ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. Т.Г.ШЕВЧЕНКО

Физико-математический факультет

Кафедра математики и экономико-математических методов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум

Тирасполь, 2015

УДК 51(076.5)
ББК В11я73
В93

Составители:
Н.В. Косюк, ст. преп. кафедры математики и экономико-математических методов ПГУ им. Т.Г. Шевченко
В.В. Косюк, ст. преп. кафедры общей физики и методики преподавания физики ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Рецензенты:
Н.Г. Леонова, канд. Соц. Наук, доцент кафедры математики и экономико-математических методов ПГУ им. Т.Г. Шевченко
В.Н. Чебан, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей физики и методики преподавания физики ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Высшая математика. **Часть 1:** Практикум / Сост.: Косюк Н.В., Косюк В.В. –
В93 Тирасполь, 2015. – 64с.

Представлен практикум по дисциплине «Высшая математика для студентов направления Электроэнергетика и электротехника инженерно-технического института. В пособии изложены основные теоретические сведения по разделу Алгебра дисциплины «Высшая математика», необходимые для решения практических задач. По каждой теме раздела рассматриваются решения заданий, которые приводятся на практических занятиях и предлагаются примеры для домашнего задания.

УДК 51(076.5)
ББК В11я73

Утверждено Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный практикум составлен с учетом особенности преподавания Высшей математики студентам направления Электроэнергетика и электротехника. Цель пособия - помочь студенту овладеть методами решения задач по разделу алгебра из курса высшей математики. Практикум представляет собой курс практических занятий, состоящий из шести тем раздела. Каждая тема включает в себя теоретический материал и образцы решения нескольких задач. В конце темы предлагается студентам решить домашнее задание по аналогии.

В соответствии с учебным планом после освоения теоретического материала и овладения методами решения практических задач, которые включают в себя и решение домашнего задания, необходимо написать модульный контроль. В конце пособия предлагается нулевой вариант модульного контроля и перечень вопросов для коллоквиума по данному разделу.

Данное пособие может быть полезным для самостоятельного освоения раздела алгебры курса высшей математики студентами очного и заочного отделений, а также для преподавателей, читающих эту дисциплину в качестве тематического плана и подбора заданий для практических занятий.

ТЕМА1: *Определители, их свойства и вычисление. Матрицы, действия над ними. Обратная матрица. Ранг матрицы*

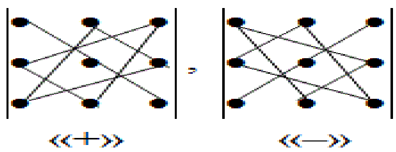
Определителем Δ второго порядка называется объект $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, который равен $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$, где $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ элементы определителя второго порядка; a_{11}, a_{22} – главная диагональ; a_{12}, a_{21} – побочная диагональ этого определителя.

Определителем Δ третьего порядка называется объект $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, который равен $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})$, где a_{ij}-элементы определителя третьего порядка ($i, j = \overline{1, n}$); a_{11}, a_{22}, a_{33} – главная диагональ; a_{13}, a_{22}, a_{31} – побочная диагональ этого определителя.

Методы вычисления определителей третьего порядка

1. *Правило треугольника*

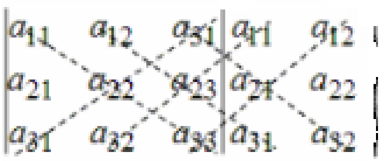
Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком "плюс"; аналогично, для второго определителя - соответствующие произведения берутся со знаком "минус".

2. *Правило Саррюса*

Справа от определителя дописывают первых два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со знаком "плюс"; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком "минус":

 $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$

$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Свойства определителей:

1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
3. Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.
4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.
5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число k, то сам определитель умножится на k.
6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.
7. Если все элементы i-й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{ij}=b_j+c_j$ $j = \overline{1, n}$, то определитель равен сумме определителей, у которых все строки, кроме i-ой, - такие же, как в заданном определителе, а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j, в другом - из элементов c_j.
8. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Замечание. Все свойства остаются справедливыми, если вместо строк взять столбцы.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель порядка $n-1$, который получается из исходного определителя путем вычеркивания i строки и j столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется его минор M_{ij}, взятый со знаком плюс, если элемент занимает четное место, и со знаком минус, если - нечетное. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} будем обозначать A_{ij}. Из определения следует, что $A_{ij} = (-1)^{i+j}$.

Теорема (разложение определителя по строке или столбцу). Определитель n-го порядка равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Замечание. Если все элементы строки (или столбца), кроме одного, равны нулю, то определитель равен этому элементу, умноженному на его алгебраическое дополнение.

Матрица это прямоугольная таблица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

состоящая из m строк и n столбцов, где a_{ij} – элементы матрицы ($i = \overline{1,m} j = \overline{1,n}$). Матрицы обозначаются большими латинскими буквами: *A, B, C*,… .

Кратко матрицы записывают так: $A = (a_{ij})_{m \times n}$, где $dim A = m \times n$ – *размерность* матрицы *A*.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, т.е. *m*=*n,* называется *квадратной* и говорят, что задана матрица *n*-го порядка.

Квадратная матрица, у которой все элементы кроме элементов стоящих на главной диагонали равны нулю, называется *диагональной*.

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной*. Обозначается *E*. Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой. Обозначается *O*.

Матрица, у которой одна строка, т.е. *m*=1, называется *матрица-строка* или *вектор-строка*. Матрица, у которой один столбец, т.е. *n* =1, называется *матрица-столбец* или *вектор-столбец*.

Матрица, у которой в каждой последующей строке отсутствует предыдущий элемент, а также имеются нулевые строки, называется *ступенчатой*.

Если в матрице А поменять строки соответствующими столбцами, то получится матрица $А^Т$, которая называется *транспонированной* матрице А. Сам процесс называется *транспонированием*.

Под *элементарными преобразованиями* матрицы понимается:

1)перемена любых строк местами; 2) умножение одной строки матрицы на число отличное от нуля и сложение с соответствующими элементами другой строки.

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна из них получается через другую при помощи элементарных преобразований.

Замечание. Матрица А и ее ступенчатая матрица эквивалентны.

Действия над матрицами.

1. *Сложение матриц.*

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{m\times n}$ одинаковой размерности называется матрица $C = A + B = (c_{ij})_{m\times n}$ той же размерности что и матрицы A и В, у которой элементы равны $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

2. *Умножение матрицы на число.*

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ на число α называется матрица $B = \alpha A = (b_{ij})_{m\times n}$ той же размерности что и матрица A, у которой элементы равны $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

3. *Умножение матриц.*

Произведением двух матриц $A = (a_{ij})_{m\times l}$ и $B = (b_{ij})_{l\times n}$ называется матрица $C = AB = (c_{ij})_{m\times n}$, у которой столько строк сколько их у первой матрицы A и столько столбцов сколько их у второй матрицы B, при этом элементы матрицы C равны $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Для квадратной матрицы A существует определитель |A|. Если матрица A не квадратная, то ее определителя не существует. Однако можно говорить о миноре $к$-го порядка для матрицы A.

Минором к-го порядка матрицы А называется определитель, составленный из элементов, которые находятся на пересечении различных $к$ строк и различных $к$ столбцов матрицы A. Число к называется *порядком минора*.

Рангом матрицы A называется наибольший порядок минора матрицы, который отличен от нуля. Обозначается $rangA$ или $r(A)$.

Замечание. Ранг матрицы A равен числу ненулевых строк ее ступенчатой матрицы.

Матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля, и вырожденной, если – равен нулю. Невырожденная матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Матрица A^{-1} называется *обратной матрицы* для матрицы A, если $A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица. Обратную матрицу можно найти по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & |A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где $|A|$- определитель матрицы А; A_{ij} -алгебраическое дополнение для элемента a_{ij} матрицы A ($i, j = \overline{1, n}$).

Задание 1. Используя действия над матрицами, вычислить значение функции $y = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ в матрице $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Подставим матрицу A в функцию $y = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ вместо переменной x, получим:

$f(A) = 3A^3 - 5A^2 + A - 2E$, где E – единичная матрица.

