$

Этот интеграл, конечно, можно было бы вычислить методом разложения, если $(2x+5)^{15}$ разложить по формуле бинома Ньютона. Но это привело бы к слишком громоздким вычислениям. Однако, замечая, что $d(2x+5)=2dx$, мы видим, что заменой переменной $t=2x+5$ наш интеграл сводится к интегралу от степенной функции. В самом деле, пусть $t=2x+5$; тогда $dx=\frac{dt}{2}$. Это дает

$$\int (2x+5)^{15}dx = \int\frac{t^{15}}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^{15}dt = \frac{t^{16}}{2\cdot 16}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получим

$$\int (2x+5)^{15}dx = \frac{(2x+5)^{16}}{32} + C.$$

Пример 7. $\int \frac{dx}{4-5x}.$

Заметим, что дифференциал знаменателя отличается от числителя на постоянный множитель – 5; поэтому напрашивается следующая замена переменной: $t = 4-5x$, откуда $dx = -\frac{dt}{5}$ и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{4-5x} = \int \frac{-\frac{dt}{5}}{t} = -\frac{1}{5}\int \frac{dt}{t}.$$

Из таблицы находим: $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$. Поэтому

$$\int \frac{dx}{4-5x} = -\frac{1}{5}\ln|t| + C = -\frac{1}{5}\ln|4-5x| + C.$$

Пример 8. Интегралы в примерах 4, 5, 7 являются частными случаями интеграла более общего вида:

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)},$$

т.е. интеграла от дроби, числитель которой является дифференциалом знаменателя.

Полагая $t = \varphi(x)$, имеем $dt = \varphi'(x)dx$,

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Так, например,

$$\int \frac{4x^3+6x+8}{x^4+3x^2+8x}dx = \ln\left|x^4+3x^2+8x\right| + C,$$

так как

$$d\left(x^4+3x^2+8x\right) = \left(4x^3+6x+8\right)dx.$$

С приобретением навыка в интегрировании, можно не производить в простейших интегралах подробно всех выкладок, связанных с заменой переменной. Покажем это на примерах.

Пример 9. $\int \sqrt{1+x^2}\,xdx.$

Замечая, что $d\left(1+x^2\right) = 2xdx$ и вводя поправку $\frac{1}{2}$, имеем:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,xdx = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+x^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3} + C.$$

Пример 10. $\int e^{\sin x}\cos xdx.$

2. $\int dF(x) = F(x)$
3. $d\int f(x)dx = f(x)dx$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int dx = x + C$

Вопрос 3. ***Какое из выражений является интегралом*** $\int \left(3x^2-2x+5\right)dx$?

1. $3x^3-2x^2+5+C$
2. $\frac{3}{2}x^2-2x+5x+C$
3. $3x^2-2x+5+C$
4. x^3-x^2+5x+C
5. x^3-x^2+5+C

Вопрос 4. ***Какое из выражений является интегралом*** $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3}dx$?

1. $-2-2x^{-3}+3x^{-4}+C$
2. $2\ln x - x^{-1} + 2x^{-2} + C$
3. $2\ln x - 2x^{-1} + 3x^{-2} + C$
4. $2x^{-2}-2x^{-3}+3x^{-4}+C$
5. $2\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$

Вопрос 5. ***Какое из выражений является интегралом*** $\int 3^t \cdot 5^t\,dt$?

1. $t\cdot 3^{t-1} + t\cdot 5^{t-1} + C$
2. $2t\cdot 15^{2t-1} + C$
3. $t\cdot 15^{t-1} + C$
4. $\frac{15^t}{\ln 15} + C$
5. $\frac{15^{2t}}{\ln 15} + C$

Вопрос 6. ***Какую из подстановок целесообразно использовать для замены переменной в интеграле*** $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$?

1. $x = e^t$
2. $x = 4e^t + 3$
3. $t = 3 + 4e^x$

а) $u=\int Pdx+\varphi(y)$, считая y постоянной;

б) $u=\int Qdy+\phi(x)$, считая x постоянной,

где $\varphi(y)$ и $\phi(x)$ – неизвестные функции.

Беря все известные члены из первого выражения и дописав к ним недостающие члены, зависящие только от *y*, из второго выражения получим функцию *u*.

Решение такой задачи легко проверить: если функция *u* найдена верно, то ее полный дифференциал, найденный по формуле $du=u'_x dx+u'_y dy$, должен быть тождествен данному полному дифференциалу $Pdx+Qdy$.

Рассмотрим пример. Найти первообразную для дифференциального выражения $(1-\sin 2x)dy-(3+2y\cos 2x)dx$.

Вначале находим частные производные

$$P'_y=-(3+2y\cos 2x)'_y=-2\cos 2x,$$

$$Q'_x=(1-\sin 2x)'_x=-2\cos 2x$$

и убеждаемся, что они тождественно равны и что заданное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. Затем найдем эту функцию, интегрируя каждый частный дифференциал *Pdx* и *Qdy* отдельно.

а) $u=-\int(3+2y\cos 2x)dx=-3x-y\sin 2x+\varphi(y)$, считая *y* постоянной;

б) $u=\int(1-\sin 2x)dy=y-y\sin 2x+\phi(x)$, считая *x* постоянной.

Объединяя эти два выражения – дописав к известным членам первого выражения недостающий член, зависящий только *y*, из второго выражения, получим одну из первообразных функций, а прибавив к ней произвольную постоянную *C*, получим общее выражение первообразной функции для заданного полного дифференциала $u=y-3x-y\sin 2x+C$.

ТЕСТ ПО ТЕМЕ «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

Вопрос 1. ***Как называется функция, производная которой равна данной функции?***

1. Неявная функции
2. Подынтегральная функция
3. Неопределенный интеграл
4. Первообразная функция
5. Дифференциальное выражение

Вопрос 2. ***Найдите ошибочное выражение, если*** $F(x)$***- одна из первообразных для функции*** $f(x)$***, а C - произвольное постоянное.***

1. $\int f(x)dx=F(x)+C$

Замечая, что $d\sin x=\cos xdx$, имеем согласно формуле X:

$$\int e^{\sin x}\cos xdx=\int e^{\sin x}d\sin x=e^{\sin x}+C.$$

Пример 11. $\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

Пример 12. $\int\frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Так как $\int\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)=-2\sqrt{1-x^2}+C,$

а $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C,$

то $\int\frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x-2\sqrt{1-x^2}+C.$

3. Метод интегрирования по частям.

Пусть $u=\varphi(x)$ и $v=g(x)$ – две функции от *x*, имеющие непрерывные производные. Известно, что

$$d(uv)=udv+vdu. \qquad (4)$$

Интегрируя обе части равенства (4), имеем:

$$\int d(uv)=\int udv+\int vdu,\ \text{или}\ \int udv=\int d(uv)-\int vdu,$$

откуда

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (5)$$

Произвольной постоянной, получившейся при интегрировании выражения *d*(*uv*), мы не пишем, включая ее мысленно в оставшийся в правой части интеграл $\int vdu$.

Формула (5) называется *формулой интегрирования по частям*, она дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$.

Для успешного применения этого метода целесообразно пользоваться следующими общими указаниями:

1. Подынтегральное выражение разбивают на 2 множителя: *u* и dv (множитель dv обязательно содержит *dx).*

2. Множитель *dv* выбирается так, чтобы по нему можно было бы найти первообразную *v*.

3. Интеграл $\int vdu$ должен получиться, вообще говоря, проще, чем данный интеграл.

Пример 1. $\int x\sin xdx.$

Имеется несколько возможностей. Например, можно положить $u=\sin x$, а

$xdx = dv$, можно положить $u = x$, а $\sin xdx = dv$.

Полагая $\left.\begin{array}{l} u = \sin x, \\ xdx = dv, \end{array}\right\}$, найдем $\left\{\begin{array}{l} du = \cos xdx, \\ v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2}. \end{array}\right.$

Применяя формулу (5), получаем

$$\int x \sin xdx = \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos xdx.$$

Это разбиение на множители следует признать неудачным, так как оно приводит к более сложному интегралу.

Положим теперь

$\left.\begin{array}{l} u = x, \\ \sin xdx = dv \end{array}\right\}$; отсюда найдем [2] $\left\{\begin{array}{l} du = dx, \\ v = \int \sin xdx = -\cos x. \end{array}\right.$

Применяя формулу (5), имеем:

$$\int x \sin xdx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos xdx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Следовательно, это разбиение подынтегрального выражения на множители следует признать удачным.

Пример 2. $\int x^n \ln xdx \ (n \neq -1)$.

Положим

$\left.\begin{array}{l} u = \ln x, \\ x^n dx = dv \end{array}\right\}$; это дает $\left\{\begin{array}{l} du = \dfrac{dx}{x}, \\ v = \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}. \end{array}\right.$

Применяя формулу (5), получим

$$\int x^n \ln xdx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx.$$

Таким образом,

$$\int x^n \ln xdx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C.$$

Иногда для получения окончательного результата целесообразно интегрирование по частям применять последовательно несколько раз.

Укажем на некоторые, часто встречающиеся интегралы, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

[2] Мы должны выбрать в качестве v какую-либо функцию, дифференциал которой равен $\sin xdx$. Проще всего положить $v = -\cos x$. Выбор другой функции имеющей тот же дифференциал (например, $v = -\cos x + 7$), не повлиял бы на результат, а только несколько усложнил бы выкладки.

площади, сумма которых равна найденному значению данного несобственного сходящегося интеграла.

Отыскание первообразной по полному дифференциалу. Пусть дано дифференциальное выражение $Pdx + Qdy$, причем x и y непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{dP}{dy}$ и $\dfrac{dQ}{dx}$ во всей плоскости Oxy или в некоторой односвязной области G.

Функцию двух переменных $u(x, y)$, *полный дифференциал которой равен дифференциальному выражению* $Pdx + Qdy$, *назовем первообразной для этого выражения.*

Выясним прежде всего, при каких условиях данное дифференциальное выражение $Pdx + Qdy$ имеет первообразную. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы дифференциальное выражение* $Pdx+Qdy$ *было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы в области* G *выполнялось условие:*

$$\frac{dP}{dy} \equiv \frac{dQ}{dx}.$$

Доказательство. Необходимость. Если $Pdx + Qdy$ есть полный дифференциал, то существует функция $u(x, y)$, для которой $du = Pdx + Qdy$. Следовательно,

$$\frac{du}{dx} = P \text{ и } \frac{dP}{dy} = Q.$$

Продифференцировав первое равенство по y, а второе по x, получим

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{dP}{dy}, \quad \frac{d^2u}{dydx} = \frac{dQ}{dx}.$$

Так как вторые смешанные производные непрерывны (в силу предположенной непрерывности $\dfrac{dP}{dy}$ и $\dfrac{dQ}{dx}$), они равны друг другу

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}.$$

Следовательно,

$$\frac{dP}{dy} \equiv \frac{dQ}{dx}.$$

Достаточность примем без доказательства.

Во многих случаях можно найти функцию u по ее полному дифференциалу $du = Pdx + Qdy$ следующим образом.

Поскольку полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов $du = d_x u + d_y u, \ d_x u = Pdx, \ d_y u = Qdy$, то интегрируя каждый из них отдельно, найдем два выражения искомой функции u:

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^a \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\delta\to 0} 2\left(\sqrt{a}-\sqrt{\delta}\right) = 2\sqrt{a}.$$

Бесконечной трапеции, ограниченной, например, гиперболой $y=\frac{1}{x}$ и теми же прямыми $x=0,\ x=a,\ y=0,$ нельзя приписать площади, ибо

$$\int_0^a \frac{1}{x}dx = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^a \frac{1}{x}dx = \lim_{\delta\to 0}\ln\frac{a}{\delta}=\infty.$$

Пример. Найдем площадь S бесконечного шпиля, ограниченного осью Ox, прямыми $x=a\ (a<0),\ x=b\ (b>0)$ и линией $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Так как функция $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ имеет в интервале $[a,\,b]$ точку бесконечного разрыва (x=0), то

$$S=\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(3\sqrt[3]{-\varepsilon}-3\sqrt[3]{a}\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(3\sqrt[3]{b}-3\sqrt[3]{\delta}\right) = -3\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b} = 3\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}\right).$$

Пример. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$

Здесь подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$, лежащей внутри отрезка интегрирования $[-1;\,2]$. Поэтому,

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon_1\to +0}\int_{-1}^{1-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \lim_{\varepsilon_2\to +0}\int_{1+\varepsilon_2}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim 3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon_1} + \lim 3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{1+\varepsilon_2}^{2} =$$

$$= 3\lim\left(\sqrt[3]{-\varepsilon_1}-\sqrt[3]{-2}\right) + 3\lim\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{\varepsilon_2}\right) = 3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).$$

Для графика подынтегральной функции $y=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ (рис.4) прямая x=1 является вертикальной асимптотой.

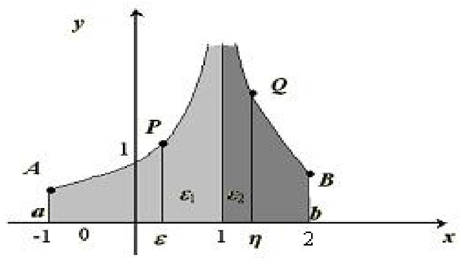


Рис. 4

Интегралы от этой функции в пределах от -1 до 1-ε_1 и от 1+ε_2 до 2 выражают площади криволинейных трапеций $aAP\varepsilon$ и ηQBb. При $\varepsilon_1\to +0$ и $\varepsilon_2\to +0$ эти трапеции неограниченно простираются вверх и вместе с тем имеют конечные

I. *Интегралы вида*: $\int P(x)e^{ax}dx,\ \int P(x)\sin axdx,\ \int P(x)\cos axdx,$ *где* $P(x)$ – *многочлен*, *a – постоянное число*, легко берутся методом интегрирования по частям, если положить $P(x)=u$.

Применяя этот метод, например, к интегралу $\int P(x)e^{ax}dx$, получим

$$\begin{array}{l|l} u=P(x), & du=P'(x)dx, \\ e^{ax}dx=dv, & v=\frac{1}{a}e^{ax}. \end{array}$$

Следовательно, $\int P(x)e^{ax}dx=\frac{1}{a}P(x)e^{ax}-\frac{1}{a}\int P'(x)e^{ax}dx.$

Второй интеграл является интегралом того же типа, что и первый, но степень многочлена $P'(x)$ на единицу ниже степени многочлена $P(x)$. Применяя к нему снова интегрирование по частям и повторяя его столько раз, какова степень многочлена сведем в конце концов наш интеграл к интегралу $\int e^{ax}dx$.

Таким же путем вычисляются и интегралы $\int P(x)\sin axdx,\ \int P(x)\cos axdx.$

Пример. Вычислить интеграл $\int\left(x^2+x+1\right)\sin 2xdx.$

Положим

$$\begin{array}{l|l} x^2+x+1=u, & du=2x+1, \\ \sin 2xdx=dv, & v=-\frac{1}{2}\cos 2x. \end{array}$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\left(x^2+x+1\right)\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\left(x^2+x+1\right)\cos 2x+\frac{1}{2}\int(2x+1)\cos 2xdx.$$

К последнему интегралу снова применяем метод интегрирования по частям:

$$\begin{array}{l|l} 2x+1=u_1, & du_1=2dx, \\ \cos 2xdx=dv_1, & v_1=\frac{\sin 2x}{2}. \end{array}$$

$$\int(2x+1)\cos 2xdx=\frac{1}{2}(2x+1)\sin 2x-\int\sin 2xdx=\frac{1}{2}(2x+1)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C.$$

Следовательно,

$$\int\left(x^2+x+1\right)\cos 2xdx=-\frac{1}{2}\left(x^2+x+1\right)\cos 2x+\frac{1}{4}(2x+1)\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\cos 2x+\frac{1}{4}(2x+1)\sin 2x+C$$

Изложенный метод интегрирования показывает, что интегралы вида $\int P(x)e^{ax}dx,\ \int P(x)\sin axdx,\ \int P(x)\cos axdx,$ где $P(x)$ – многочлен, всегда берутся в элементарных функциях. В отличие от них, интегралы $\int R(x)e^{ax}dx, \int R(x)\sin xaxdx, \int R(x)\cos axdx,$ где $R(x)$ – рациональная дробь, не всегда интегрируются в элементарных функциях. Так, например, интегралы $\int \frac{e^x}{x}dx, \int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx$ не выражаются в элементарных функциях.

II. *Интегралы вида*:
$\int P(x)\ln xdx, \int P(x)\operatorname{arctg} xdx, \int P(x)\operatorname{arcctg} xdx, \int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx,$ где $P(x)$ – *многочлен*, всегда берутся методом интегрирования по частям, если за u принять трансцендентную функцию, являющуюся множителем при $P(x)$.
Рассмотрим примеры.

Пример 1. $\int \operatorname{arctg} xdx.$

Полагаем

$$\begin{array}{l|l} \operatorname{arctg} x = u, & du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv = dx, & v = x. \end{array}$$

Формула (5) дает:

$$\int \operatorname{arctg} xdx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Пример 2. $\int \left(x^2+5x-1\right)\ln xdx.$

Полагаем

$$\begin{array}{l|l} \ln x = u, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ \left(x^2+5x-1\right) = dv, & v = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{2} - x. \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \left(x^2+5x-1\right)\ln xdx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x\right)\ln x - \int\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x\right)\ln x - \left(\frac{x^3}{9}+\frac{5x^2}{4}-x\right)+C$$

III. *Вычисление интегралов вида*: $\int e^{ax}\cos bxdx, \int e^{ax}\sin bxdx.$

Укажем, наконец, еще на один случай, когда интегрирование по частям приводит к цели. Пусть нам надо вычислить интеграл $\int f(x)dx.$

Допустим, что после однократного или двукратного интегрирования по частям оказалось возможным представить этот интеграл в виде суммы некоторой известной функции и интеграла от $f(x)$, причем перед интегралом стоит коэффициент k, отличный от единицы:

Определение. Несобственным интегралом от функции $f(x)$, непрерывной при $a \le x < b$ и неограниченной при $x \to b$, называется предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$.

Записывают это так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, *то расходящимся.*

Аналогично, если функция $f(x)$ претерпевает бесконечный разрыв только в левом конце $x=a$ интервала $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx, \quad \delta > 0.$$

Наконец, если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в какой-нибудь промежуточной точке $x=c$ интервала $[a, b]$, $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx,$$

причем ε и δ стремятся к нулю произвольно и независимо друг от друга.

Предположим, что линия $y = f(x)$ имеет в точке $x = b$ асимптоту, перпендикулярную к оси Ox; тогда ограниченная ею трапеция будет бесконечной (с бесконечными высотами) (рис. 3).

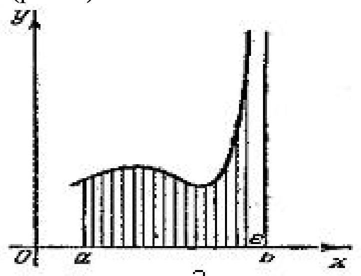


Рис. 3

Если существует несобственный интеграл от функции $f(x)$, то считают, что он измеряет площадь этой бесконечной трапеции; в противном случае трапеция площади не имеет.

Например, бесконечной трапеции, ограниченной линией $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ и прямыми $x = 0, x = a, y = 0,$ можно приписать площадь, равную $2\sqrt{a}$, ибо

Интересно, что соответствующие неопределенные интегралы не выражаются в элементарных функциях

II. Интеграл от разрывной функции. Если в интервале $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет некоторое число точек разрыва первого рода, то определить понятие интеграла для такой функции не представляет никаких затруднений. В самом деле, при этом естественно считать, что *интеграл есть просто сумма обыкновенных* (собственных) *интегралов, взятых по частичным интервалам, на которые разбивается интервал* $[a, b]$ *всеми точками разрыва функции.* Обозначим их через $c_1, c_2, \ldots, c_k$, $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_k < b$, будем иметь:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int_{c_k}^{b} f(x)dx.$$

Этим самым дается и определение площади криволинейной трапеции, соответствующей функции $y = f(x)$ с конечным числом точек разрыва первого рода в интервале $[a, b]$ (рис. 2); *площадь такой трапеции есть сумма площадей трапеций, опирающихся на частичные интервалы* $[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_k, b]$, *заключенные между последовательными точками разрыва.*

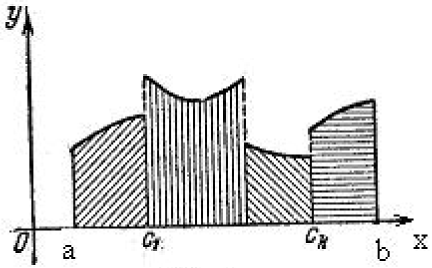


Рис. 2

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна для всех значений x, $a \le x < b$, а в правом конце $x = b$ интервала претерпевает бесконечный разрыв. Ясно, что обычное определение интеграла здесь теряет свой смысл. Но если взять обыкновенный интеграл

$$I(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \ \varepsilon > 0,$$

то мы аналогично предыдущему случаю (I) примем, что $I(\varepsilon)$ с уменьшением ε все лучше выражает ту величину, которую следует принять в качестве интеграла от функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$. Заставим ε произвольным образом стремиться к нулю. Тогда $I(\varepsilon)$ либо имеет предел, либо не имеет (стремясь к бесконечности или вовсе не стремясь ни к какому пределу, т.е. колеблясь).

$$\int f(x)dx = \Phi(x) + k\int f(x)dx \quad (k \ne 1).$$

Тогда, перенося второе слагаемое в левую часть, получим

$$(1-k)\int f(x)dx = \Phi(x),$$

откуда

$\int f(x)dx = \dfrac{\Phi(x)}{1-k}$, где $\dfrac{\Phi(x)}{1-k}$ – одна из первообразных от выражения $f(x)dx$. Чтобы найти семейство всех первообразных (т.е. неопределенный интеграл) остается к правой части добавить произвольное постоянное C:

$$\int f(x)dx = \frac{\Phi(x)}{1-k} + C.$$

Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bxdx, \int e^{ax}\sin bxdx$ берутся с помощью только что указанного приема. Рассмотрим конкретный пример:

Пример. $\int e^{5x}\cos 4xdx.$

Положим

$$\left.\begin{array}{l} e^{5x} = u, \\ \cos 4xdx = dv, \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 5e^{5x}dx, \\ v = \dfrac{1}{4}\sin 4x. \end{array}$$

Тогда

$$\int e^{5x}\cos 4xdx = \frac{1}{4}e^{5x}\sin 4x - \frac{5}{4}\int e^{5x}\sin 4xdx.$$

К последнему интегралу снова применим интегрирование по частям, положив

$$\left.\begin{array}{l} e^{5x} = u_1, \\ \sin 4xdx = dv_1, \end{array}\right| \begin{array}{l} du_1 = 5e^{5x}dx, \\ v_1 = -\dfrac{1}{4}\cos 4x. \end{array}$$

Тогда

$$\int e^{5x}\sin 4xdx = -\frac{1}{4}e^{5x}\cos 4x + \frac{5}{4}\int e^{5x}\cos 4xdx.$$

Следовательно:

$$\int e^{5x}\cos 4xdx = \frac{1}{4}e^{5x}\sin 4x - \frac{5}{4}\left(\frac{-e^{5x}\cos 4x}{4} + \frac{5}{4}\int e^{5x}\cos 4xdx\right) = \frac{e^{5x}(4\sin 4x + 5\cos 4x)}{16} - \frac{25}{16}\int e^{5x}\cos 4xdx.$$

Определяем отсюда $\int e^{5x}\cos 4xdx$:

$$\int e^{5x}\cos 4xdx = \frac{e^{5x}(4\sin 4x + 5\cos 4x)}{41} + C.$$

1.4. Рациональные дроби.
Интегрирование простейших рациональных дробей

Как известно, *многочленом* или *целой рациональной функцией* называется функция вида

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (1)$$

где n – целое положительное число, называемое *степенью* многочлена, а $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – постоянные *числа – коэффициенты* многочлена.

Корнем многочлена $P(x)$ называется всякое число α (действительное, мнимое или комплексное), обращающее многочлен в нуль, т.е. такое, что $P(\alpha) = 0$.

Напомним ряд теорем, используемых в дальнейшем изложении.

Теорема 1. *Всякий многочлен имеет по крайней мере один действительный или комплексный корень.*

Далее имеет место теорема Безу:

Теорема 2. *Если α корень многочлена $P(x)$, то $P(x)$ делится на $(x-\alpha)$ без остатка, т.е.*

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x), \qquad (2)$$

где $Q(x)$ – многочлен, степень которого на единицу меньше степени многочлена $P(x)$.

Замечание. Очевидно, коэффициент при старшей степени x в многочлене $Q(x)$ равен коэффициенту при старшей степени x в многочлене $P(x)$.

Теорема 3. *Всякий многочлен степени n может быть представлен в виде произведения n линейных множителей вида $(x-\alpha)$ и постоянного числа a_0 – коэффициента при старшей степени x.*

Следствие. *Многочлен $P(x)$ степени n имеет не более чем n различных корней.*

Теорема 4. *Если многочлен тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю.*

Следствие. *Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты при одинаковых степенях равны между собой.*

Пусть $P(x)$ – многочлен степени n. По теореме 3 его можно представить в виде произведения n линейных множителей

$$P(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n); \qquad (3)$$

среди линейных множителей, на которые разложен многочлен, могут быть одинаковые. Объединяя в разложении (3) одинаковые сомножители, мы можем его записать в виде

$$P(x) = a_0(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}\ldots(x-l)^{k_s}, \qquad (4)$$

где все числа $a, b, \ldots, l$ – различны и $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$.

Корень a многочлена $P(x)$, для которого линейный множитель в разложении (3) встречается m раз, называется *корнем кратности* m. Корень кратности единица называется *простым.*

Так, например, многочлен $P(x) = 3(x-2)^2(x+4)^3(x+1)$ имеет следующие корни: $a = 2, b = -4, c = -1$, причем 2 есть корень 2-й кратности, (–4) – корень кратности 3, а (–1) – простой корень. Для многочлена $P(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ имеет

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x}dx = \ln x \Big|_a^{\infty} = \infty.$$

Примеры. 1) Вычислим интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Имеем: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

2) Интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x dx$ расходится, так как величина $\displaystyle\int_0^{\eta} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\eta} = \sin\eta$ не стремится к пределу при $\eta \to \infty$ (колеблется).

3) Если точка M массы m, находящаяся в начале координат, притягивает свободную точку M_1 массы 1, лежащую на расстоянии x от M на оси Ox, то величина P силы притяжения, как известно, определяется из закона Ньютона

$$P = k\frac{m}{x^2}, \text{ где } k \text{ – константа,}$$

а работа, произведенная при перемещении M_1 из точки $x=r$ в точку $x = a$ $(a > r > 0)$, – из формулы

$$A = -\int_r^a k\frac{m}{x^2}dx = km\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right).$$

Знак минус перед интегралом взят потому, что направление силы противоположно направлению движения точки M (по той же причине работа оказалась отрицательной).

Если $a = \infty$, то

$$A = -\int_r^{\infty} k\frac{m}{x^2}dx = -k\frac{m}{r}.$$

Если точка M_1 будет перемещаться из бесконечности в точку $x = r$, то сила притяжения произведет уже положительную работу:

$$A = k\frac{m}{r}.$$

Эта работа называется *потенциалом силы притяжения материальной точки M при* $x = r$ (или в точке $x=r$).

Укажем два замечательных несобственных интеграла, значения которых находятся специальными методами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \text{ (интеграл Пуассона)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} \text{ (интеграл Дирихле)}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\xi\to-\infty,\,\eta\to+\infty}\int_{\xi}^{\eta} f(x)dx = \lim_{\xi\to-\infty}\int_{\xi}^{a} f(x)xd + \lim_{\eta\to\infty}\int_{a}^{\eta} f(x)dx,$$

где a – любое число, причем ξ и η изменяются независимо друг от друга.