Найдем A^2 и A^3.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 0 + 1 & -2 + 6 - 1 & -1 + 2 + 2 \\ 0 + 0 + 1 & 0 + 9 - 1 & 0 + 3 + 2 \\ -1 - 0 + 2 & 2 - 3 - 2 & 1 - 1 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+3\cdot 0+3\cdot 1 & 2\cdot 2+3\cdot 3+3\cdot(-1) & 2\cdot 1+3\cdot 1+3\cdot 2 \\ 1\cdot(-1)+8\cdot 0+5\cdot 1 & 1\cdot 2+8\cdot 3+5\cdot(-1) & 1\cdot 1+8\cdot 1+5\cdot 2 \\ 1\cdot(-1)-3\cdot 0+4\cdot 1 & 1\cdot 2-3\cdot 3+4\cdot(-1) & 1\cdot 1-3\cdot 1+4\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+0+3 & 4+9-3 & 2+3+6 \\ -1+0+5 & 2+24-5 & 1+8+10 \\ -1-0+4 & 2-9-4 & 1-3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 4 & 21 & 19 \\ 3 & -11 & 6 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица A размерности 3×3, то единичная матрица E имеет вид: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. В результате получаем:

$$f(A) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 4 & 21 & 19 \\ 3 & -11 & 6 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 30 & 33 \\ 12 & 63 & 57 \\ 9 & -33 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 15 & 15 \\ 5 & 40 & 25 \\ 5 & -15 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-10-1-2 & 30-15+2-0 & 33-15+1-0 \\ 12-5+0-0 & 63-40+3-2 & 57-25+1-0 \\ 9-5+1-0 & -33+15-1-0 & 18-20+2-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & 17 & 19 \\ 7 & 24 & 33 \\ 5 & -19 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $f(A) = \begin{pmatrix} -10 & 17 & 19 \\ 7 & 24 & 33 \\ 5 & -19 & -2 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Вычислить определитель четвертого порядка Δ: 1) путем разложения по первой строке; 2) путем получения нулей в первой строке, используя элементарные преобразования определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Решение. 1) Разложим определитель четвертого порядка по первой строке, используя теорему разложения: $\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$,

где a_{1j} – элементы первой строки определителя ($j = \overline{1,4}$);

A_{1j} – алгебраическое дополнение элемента a_{1j} ($j = \overline{1,4}$);

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij} ($i = \overline{1,4}$; $j = \overline{1,4}$).

Имеем,

$\Delta = 3 \cdot A_{11} - 1 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{14} = 3 \cdot M_{11} + M_{12} + 2 \cdot A_{13} - M_{14} =$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{matrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \\ 6 & 3 \end{matrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 7 \\ -2 & 1 \\ 6 & 0 \end{matrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 7 \\ -2 & 1 \\ 6 & 0 \end{matrix} = 3 \cdot (7 \cdot 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 - ((-1) \cdot 3 \cdot 0 +$$

$$+7 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot (-2))) + (0 \cdot 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot (-2) \cdot 3 - ((-1) \cdot 3 \cdot 6 +$$

$$+0 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) \cdot (-2))) + 2 \cdot (0 \cdot 1 \cdot (-2) + 7 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot (-2) \cdot 0 -$$

$$-(-1 \cdot 1 \cdot +0 \cdot 4 \cdot 0 + 7 \cdot (-2) \cdot (-2))) - (0 \cdot 1 \cdot 3 + 7 \cdot 3 \cdot 6 + 4 \cdot (-2) \cdot 0 -$$

$$-(4 \cdot 1 \cdot 6 + 0 \cdot 3 \cdot 0 + 7 \cdot (-2) \cdot 3)) = 3 \cdot (-42 + 0 - 3 - (0 + 84 - 8)) +$$

$$+(0 + 96 + 6 - (-18 + 0 + 16)) + 2 \cdot (0 + 168 + 0 - (-6 + 0 + 28)) -$$

$$-\big(0 + 126 + 0 - (24 + 0 - 42)\big) = 3 \cdot (-45 - 76) + (102 + 2) + 2 \cdot (168 -$$

$$-22) - (126 + 18) = 3 \cdot (-121) + 104 + 2 \cdot 146 - 144 = -363 + 104 +$$

$$+292 - 144 = -111.$$

2) Вычислим определитель четвертого порядка по первой строке, используя теорему разложения: $\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$, при этом предварительно преобразуем определитель так, чтобы в первой строке была одна единица, а все остальные элементы

равнялись нулю. Для этого применим элементарные преобразования определителя.

Умножим четвертый столбец на 3 и от первого столбца вычтем преобразованный столбец (рис.1а)). В результате получим столбец, который в новом определителе будет первым столбцом.

Аналогично рассмотрим остальные столбцы. Умножим четвертый столбец на (-1) и от второго столбца вычтем преобразованный столбец (рис.1б)). Полученный столбец будет вторым столбцом в новом определителе. Умножим четвертый столбец на 2 и от третьего столбца вычтем преобразованный столбец (рис.1в)). Полученный столбец будет третьим столбцом в новом определителе. Четвертый столбец в этом определителе останется без изменения.

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & 12 & -14 \\ 6 & -6 & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 8 & -5 \\ 3 & -4 & 7 \end{array}$$

а) б) в)

Рис.1

Таким образом, новый определитель примет вид: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & -1 \\ -14 & 5 & -5 & 4 \\ 12 & -2 & 7 & -2 \end{vmatrix}$, который равен исходному определителю Δ.

Используя теорему разложения, определитель Δ_1 будет равен:

$$\Delta_1 = 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{14} = A_{14} = -M_{14} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 & 6 \\ -14 & 5 & -5 \\ 12 & -2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ -14 & 5 & -5 & -14 & 5 \\ 12 & -2 & 7 & 12 & -2 \end{array}\right. = -3 \cdot (1 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot (-5) \cdot 12 +$$

$$+1 \cdot (-14) \cdot (-2) - (2 \cdot 5 \cdot 12 + 1 \cdot (-5) \cdot (-2) + 2 \cdot (-14) \cdot 7))=$$

$$= -3(35 - 120 + 56 - (120 + 10 - 196)) = -3(-29 + 66) =$$

$$= -3 \cdot 37 = -111$$

Замечаем, что значения определителя, вычисленные двумя способами, совпали. Следовательно, вычисления проведены верно.

Ответ: $\Delta = -111$.

Задание 3. Найти матрицу обратную матрице $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$: 1) с помощью таблиц Гаусса; 2) с помощью алгебраических дополнений.

Решение. 1) Используя таблицы Гаусса, найдем обратную матрицу для матрицы *A*. Для этого в таблице Гаусса к матрице *A* припишем единичную матрицу *E*. Так как матрица *A* размерности 3×3, то единичная матрица имеет вид: $\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Получаем:

A	E
$\begin{matrix} \boxed{2} & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & -2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & \boxed{-1} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & \boxed{-1/2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 0 & 3/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{matrix}$
E	A^{-1}

Таким образом, обратная матрица имеет вид: $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Вычислим определитель матрицы *A*:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - (3 \cdot (-2) \cdot 0$$

$$+2 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)) = 4 - 0 + 3 - (0 + 2 + 4) = 7 - 6 = 1 \neq 0$$

Так как $|A| \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}, которую найдем по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где $|A|$- определитель матрицы А;

A_{ij} -алгебраическое дополнение для элемента a_{ij} матрицы A $(i, j = \overline{1,3})$

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 2 - 1 = 1;$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 0) = 1;$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1;$$

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1;$$

$$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2;$$

$$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2;$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2;$$

$$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 3) = 1;$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0.$$

Таким образом, обратная матрица имеет вид: $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку, т.е. покажем, что $A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица.

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-1+0 & -4+2+2 & 3-1-2 \\ 2-2+0 & -4+4+1 & 3-2-1 \\ 2-2+0 & -4+4+0 & 3=2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \text{ – единичная матрица}$$

Таким образом, обратная матрица найдена верно.

Ответ: $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Задание 4. Найти ранг матрицы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ двумя способам: 1) с помощью определения; 2) с помощью ступенчатой матрицы.

Решение. 1) Ранг матрицы - это наибольший порядок минора матрицы, который отличен от нуля. Замечаем, что, так как $dimA = 3 \times 4$, то наибольший порядок минора этой матрицы равен 3.
У данной матрицы *A* существует четыре минора третьего порядка. Найдем их значения.

$$\Delta_1 = \left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - (1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 -$$

$$-1 \cdot 1 \cdot 3) = 3 - 2 + 3 - (1 + 6 - 3) = 4 - 4 = 0.$$

Так как $\Delta_1 = 0$, то ищем следующий минор третьего порядка:

$$\Delta_2 = \left|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 1 \cdot 1 \cdot 7 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 1 +$$

$+1 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 7) = 7 - 3 - 3 - (-1 + 9 - 7) = 1 - 1 = 0;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 1 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - (-1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 3 +$$

$+1 \cdot 1 \cdot 7) = 14 + 3 - 3 - (-2 + 9 + 7 = 14 - 14 = 0;$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{matrix} = -1 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - (-1 \cdot 2 \cdot 3 -$$

$-1 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 7) = -14 + 9 - 3 - (-6 - 9 + 7) = -8 = 8 = 0.$

Так как все миноры третьего порядка равны нулю, то ранг матрицы A меньше 3. Найдем миноры второго порядка. Если хотя бы один такой минор будет отличен от нуля, то ранг равен 2.

Имеем, $\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0$

Итак, $rangA = 2$.

2) Приведем матрицу A к ступенчатому виду, т.е. сделаем так, чтобы в каждой последующей строке отсутствовал предыдущий элемент или, чтобы все элементы строки равнялись нулю. Для этого воспользуемся элементарными преобразованиями матрицы.

Так как в каждой строке на первом месте стоит единица, то в качестве разрешающей оставим любую из строк. Пусть, например, это будет первая строка. Затем из второй и третьей строк вычтем почленно первую разрешающую строку. Получим матрицу, у которой в первом столбце на первом месте единица, а все остальные нули. Затем первую и вторую строки оставим без изменения (вторую строку сделаем разрешающей, так как у нее второй элемент 2 проще, чем второй элемент 4 в третьей строке), а от третьей отнимем вторую умноженную на 2. Получим строку, в которой все элементы равны нулю. На этом останавливаемся. Полученная матрица и есть ступенчатая матрица для данной матрице A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Замечаем, что ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, а это означает, что $rangA = 2$.

Ответ: $rangA = 2$.

Домашнее задание:

Задание 1. Используя действия над матрицами, вычислить значение функции $y = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 9$ в матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Вычислить определитель четвертого порядка Δ: 1) путем разложения по первой строке; 2) путем получения нулей в первой строке, используя элементарные преобразования определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Задание 3. Найти матрицу обратную матрице $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$: 1) с помощью таблиц Гаусса; 2) с помощью алгебраических дополнений.

Задание 4. Найти ранг матрицы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ двумя способам: 1) с помощью определения; 2) с помощью ступенчатой матрицы.

ТЕМА 2: *Системы линейных уравнений, основные понятия и методы их решения*

Совокупность m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1), \text{ где } a_{ij} \in \mathbb{R} -$$

коэффициенты при неизвестных $x_j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, $b_i \in \mathbb{R}$ – свободные члены, $i = \overline{1, m}$,

называется *системой линейных уравнений*.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется *основной матрицей* или просто *матрицей* системы линейных уравнений.

Матрица $C = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называется *расширенной матрицей* системы линейных уравнений.

Упорядоченная строка $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ называется *решением системы линейных уравнений*, если будучи подставленная в каждое уравнение системы линейных уравнений обращает их в верные равенства.

Система линейных уравнений называется *совместной,* если она имеет хотя бы одно решение. Система линейных уравнений называется *несовместной,* если она решения не имеет.

Совместная система линейных уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение. Совместная система линейных уравнений называется *неопределенной*, если она имеет бесчисленное множество решений.

Две системы линейных уравнений с одним и тем же набором неизвестных называются *эквивалентными*, если решение одной из них является решением другой, или если они обе несовместны.

Под *элементарными преобразованиями* системы линейных уравнений понимается: 1) перемена местами уравнений; 2) умножение одного уравнения системы на число отличное от нуля и сложение с другим уравнением системы.

Замечание. Элементарные преобразования переводят систему уравнений в эквивалентную систему уравнений.

Матричный вид системы линейных уравнений (1): $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Методы решения системы линейных уравнений.

1. *Метод Гаусса* (*метод исключения неизвестных*) состоит из двух ходов: прямого и обратного. *Прямой ход* состоит в том, что расширенная матрица системы линейных уравнений приводится к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований, т.е. происходит исключение неизвестных из уравнений системы. *Обратный ход* состоит в том, что ступенчатая матрица представляется в виде системы уравнений: из последнего уравнения выражается одна переменная, подставляется в предыдущее уравнение и выражается другая переменная и так далее пока все базисные переменные не выразятся через свободные переменные. Тогда говорят, что получили *общее решение* системы уравнений. *Общее решение* – это совокупность *частных решений*. *Частное решение* системы уравнений получается из общего путем придания свободным переменным конкретные значения, если при этом все свободные переменные равны нулю, то полученное частное решение называется *базисным*. Базисное решение называется *опорным*, если значения всех базисных переменных неотрицательные. Если свободных переменных нет, т.е. все переменные базисные, то система уравнений *определенна*.

Замечание. Число базисных переменных равно рангу матрицы системы уравнений, остальные переменные свободные.

При нахождении решения системы линейных уравнений пользуются *теоремой Кронекера-Капелли*:

1. *Условие совместности*. Система совместных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы A системы равен рангу расширенной матрицы C, т.е. $r(A) = r(C)$.
2. *Условие определенности*. Совместная система уравнений определенна тогда и только тогда, когда $r(A) = r(C) = n$ – числа неизвестных.
3. *Условие неопределенности*. Совместная система уравнений неопределенна тогда и только тогда, когда $r(A) = r(C) < n$ – числа неизвестных.

Следствие 1. Если число уравнений в системе уравнений (1) меньше числа неизвестных, то система (1) либо неопределенна, либо несовместна.

Следствие 2. Система уравнений (1) определенна тогда и только тогда, когда матрица системы уравнений (1) обратима.

2. *Метод Жордана-Гаусса* как и метод Гаусса состоит в исключении неизвестных из уравнений системы уравнений. Решение проводится в таблицах Гаусса с использованием следующих правил:

1) в качестве разрешающего элемента берем любой коэффициент при неизвестном, отличный от нуля, и записываем его в прямоугольник;
2) разрешаю строку делим на разрешающий элемент и записываем в следующей таблице на том же месте, что и в предыдущей таблице;
3) в разрешающем столбце на месте разрешающего элемента ставим единицу, а остальные элементы равны нулю;
4) остальные элементы в новой таблице находим, используя правило прямоугольника, начиная с разрешающего элемента:

a_{ij}	$\ldots$	a_{is}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_{rj}		$\boxed{a_{rs}}$

$a'_{ij} = \frac{a_{rs} \cdot a_{ij} - a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}$, где a_{rs} - разрешающий элемент, r - строка, s – столбец;

5) в столбце Б.П. в разрешающей строке записываем переменную x_s (вводим в базис переменную x_s, т.е. делаем ее базисной);

6) итерации продолжаем до тех пор, пока столбец Б.П. полностью не заполнится.

3. *Метод определителей* применим только для системы уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$). Суть метода в следующем: сначала находят определитель Δ матрицы системы уравнений, затем находят определители Δ_{x_i} ($i = \overline{1, n}$), которые получаются из определителя Δ путем замены столбца при неизвестном x_i столбцом свободных членов. После применяется правило Крамера: $x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$, где $i = \overline{1, n}$

1) если $\Delta \neq 0$, то система уравнений определенна;

2) если $\Delta = 0$ и все $\Delta_{x_i} = 0$ ($i = \overline{1, n}$), то система уравнений неопределенна;

3) если $\Delta = 0$ и хотя бы одно $\Delta_{x_i} \neq 0$, то система уравнений несовместна.

4. *Матричный способ* решения системы линейных уравнений применим только когда матрица A системы уравнений невырожденная, т.е. существует обратная матрица A^{-1}. Тогда решение системы уравнений находят по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$.

Система линейных уравнений, у которой все свободные члены равны нулю, называется *системой линейных однородных уравнений*.

Замечание. Система линейных однородных уравнений всегда совместна.

Линейная комбинация $C_1X_1 + C_2X_2$ (C_1 и C_2 постоянные) любых двух решений X_1 и X_2 системы линейных однородных уравнений есть решение этой системы уравнений. Если решения X_1 и X_2 *линейно независимые*, т.е. существуют $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ при которых $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = \Theta$ (Θ – нулевое решение), то линейная комбинация $C_1X_1 + C_2X_2$ называется *общим решением* системы линейных однородных уравнений. Такие решения X_1 и X_2 называется *фундаментальной системой решений.*

Теорема. Общее решение системы линейных неоднородных уравнений равно сумме общего решения соответствующей системы линейных однородных уравнений и одного какого-нибудь решения системы линейных неоднородных уравнений.

Задание 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений: а) методом определителей; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение. а) метод определителей

Вычислим определитель Δ системы линейных уравнений, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 3 - 4 - 1 - (2 + 6 + 1) = -2 - 9 = -11 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система линейных уравнений имеет единственное решение.

Вычислим определители Δ_{x_i} $(i = \overline{1,3})$, которые получаются из определителя Δ путем замены соответствующего столбца при неизвестном столбцом свободных членов.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 0 - 6 - 1 - (3 + 0 + 1) = -7 - 4 = -11;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{matrix} = -3 + 0 - 3 - (-2 + 18 + 0) = -6 - 16 = -22;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 9 + 2 + 0 - (0 - 3 + 3 = 11 - 0 = 11.$$

Согласно правила Крамера, решение системы линейных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \dfrac{-11}{-11} = 1 \\ x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \dfrac{-22}{-11} = 2 \\ x_3 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \dfrac{11}{-11} = -1 \end{cases}$$

Таким образом, решение системы линейных уравнений имеет вид: (1;2;-1).

Проверка

$3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 3 - 2 - 1 = 0 \equiv 0;$

$-1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -1 + 2 - 2 = -1 \equiv -1;$

$2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 2 + 2 - 1 = 3 \equiv 3,$ верно

Ответ: (1;2;-1).

б) Представим систему линейных уравнений в матричной форме: $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 3 - 4 - 1 - (2 + 6 + 1) = -2 - 9 = -11 \neq 0.$$

Так как $|A| \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}, а тогда решение системы линейных уравнений найдем по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем A^{-1} по формуле:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где $|A|$- определитель матрицы А;

A_{ij} -алгебраическое дополнение для элемента a_{ij} матрицы A $(i, j = \overline{1,3})$

Имеем,

$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1;$

$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 4) = 5;$

$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3;$

$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2;$

$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1;$

$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3+2) = -5;$

$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3;$

$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(6+1) = -7;$

$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2.$

Таким образом, матрица A^{-1} имеет вид: $A^{-1} = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -7 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда решение системы линейных уравнений равно: $X = A^{-1} \cdot B =$

$$= -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -7 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 \\ 5 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) - 7 \cdot 3 \\ -3 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 0 - 2 - 9 \\ 0 - 1 - 21 \\ 0 + 5 + 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ -22 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (1;2;-1).