Рассмотренные интегралы называются *интегралами с бесконечными пределами.*

Обозначим через $F(x)$ первообразную от $f(x)$. Условно запишем:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a), \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a) - F(-\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty),$$

понимая под символами $F(+\infty)$ и $F(-\infty)$ пределы, к которым стремится $F(x)$ при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

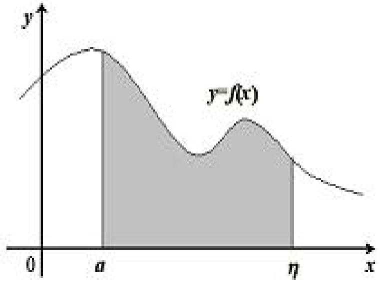


Рис. 1

Предположим, что линия $y = f(x)$ ограничивает трапецию с бесконечным основанием (рис. 1). Если существует несобственный интеграл от функции $f(x)$, взятый вдоль основания трапеции, то естественно считать, что он измеряет площадь этой бесконечной трапеции; в противном случае говорить о площади трапеции нельзя.

Например, бесконечной трапеции, ограниченной положительной полуосью *Ox*, прямой $x = a\,(a > 0)$ и линией $y = \dfrac{1}{x^3}$, можно приписать площадь, равную $\dfrac{1}{2a^2}$, ибо

$$\int_{a}^{\infty}\frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\Bigg|_{a}^{\infty} = \frac{1}{2a^2}.$$

Бесконечной трапеции, ограниченной, например, гиперболой $y = \dfrac{1}{x}$, положительной полуосью *Ox* и прямой $x = a\,(a > 0)$, нельзя приписать площади, так как

место разложение на множители: $P(x) = (x-1)^2(x+1)$, откуда следует, что 1 – корень кратности 2, а (–1) – простой корень многочлена $P(x)$.

Теперь, когда введено понятие о кратности корня, мы можем уточнить теорему о числе корней многочлена (см. следствие к теореме 3).

Теорема 5. *Всякий многочлен n-й степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из формулы разложения многочлена на линейные множители.

Среди корней многочлена могут быть и комплексные. Для них имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *Если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень* $\alpha + \beta i$, *то сопряженное число* $\alpha - \beta i$ *также является корнем многочлена.*

Теорема 7. *Если многочлен с действительными коэффициентами имеет корнем комплексное число* $\alpha + \beta i$ *кратности k, то сопряженное число* $\alpha - \beta i$ *также является корнем многочлена той же кратности.*

Из этой теоремы непосредственно следует: если в разложении многочлена на множители имеется множитель $(x-\gamma)^k$, соответствующий комплексному корню $\gamma = \alpha + \beta i$, то в этом разложении имеется множитель $(x-\gamma_1)^k$, соответствующий сопряженному корню $\gamma = \alpha - \beta i$. Перемножая попарно множители, соответствующие сопряженным корням, получим

$$(x-\gamma)^k(x-\gamma_1)^k = [x-(\alpha+\beta i)]^k\cdot[x-(\alpha-\beta i)]^k = \{[(x-\alpha)-\beta i]\cdot[(x-\alpha)+\beta i]\}^k = (x^2+px+q)^k,$$

где $p = -2\alpha,\ q = \alpha^2 + \beta^2$.

Это позволяет заменить произведение линейных множителей, соответствующих сопряженным корням, квадратным трехчленом с действительными коэффициентами.

Все вышеизложенное позволяет высказать следующее окончательное предложение, с помощью которого удается избежать мнимых чисел при разложении многочлена на множители.

Всякий многочлен с действительными коэффициентами можно представить в следующей форме:

$$P(x) = a_0(x-a)^{l_1}(x-b)^{l_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}\ldots$$

В этом разложении *линейные множители соответствуют действительным корням многочлена, а квадратные трехчлены, соответствуют комплексным корням многочлена.*

Постоянные $a_0, a, b, \ldots, p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ являются действительными числами.

Дробной рациональной функцией или просто рациональной, дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x)$ – многочлен степени m, а $Q_n(x)$ – многочлен степени n.

Например, $R(x)=\dfrac{x^3+7x-9}{x^2+3x-1}$ является рациональной дробью.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, и *неправильной* – в противном случае. Приведенная выше рациональная дробь неправильна. Многочлен, очевидно, является частным случаем рациональной дроби, знаменатель которой есть многочлен нулевой степени (постоянное число).

Задача настоящей главы заключается в изложении методов интегрирования рациональных дробей, отличных от многочленов. Что касается многочленов, то мы уже знаем, что они легко интегрируются.

Переходя к интегрированию рациональных дробей, отметим, прежде всего, что *всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.*

В самом деле, пусть $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$- неправильная рациональная дробь, т.е. степень $P(x)$ больше или равна степени $Q(x)$. Разделив числитель на знаменатель, получим тождество

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\equiv L(x)+\frac{r(x)}{Q(x)},$$

где $L(x)$ и $r(x)$ – многочлены, причем степень остатках $r(x)$ меньше степени знаменателя дроби $Q(x)$.

Например, пусть $R(x)=\dfrac{x^3+7x-9}{x^2+3x-1}$. Разделив x^3+7x-9 на x^2+3x-1, получим частное $L(x)=x-3$ и остаток $r(x)=17x-12$.
Следовательно,

$$\frac{x^3+7x-9}{x^2+3x-1}=x-3+\frac{17x-12}{x^2+3x-1}.$$

Это замечание показывает, что интегрирование неправильной рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ сводится к интегрированию многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\left[L(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}\right]dx=\int L(x)dx+\int\frac{r(x)}{Q(x)}dx.$$

Так как многочлены мы интегрировать умеем, то задача сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

Как будет показано ниже всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа так называемых *простейших дробей* следующих четырех типов:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases}0, & \text{если } f(x)\text{– нечетная функция,}\\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x)\text{– четная функция.}\end{cases}$$

Эти формулы очень полезны. Можно, например, сразу сказать, не производя вычислений, что

$$\int_{-a}^{a} x^5e^{x^2}dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 x\cos^2 xdx=0.$$

Рекомендуем читателю выяснить геометрический смысл выведенных формул.

2.6. Несобственные интегралы

Понятие определенного интеграла было установлено для конечного интервала и непрерывной на нем функции. Данное нами определение интеграла неприменимо, если интервал интегрирования бесконечен или функция в интервале интегрирования имеет точки разрыва. Но довольно часто встречается необходимость распространить определение интеграла на случаи бесконечного интервала интегрирования и разрывной функции.

I. Интеграл с бесконечными пределами. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна для всех значений x, $a\le x<+\infty$. Тогда мы можем вычислить интеграл от функции $f(x)$, взятый по любому интервалу $[a,\eta]$ $(\eta>a)$. Интеграл

$$I(\eta)=\int_a^\eta f(x)dx$$

тем лучше выражает величину, которую следует принять в качестве интеграла от функции $f(x)$ в бесконечном интервале $[a,\infty)$, чем больше η. Заставим η неограниченно возрастать. Имеются две возможности: или $I(\eta)$ при $\eta\to\infty$ имеет предел, или $I(\eta)$ предела не имеет (стремясь к бесконечности или вовсе не стремясь ни к какому пределу, т.е. колеблясь).

Определение. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ в интервале $[a,\infty)$ называется предел интеграла $\int_a^\eta f(x)dx$ при $\eta\to\infty$. Записывают это так:

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{\eta\to\infty}\int_a^\eta f(x)dx.$$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, *расходящимся*.

Аналогично определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=\lim_{\xi\to-\infty}\int_\xi^a f(x)dx,$$

и мы приходим к равенству (2).

Из формулы (2) видно, что подынтегральное выражение преобразуется так же, как и в случае неопределенного интеграла. Что же касается пределов интегрирования, то заданные пределы x_1 и x_2 связаны с новыми u_1 и u_2 так же, как заданная переменная x с новой переменной u.

Итак, вместо того чтобы, выполнив при помощи замены переменной неопределенное интегрирование, вернуться к первоначальной переменной, а затем вычислить двойную подстановку в данных пределах, можно сразу взять двойную подстановку в новых пределах. Результат – значение определенного интеграла – получится тот же, а выкладок потребуется меньше.

Новые пределы интегрирования u_1 и u_2 являются корнями уравнений $x_1 = \phi(u)$ и $x_2 = \phi(u)$ относительно неизвестной u.

Часто замена переменной в определенном интеграле производится не по формуле $x = \phi(u)$, а по формуле $u = \varphi(x)$, выражающей новую переменную через заданную. Тогда новые пределы u_1 и u_2 сразу определяются по формулам

$$u_1 = \varphi(x_1),\ u_2 = \varphi(x_2).$$

При этом теорема о замене переменной заведомо будет справедлива, если функция $\varphi(x)$ в интервале $[x_1, x_2]$ монотонна и имеет производную, отличную от нуля; тогда и обратная функция $x = \varphi(u)$ будет обладать теми же свойствами.

Пример. Выведем формулу для интеграла, взятого по симметричному интервалу $[-a, a]$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx,$$

в случаях, когда подынтегральная функция четна и нечетна. Представим этот интеграл так:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Заменив переменную интегрирования в первом интеграле в правой части по формуле $x = -u$, получим:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Таким образом,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx.$$

Подынтегральная функция в правой части равна нулю, если $f(x)$ – функция нечетная, и равна $2f(x)$, если $f(x)$ – функция четная. Следовательно,

I. $\dfrac{A}{x-a}$, III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$,

II. $\dfrac{A}{(x-a)^n}\ (n = 2, 3, \ldots)$, IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ (n = 2, 3, \ldots)$,

где A, a, p, q, M, N – действительные числа, а трехчлен $x^2 + pq + q$ не имеет действительных корней, т.е. $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$. Поэтому, если мы научимся интегрировать простейшие дроби и разлагать правильную рациональную дробь на сумму простейших, то задача интегрирования рациональных функций будет решена.

Интегрирование простейших дробей I и II типов не представляет никакого труда. В самом деле:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C,\ n = 2, 3, \ldots$$

Перейдем теперь к интегрированию рациональных дробей III и IV типов.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$$

Рассмотрим отдельно знаменатель $x^2 + px + q$ и дополним $x^2 + px$ до полного квадрата:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Так как по условию трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, то $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$. Положим для простоты $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$. Применим теперь к интегралу замену переменного, положив $t = x + \dfrac{p}{2}$ тогда $x = t - \dfrac{p}{2}$, $dx = dt$,

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = t^2 + a^2.$$

Следовательно,

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2}dt =$$

$$= M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{pM}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln(t^2 + a^2) + \frac{2N - pM}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Заменяя, наконец, t и a их выражениями, получим

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2N-pM}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Рассмотрим пример:

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x+1}dx.$$

Введем новую переменную t, положив ее равной половине производной знаменателя: $t = x+\frac{1}{2}$.

Тогда $x = t-\frac{1}{2}$; $dx = dt$; $x^2+x+1 = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)+1 = t^2+\frac{3}{4}$.

Следовательно,

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x+1}dx = \int \frac{3\left(t-\frac{1}{2}\right)+4}{t^2+\frac{3}{4}}dt = 3\int \frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{5}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+$$

$$+\frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+C = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Рассмотрим интегрирование дробей IV типа:

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx,\ n = 2, 3, \ldots$$

Введем, как и в случае III, новую переменную t, положив $t = x+\frac{p}{2}$. Это дает $x = t-\frac{p}{2}$, $dx = dt$, $x^2+px+q = t^2+a^2$, где, как и выше, $a^2 = q-\frac{p^2}{4}$.

Следовательно,

$$\int \frac{M\,x+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = M\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}+\frac{2N-M\,p}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}. \qquad (5)$$

Первый из этих интегралов соотношения (5) легко вычисляется:

$$\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2}\int \left(t^2+a^2\right)^{-n}d\left(t^2+a^2\right) = \frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+C.$$

Итак, остается вычислить интеграл $I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$. Мы здесь предложим способ вычисления этого интеграла с помощью рекуррентной формулы, позволяющей для любого натурального числа n выразить I_n через I_{n-1}. С помощью

Формула Ньютона-Лейбница показывает, что для вычисления определенного интеграла мы получили теперь хороший способ – неопределенное интегрирование. Нам уже известно, что правила интегрирования суммы и произведения постоянной на функцию имеют место и в определенном интеграле. Теперь мы рассмотрим правила интегрирования по частям и замены переменной.

Оказывается, что и эти правила неопределенного интегрирования могут быть непосредственно применены к определенному интегралу.

I. Правило интегрирования по частям:

$$\int_{x_1}^{x_2} u\,dv = uv\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v\,du, \qquad (1)$$

где u и v – функции независимой переменной.

Доказательство. Имеем:

$$\int_{x_1}^{x_2} u\,dv = \int u\,dv\Big|_{x_1}^{x_2} = \left(uv - \int v\,du\right)\Big|_{x_1}^{x_2};$$

отсюда непосредственно и следует доказываемая формула.

Вместо того чтобы до конца довести неопределенное интегрирование по частям, а затем выполнить двойную подстановку, можно сразу воспользоваться формулой (1).

Предварительное полное отыскание неопределенного интеграла требует более громоздких выкладок.

II. Правило замены переменной (подстановки).

Если в интервале $\left[u_1, u_2\right]$ функции $x = \phi(u)$, $\phi'(u)$ и $f\left[\varphi(u)\right]$ непрерывны и $\phi(u_1) = x_1$, $\phi(u_2) = x_2$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f\left[\phi(u)\right]\phi'(u)du. \qquad (2)$$

Доказательство. Преобразуем неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ при помощи подстановки $x = \phi(u)$.

$$\int f(x)dx = \int f\left[\phi(u)\right]\phi'(u)du = F(u)+C,$$

где $F(u)$ – первообразная от функции $f\left[\phi(u)\right]\phi'(u)$.

Рассматривая u как функцию от x, определяемую зависимостью $x = \phi(u)$, получим:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(u)\Big|_{x_1}^{x_2} = F\left(u_{x=x_2}\right)-F\left(u_{x=x_1}\right) = F(u_2)-F(u_1).$$

С другой стороны,

$$F(u_2)-F(u_1) = F(u)\Big|_{u_1}^{u_2} = \int_{u_1}^{u_2} f\left[\phi(u)\right]\phi'(u)du,$$

$$\left(\int_a^x f(x)dx\right)' = f(x), \quad \int_a^x f'(x)dx = f(x) - f(a) \qquad (4)$$

устанавливают точный характер связи между определенным интегралом и производной.