в) метод Гаусса.

Приведем расширенную матрицу $C = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ системы линейных уравнений к ступенчатому виду. Используя элементарные преобразования матрицы, сделаем вторую строку первой. Затем умножим ее сначала на 3 и сложим с первой, а потом умножим 2 и сложим с третьей. В результате получится матрица эквивалентная данной:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Затем первую и вторую строки перепишем, а третью умножим на 2 и вычтем от нее вторую строку, умноженную на 3. Полученная матрица и будет ступенчатой матрицей для матрицы *A*: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$.

Представим эту матрицу в виде системы линейных уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_2 + 7x_3 = -3 \\ x_3 = -1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = -1 - 2\cdot(-1) \\ 2x_2 = -3 - 7\cdot(-1) \\ x_3 = -1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_2 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x_1 = 1 - 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}.$$

Таким образом, решение системы линейных уравнений имеет вид: (1;2;-1).

Ответ: (1;2;-1).

Задание 2. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и если она совместна, то найти ее общее решение и одно частное решение методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases}.$$

Решение. Найдем ранги основной матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ и расширенной матрицы $C = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$ системы линейных уравнений. Для этого приведем эти матрицы к ступенчатому виду. Так как матрица *A* полностью содержится в матрице *C*, то приведем к ступенчатому виду только расширенную матрицу *C* и из нее сделаем выводы. Так как в первой строке на первом месте стоит 1, то оставим эту строку без изменения. Затем, используя элементарные преобразования матрицы, от второй строки отнимем первую, умноженную на 2, и от третьей строки отнимем первую, умноженную на 3. Полученная матрица $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -4 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & -7 & 1 & 0 \end{array}\right)$ является эквивалентной данной. На этом заканчивается первое исключение переменной. Затем первую и вторую строчки перепишем без изменения, а от третьей отнимем вторую. Получим матрицу $\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & -3 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 7 & -4 & -3 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 & 1\end{array}\right)$, которая также эквивалентна данной, а также она является для нее ступенчатой матрицей. Замечаем, что эта матрица содержит три ненулевые строки, а поэтому rangC=3. При этом rang$A$ также равен 3, потому что внутренняя матрица также содержит три ненулевые строки. Так как rang$A$=rangC, то система линейных уравнений по теореме Кронекера-Капелли совместна и так как это равенство меньше числа неизвестных, то данная система линейных уравнений неопределенна, т.е. имеет бесчисленное множество решений.

Найдем общее решение системы уравнений. Для этого выразим базисные переменные (их три, так как rang$A$=rangC=3) через свободные. В качестве базисных переменных можно взять любые. Возьмем x_1, x_2, x_3, так как в ступенчатой матрице переменная x_1 находится только в первом уравнении (см. первый столбец), а переменная x_2 – только в первом и во втором уравнениях (см. столбец). Переменная x_3 выбрана произвольно среди оставшихся переменных.

Представим ступенчатую матрицу в виде системы линейных уравнений и найдем общее решение:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -1 \\ 3x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{7} + \frac{4}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 \\ x_3 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{7} + \frac{4}{21} + \frac{16}{21}x_4 + \frac{8}{21}x_5 + \frac{3}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 \\ x_3 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \\ x_2 = \frac{1}{21} + \frac{25}{21}x_4 - \frac{1}{21}x_5 \\ x_3 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{7} + \frac{25}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5 - \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 - 2x_4 + x_5 \\ x_2 = \frac{1}{21} + \frac{25}{21}x_4 - \frac{1}{21}x_5 \\ x_3 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \end{cases} \leftrightarrow$$

$\begin{cases} x_1 = \frac{17}{21} + \frac{5}{21}x_4 + \frac{4}{21}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{21} + \frac{25}{21}x_4 - \frac{1}{21}x_5 \\ x_3 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \end{cases}$. Таким образом, общее решение системы линейных уравнений имеет вид: $\begin{cases} x_1 = \frac{17}{21} + \frac{5}{21}x_4 + \frac{4}{21}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{21} + \frac{25}{21}x_4 - \frac{1}{21}x_5 \\ x_3 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \end{cases}$.

Найдем частное решение. Придадим свободным членам какие-то значения, например, $x_4 = 0, x_5 = 1$. Тогда $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$. Таким образом, частное решение имеет вид: $X = (1; 0; 1; 0; 1)$.

Проверка.

$1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 1 - 0 + 1 + 0 - 1 = 1 \equiv 1$

$2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2 + 0 - 2 + 1 + 1 = 1 \equiv 1$

$3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 3 - 0 + 2 - 0 - 2 = 3 \equiv 3$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \frac{17}{21} + \frac{5}{21}x_4 + \frac{4}{21}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{21} + \frac{25}{21}x_4 - \frac{1}{21}x_5 \\ x_3 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \end{cases}$ - общее решение;

$X = (1; 0; 1; 0; 1)$ -частное решение

Задание 3. Найти общее решение системы линейных неоднородных уравнений с помощью фундаментальной системы решений. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases}$$

Решение. Общее решение X системы линейных неоднородных уравнений равно сумме общего решения X^* системы линейного однородного уравнения и одного частного решения $\tilde{X}$ исходной системы линейного неоднородного уравнения, т.е. $X = X^* + \tilde{X}$.

Найдем общее решение системы линейного однородного уравнения
$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$, используя фундаментальную систему решений. Приведем расширенную матрицу системы уравнений к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & -7 & 1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right).$$ Обнулим элементы во втором и третьем столбцах, стоящие над диагональными элементами. Для этого вторую строку умножим на $\frac{3}{7}$ и сложим с первой. Результат записываем на месте первой строки. Получаем,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right).$$ Затем вторую строку делим на 7, а третью – на 3. Получаем, $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$. Затем сначала третью строку умножаем на $\frac{5}{7}$ и складываем с первой строкой, потом третью строку умножаем на $\frac{4}{7}$ и складываем со второй. В результате получаем матрицу: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{21} & -\frac{4}{21} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{21} & \frac{1}{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$. Переносим четвертый и пятый столбцы вправо за вертикальную черту, получаем матрицу $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{21} & \frac{4}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{21} & -\frac{1}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$ из правой части, которой выписываем

фундаментальную систему решений: $Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{21} \\ \frac{25}{21} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{21} \\ \frac{1}{21} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Таким образом, общее решение системы линейных однородных уравнений имеет вид: $Y = Y_1 \cdot x_4 + Y_2 \cdot x_5$ или $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{21} \\ \frac{25}{21} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot x_4 + \begin{pmatrix} \frac{4}{21} \\ -\frac{1}{21} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot x_5$.

Найдем частное решение исходной системы. Для этого придадим свободным переменным x_4 и x_5 исходной системы уравнений какие-то значения, например, $x_4 = x_5 = 0$. Получим систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$, которую решаем также методом Гаусса.

Ступенчатая матрица будет иметь вид $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$. Записываем ее в виде системы линейных уравнений: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_2 - 4x_3 = -1 \\ 3x_3 = 1 \end{cases}$. Откуда

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 3x_2 - x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{7} + \frac{4}{7}x_3 \\ x_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 3x_2 - \frac{1}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} \\ x_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{21} \\ x_2 = \frac{1}{21} \\ x_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{17}{21} \\ x_2 = \frac{1}{21} \\ x_3 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Таким образом. Частное решение имеет вид: $\left(\frac{17}{21}; \frac{1}{21}; \frac{1}{3}; 0; 0\right)$. Тогда общее решение будет: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{21} \\ \frac{1}{21} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{21} \\ \frac{25}{21} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot x_4 + \begin{pmatrix} \frac{4}{21} \\ -\frac{1}{21} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot x_5$ или

$$\begin{cases} x_1 = \frac{17}{21} + \frac{5}{21}x_4 + \frac{4}{21}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{21} + \frac{25}{21}x_4 - \frac{1}{21}x_5. \\ x_3 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \frac{17}{21} + \frac{5}{21}x_4 + \frac{4}{21}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{21} + \frac{25}{21}x_4 - \frac{1}{21}x_5 \\ x_3 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \end{cases}$

Задание 4. Решить систему линейных уравнений методом Жордана–Гаусса, найти одно частное решение и сделать проверку.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases}$$

Решение. Решим систему линейных уравнений в таблицах Гаусса по вышеуказанным правилам.