Эти формулы показывают, что если от какой-либо функции взять сначала интеграл с независимой переменной в качестве верхнего предела, а затем результат дифференцировать по этому пределу или, наоборот, сначала функцию дифференцировать, а затем интегрировать (с независимой переменной в качестве верхнего предела), то эта функция остается неизменной. Следует, однако, заметить, что в первом случае от функции требуется только непрерывность, а во втором – непрерывная дифференцируемость, причем результат в этом втором случае, строго говоря, остается не вполне неизменным: из взятой функции вычитается постоянная, зависящая от нижнего предела интеграла.

Окончательным, весьма важным результатом настоящего параграфа является достигнутый нами вывод, что *определенное интегрирование функций сводится к нахождению первообразных от этих функций.*

Замечание. Теперь очень легко показать, что путь *s*, найденный нами при помощи интеграла (по скорости *v*), действительно совпадает с тем путем, исходя из которого, была определена скорость. Пусть путь *s* как функция времени *t* задан так: $s = F(t)$. Тогда $v = f(t) = F'(t)$.

Поэтому

$$s = \int_0^T F'(t)dt,$$

откуда по формуле Ньютона-Лейбница (считая, что $F(0) = 0$) получаем:

$$s = F(t),$$

Что и требовалось доказать.

2.5. Способы вычисления определенных интегралов

Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

Ввиду того, что интеграл $\int_a^x f(x)dx$ есть первообразная от $f(x)$, можно написать:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + C.$$

С другой стороны, в силу формулы Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx \Big|_a^b.$$

Этими двумя соотношениями выявляется точный характер связи между определенным и неопределенным интегралами.

рекуррентной формулы мы будем выражать последовательно I_n через I_{n-1}, I_{n-1} через I_{n-2} и т.д., пока не дойдем до $I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$

Итак,

$$I_n = \int \frac{dt}{\left(a^2 + t^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(a^2 + t^2\right) - t^2}{\left(a^2 + t^2\right)^n}dt = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2dt}{\left(t^2 + a^2\right)^n}.$$

К интегралу $\int \frac{t^2dt}{\left(t^2 + a^2\right)^n}$ применим метод интегрирования по частям, полагая

$$\begin{array}{l|l} u = t, & du = dt, \\ dv = \dfrac{tdt}{\left(t^2 + a^2\right)^n}, & v = -\dfrac{1}{2(n-1)\left(t^2 + a^2\right)^{n-1}}, \end{array}$$

и группируя члены, содержащие I_{n-1}, получим

$$I_n = \frac{t}{2a^2(n-1)\left(t^2 + a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}. \qquad (6)$$

Это и есть искомая рекуррентная формула. Покажем способ ее применения. Пусть требуется вычислить $I_3 = \int \frac{dt}{\left(1 + t^2\right)^3}$. Применяя рекуррентную формулу (6), выразим I_3 через I_2:

$$I_3 = \frac{t}{2(3-1)\left(1 + t^2\right)^{3-1}} + \frac{2\cdot 3 - 3}{2(3-1)}I_2 = \frac{t}{4\left(1 + t^2\right)^2} + \frac{3}{4}I_2. \qquad (7)$$

Применяя ту же рекуррентную формулу для *n* = 2, выразим I_2 через I_1:

$$I_2 = \frac{t}{2\left(1 + t^2\right)} + \frac{1}{2}I_1.$$

Подставляя выражение I_2 в (7), найдем

$$I_3 = \frac{t}{4\left(1 + t^2\right)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{t}{2\left(1 + t^2\right)} + \frac{1}{2}I_1\right) = \frac{t}{4\left(1 + t^2\right)^2} + \frac{3t}{8\left(1 + t^2\right)} + \frac{3}{8}I_1.$$

Так как $I_1 = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} t + C,$ то окончательно

$$I_3 = \frac{t}{4\left(1 + t^2\right)^2} + \frac{3t}{8\left(1 + t^2\right)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} t + C.$$

Таким образом, чтобы закончить вопрос об интегрировании рациональных дробей, нам остается показать, как всякую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших.

Искомая формула разложения правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие состоит в следующем. Пусть знаменатель дроби $Q(x)$ имеет вид:

$$Q(x)=(x-a)^n(x-b)^k\left(x^2+px+q\right)^m\left(x^2+sx+t\right)^l,$$

причем квадратные трехчлены в этом выражении не имеют действительных корней, тогда правильную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-b)^k}+\\&+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+px+q\right)^m}+\frac{L_1x+R_1}{x^2+sx+t}+\frac{L_2x+R_2}{\left(x^2+sx+t\right)^2}+\\&\ldots+\frac{L_lx+R_l}{\left(x^2+sx+t\right)^l}\end{aligned}\right\},\qquad(8)$$

где $A_i, B_i, M_i, N_i, L_i, R_i$ – действительные числа. (Примем без доказательства).

Из формулы (8) мы видим, что линейным множителям знаменателя $Q(x)$ соответствуют простейшие дроби I и II типа, а квадратным множителям соответствуют простейшие дроби III и IV типа.

При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратному), равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби на множители.

Для того чтобы можно было пользоваться формулой (8), надо научиться определять коэффициенты $A_i, B_i, M_i, N_i, L_i, R_i$. Этому посвящен следующий подраздел.

1.5. Интегрирование рациональных дробей и некоторых иррациональных функций

Одним из наиболее простых методов определения коэффициентов в разложении правильной дроби на простейшие является *метод неопределенных коэффициентов*. Поясним применение этого метода на примерах.

Пример 1. Разложить на простейшие дроби $\frac{x^2+3x-1}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}$.

$$\frac{x^2+3x-1}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1},\qquad(1)$$

где A_1, A_2, M, N – пока неизвестные постоянные числа.

Приводим правую часть тождества (1) к общему знаменателю:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b,$$

причем, $F'(x)=f(x)$.

Формула Ньютона-Лейбница дает нам замечательный ключ к вычислению определенных интегралов. Она позволяет находить определенный интеграл, обходя суммирование, при помощи первообразных функций. Для иллюстрации возьмем несколько простых примеров.

Так как $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ есть первообразная от k, то

$$\int_a^b x^k dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}\Bigg|_a^b=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}\quad(k\neq-1).$$

Так как одной из первообразных от $\frac{1}{x}$ служит $\ln x$, то

$$\int_a^b\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_a^b=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}\quad(a>0,\ b>0).$$

Одной из первообразных от e^x является e^x, в силу чего

$$\int_a^b e^x dx=e^x\Big|_a^b=e^b-e^a.$$

Одной из первообразных от $\cos x$ служит $\sin x$, поэтому

$$\int_a^b\cos x dx=\sin x\Big|_a^b=\sin b-\sin a.$$

Если взять какие-нибудь другие первообразные от подынтегральных функций (т.е. отличающиеся от выше взятых на постоянные величины), то, очевидно, получим те же результаты.

Заметим теперь, что, так как $F(x)$ есть первообразная от $F'(x)$, то

$$\int_a^x F'(x)dx=F(x)-F(a);$$

это можно записать так:

$$\int_a^x dF(x)=F(x)-F(a).$$

Мы пришли к несколько иному виду формулы Ньютона-Лейбница, позволяющему основную теорему этого пункта выразить так:

Приращение функции в интервале равно определенному интегралу по этому интервалу от дифференциала функции.

Формулы (4)

В теореме о производной интеграла по верхнему пределу утверждается, что производная от площади трапеции по абсциссе равна ординате линии, ограничивающей трапецию отрезок $AB = f(x)$, или что дифференциал площади трапеции равен площади прямоугольника $ABDE$ со сторонами, равными соответственно приращению основания трапеции и ординате линии в крайней точке.

Итак, мы видим, что производной от функции $I(x)$ является данная функция $f(x)$. Следовательно $I(x)$ является *первообразной* от функции $f(x)$.

Теорема. Значение определенного интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятых при верхнем я нижнем пределах интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x). \tag{3}$$

Равенство (3) называется *формулой Ньютона-Лейбница.*

Другими словами,

Значение определенного интеграла равно приращению любой первообразной от подынтегральной функции в интервале интегрирования.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$I(x) = \int_a^x f(x)dx;$$

так как она является первообразной от функции $f(x)$, ее нужно искать среди функций $F(x)+C$, где $F(x)$ – какая-нибудь из первообразных от $f(x)$.

Следовательно,

$$I(x) = F(x) + C_1,$$

где C_1 – некоторая определенная постоянная. Для отыскания ее воспользуемся еще одним известным нам свойством функции $I(x)$, а именно тем, что

$$I(a) = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Отсюда $F(a)+C_1 = 0$, т.е. $C_1 = -F(a)$. Итак,

$$I(x) = \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a);$$

при $x = b$ получаем доказываемое равенство (3).

Разность значений функции записывают часто так:

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Вертикальная черта с нижним и верхним индексами, стоящая справа от символа функции и называемая *знаком двойной подстановки*, указывает, что из значения функции, принимаемого ею при верхнем индексе, нужно вычесть ее значение, принимаемое при нижнем индексе.

Воспользовавшись этим обозначением, формуле (3) можно придать вид

$$\frac{x^2+3x-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1(x^2+x+1) + A_2(x-1)(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Дроби, стоящие в правой и левой частях последнего равенства, тождественно равны друг другу. Но если две дроби тождественно равны друг другу и имеют одинаковые знаменатели, то числители этих дробей также тождественно равны друг другу:

$$x^2+3x-1 = A_1(x^2+x+1) + A_2(x-1)(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-1)^2.$$

Раскрывая скобки, располагаем многочлен в правой части последнего равенства по убывающим степеням *x:*

$$x^2+3x-1 = (A_2+M)x^3 + (A_1-2M+N)x^2 + (A_1+M-2N)x + (A_1-A_2+N).$$

Два многочлена тогда и только тогда тождественно равны друг другу, когда коэффициенты при одинаковых степенях *x* равны.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x* в этих многочленах, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A_2 + M &= 0 \\ A_1 - 2M + N &= 1 \\ A_1 + M - 2N &= 3 \\ A_1 - A_2 + N &= -1 \end{aligned}\right\}.$$

Решив эту систему, найдем:

$$A_1 = 1,\ A_2 = \frac{2}{3},\ M = -\frac{2}{3},\ N = -\frac{4}{3}.$$

Подставив в формулу (1) вместо A_1, A_2, M, N найденные значения, получим окончательно

$$\frac{x^2+3x-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{3(x-1)} - \frac{2(x+2)}{3(x^2+x+1)}.$$

Пример 2. Разложить на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+5)}.$$

Так как знаменатель имеет только действительные корни, то разложение дроби, имеет вид

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+5)} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1}{x+5}. \tag{2}$$

Приведем правую часть соотношения (2) к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+5)} = \frac{A_1(x+5) + A_2(x-1)(x+5) + B_1(x-1)^2}{(x-1)^2(x+5)}.$$

Приравнивая числители, получаем

$$x^2+x+1 = A_1(x+5) + A_2(x-1)(x+5) + B_1(x-1)^2;$$

расположим многочлен в правой части по убывающим степеням *x*:

$$x^2+x+1=(A_2+B_1)x^2+(A_1+4A_2-2B_1)x+(5A_1-5A_2+B_1).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} A_2+B_1=1 \\ A_1+4A_2-2B_1=1 \\ 5A_1-5A_2+B_1=1 \end{array}\right\}.$$

Разрешив эту систему, найдем $A_1=\frac{1}{2}$, $A_2=\frac{5}{12}$, $B_1=\frac{7}{12}$. Подставив найденные значения коэффициентов в соотношения (2), получим

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+5)}=\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{5}{12(x-1)}+\frac{7}{12(x+5)}.$$

Пример 3. Разложить на простейшие дроби $\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2(x^2+x+2)}$.

Знаменатель имеет только комплексные корни; в этом случае разложение дроби на простейшие примет вид

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2(x^2+x+2)}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+1)^2}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+1}+\frac{P_1x+S_1}{x^2+x+2}.$$

Приведя к общему Знаменателю выражение, стоящее в правой части, придем к тождеству:

$$x^2+x+1=(M_1x+N_1)(x^2+x+2)+(M_2x+N_2)(x^2+1)(x^2+x+2)+(P_1x+S_1)(x^2+1)^2,$$

откуда:

$$x^2+x+1=(M_2+P_1)x^5+(M_2+N_2+S_1)x^4+(M_1+3M_2+N_2+2P_1)x^3+$$
$$+(M_1+N_1+M_2+3N_2+2S_1)x^2+(2M_1+N_1+2M_2+N_2+P_1)x+(2N_1+2N_2+S_1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, приходим к системе уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} M_2+P_1=0 \\ M_2+N_2+S_1=0 \\ M_1+3M_2+N_2+2P_1=0 \\ M_1+N_1+M_2+3N_2+2S_1=1 \\ 2M_1+N_1+2M_2+N_2+P_1=1 \\ 2N_1+2N_2+S_1=1 \end{array}\right\}.$$

Решая эту систему уравнений, найдем

$$M_1=\frac{1}{2},\ N_1=\frac{1}{2},\ M_2=-\frac{1}{4},\ N_2=-\frac{1}{4},\ P_1=\frac{1}{4},\ S_1=\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$I(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx.$$

Значит,

$$\Delta I=I(x+\Delta x)-I(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx,$$

т.е.

$$\Delta I=\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx.$$

Применяя к последнему интегралу теорему о среднем , найдем:

$$\Delta I=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x,$$

где ξ – точка, лежащая между x и $x+\Delta x$.

По определению производной имеем:

$$I'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi).$$

Но если $\Delta x\to 0$, то $x+\Delta x$ стремится к x; поэтому и подавно $\xi\to x$, а так как $f(x)$ – непрерывная функция, то

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x),$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы следует также, что

$$d\int_a^x f(x)dx=f(x)dx. \qquad (2)$$

Необходимо заметить, что результаты в формулах (1) и (2) не зависят от обозначения переменной интегрирования; имеют место, например, такие равенства:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x), \quad d\int_a^x f(t)dt=f(x)dx.$$

Рассмотрим геометрический смысл теоремы о производной интеграла по верхнему пределу. Функция $I(x)$ выражает переменную площадь криволинейной трапеции с переменным основанием $|a, x|$, ограниченной линией $y=f(x)$ (рис.1).

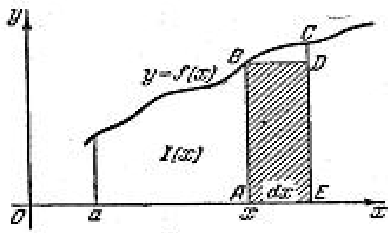


Рис.1

функция не постоянная) меньше некоторых ее значений, больше других ее значений и равно, по меньшей мере, одному ее значению.

Понятие среднего значения функции очень употребительно в технике. Многие величины часто характеризуются своими средними значениями; таковы, например, давление пара, сила и напряжение переменного тока, скорость химической реакции и т.п.

2.4. Интеграл с переменным верхним пределом

Будем считать нижний предел интеграла постоянным, а верхний переменным. Придавая верхнему пределу различные значения, будем получать соответствующие значения интеграла; следовательно, при рассматриваемом условии интеграл является функцией своего верхнего предела.

Остановимся на общепринятых обозначениях. Независимая переменная в верхнем пределе обычно обозначается той же буквой, скажем *x*, что и переменная интегрирования. Таким образом, например, записывают:

$$I_n = \int_0^x f(x)dx.$$

Однако переменная x в подынтегральном выражении служит лишь вспомогательной переменной – переменной интегрирования, пробегающей в процессе составления интеграла (суммирования) значения от a до x – верхнего предела интеграла. Если нам нужно вычислить частное значение функции $I(x)$, например, при $x = b$, т.е. $I(b)$, то мы подставим b вместо x в верхний предел интеграла, но, разумеется, не будем подставлять b вместо переменной интегрирования. Поэтому нагляднее было бы употреблять такую запись:

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

взяв для переменной интегрирования какую-нибудь другую букву (здесь *t*). Мы, однако, будем часто обозначать одной буквой и переменную интегрирования, и независимую переменную в верхнем пределе, всегда помня их различный смысл в символе интеграла.

Свойства интеграла, изученные в предыдущем параграфе, относятся и к интегралу с переменным верхним пределом.

Весьма важно изучить связь между функцией $I(x)$ и данной подынтегральной функцией $f(x)$.

Теорема (о производной интеграла по верхнему пределу). Производная от интеграла по его верхнему пределу равна подынтегральной функции:

$$I'(x) = \left(\int_a^x f(x)dx\right)' = f(x). \qquad (1)$$

Доказательство. Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда наращенное значение функции будет:

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2(x^2+x+2)} = \frac{x+1}{2(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{4(x^2+1)} + \frac{x+2}{4(x^2+x+2)}.$$

Пример 4. Разложить на простейшие дроби $\dfrac{2x^3-4x^2+x+10}{(x^2-1)(x^2-4)}$.

$$\frac{2x^3-4x^2+x+10}{(x^2-1)(x^2-4)} = \frac{2x^3-4x^2+x+10}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}.$$

Приводя к общему знаменателю, получим тождество

$$2x^3-4x^2+x+10 = A(x+1)(x^2-4) + B(x-1)(x^2-4) + C(x^2-1)(x+2) + D(x^2-1)(x-2).$$

или

$$2x^3-4x^2+x+10 = (A+B+C+D)x^3 + (A-B+2C-2D)x^2 + (-4A-4B-C-D)x + (-4A+4B-2C+2D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A+B+C+D&=2\\ A-B+2C-2D&=-4\\ -4A-4B-C-D&=1\\ -4A+4B-2C+2D&=10 \end{aligned}\right\},$$

из которой находим

$$A = -\frac{3}{2},\ B = \frac{1}{2},\ C = 1,\ D = 2.$$

Следовательно,

$$\frac{2x^3-4x^2+x+10}{(x^2-1)(x^2-4)} = -\frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2}.$$

Часто нахождение коэффициентов разложения значительно упрощается, если применить так называемый *метод произвольных значений*. Рассмотрим с этой точки зрения только что приведенный пример. Полученное там равенство

$$2x^3-4x^2+x+10 = A(x+1)(x^2-4) + B(x-1)(x^2-4) + C(x^2-1)(x+2) + D(x^2-1)(x-2) \qquad (3)$$

есть тождество, справедливое при любом значении *x*.

Выбираем такие значения *x*, для которых равенство (3) принимает наиболее простой вид. Здесь проще всего за *x* взять один из корней знаменателя.

Полагая *x* = 1, имеем:

$$2\cdot 1^3 - 4\cdot 1^2 + 1 + 10 = A(1+1)(1^2-4),$$

откуда $9 = -6A$; $A = -\dfrac{3}{2}$.

Аналогично, полагая $x = -1$, найдем $3 = 6B$, $B = \dfrac{1}{2}$; при $x = 2$, $12 = 12C$, $C = 1$; при $x = -2$, $-24 = -12D$; $D = 2$.

На практике указанный метод целесообразно применять в случае, когда знаменатель $Q(x)$ правильной рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ имеет только действительные простые корни.

Все выше изложенное позволяет нам сформулировать основные правила интегрирования рациональных дробей.

1. Если рациональная дробь неправильная, то ее представляют в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Тем самым интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

2. Разлагают знаменатель правильной дроби на множители.

3. Правильную рациональную дробь представляют в виде суммы простейших дробей и сводят интегрирование правильной рациональной дроби к интегрированию простейших дробей.

Рассмотрим примеры:

Пример 1. $\displaystyle\int\frac{x^4+3x^3-8x^2+6x+1}{(x-1)^2(x+5)}dx.$

Под интегралом стоит неправильная рациональная дробь. Выделяя целую часть, получим

$$\frac{x^4+3x^3-8x^2+6x+1}{(x-1)^2(x+5)}=x+\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+5)}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^4+3x^3-8x^2+6x+1}{(x-1^2)(x+5)}dx=\int xdx+\int\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+5)}dx=\frac{x^2}{2}+\int\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+5)}dx.$$

Разложим правильную рациональную дробь $\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+5)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+5)}=\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{5}{12(x-1)}+\frac{7}{12(x+5)}.$$

Поэтому

$$\int\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+5)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{5}{12}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{7}{12}\int\frac{dx}{x+5}=$$

$$=-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{5}{12}\ln|x-1|+\frac{7}{12}\ln|x+5|+C$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\int\frac{x^4+3x^3-8x^2+6x+1}{(x-1)^2(x+5)}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{5}{12}\ln|x-1|+\frac{7}{12}\ln|x+5|+C.$$

Пример 2. $\displaystyle\int\frac{x^2+3x-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx.$

Под интегралом стоит правильная рациональная дробь. Разлагая ее на

Приведем некоторые соображения в обоснование этого определения.

Пусть некоторая величина y принимает n значений: $y_1,\dots,y_2,\dots,y_n$. Средним арифметическим значением этой величины называется частное $\dfrac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$. Так если температура воздуха в течение суток измеряется через каждый час, то средней температурой будет частное от деления суммы всех наблюденных температур на 24.

Но представим себе теперь, что величина изменяется непрерывно (например, температура воздуха известна в любой момент суток) и мы хотим как-то в среднем охарактеризовать всю совокупность ее значений. Как в этом случае следует определить среднюю температуру воздуха, принимая во внимание всю известную совокупность значений температуры? Вообще, что следует принять в качестве среднего значения непрерывной функции $y=f(x)$ в некотором интервале $[a,b]$?

Разобьем интервал $[a,b]$ на n равных частей с помощью точек $x_0=a,\ x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n=b$ и возьмем значения функции в этих n точках:

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\dots,y_{n-1}=f(x_{n-1}).$$

Значениями нашей функции во всех остальных точках интервала пока пренебрежем. Возьмем среднее арифметическое η_n указанных значений:

$$\eta_n=\frac{y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}}{n}.$$

Ясно, что чем больше n, тем больше значений функции учитывается при отыскании среднего значения, и поэтому естественно за среднее значение y_{cp} функции принять предел, к которому стремится η_n при $n\to\infty$. Найдем этот предел.

Умножив и разделив выражение для η_n на $b-a$, получим:

$$\eta_n=\frac{1}{b-a}\left(y_0\frac{b-a}{n}+y_1\frac{b-a}{n}+\ldots+y_{n-1}\frac{b-a}{n}\right);$$

но так как $\dfrac{b-a}{n}=\Delta x_i$, то

$$\eta_n=\frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}y_i\Delta x_i=\frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\Delta x_i,$$

откуда, переходя к пределу, получаем указанное нами выше выражение для среднего значения:

$$y_{cp}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\Delta x_i=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

На основании теоремы о среднем мы заключаем, что $y_{cp}=f(\xi)$, где $a\le\xi\le b$, т.е. что среднее значение непрерывной функции в интервале всегда (если только

$x=\xi,\ a\le\xi\le b,\ f(x)$ получит значение, равное μ, т.е. $f(\xi)=\mu$ (рис. 1), что и требовалось доказать.

Из равенства (1) находим:

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a),\ a\le\xi\le b.$$

Эта формула позволяет теорему о среднем высказать в такой форме: *Определенный интеграл от непрерывной функции, равен произведению значения этой функции в некоторой промежуточной точке интервала интегрирования, на длину интервала.*

Дадим наглядное пояснение теоремы. При движении прямой, параллельной оси *Ox* (рис. 2), вверх от положения *BC* площадь прямоугольника *ABCK* будет непрерывно возрастать от величины, меньшей площади трапеции, до величины, большей ее.

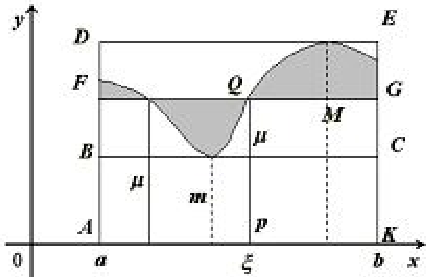


Рис. 2

Очевидно, при некотором промежуточном положении прямой – обозначим его через *FG* – площадь прямоугольника *AFGK* окажется в точности равной площади трапеции *s*. Так как при этом движении прямая постоянно пересекает линию, ограничивающую трапецию, то и в положении *FG* найдется одна или несколько точек пересечения Q; абсцисса любой точки пересечения и будет требуемым по теореме значением ξ.

Если трапецию ограничивает прямая линия, то $\xi=\dfrac{a+b}{2}$; отрезок *PQ* будет при этом средней линией прямолинейной трапеции.

IV. Среднее арифметическое значение функции

Значение $f(\xi)$, находимое по теореме о среднем, называется средним арифметическим значением функции $f(x)$ в интервале $[a,b]$.

Определение. *Средним арифметическим значением* y_{cp} непрерывной функции $y=f(x)$ в интервале $[a,b]$ называется отношение определенного интеграла от этой функции к длине интервала:

$$y_{cp}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

простейшие дроби, получим

$$\frac{x^2+3x-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{3(x-1)}-\frac{2(x+2)}{3(x^2+x+1)}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^2+3x-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx=\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{2}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{2}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

Что касается интеграла в правой части, то он берется, как мы знаем, подстановкой $t=x+\dfrac{1}{2}$. При этом $x=t-\dfrac{1}{2}$, $dx=dt$, $x^2+x+1=t^2+\dfrac{3}{4}$. Таким образом, имеем:

$$\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\int\frac{t-\frac{1}{2}+2}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Итак,

$$\int\frac{x^3+3x-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx=-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln(x^2+x+1)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Интеграл от рациональной дроби является элементарной функцией. Мы сейчас рассмотрим некоторые типы интегралов, которые надлежащей заменой переменного могут быть сведены к интегралам от рациональных функций, следовательно, также могут быть выражены через элементарные функции.

Предварительно рассмотрим некоторые новые понятия.

Многочленом относительно переменных u и v называется сумма произведений вида: Au^nv^m, где *m* и *n* – целые неотрицательные числа.

Например, выражения $3u^2v+4u^4v^2-5v^6+6$; $7u^2v^3$; $5v^2+4$ являются многочленами относительно *u* и *v*.

Частное от деления двух многочленов относительно *u* и *v* называется *рациональной функцией от u и v* или *рациональным выражением* относительно *u* и *v*.

Например, дроби $\dfrac{u^3+3v}{2u^2-v^3},\dfrac{u^2+1}{u+2v^2},\dfrac{5}{u^2+v^2},\dfrac{u^3+3}{4v}$ являются рациональными выражениями относительно *u* и *v*. Рациональную функцию от *u* и *v* обозначают $R(u;v)$.

Легко заметить, что сумма, разность, произведение и частное нескольких рациональных функций от *u* и *v* есть тоже рациональная функция от *u* и *v*.

Рациональным выражением относительно функций $\varphi(x)$ и $\phi(x)$ называется рациональная функция от *u* и *v*, в которую вместо *u* и *v* подставлены соответственно $\varphi(x)$ и $\phi(x)$. Рациональное выражение относительно $\varphi(x)$ и $\phi(x)$ обозначают $R(\varphi(x), \phi(x))$. Аналогичный смысл имеет выражение $R(\varphi(x), \phi(x), \chi(x))$.

Пример 1. $\dfrac{\sqrt[3]{x+1}+x}{x^2+\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ – рациональное выражение относительно x и $\sqrt[3]{x+1}$.

Пример 2. $\dfrac{\sin x+\cos^2 x}{\sin x+2\cos^2 x}$ – рациональное выражение относительно $\cos x$ и $\cos x$.

Заметим, что *если* $\varphi(x)$ *и* $\phi(x)$ *– рациональные функции от x, то* $R(\varphi(x), \phi(x))$ *также является рациональной функцией от x.*

1. *Интегралы вида* $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$, *где n – целое, число, могут быть сведены к интегралам от рациональных функций.* Докажем это.

Произведем в этом интеграле замену переменной, положив $ax+b=z^n$; тогда $x=\dfrac{z^n-b}{a}$, $dx=\dfrac{nz^{n-1}}{a}dz$, $\sqrt[n]{ax+b}=z$. Следовательно,

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx = \int R\left(\frac{z^n-b}{a}, z\right)\frac{nz^{n-1}}{a}dz.$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства, есть интеграл от рациональной функции относительно переменной интегрирования z и, следовательно, может быть вычислен в элементарных функциях.