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	Σ_i
-	$\boxed{1}$	-3	1	2	-1	1	1
-	2	1	-2	1	1	1	4
-	3	-2	2	-1	-2	3	3
x_1	1	-3	1	2	-1	1	1
-	0	7	-4	-3	3	-1	2
-	0	7	-1	-7	$\boxed{1}$	0	0
x_1	1	4	0	-5	0	1	1
	0	-14	$\boxed{-1}$	18	0	-1	2
x_5	0	7	-1	-7	1	0	0
x_1	1	4	0	-5	0	1	1
x_3	0	14	1	-18	0	1	-2
x_5	0	21	0	-25	1	1	-2

Из последней таблицы выписываем общее решение:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_4 = 1 \\ 14x_2 + x_3 - 18x_4 = 1 \\ 21x_2 - 25x_4 + x_5 = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 4x_2 + 5x_4 \\ x_3 = 1 - 14x_2 + 18x_4. \\ x_5 = 1 - 21x_2 + 25x_4 \end{cases}$$

Таким образом, общее решение системы уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 4x_2 + 5x_4 \\ x_3 = 1 - 14x_2 + 18x_4 \\ x_5 = 1 - 21x_2 + 25x_4 \end{cases}$$

Найдем одно частное решение. Для этого свободным переменным x_2, x_4 придадим конкретные значения, например, $x_2 = 1, x_4 = 1,$

тогда $x_1 = 2, x_3 = 5, x_5 = 5$. Итак, частное решение системы уравнений имеет вид: $X = (2; 1; 5; 1; 5)$.

Проверка:

$2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 2 - 3 + 5 + 2 - 5 = 1 \equiv 1$

$2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 4 + 1 - 10 + 1 + 5 = 1 \equiv 1$

$2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + 5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = 6 - 2 + 10 - 1 - 10 = 3 \equiv 3$, верно

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1 - 4x_2 + 5x_4 \\ x_3 = 1 - 14x_2 + 18x_4 \\ x_5 = 1 - 21x_2 + 25x_4 \end{cases}$ – общее решение системы уравнений;

$X = (2; 1; 5; 1; 5)$ – частное решение системы уравнений.

Задание 5. Найти опорное решение системы линейных уравнений с помощью симплексных преобразований

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases}$$

Решение. Нахождение опорного решения будем проводить в таблицах Гаусса, используя симплексные преобразования по правилам:

1) все свободные члены должны быть неотрицательными; если есть отрицательный свободный член, то обе части уравнения, в которое входит этот член, умножается на (-1) и в таблицу заносится преобразованное уравнение;

2) выбирается столбец при неизвестном, в котором есть хотя бы один положительный коэффициент (указывается стрелкой); каждый такой коэффициент делится соответствующим свободным членом; из полученных значений выбирается наименьшее и определяется разрешающий элемент, который находится на пересечении выбранного столбца и строки с наименьшим значением от деления;

3) после того как разрешающий элемент выбран решение системы проводят аналогично методу Жордана-Гаусса.

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$min\dfrac{b_i}{a_{is}}, a_{is} > 0$
-	$\boxed{1}$	-3	1	2	-1	1	$\frac{1}{1} = 1, min$
-	1	-1	2	-1	1	2	$\frac{2}{1} = 2$
-	3 $\uparrow$	-2	2	-1	-2	3	$\frac{3}{3} = 1$

x_1	1	-3	1	2	-1	1	$\frac{1}{1}=1$
-	0	2	$\boxed{1}$	-3	2	1	$\frac{1}{1}=1, min$
-	0	7	-1	-7	1	0	$-$
x_1	1	-5	0	5	-3	0	$-$
x_3	0	2	1	-3	2	1	$\frac{1}{2}=0{,}5$
$-$	0	9	0	-10	$\boxed{3}$	1	$\frac{1}{3}=0.(3), min$
x_1	1	4	0	-5	0	1	
x_3	0	-4	1	-18	0	$\frac{1}{3}$	
x_5	0	3	0	$-\frac{10}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	

Выписываем из последней таблицы общее решение:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_4 = 1 \\ -4x_2 + x_3 - 18x_4 = \frac{1}{3} \\ 3x_2 - \frac{10}{3}x_4 + x_5 = \frac{1}{3} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 4x_2 + 5x_4 \\ x_3 = \frac{1}{3} + 4x_2 + 18x_4 \\ x_5 = \frac{1}{3} - 3x_2 + \frac{10}{3}x_4 \end{cases}$$

Найдем опорное решение. Для этого свободным членам x_2 и x_4 придадим значения ноль, т.е. $x_2 = x_4 = 0$, тогда $x_1 = 1$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_5 = \frac{1}{3}$. Итак, опорное решение системы уравнений имеет вид: $X = (1; 0; \frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3})$.

Проверка:

$$1 \cdot 1 - 0 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 + 0 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 1 = 1 - 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{3} = 1 \equiv 1$$

$$-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 2 + 0 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1 = -1 + 0 - \frac{2}{3} + 0 - \frac{1}{3} = -2 \equiv -2 \qquad .$$

$$1 \cdot 3 - 0 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 - 0 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 2 = 3 - 0 + \frac{2}{3} - 0 - \frac{2}{3} = 3 \equiv 3, \text{верно}$$

С другой стороны, можно не выписывать общее решение, а посмотреть какие переменные (базисные) находятся в столбце Б.П. Значения этих переменных будут равны соответствующим значениям свободных членов, а свободные переменные будут равны нулю.

Ответ: $X = (1; 0; \frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3})$.

Домашнее задание

Задание 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений: а) методом определителей; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$$

Задание 2. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и если она совместна, то найти ее общее решение и одно частное решение методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -1. \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases}$$

Задание 3. Найти общее решение системы линейных неоднородных уравнений с помощью фундаментальной системы решений. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1\ . \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases}$$

Задание 4. Решить систему линейных уравнений методом Жордана–Гаусса, найти одно частное решение и сделать проверку.

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 = -2. \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 5 \end{cases}$$

Задание 5. Найти опорное решение системы линейных уравнений с помощью симплексных преобразований

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 6 \\ -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = -4 \end{cases}$$

ТЕМА 3: *Линейные преобразования неизвестных*

Линейным преобразованием неизвестных (переменных) называется такой переход от системы n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ (старые) к системе n неизвестных $y_1, y_2, \dots, y_n$ (новые), при котором старые неизвестные линейно выражаются через новые: $\begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \dots + q_{1n}y_n \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + \dots + q_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + \dots + q_{nn}y_n \end{cases}$.

Линейное преобразование неизвестных можно записать в *матричном виде*: $\mathbf{x} = Q \cdot \mathbf{y}$, где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Q = (q_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

- *матрица линейного преобразования.*

Замечание. Любое линейное преобразование неизвестных однозначно определяется своей матрицей Q.

Линейное преобразование неизвестных является *невырожденным* в том и только в том случае, когда его матрица Q – невырожденная. Если же матрица Q является при этом ортогональной (т.е. $Q^{-1} = Q^T$), то линейное преобразование неизвестных называется *ортогональным*.

Пусть переход от неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ к неизвестным $y_1, y_2, \dots, y_n$ задается матрицей Q_1 ($\mathbf{x} = Q_1 \cdot \mathbf{y}$), а переход от неизвестных $y_1, y_2, \dots, y_n$ к неизвестным $z_1, z_2, \dots, z_n$ задается матрицей Q_2 ($\mathbf{y} = Q_2 \cdot \mathbf{z}$). Тогда

$\mathbf{x} = Q_1 \cdot \mathbf{y} = Q_1 \cdot (Q_2 \cdot \mathbf{z}) = (Q_1 Q_2) \cdot \mathbf{z} = Q \cdot \mathbf{z}$. Последовательное выполнение двух линейных преобразований неизвестных является линейным преобразованием от $x_1, x_2, \dots, x_n$ к $z_1, z_2, \dots, z_n$ с матрицей Q, причем $Q = Q_1 Q_2$.

Линейное преобразование называется *обратным*, если его матрица равна обратной матрице прямого преобразования.

Задание 1. Дано линейное преобразование переменных: $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 + x_3 \end{cases}$ и даны точки (1,1,1) и (2,3,-1) системе координат x_1, x_2, x_3 . Найти координаты этих точек в системе y_1, y_2, y_3.

Решение. Для того чтобы найти координаты данных точек в системе координат y_1, y_2, y_3, необходимо в линейное преобразование вместо переменных x_1, x_2, x_3 подставить координаты точек (1,1,1) и (2,3,-1). Имеем, $\begin{cases} y_1 = 1 - 1 + 1 = 1 \\ y_2 = 1 + 1 - 1 = 1 \\ y_3 = 1 + 0 + 1 = 2 \end{cases}$

Таким образом, точка (1,1,1) в системе координат y_1, y_2, y_3 имеет координаты (1,1,2).

Аналогично, $\begin{cases} y_1 = 2 - 3 - 1 = -2 \\ y_2 = 2 + 3 + 1 = 6 \\ y_3 = 2 + 0 - 1 = 1 \end{cases}$. Таким образом, точка (2,3,-1) в системе координат y_1, y_2, y_3 имеет координаты (-2,6,1).

Ответ: (1,1,2), (-2,6,1) в системе y_1, y_2, y_3.

Задание 2. Даны два линейных преобразования переменных: $\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases}$ и $\begin{cases} z_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ z_2 = 3y_1 + y_2 - y_3 \\ z_3 = y_1 + y_2 + 4y_3 \end{cases}$. Требуется: 1) найти линейное преобразование, выражающее переменные z_1, z_2, z_3 через переменные x_1, x_2, x_3, используя средства матричного исчисления; 2) найти координаты точки (-2,1,4), заданные в системе x_1, x_2, x_3, в системе z_1, z_2, z_3.

Решение. Так как коэффициенты линейного преобразования являются элементами матрицы линейного преобразования, то матрицы этих линейных преобразований имеют вид $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ соответственно. Матрицу линейного преобразования переменных z_1, z_2, z_3 относительно переменных x_1, x_2, x_3 найдем как

умножение матриц A и B, т.е. $C = BA$. Имеем, $C = BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2+1 & -1-8+1 & 3+2-3 \\ 6+1-1 & -3+4-1 & 9-1+3 \\ 2+1+4 & -1+4+4 & 3-1-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 6 & 0 & 11 \\ 7 & 7 & -10 \end{pmatrix}$

Имеем, $C = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 6 & 0 & 11 \\ 7 & 7 & -10 \end{pmatrix}$.

Таким образом, искомое линейное преобразование переменных имеет вид:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 8x_2 + 2x_3 \\ z_2 = 6x_1 - 11x_3 \\ z_3 = 7x_1 + 7x_2 - 10x_3 \end{cases}.$$

Найдем координаты точки (-2,1,4), заданные в системе x_1, x_2, x_3, в системе z_1, z_2, z_3. Подставим координаты этой точки вместо переменных x_1, x_2, x_3 в полученное линейное преобразование. Получаем,

$\begin{cases} z_1 = -2 - 8 + 8 = -2 \\ z_2 = -12 - 44 = -56 \\ z_3 = -14 + 7 - 40 = -47 \end{cases}$. Имеем, (-2,-56,-47).

Ответ: $\begin{cases} z_1 = x_1 - 8x_2 + 2x_3 \\ z_2 = 6x_1 - 11x_3 \\ z_3 = 7x_1 + 7x_2 - 10x_3 \end{cases}$; (-2,-56,-47).

Задание 3. Дано линейное преобразование

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

Требуется найти обратное преобразование.

Решение. Матрица обратного преобразования есть обратная матрица для матрицы прямого преобразования. Матрица данного преобразования имеет вид:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Тогда матрица обратного преобразования равна A^{-1}. Матрицу A^{-1}. найдем по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$,

где $|A|$- определитель матрицы А; A_{ij} -алгебраическое дополнение для элемента a_{ij} матрицы A $(i,j=\overline{1,3})$. Вычислим определитель матрицы A:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&4&-1\\1&1&-3\end{vmatrix}\begin{matrix}2&-1\\1&4\\1&1\end{matrix}=-24+1+3-(12-2+3)=-20+13=-7$$

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix}4&-1\\1&-3\end{vmatrix}=-12+1=-11;;$$

$$A_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}1&-1\\1&-3\end{vmatrix}=-(-3+1)=2;$$

$$A_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix}1&4\\1&1\end{vmatrix}=1-4=-3;$$

$$A_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}-1&3\\1&-3\end{vmatrix}=-(3-3)=0;$$

$$A_{22}=M_{22}=\begin{vmatrix}2&3\\1&-3\end{vmatrix}=-6-3=-9;$$

$$A_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}=-(2+1)=-3;$$

$$A_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix}-1&3\\4&-1\end{vmatrix}=1-12=-11;$$

$$A_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix}=-(-2-3)=5;$$

$$A_{33}=M_{33}=\begin{vmatrix}2&-1\\1&4\end{vmatrix}=8+1=9.$$

Таким образом, матрица имеет вид:

$$A^{-1}=-\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-11&0&-11\\2&-9&5\\-3&-3&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{7}&0&\frac{11}{7}\\-\frac{2}{7}&\frac{9}{7}&-\frac{5}{7}\\\frac{3}{7}&\frac{3}{7}&-\frac{9}{7}\end{pmatrix}.$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\begin{cases}x_1=\frac{11}{7}y_1+\frac{11}{7}y_3\\x_2=-\frac{2}{7}y_1+\frac{9}{7}y_2-\frac{5}{7}y_3.\\x_3=\frac{3}{7}y_1+\frac{3}{7}y_2-\frac{9}{7}y_3\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases}x_1=\frac{11}{7}y_1+\frac{11}{7}y_3\\x_2=-\frac{2}{7}y_1+\frac{9}{7}y_2-\frac{5}{7}y_3.\\x_3=\frac{3}{7}y_1+\frac{3}{7}y_2-\frac{9}{7}y_3\end{cases}$

Домашнее задание:

Задание 1. Дано линейное преобразование переменных: $\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + 3x_2 - x_3 \\ y_3 = -5x_1 + x_3 \end{cases}$ и даны точки (-1,3,1) и (-2,3,-4) системе координат x_1, x_2, x_3 . Найти координаты этих точек в системе y_1, y_2, y_3.

Задание 2. Даны два линейных преобразования переменных: $\begin{cases} y_1 = 4x_1 - x_2 + 3x_3 \\ y_2 = x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ y_3 = -x_1 + x_2 + 3x_3 \end{cases}$ и $\begin{cases} z_1 = y_1 - 3y_2 + y_3 \\ z_2 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 \\ z_3 = -y_1 + y_2 + 5y_3 \end{cases}$. Требуется: 1) найти линейное преобразование, выражающее переменные z_1, z_2, z_3 через переменные x_1, x_2, x_3, используя средства матричного исчисления; 2) найти координаты точки (-3,1,2), заданные в системе x_1, x_2, x_3, в системе z_1, z_2, z_3.

Задание 3. Дано линейное преобразование

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 + 3x_3 \\ y_2 = x_1 + 3x_2 - x_3 \\ y_3 = 2x_1 + x_2 - 5x_3 \end{cases}$$

Требуется найти обратное преобразование.

ТЕМА 4: *Собственные числа и собственные векторы матрицы. Квадратичная форма, ее матрица. Канонический вид квадратичной формы*

Собственным числом (или *собственным значением*) квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ называется число λ такое, что система уравнений $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение x. Это решение называется *собственным вектором* матрицы A, соответствующим собственному значению λ.

Собственные числа матрицы A находят из *характеристического уравнения* $|A - \lambda E| = 0$, где E - единичная матрица.

Так как каждому значению матрицы A соответствует собственный вектор x, то его координаты находят, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ --------------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}.$$

Квадратичной формой $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n неизвестных называется многочлен от n переменных второй степени, не содержащий членов первой степени и свободного члена $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + \cdots + a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i + \cdots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + a_{n,n-1}x_nx_{n-1}$, причем $a_{ij} = a_{ji}$, $i.j = \overline{1,n}$, $i \neq j$.

Замечание. С учетом условия $a_{ij} = a_{ji}$, $i.j = \overline{1,n}$, $i \neq j$ квадратичную форму записывают так $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$,

Квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$, составленная из коэффициентов при неизвестных квадратичной формы f называется *матрицей квадратичной формы* f, а ее ранг $rangA = r$ называется *рангом квадратичной формы* f

Если $r = n$, т.е. матрица A невырожденная, то и квадратичная форма f называется *невырожденной*.

Из условия $a_{ij} = a_{ji}$, $i.j = \overline{1,n}$, $i \neq j$ следует, что матрица квадратичной формы *симметрическая*.

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ приведена к *каноническому виду*, если все коэффициенты при произведениях различных неизвестных равны нулю, т.е. $a_{ij} = 0, . j = \overline{1,n}, i \neq j$.

Квадратичная форма в каноническом виде записывается так: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$.

Методы приведения квадратичной формы к каноническому виду:

1) Метод Лагранжа состоит в том, что с помощью последовательного выделения полных квадратов и с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования неизвестных квадратичная форма приводится к каноническому виду. При этом число ненулевых коэффициентов в этом каноническом виде не зависит от этого преобразования и равно рангу этой квадратичной формы. В результате выполнения линейного преобразования неизвестных $\mathbf{x} = Q \cdot \mathbf{y}$, где Q – матрица линейного преобразования, квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с матрицей A превращается в квадратичную форму от новых неизвестных $y_1, y_2, \dots, y_n$, с матрицей $B = Q^T AQ$.

Замечание. Канонический вид, который получается методом Лагранжа, определяется неоднозначно, так как неоднозначно определяется линейное преобразование.

2) Метод приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогональных преобразований состоит в том, что коэффициенты при квадратах неизвестных являются собственными значениями матрицы A квадратичной формы, а столбцы матрицы Q преобразования неизвестных состоят из соответствующих взаимно-ортогональных ортов собственных векторов матрицы A квадратичной формы.

3) Метод Якоби состоит в том, что коэффициентами при неизвестных в каноническом виде есть угловые миноры матрицы исходной квадратичной формы.