Поясним сказанное примерами:

Пример 1. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}dx.$

Полагаем $x+1=z^2$; тогда $x=z^2-1$ и $dx=2zdz$.
Следовательно,

$$\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{z^2-1+z}{1-z}2zdz = 2\int \frac{z^3+z^2-z}{1-z}dz.$$

Таким образом, мы свели наш интеграл к интегралу от рациональной функции.

$$\int \frac{z^3+z^2-z}{1-z}dz = \int\left(-z^2-2z-1+\frac{1}{1-z}\right)dz = -\frac{z^3}{3}-z^2-z-\ln|1-z|+C.$$

Подставляя вместо z его выражение через x, т.е. $z=\sqrt{x+1}$, имеем:

$$\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}dx = -2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}+x+1+\sqrt{x+1}+\ln\left|1-\sqrt{1+x}\right|\right)+C.$$

$$\frac{1}{2} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx \le \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Таким образом, интеграл заключен между 0,5 и 0,71, что дает нам право считать его равным 0,6 с точностью до 0,1. Более точные приемы показывают, что приближенно он равен 0,62.

II. Обобщение теоремы об оценке интеграла. Интегрирование неравенств.

Справедлива следующая более общая теорема, чем теорема 1:

Теорема 2. Если в каждой точке x интервала $[a, b]$

$$\phi(x) \le f(x) \le \varphi(x),$$

то

$$\int_a^b \phi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx, \quad a<b.$$

Это значит, что неравенство между функциями влечет неравенство того же смысла между их определенными интегралами, или, говоря коротко, *неравенства можно интегрировать*. Дифференцировать неравенства нельзя.

В частном случае, когда $\varphi(x)$ тождественно равно M, а $\phi(x)$ тождественно равно m, получаем теорему 1.

III. Теорема о среднем

Определенный интеграл обладает следующим важным свойством:

Теорема (о среднем). Внутри интервала интегрирования $[a, b]$ существует, по меньшей мере, одно значение $a \le \xi \le b$, для которого

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi). \tag{1}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 имеем:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

и, значит,

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu,$$

где μ – некоторое число, заключенное между наименьшим (m) и наибольшим (M) значениями функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$, т.е. $m \le \mu \le M$. Но $f(x)$, будучи непрерывной функцией, обязательно принимает, по меньшей мере, один раз каждое значение, лежащее между m и M. Следовательно, при некотором откуда в силу того, что $\int\limits_a^b dx = \lim \sum\limits_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b-a$,

$$M\int_a^b dx = M(b-a) > \int_a^b f(x)dx$$

$$m\int_a^b dx = m(b-a) < \int_a^b f(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

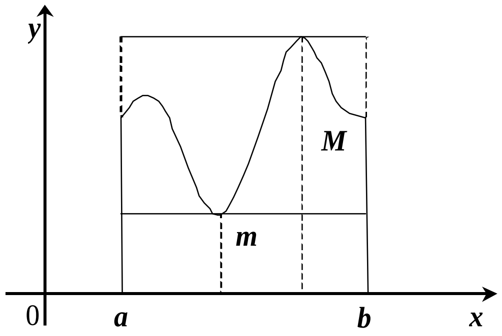


Рис. 1

Геометрический смысл этих неравенств таков: площадь криволинейной трапеции больше площади прямоугольника с основанием, равной основанию трапеции, и высотой, равной наименьшей ординате трапеции, и меньше площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной наибольшей ординате трапеции (рис. 1).

Находя границы для интеграла, мы, как говорят, производим его оценку. Может случиться, что весьма трудно или даже невозможно найти точное значение интеграла, а оценивая его, мы узнаем, хотя бы грубо, приближенное его значение. С такого, рода оценками приходится довольно часто встречаться в математике.

Указанные в теореме 1 (об оценке определенного интеграла) границы для интеграла тем более точны, чем короче интервал интегрирования и чем меньше линия $y = f(x)$ отличается по положению от прямой, параллельной оси *Ox*.

Пример. Оценить интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Легко проверить, что подынтегральная функция в интервале $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ убывает и, следовательно,

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{4},$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5} - \sqrt[3]{2x+5}}$. Подынтегральное выражение рационально зависит от $\sqrt[6]{2x+5}$, так как $\frac{1}{\sqrt{2x+5} - \sqrt[3]{2x+5}} = \frac{1}{\left(\sqrt[6]{2x+5}\right)^3 - \left(\sqrt[6]{2x+5}\right)^2}$. Сделаем замену переменной: $2x+5 = z^6$, откуда $x = \frac{z^6-5}{2}$ и $dx = 3z^5dz.$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5} - \sqrt[3]{2x+5}} = \int \frac{3z^5dz}{z^3 - z^2} = 3\int \left(z^2 + z + 1 + \frac{1}{z-1}\right)dz =$$

$$= z^3 + \frac{3z^2}{2} + 3z + 3\ln|z-1| + C = \sqrt{2x+5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+5} + +3\sqrt[6]{2x+5} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x+5} - 1\right| + C.$$

II. *Интегралы более общего вида*: $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,$

где R – рациональное выражение, от x и $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}},$ *также приводятся к интегралам от рациональной функции, если положить* $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$.

Пример. Вычислить $\int \frac{1 + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+x} dx.$

Полагаем $\frac{1-x}{1+x} = z^2$, откуда $x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $dx = -\frac{4zdz}{\left(1+z^2\right)^2}$.

Следовательно,

$$\int \frac{1 + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+x} dx = \int \frac{1+z}{1 + \frac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{-4z}{\left(1+z^2\right)^2} dz = -2\int \frac{z^2+z}{1+z^2} dz =$$

$$= -2\int \left(1 + \frac{z-1}{z^2+1}\right)dz = -2z - \ln\left(z^2+1\right) + 2\,\mathrm{arctg}\, z + C = -2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \ln\left|\frac{1-x}{1+x} + 1\right| +$$

$$+ 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C == -2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \ln\frac{2}{|1+x|} + 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C =$$

$$= -2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln|1+x| + 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

1.6. Интегрирование тригонометрических функций. Общие замечания о методах интегрирования

I. *Интегралы типа* $\int \sin^m x \cos^n x dx$, *где m и n – целые числа.*

а) *Одно из чисел m или n – нечетно.* В этом случае интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций.

Метод интегрирования ясен из приведенных примеров.

Пример 1. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$

Замечая, что $\cos x dx = d \sin x$, сделаем замену переменной: $\sin x = z$. Это дает $\cos x dx = dz$ и, следовательно, так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - z^2$, получим

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int z^2 \left(1 - z^2\right) dz =$$

$$= \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

Пример 2. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx.$

Умножив числитель и знаменатель подынтегрального выражения на $\cos x$, получим

$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cos x dx$. Положим $\sin x = z;$ тогда $dz = \cos x dx,$ $\cos^2 x = 1 - z^2.$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{z^2 dz}{1 - z^2} = \int \left(-1 + \frac{1}{1 - z^2}\right) dz = -z + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| + C =$$

$$= -\sin x + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C.$$

б) Оба *показателя m и n – четные неотрицательные числа* (в частности, одно из них может быть равным нулю). Заменяя $\sin^2 x, \cos^2 x$ и $\sin x \cos x$ по формулам:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2},$$

мы добьемся того, что произведение $\sin^m x \cos^n x$ заменится суммой произведений такого же вида, но с меньшими показателями степеней; метод интегрирования ясен из следующих примеров:

под ней, для отыскания ее площади нужно отдельно вычислить интегралы, выражающие площади ее частей, расположенных над осью абсцисс, отдельно – интегралы, выражающие площади частей, расположенных под осью абсцисс, и затем взять сумму их абсолютных величин.

Геометрический смысл интеграла. Условимся площади криволинейной трапеции, расположенной над осью *Ox*, приписывать знак плюс, а расположенной под осью *Ox* – знак минус. Тогда, очевидно, в силу теоремы IV и V определенный интеграл от функции $f(x)$ будет суммой алгебраических площадей (т.е. снабженных определенными знаками) криволинейных трапеций, расположенных над и под осью *Ox*, из которых составляется данная трапеция. Эту сумму и называют алгебраической площадью всей криволинейной трапеции.

Имея это в виду, мы в дальнейшем *определенный интеграл всегда можем рассматривать независимо от конкретного смысла переменной интегрирования x и функции* $f(x)$ *как алгебраическую площадь криволинейной трапеции с основанием* $[a, b]$, *ограниченной линией* $y = f(x)$.

В соответствии с этой геометрической иллюстрацией интеграла теорема IV , выражающая свойство интеграла, которое называется *аддитивностью*, означает тот наглядный факт, что если основание криволинейной трапеции разбить на частичные интервалы, то площадь всей трапеции будет равна сумме площадей трапеций, опирающихся на частичные интервалы.

2.3. Оценка интеграла. Теорема о среднем. Среднее значение функции

I. Оценка интеграла. Укажем границы, между которыми заключено значение интеграла.

Теорема 1. (об оценке определенного интеграла). Значение определенного интеграла заключено между произведениями наименьшего и наибольшего значений подынтегральной функции на длину интервала интегрирования, т.е.

$$m(b-a) < \int_a^b f(x) dx < M(b-a), \ \ a < b,$$

где *m* и *M* – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ интервале $[a, b]$:

$$m \le f(x) \le M.$$

Доказательство. Возьмем две функции $M - f(x)$ и $m - f(x)$. Первая из них в интервале $[a, b]$ неотрицательная, вторая неположительная. Значит, по теореме V

$$\int_a^b [M - f(x)] dx > 0 \ \text{ и } \int_a^b [m - f(x)] dx < 0,$$

а по теореме I

$$\int_a^b M dx - \int_a^b f(x) dx > 0 \ \text{ и } \int_a^b m dx - \int_a^b f(x) dx < 0,$$

Аналогично доказывается, что равенство (1) имеет место и при $(c < a < b)$.

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что если $c_1, c_2, \ldots, c_k$ – как угодно расположенные числа в интервале непрерывности функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int_{c_k}^{b} f(x)dx. \qquad (2)$$

Теорема IV выражает так называемое свойство аддитивности определенного интеграла.

Теорема V (о знаке интеграла). Если подынтегральная функция в интервале интегрирования сохраняет постоянный знак, то интеграл представляет собой число того же знака, что и функция.

Доказательство. Пусть $f(x) > 0$ в интервале $[a, b]$ $(a < b)$. Тогда в интегральной сумме

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

все слагаемые положительны, и значит, $I_n > 0$, а предел положительной величины не может быть отрицателен, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

В данном случае он не может быть и нулем; действительно, обозначая через m наименьшее значение функции $f(x)$ в замкнутом интервале $[a, b]$, получим:

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i > \sum_{i=0}^{n-1} m\Delta x_i = m\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = m[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})] =$$
$$= m(x_n - x_0) = m(b - a)$$

Ясно, что $m > 0$, и следовательно, $m(b-a) > 0$. Поэтому величина I_n, остающаяся при всех n большей, чем положительное число $m(b-a)$, не может иметь предела, равного нулю.

В силу теоремы IV заключение теоремы V сохраняется и для функции, имеющей в интервале $[a, b]$ конечное число нулей.

Если подынтегральная функция в интервале интегрирования меняет знак, то интеграл от нее может быть и положительным числом, и отрицательным, и равным нулю.

Свойство определенного интеграла, вытекающее из теоремы V, следует иметь в виду при решении задач. Например, находя с помощью интеграла площадь криволинейной трапеции, необходимо учитывать ее расположение относительно основания. В случае, когда трапеция целиком лежит над осью Ox, интеграл от ординаты выражает площадь; в случае, когда трапеция целиком лежит под осью Ox, интеграл, будучи отрицательным, выражает площадь трапеции, взятую с отрицательным знаком. Наконец, в случае, когда трапеция лежит и над осью Ox и

Пример 1.

$$\int \sin^4 x\cos^2 x dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{4}\frac{(1+\cos 2x)}{2}dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x)dx =$$
$$\frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1-\cos 2x)dx = = \frac{1}{8}\int \sin^2 2xdx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2xdx =$$
$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2xd\sin 2x = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Пример 2.

$$\int \sin^4 xdx = \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{4}dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2xdx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2xdx =$$
$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C =$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

II. *Интегралы типа*

$$\int \sin mx\cos nxdx, \quad \int \sin mx\sin nxdx, \quad \int \cos mx\cos nxdx.$$

Эти интегралы вычисляются методом разложения на основании следующих тригонометрических тождеств:

$$\sin mx\cos nx = \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2},$$
$$\cos mx\cos nx = \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2},$$
$$\sin mx\sin nx = \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2}.$$

Пример 1.

$$\int \sin 3x\cos 4xdx = \frac{1}{2}\int [\sin(3+4)x + \sin(3-4)x]dx = \frac{1}{2}\int \sin 7xdx - \frac{1}{2}\int \sin xdx =$$
$$= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

Пример 2.

$$\int \cos\frac{5}{3}x\cos 8xdx = \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{29}{3}x + \cos\frac{19}{3}x\right)dx = \frac{3}{58}\sin\frac{29}{3}x + \frac{3}{38}\sin\frac{19}{3}x + C.$$

III. *Интегралы типа* $\int R(\sin x, \cos x)dx.$

Рассмотрим интегралы типа $\int R(\sin x, \cos x)dx,$

где R – рациональная функция своих аргументов $\sin x$ и $\cos x$. Такие интегралы называются *тригонометрическими*. Например, интегралы

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x + 5}dx, \quad \int \sin^6 x\cos^2 xdx, \quad \int \frac{dx}{\sin x}$$

будут тригонометрическими интегралами, так как подынтегральные функции являются рациональными функциями аргументов $\sin x$ и $\cos x$. Наоборот, интеграл $\int \sin^{\frac{7}{4}} x \cos^2 x dx$ не является тригонометрическим, так как под интегралом стоит функция, не рациональная относительно $\sin x$ и $\cos x$. Покажем, что всякий тригонометрический интеграл можно свести к интегралу от рациональной функции. Для этого вместо x введем новую переменную z, связанную с переменной x соотношением

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Тогда $\sin x$ и $\cos x$ выразятся рационально через z. В самом деле, применяя формулы, известные из тригонометрии, имеем:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}.$$

Аналогично,

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Наконец, учитывая, что $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, найдем $x = 2\operatorname{arctg} z$, дифференцируя, получим $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$.