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *положительно определенной*, если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ на любых наборах значений неизвестных x_1, x_2, …, x_n, $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \neq 0$ (т.е. кроме набора неизвестных, когда $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$).

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *положительно полуопределенной*, если $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ на любых наборах значений неизвестных x_1, x_2, …, x_n.

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *отрицательно определенной*, если $f(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$ на любых наборах значений неизвестных x_1, x_2, …, x_n, $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \neq 0$ (т.е. кроме набора неизвестных, когда $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$).

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *отрицательно полуопределенной*, если $f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0$ на любых наборах значений неизвестных x_1, x_2, …, x_n.

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *неопределенной*, если существуют наборы значений неизвестных x_1, x_2, …, x_n, на которых $f(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ и $f(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$.

Критерий Сильвестра. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является *положительно определенной* тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы квадратичной формы положительны. То есть $\Delta_1 = a_{11} > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$, … , $\Delta_n = |A| > 0$.

Следствие. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является *отрицательно определенной* тогда и только тогда, когда знаки угловых миноров матрицы A квадратичной формы чередуются, начиная со знака «минус», т.е. $\Delta_1 = a_{11} < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, …

Задание 1. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы А:

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. 1) Для того чтобы найти собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, необходимо составить характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$, где E – единичная матрица, λ – собственное число матрицы А.

Имеем, $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \leftrightarrow 10 - 7\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$ $\leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 6 \end{array}\right.$.

$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

По теореме Виета

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 7 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$

Таким образом, собственные числа матрицы А равны 1 и 6.

Собственные векторы матрицы А найдем из следующей системы линейных уравнений: $\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$.

Пусть $\lambda = 1$, тогда система линейных уравнений примет вид: $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = 4x_1 \end{cases}$. Таким образом, собственный вектор X_1 имеет координаты $(x_1; 4x_1)$, где x_1 – любое действительное число.

Пусть теперь $\lambda = 6$, тогда система линейных уравнений примет вид: $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_1 \end{cases}$. Таким образом, собственный вектор X_2 имеет координаты $(x_1; x_1)$, где x_1 – любое действительное число.

Ответ: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 6$ – собственные числа матрицы А;

$\left.\begin{array}{l} X_1(x_1; 4x_1), \text{где } x_1 - \text{любое действительное число} \\ X_2(x_1; x_1), \text{где } x_1 - \text{любое действительное число} \end{array}\right\} - \begin{array}{c} \text{собственные векторы} \\ \text{матрицы А} \end{array}$

2) Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$, где E – единичная матрица, λ – собственное число матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Имеем, $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow$

$(4-\lambda)(\ 3-\lambda)(2-\lambda) - 2 + 2 - (-(3-\lambda) + 2(2-\lambda) + 2(4-\lambda) = 0 \leftrightarrow$

$$(12-7\lambda+\lambda^2)(2-\lambda)-(-3+\lambda+4-2\lambda+8-2\lambda)=0 \leftrightarrow$$

$$24-12\lambda-14\lambda+7\lambda^2+2\lambda^2-\lambda^3+3-\lambda-4+2\lambda-8+2\lambda=0 \leftrightarrow$$

$$-\lambda^3+9\lambda^2-23\lambda+15=0 \leftrightarrow \lambda^3-9\lambda^2+23\lambda-15=0.$$

Получили кубическое уравнение. Известно, что если кубическое уравнение имеет целые корни, то ими будут делители свободного члена. Замечаем, что делителями числа 15 являются $\pm1; \pm3; \pm5; \pm15$. Подставляя эти делители в кубическое уравнение, получаем, что $\lambda = 1$ является решением этого уравнения, так как $1^3-9\cdot1^2+23\cdot1-15=1-9+23-15=24-24=0\equiv0$, верно.

Разделим многочлен $\lambda^3-9\lambda^2+23\lambda-15$ на $\lambda-1$:

$$\begin{array}{r|l}
_\,\lambda^3-9\lambda^2+23\lambda-15 & \underline{\lambda-1} \\
\underline{\lambda^3-\lambda^2\qquad\qquad\quad} & \lambda^2-8\lambda+15 \\
_\,-8\lambda^2+23\lambda\qquad & \\
\underline{-8\lambda^2+8\lambda}\qquad & \\
_\,15\lambda-15 & \\
\underline{15\lambda-15} & \\
0 &
\end{array}$$

Таким образом, $\lambda^3-9\lambda^2+23\lambda-15=0 \leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2-8\lambda+15)=0 \leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\lambda-1=0\\ \lambda^2-8\lambda+15=0\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=1\\ \lambda=3.\\ \lambda=5\end{array}\right.$$

$\lambda^2-8\lambda+15=0$

По теореме Виета

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=8\\ \lambda_1\cdot\lambda_2=15\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_1=3\\ \lambda_2=5\end{cases}$$

Таким образом, собственные числа матрицы A равны 1, 3 и 5.

Собственные векторы матрицы A найдем из следующей системы линейных уравнений: $\begin{cases}(4-\lambda)x_1+x_2-x_3=0\\ 2x_1+(3-\lambda)x_2-2x_3=0.\\ x_1-x_2+(2-\lambda)x_3=0\end{cases}$

Пусть $\lambda = 1$, тогда система линейных уравнений примет вид:

$$\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=0\\ 2x_1+2x_2-2x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}3x_1+x_2-x_3=0\\ x_1+x_2-x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=0\end{cases}.$$

Приведем расширенную матрицу системы линейных уравнений к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования матрицы. Для этого вторую строку сделаем первой, так как первый элемент единица. Затем от первой старой строки отнимем вторую старую, умноженную на 3, а от третьей отнимем вторую. Затем первую строку перепишем, вторую разделим на (-2) и от третьей строки отнимем вторую. В результате получим ступенчатую матрицу, эквивалентную данной матрице, у которой две ненулевые строки. Это говорит о том, что ранг матрицы равен двум, а следовательно, имеем две базисные переменные.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Представим ступенчатую матрицу в виде системы линейных уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3. \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Таким образом, собственный вектор X_1 имеет координаты $(0; x_3; x_3)$, где x_3 – любое действительное число.

Пусть теперь $\lambda = 3$, тогда система линейных уравнений примет вид: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$

Приведем расширенную матрицу системы линейных уравнений к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Представим ступенчатую матрицу в виде системы линейных уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases}.$$

Таким образом, собственный вектор X_2 имеет координаты $(x_3; 0; x_3)$, где x_3 – любое действительное число.

Пусть теперь $\lambda = 5$, тогда система линейных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Приведем расширенную матрицу системы линейных уравнений к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Представим ступенчатую матрицу в виде системы линейных уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Таким образом, собственный вектор X_3 имеет координаты $(x_2; 0; x_2)$, где x_2 – любое действительное число.

Ответ: собственные числа: 1,3 и 5; собственные векторы: X_1=$(0; x_3; x_3)$, где x_3 – любое действительное число; X_2=$(x_3; 0; x_3)$, где x_3 – любое действительное число; X_3=$(x_2; 0; x_2)$, где x_2 – любое действительное число.

Задание 2. Привести квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3)$ к каноническому виду ортогональным преобразованием и выяснить, является ли квадратичная форма положительно определенной.

$f(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3.$

Решение. Так как матрица квадратичной формы симметрическая, то

$a_{11} = 10,\ a_{22} = 14,\ a_{33} = 7\ a_{12} = a_{21} = -5,\ a_{13} = a_{31} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$a_{23} = a_{32} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, матрица квадратичной формы

имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -5 & 14 & -\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{5\sqrt{2}}{2} & 7 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные числа матрицы A, для этого составим и решим характеристическое уравнение: $|A - \lambda E| = 0$, где λ – собственное число матрицы A, E – единичная матрица.

Имеем, $\begin{vmatrix} 10-\lambda & -5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -5 & 14-\lambda & -\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{5\sqrt{2}}{2} & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Тогда

$$(10-\lambda)(14-\lambda)(7-\lambda) - \frac{25}{2} - \frac{25}{2} - \frac{1}{2}(14-\lambda) - 25(7-\lambda) - \frac{25}{2}(10-\lambda) = 0;$$

$$(140 - 24\lambda + \lambda^2)(7-\lambda) - 25 - 7 + \frac{\lambda}{2} - 175 + 25\lambda - 125 + \frac{25}{2}\lambda = 0;$$

$$980 - 140\lambda - 168\lambda + 24\lambda^2 + 7\lambda^2 - \lambda^3 - 332 + 38\lambda = 0;$$

$$-\lambda^3 + 31\lambda^2 - 270\lambda + 648 = 0;$$

$$\lambda^3 - 31\lambda^2 + 270\lambda - 648 = 0.$$

Получили кубическое уравнение. Известно, что если кубическое уравнение имеет целые корни, то ими будут делители свободного члена. Замечаем, что делителями числа 648 являются $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \dots; \pm 648$. Подставляя эти делители в кубическое уравнение, получаем, что $\lambda = 4$ является решением этого уравнения, так как $4^3 - 31 \cdot 4^2 + 270 \cdot 4 - 648 = 64 - 496 + 1080 - 648 = 1144 - 1144 = 0 \equiv 0,$ верно.