Таким образом, если положить $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, то

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}. \tag{1}$$

Формулы (1) показывают, что $\sin x$, $\cos x$ и dx рационально выражаются через z, поэтому

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2z}{1+z^2}; \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\cdot\frac{2}{1+z^2}dz.$$

Последний интеграл является интегралом от рациональной функции переменного z и может быть найден методами, рассмотренными ранее.

Приведем примеры.

Пример 1. $\int \frac{dx}{\sin x}$. Полагая $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и применяя формулы (1), имеем:

Совершенно ясно также, что если верхний и нижний пределы интегрирования совпадают, т.е. если $b = a$, то такой интеграл нужно считать равным нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

С геометрической точки зрения это означает, что если конец основания трапеции совместить с его началом, то трапеция превращается в прямолинейный отрезок – ординату $f(a)$, площадь которого нужно считать равной нулю.

Теорема IV (о разбиении интервала интегрирования). Если интервал интегрирования $[a, b]$ разбит на две части $[a, c]$ и $[c, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{1}$$

Доказательство. Так как предел интегральной суммы не зависит, от способа разбиения интервала $[a, b]$ на части, будем дробить его так, чтобы точка c всегда была точкой деления. При этом интегральную сумму можно представить так:

$$\sum f(\xi_i)\Delta x_i = \sum\nolimits_1 f(\xi_i)\Delta x_i + \sum\nolimits_2 f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где в первой сумме в правой части собраны все элементы, соответствующие точкам деления интервала [a, c], а во второй сумме – элементы, соответствующие точкам деления интервала $[c, b]$. И первая и вторая суммы суть интегральные суммы для функции $f(x)$, соответствующие интервалам $[a, c]$ и $[c, b]$. Если число точек деления неограниченно возрастает, а длина наибольшего частичного интервала стремится к нулю для всего интервала $[a, b]$, то же самое, очевидно, будет выполняться и для интервалов $[a, c]$ и $[c, b]$; при этом первая сумма стремится к интегралу в пределах от a до c, а вторая – к интегралу в пределах от c до b, и мы получаем требуемое равенство.

Равенство (1) справедливо и в том случае, когда точка c лежит вне интервала $[a, b]$, справа от него $(a < b < c)$ или слева от него $(c < a < b)$ (при условии, конечно, что функция $f(x)$ непрерывна в $[a, c]$ или в $[c, b]$).

Пусть $(a < b < c)$. По доказанному, так как b лежит между a и c,

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

откуда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx.$$

Меняя местами пределы второго интеграла в правой части, получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

$$I=\lim\sum_{i=0}^{n-1} c u_i \Delta x_i .$$

Выноси постоянную c сначала за знак суммы, а потом за символ предела, получим:

$$I=\lim c\sum_{i=0}^{n-1} u_i \Delta x_i = c\lim\sum_{i=0}^{n-1} u_i \Delta x_i = c\int_a^b u\,dx,$$

что и требовалось доказать.

До сих пор мы предполагали, что нижний предел интеграла меньше верхнего, или, как говорят, что интервал интегрирования направлен вправо. Ничто не мешает нам, однако, в общем определении интеграла считать, что $a>b$, т.е. что

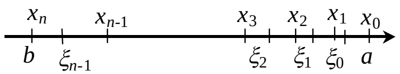


Рис. 1

интервал интегрирования направлен влево. При этом только при разбиении интервала интегрирования на части точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ мы будем иметь (рис.1):

$$a > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > b,$$

и следовательно, все разности $x_{i+1}-x_i$; будут отрицательными. Если мы теперь рассмотрим два интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \text{ и } \int_b^a f(x)dx$$

и составим для них интегральные суммы при одном и том же разбиении интервала на частичные и при одном и том же выборе промежуточных точек, то ясно, что эти суммы будут отличаться друг от друга только знаком. Таким образом, мы получаем теорему:

Теорема III (о перестановке пределов). Если верхний и нижний пределы интеграла поменять местами, то интеграл изменит только знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Вследствие теоремы III мы в дальнейшем при изучении интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

будем считать, что $a<b$, ибо если $a>b$, то с помощью изменения знака подынтегральной функции данный интеграл сводится к интегралу, у которого нижний предел меньше верхнего.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}}=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Пример 2. $\int\frac{dx}{\cos x}$. Полагая $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, находим

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2}}=2\int\frac{dz}{1-z^2}=\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$$

Заметим, что интеграл можно вычислить, если воспользоваться результатами предыдущего примера. В самом деле,

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C.$$

Хотя ответы по форме получились различными, однако, легко показать, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Пример 3. $\int\frac{5dx}{3\sin x-4\cos x}$. Применим указанную выше замену переменной, положив $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда, согласно формулам (1), наш интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int\frac{5dx}{3\sin x-4\cos x}=\int\frac{\frac{5\cdot 2dz}{1+z^2}}{3\frac{2z}{1+z^2}-4\frac{1-z^2}{1+z^2}}=5\int\frac{dz}{2z^2+3z-z}.$$

Разложим дробь $\frac{5}{2z^2+3z-2}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{5}{2z^2+3z-2}=\frac{5}{(2z-1)(z+2)}=\frac{2}{2z-1}-\frac{1}{z+2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{5dx}{3\sin x-4\cos x}=5\int\frac{dz}{2z^2+3z-2}=\int\left(\frac{2}{2z-1}-\frac{1}{z+2}\right)dz=\ln\left|\frac{2z-1}{z+2}\right|+C=\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}\right|+C.$$

Подстановкой $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ интегралы $\int R(\sin x, \cos x)dx$ всегда приводятся к. интегралам от рациональных функций. Однако это ведет порой к слишком громоздким вычислениям. В некоторых случаях эти вычисления можно упростить. Так, например, если $R(\sin x, \cos x)=\sin^m x\cos^n x$, где m и n целые числа, то удобнее пользоваться методами, изложенными в п. I.

Укажем еще на один частный случай функции $R(\sin x, \cos x)$, при котором применение другой подстановки значительно сокращает вычисления.

IV. *Интегралы от функций, рационально зависящих от* $\operatorname{tg} x$: $\int R(\operatorname{tg} x)dx.$

Эти интегралы сводятся к интегралам от рациональной дроби, если сделать замену переменной $\operatorname{tg} x = z$.

При этом $x=\operatorname{arctg} z$, $dx=\frac{dz}{1+z^2}$ и, следовательно,

$$\int R(\operatorname{tg} x)dx=\int R(z)\frac{dz}{1+z^2}.$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле является рациональной функцией от z.

Пример 1.

$$\int\frac{dx}{\operatorname{tg} x+1}=\int\frac{dz}{(z+1)(z^2+1)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z+1}+\frac{1-z}{1+z^2}\right)dz=\frac{1}{2}\ln|z+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z-\frac{1}{4}\ln(1+z^2)+$$
$$+C=\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x+1|+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln(1+\operatorname{tg}^2 z)+C=\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{x}{2}+C.$$

Замечание. Такой же подстановкой берется интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$, если $\sin x$ и $\cos x$ входят только в четных степенях. Это следует из того, что $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются рационально через $\operatorname{tg} x$:

$$\sin^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},\quad \cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Пример 2.

$\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx=\int\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x}dx$; делая замену $\operatorname{tg} x=z$, получим:

$$\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx=\int\frac{z^2dz}{(2+z^2)(1+z^2)}=\int\frac{2dz}{2+z^2}-\int\frac{dz}{1+z^2}=$$
$$=\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg} z+C=\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)-x+C.$$

Так как нахождение новых интегралов очень часто сводится к ранее известным, то для облегчения можно рекомендовать пользование таблицами интегралов.

Операция вычисления определенного интеграла по заданной подынтегральной функции и заданному интервалу интегрирования называется *определенным интегрированием функций*.

Вычисление определенного интеграла при помощи метода, прямо вытекающего из определения, встречает трудности в самых, казалось бы, простых случаях. Поэтому мы даже не будем приводить примеров такого вычисления и прямо перейдем к изложению основных свойств определенного интеграла, которые, в конечном счете, и приведут нас к установлению обходного, несравненно более удобного и легкого пути для вычисления интегралов.

2.2. Простейшие свойства определенного интеграла, его геометрический смысл и оценка

Далее везде предполагается, если не сказано противное, что рассматриваемые функции – непрерывные.

Теорема I (об интеграле суммы). Интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^b(u+v+\ldots+\omega)dx=\int_a^b udx+\int_a^b vdx+\ldots+\int_a^b \omega dx,$$

где u, v, ..., ω – функции независимой переменной x.

Доказательство. Обозначим интеграл в левой части равенства через I. По определению интеграла имеем:

$$I=\lim\sum_{i=0}^{n-1}(u_i+v_i+\ldots+\omega_i)\Delta x_i=\lim\left(\sum_{i=0}^{n-1}u_i\Delta x_i+\sum_{i=0}^{n-1}v\Delta x_i+\ldots+\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\right),$$

где $u_i, v_i, \ldots, \omega_i$ – соответственно значения функций u, v, ..., ω в какой-нибудь точке интервала $[x_i, x_{i+1}]$, а $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$. Воспользовавшись теоремой о пределе суммы, будем иметь:

$$I=\lim\sum_{i=0}^{n-1}u_i\Delta x_i+\lim\sum_{i=0}^{n-1}v_i\Delta x_i+\ldots+\lim\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i,$$

или

$$I=\int_a^b udx+\int_a^b vdx+\ldots+\int_a^b \omega dx,$$

что и требовалось доказать.

Теорема II (о вынесении постоянного множителя). Постоянный множитель подынтегральной функции можно вынести за символ интеграла:

$$\int_a^b cudx=c\int_a^b udx,$$

где u – функция аргумента x, c – константа.

Доказательство. Обозначим интеграл в левой части равенства через I. По определению интеграла имеем:

$$A = \int_a^b f(s)ds;$$

3) *путь, пройденный телом, равен интегралу от скорости, взятому по времени:*

$$s = \int_{T_1}^{T_2} f(t)dt.$$

Имеет место следующая так называемая теорема существования определенного интеграла:

Теорема. *n-я* интегральная сумма, соответствующая конечному интервалу $[a, b]$ изменения переменной x, $a \le x \le b$, и непрерывной на нем функции $f(x)$, при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала стремится к пределу, и притом к одному и тому же, независимо от способа разбиения интервала $[a, b]$ на частичные интервалы $[x_i, x_{i+1}]$ и независимо от того, какие значения x в частичных интервалах $[x_i, x_{i+1}]$ принимаются в качестве чисел ξ_i.

Символ интеграла указывает на его происхождение: $\int$ является как бы вытянутой буквой *s*, первой буквой слова «summa»; выражение, стоящее за (говорят также: под) символом интеграла, показывает вид суммируемых слагаемых; индекс при переменной в выражении под интегралом опущен, чем подчеркивается, что в процессе суммирования, завершающегося предельным переходом, переменная x принимает все значения в интервале $[a, b]$; числа, стоящие под и над символом интеграла, указывают концы интервала, на котором производилось суммирование.

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, число a – *нижним*, а число b – *верхним пределами* интеграла, переменная x – *переменной интегрирования*, интервал $[a, b]$ – *интервалом интегрирования*. Интегральные суммы, составленные при различных разбиениях интервала интегрирования и различных выборах точек ξ, могут отличаться друг от друга весьма значительно. Сформулированная выше замечательная теорема показывает, что разница между ними стирается, вообще говоря, по мере возрастания числа точек деления и убывания длины наибольшего частичного интервала, совсем исчезая в пределе.

Символ $\int_a^b f(x)dx$ изображает просто число. Это число не зависит от обозначения переменной интегрирования, так что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du.$$

Далеко не всякий интеграл от непрерывной элементарной функции может быть взят в элементарных функциях. Иначе говоря, хотя первообразная и существует в силу теоремы существования, но она не может быть выражена с помощью конечного числа алгебраических действий и суперпозиций, проведенных над элементарными функциями.

При изучении различных методов интегрирования мы уже встречались с такими интегралами. Ранее, например, было указано, что функции $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$ не интегрируются в элементарных функциях.

Часто бывает важно изучить свойства тех функций, которые являются первообразными от некоторых элементарных функций, но сами не выражаются через элементарные функции. Рассмотрим несколько примеров таких функций.

Пример 1. Первообразная от функции $\frac{\sin x}{x}$, которая удовлетворяет дополнительному условию (ее значение при $x = 0$ равно нулю) – называется интегральным синусом и обозначается si x.

Таким образом,

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \mathrm{si}\, x + C, \text{ или } (\mathrm{si}\, x)' = \frac{\sin x}{x},$$

где под si x подразумевается та первообразная, которая удовлетворяет условию si 0 = 0.

Пример 2. Интегральным косинусом $\mathrm{ci}\, x$ называется та первообразная от $\frac{\cos x}{x}$, которая удовлетворяет условию $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{ci}\, x = 0$.

Пример 3. Большое значение в различных приложениях имеет первообразная Ф(x) от функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, удовлетворяющая дополнительному условию Ф (0) = 0. Эта функция встречается, в частности, в теории вероятностей и называется интегралом вероятности. Ее график представлен на рисунке 1.

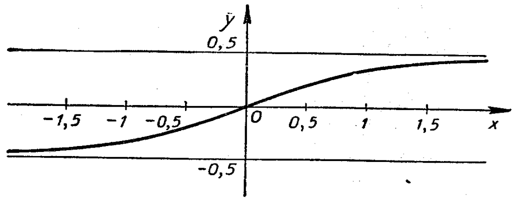


Рис. 1

Пример 4. Эллиптическими интегралами 1-го и 2-го рода называются первообразные от функций вида:

$$\sqrt{1-k^2 \sin\varphi}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \text{ где } 0 < k < 1,$$

которые обращаются в нуль при $\varphi = 0$.

Эти функции встречаются при вычислении длины дуги эллипса, откуда и происходит их название (эллиптические интегралы).

Все эти функции, а также многие другие функции, получающиеся подобным образом, хорошо изучены и для них составлены подробные таблицы, помогающие практически использовать эти функции.

ГЛАВА 2. Определенный интеграл

2.1. Введение определенного интеграла

1. Некоторые задачи геометрии и физики. Как и к другим фундаментальным понятиям математики, к понятию интеграла приводят разнообразные вопросы других конкретных наук. Мы рассмотрим, прежде всего, такие важные задачи, как определения площади плоской фигуры и работы переменной силы. Разберем каждую из этих задач в отдельности.

I. Площадь криволинейной трапеции. Теория площадей исходит из двух положений:

1) *площадь фигуры, составленной из нескольких фигур, равна сумме площадей этих фигур*;

2) *площадь прямоугольника равна произведению его измерений.*

В элементарной геометрии, опираясь на эти положения, находят площадь треугольника, а также и площадь многоугольника, так как всякий многоугольник может быть разбит на треугольники. С помощью предельного перехода по площадям правильных вписанных и описанных многоугольников определяется площадь круга. Однако при этом используются особые геометрические свойства фигуры (круга), что в других случаях делается очень затруднительным.

Фигуру, площадь которой нужно определить, мы будем рассматривать в плоскости, снабженной системой декартовых координат.

Криволинейной трапецией будем называть фигуру, ограниченную осью Ox, линией, с которой любая прямая, параллельная оси Oy, пересекается не более чем в одной точке, и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1);

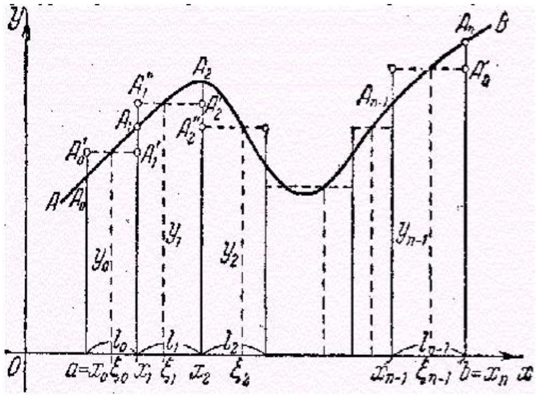


Рис. 1

частичных интервалов при помощи точек $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$, причем $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$;

2) значение функции $f(\xi_i)$ в какой-нибудь точке ξ_i (i+1)-го частичного интервала $(x_i \le \xi_i \le x_{i+1})$ умножается на длину этого интервала $x_{i+1} - x_i$, т.е. составляется произведение $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$;

3) берется сумма I_n всех этих произведений

$$I_n = f(\xi_0)(x_1 - x_0) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

или, если обозначить $x_{i+1} - x_i$ через Δx_i,

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i; \tag{1}$$

4) находится предел I суммы I_n при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала, и следовательно, при $n \to \infty$,т.е.

$$I = \lim I_n = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

В рассмотренных выше четырех конкретных задачах этот предел I измеряет соответственно площадь, работу, путь. В общем случае он называется *определенным интегралом* или просто *интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается так:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

и читается: интеграл от a до b $f(x)$ на dx. Следовательно, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{2}$$

Сумма (A) называется *n-й интегральной суммой.*

Определение. *Определенным интегралом* называется предел, к которому стремится *n*-я интегральная сумма (1) при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала.

Применяя определение интеграла к четырем конкретным вопросам, разобранным выше полученные выводы можно выразить в таких словах:

1) *площадь криволинейной трапеции равна интегралу от ординаты линии, ограничивающей трапецию, взятому по основанию:*

$$S = \int_a^b f(x)dx\,;$$

2) *работа, произведенная силой, равна интегралу от силы, взятому по пути:*

Так как работа на всем пути равна сумме работ, соответствующих отдельным участкам, на которые разбит путь, то для работы A_n, произведенной силой P_n, будем, очевидно, иметь:

$$A_n = f(\sigma_0)(s_1 - s_0) + f(\sigma_1)(s_2 - s_1) + \ldots + f(\sigma_i)(s_{i+1} - s_i) + \ldots + f(\sigma_{n-1})(s_n - s_{n-1}) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma_i)(s_{i+1} - s_i).$$

Величину A_n мы полагаем приближенным значением искомой работы, вообще говоря, тем более точным, чем больше число n и чем меньше участки, на которые разбивается весь путь MN. Работу A определяют как предел A_n при $n \to \infty$; при этом, как и раньше, предполагается, что длина наибольшего из частичных участков стремится к нулю:

$$A = \lim A_n = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma_i)(s_{i+1} - s_i).$$

III. Путь. Предположим, что точка совершает поступательное движение, причем известна величина скорости v в любой момент времени t в некотором промежутке $[T_1, T_2]$, т.е. $v = f(t)$.

Путь s, пройденный точкой за промежуток времени $[T_1, T_2]$, определяется так:

$$s = \lim s_n = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)(t_{i+1} - t_i),$$

где $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n$ – точки, разбивающие интервал $[T_1, T_2]$ на n частичных интервалов, причем

$$t_0 = T_1 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T_2$$

и

$$t_i \le \tau_i \le \tau_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

мы опять считаем, что $\max(t_{i+1} - t_i) \to 0$. Каждое слагаемое $f(\tau_i)(t_{i+1} - t_i)$ суммы дает путь, который прошло бы тело за промежуток времени $[t_i, t_{i+1}]$, если бы оно двигалось в это время с постоянной скоростью, равной $f(\tau_i)$.

2. Определенный интеграл. В предыдущем пункте мы видели, что решение некоторых важных задач геометрии и физики (определение площади, работы, пути) приводит к одной и той же последовательности действий над известными функциями и их аргументами. Раз эта последовательность действий применяется в различных случаях и имеет большое значение, то мы установим ее математически, независимо от конкретных условий той или иной задачи.

Если отвлечься от физического смысла переменных и от их обозначений, то указанная последовательность действий состоит в следующем:

1) интервал $[a, b]$, в котором задана непрерывная функция $f(x)$ (теперь мы отбросим предположение, что $f(x) > 0$ в интервале $[a, b]$), разбивается на n

Криволинейной трапецией будем называть фигуру, ограниченную осью Ox, линией, с которой любая прямая, параллельная оси Oy, пересекается не более чем в одной точке, и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1); интервал $[a, b]$ оси Ox назовем *основанием*[3)] криволинейной трапеции.

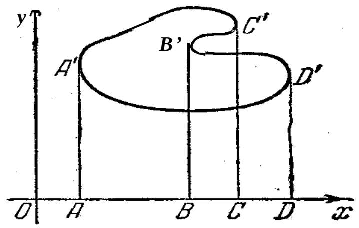


Рис. 2

Обычно фигуру можно разбить на некоторое число криволинейных трапеций и, таким образом, искомую, площадь определить как алгебраическую сумму площадей криволинейных трапеций, составляющих эту фигуру. Так, например, площадь фигуры, изображенной на рис. 2, может быть представлена в виде следующей алгебраической суммы:

пл. $AA'C'C$ - пл. $BB'C'C$ + пл. $BB'D'D$ - пл. $AA'D'D$.

Отсюда следует, что для отыскания площади любой фигуры достаточно уметь находить площадь криволинейной трапеции.

Пусть криволинейная трапеция с основанием $[a, b]$ ограничена некоторой линией AB, заданной уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная в интервале $[a, b]$ функция.

Будем пока предполагать, что $f(x) > 0$ в интервале $[a, b]$, т.е. что трапеция расположена над осью Ox. Разделим основание трапеции – интервал $[a, b]$ – на n частичных интервалов $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$ посредством точек $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. В этих частичных интервалах возьмем совершенно произвольные точки $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, так что $x_0 \le \xi_0 \le x_1, x_1 \le \xi_1 \le x_2, \ldots, x_{n-1} \le \xi_{n-1} \le x_n$.

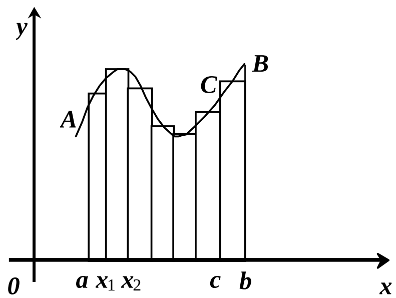


Рис.3

Проведем ординаты $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ линии AB, соответствующие абсциссам $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$; очевидно, мы имеем:

$$y_0 = f(\xi_0), y_1 = f(\xi_1), \ldots, y_{n-1} = f(\xi_{n-1}).$$

На частичных интервалах $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}$ как на основаниях построим n прямоугольников с высотами, равными соответственно ординатам $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ (рис. 3). Мы получили n-ступенчатую фигуру, которую также можно рассматривать как криволинейную трапецию с

[3)] Эта терминология отличается от принятой в элементарной геометрии, где интервал $[a, b]$ называется высотой трапеции, а основаниями ее называются отрезки параллельных прямых $x = a$, $x = b$.

заданным основанием $[a,b]$, но ограниченную не заданной линией $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$, а ломаной $A_0'A_1'A_1''A_2'A_2''\dots A_n'$.

Площадь s_n этой n-ступенчатой фигуры мы будем считать приближенным значением площади s заданной криволинейной трапеции, вообще говоря, тем более точным, чем больше n и чем меньше длины частичных интервалов. Другими словами, мы исходим из того естественного и наглядного представления, что чем больше число прямоугольников и чем они уже, тем теснее построенная указанным сейчас способом ломаная линия $A_0'A_1'\dots$ примыкает к заданной линии $A_0A_1\dots$ и тем лучше площадь s_n соответствующей n-ступенчатой фигуры должна выражать площадь s заданной трапеции. Отсюда ясно, что *площадью s криволинейной трапеции, ограниченной линией* $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ (рис. 1), *следует назвать предел, к которому стремится переменная площадь n-ступенчатой фигуры, ограниченной ломаной линией* $A_0'A_1'A_1''A_2'A_2''\dots A_n'$, *при неограниченном увеличении числа n и при стремлении к нулю наибольшей длины частичных интервалов.*

Следует иметь в виду, что точки $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ произвольны, но необходимо, чтобы при неограниченном увеличении числа n частичных интервалов длина наибольшего из них действительно стремилась к нулю. Если этого не предусмотреть, то может так случиться, что ступенчатая фигура не будет неограниченно приближаться к криволинейной трапеции. В самом деле, будем увеличивать число точек деления основания так, например, чтобы какой-нибудь частичный интервал, пусть (c,b) (рис. 3), оставался неизменным. Тогда ломаная может неограниченно приближаться к дуге AC заданной линии $y=f(x)$, но вовсе не будет приближаться к дуге CB, и постоянная часть трапеции $cCBb$ не будет при этом процессе покрываться нашими фигурами. Таким образом, по площадям этих фигур мы никак не сможем определить площадь трапеции. Если же указать, что длина наибольшего частичного интервала – обозначим ее через $\max(x_{i+1}-x_i)$ – стремится к нулю, то из этого следует, что число n частичных интервалов неограниченно возрастает.

Напишем теперь выражение для s_n. Вся фигура состоит из n прямоугольников, площадь каждого из которых выразить легко; именно площадь прямоугольника, соответствующего (i+1)-му частичному интервалу, очевидно, равна $y_i(x_{i+1}-x_i)$.

Значит,

$$s_n = y_0(x_1-x_0)+y_1(x_2-x_1)+\dots+y_i(x_{i+1}-x_i)+\dots+y_{n-1}(x_n-x_{n-1}),$$

или

$$s_n = f(\xi_0)(x_1-x_0)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+\dots+f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)+\dots+f(\xi_{n-1})(x_n-x_{n-1}).$$

Все слагаемые этой суммы имеют один и тот же вид: отличаются они друг от друга только значениями индекса (указателя) при независимой переменной. Для сокращения записи вводят символ $\sum$ (греческая прописная буква «сигма») – символ суммы, именно пишут:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i).$$

Этот символ вообще означает, что нужно сложить выражения данного вида, придавая индексу все целые значения от значения, указанного под символом «сигма», до значения, указанного над символом «сигма».

В соответствии с определением площади s имеем:

$$s = \lim s_n = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i).$$

Как указано выше, мы считаем, что переход к пределу совершается при условии $\max(x_{i+1}-x_i)\to 0$.

II. Работа переменной силы. Пусть под действием некоторой силы тело движется по прямой линии, причем направление силы совпадает с направлением движения. Требуется определить работу, произведенную при перемещения тела из положения M в положение N (рис. 4). Если на протяжении всего пути от M к N

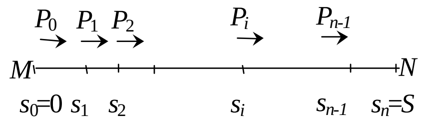


Рис. 4

сила остается постоянной, то, как известно, работа определяется как произведение силы на длину пути. Обозначим через A работу, через P – силу, через S – длину пути MN. Тогда A=PS.

Предположим, однако, что сила на пути от M к N изменяется. В каждой точке между M и N, находящейся на расстоянии s от точки M, действующая сила принимает соответствующее значение P. Это значит, что сила P есть некоторая функция расстояния s, т.е. $P=f(s)$. Как определить работу, совершенную при перемещении тела из точки M в точку N в этом случае?

Разобьем весь путь MN, т.е. интервал изменения переменной s, на n участков точками, находящимися на расстояниях

$$s_0=0,\ s_1,\ s_2,\dots,s_i,\ s_{i+1},\dots,s_{n-1},\ s_n=S$$

от точки M. Вместо действующей на пути MN переменной силы P возьмем другую силу P_n, сохраняющую постоянные значения на каждом из наших участков, причем эти значения положим равными значениям действующей силы P в каких-нибудь точках участков. На первом участке $[s_0,s_1]$ эта сила равна $P_0=f(\sigma_0)$, где $s_0\le\sigma_0\le s_1$; на втором $[s_1,s_2]$ она равна $P_1=f(\sigma_1)$, где $s_1\le\sigma_1\le s_2,\dots$; на ($i$+1)-м участке $[s_i,s_{i+1}]$ она равна $P_i=f(\sigma_i)$, где $s_i\le\sigma_i\le s_{i+1}$, и т.д.