Разделим многочлен $\lambda^3 - 31\lambda^2 + 270\lambda - 648$ на $\lambda - 4$:

$$\begin{array}{r|l} -\ \lambda^3 - 31\lambda^2 + 270\lambda - 648 & \underline{\lambda - 4} \\ \underline{\lambda^3 - 4\lambda^2} \qquad\qquad\qquad\quad & \lambda^2 - 27\lambda - 162 \\ -\ -27\lambda^2 + 270\lambda \qquad\quad & \\ \underline{-27\lambda^2 + 108\lambda} \qquad\quad & \\ -\ 162\lambda - 648 & \\ \underline{162\lambda - 648} & \\ 0 & \end{array}$$

Таким образом, $\lambda^3 - 31\lambda^2 + 270\lambda - 648 = 0 \leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda^2 - 27\lambda + 162) = 0$ $\leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda-4=0\\ \lambda^2-27\lambda+162=0\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=4\\ \lambda=9\\ \lambda=18\end{array}\right..$$

$$\left|\begin{array}{c}\lambda^2-27\lambda+162=0\\ D=27^2-4\cdot 162=729-648=81\\ \lambda_1=\dfrac{27-\sqrt{81}}{2}=\dfrac{27-9}{2}=9\\ \lambda_2=\dfrac{27+\sqrt{81}}{2}=\dfrac{27+9}{2}=18\end{array}\right.$$

Канонический вид квадратичной формы следующий: $g(y_1;y_2;y_3)=4y_1^2+9y_2^2+18y_3^2$.

Так как все собственные числа матрицы квадратичной формы положительны, то квадратичная форма является положительно определенной.

Ответ: $g(y_1;y_2;y_3)=4y_1^2+9y_2^2+18y_3^2$.

Задание 3. Привести квадратичную форму $f(x_1;x_2;x_3)=2x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-8x_1x_2-4\sqrt{2}x_1x_3-2\sqrt{2}x_2x_3$ к каноническому виду методом Лагранжа. Найти линейное преобразование, которое приводит к этому виду квадратичную форму.

Решение. В квадратичной форме сгруппируем выражения, содержащие переменную x_1, вынесем коэффициент при x_1^2 за скобки и выделим полный квадрат. Затем сгруппируем выражения, содержащие переменную x_2, вынесем за скобки коэффициент при x_2^2 и выделим полный квадрат и т.д. Все проделываем до тех пор пока не получим все линейные выражения в квадратах.

Имеем, $f(x_1;x_2;x_3)=2x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-8x_1x_2-4\sqrt{2}x_1x_3-2\sqrt{2}x_2x_3=$
$=(2x_1^2-8x_1x_2-4\sqrt{2}x_1x_3)+3x_2^2+2x_3^2-2\sqrt{2}x_2x_3=2(x_1^2-4x_1x_2-2\sqrt{2}x_1x_3)+3x_2^2+2x_3^2-2\sqrt{2}x_2x_3=2\left(x_1^2+2x_1\left(-2x_2-\sqrt{2}x_3\right)\right)+3x_2^2+2x_3^2-2\sqrt{2}x_2x_3=2(x_1^2+2x_1(-2x_2-\sqrt{2}x_3)+4\sqrt{2}x_2x_3-4\sqrt{2}x_2x_3+4x_2^2-4x_2^2+2x_3^2-2x_3^2-2\sqrt{2}x_2x_3=2((x_1-2x_2-\sqrt{2}x_3)^2-4\sqrt{2}x_2x_3-4x_2^2-2x_3^2)+3x_2^2+2x_3^2-2\sqrt{2}x_2x_3=2\left(x_1-2x_2-\sqrt{2}x_3\right)^2-8\sqrt{2}x_2x_3-8x_2^2-4x_3^2+3x_2^2+2x_3^2-2\sqrt{2}x_2x_3=2\left(x_1-2x_2--\sqrt{2}x_3\right)^2-5x_2^2-10\sqrt{2}x_2x_3-2x_3^2=$
$=2\left(x_1-2x_2-\sqrt{2}x_3\right)^2-5(x_2^2+2\sqrt{2}x_2x_3)-2x_3^2=2\left(x_1-2x_2-\sqrt{2}x_3\right)^2-$
$-5(x_2^2+2\sqrt{2}x_2x_3+2x_3^2-2x_3^2)-2x_3^2=2\left(x_1-2x_2-\sqrt{2}x_3\right)^2$
$-5(x_2+\sqrt{2}x_3)^2+10x_2^2-2x_3^2=2(x_1-2x_2-\sqrt{2}x_3)^2-5(x_2+\sqrt{2}x_3)^2+8x_3^2.$

Обозначим $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = y_1 \\ x_2 + \sqrt{2}x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$.

Тогда канонический вид квадратичной формы следующий:
$g(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - 5y_2^2 + 8y_3^2$.
Найдем линейное преобразование. Для этого выразим переменные $x_1,\ x_2,\ x_3$ через переменные y_1, y_2, y_3. Так как $y_3 = x_3$, то $x_2 = y_2 - \sqrt{2}x_3 = y_2 - \sqrt{2}y_3$, а тогда $x_1 = y_1 + 2x_2 + \sqrt{2}x_3 = y_1 + 2(y_2 - \sqrt{2}y_3) - \sqrt{2}y_3 = y_1 + 2y_2 - 2\sqrt{2}y_3$.
Таким образом, линейное преобразование имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - 2\sqrt{2}y_3 \\ x_2 = y_2 - \sqrt{2}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}.$$

Ответ: $g(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - 5y_2^2 + 8y_3^2$;

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - 2\sqrt{2}y_3 \\ x_2 = y_2 - \sqrt{2}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}.$$

Задание 4. Привести к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1; x_2; x_3) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$ методом Якоби.
Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -\sqrt{2} \\ -2 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$
Вычислим все главные миноры Δ_i матрицы *A* квадратичной формы, т.е. миноры, стоящие в левом углу матрицы *A* ($i = \overline{1, r}$; r – ранг матрицы *A*). Тогда канонический вид найдем по формуле:
$g(y_1; y_2; y_3) = \frac{1}{\Delta_1}y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{r-1}}{\Delta_r}y_r^2$.
$\Delta_1 = 3$ – минор первого порядка – это элемент $a_{11} = 3$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -\sqrt{2} \\ -2 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ -2 & -2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{matrix} = -6 + 4 + 4 - (-4 + 6 + 4) = 2 - 6 = -4.$$

Таким образом, канонический вид квадратичной формы следующий: $g(y_1; y_2; y_3) = \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{3}{-10}y_2^2 + \frac{-10}{-4}y_3^2 = \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{3}{10}y_2^2 + \frac{5}{2}y_3^2$.

Ответ: $g(y_1; y_2; y_3) = \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{3}{10}y_2^2 + \frac{5}{2}y_3^2$.

Домашнее задание

Задание 1. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы А: 1) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Привести квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3)$ к каноническому виду ортогональным преобразованием и выяснить, является ли квадратичная форма положительно определенной.
$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$.

Задание 3. Привести квадратичную форму $f(x_1; x_2; x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3$ к каноническому виду методом Лагранжа. Найти линейное преобразование, которое приводит к этому виду квадратичную форму.

Задание 4. Привести к каноническому виду квадратичную форму
$f(x_1; x_2; x_3) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 - 2\sqrt{3}x_1x_3 + 2\sqrt{3}x_2x_3$ методом Якоби.

***ТЕМА 5**: Векторы, действия над ними. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Ранг и базис системы векторов. Нахождение координат вектора в новом базисе*

Пусть вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, тогда $\vec{a} \pm \vec{b}(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$, $\lambda\vec{a}(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

Пусть даны вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ и вектор $\vec{b}$.

Линейной комбинацией вектора $\vec{b}$ относительно системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется выражение $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – числа.

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется *линейно независимой*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которые все равны нулю, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ и выполняется нулевая комбинация $\vec{0} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$.

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, среди которых хотя бы один отличен от нуля, и выполняется нулевая комбинация $\vec{0} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$.

Рангом r системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется число линейно независимых векторов этой системы.

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, состоящая из *n* векторов, образует *базис* в *n*-мерном пространстве, если эта система векторов линейно независимая. Обозначается $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$.

Замечание. Всякий вектор $\vec{b}$ *n*-мерного пространства можно разложить по базису $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ этого пространства, т.е. $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – координаты вектора $\vec{b}$ в этом базисе.

Пусть даны два базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ и $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$ *n*-мерного пространства (первый базис назовем старым, а второй – новым) и пусть дан вектор $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в старом базисе, тогда координаты этого вектора в новом базисе найдем по формуле: $\vec{x}' = T^{-1} \cdot \vec{x}$, где T -

матрица перехода от старого базиса к новому (столбцами этого вектора являются координаты векторов нового базиса в старом базисе).

Замечание. Стрелку у вектора можно не писать.

Задание 1. Даны векторы $\bar{a}_1(2,2,-1,-5)$, $\bar{a}_2(1,3,2,0)$, $\bar{a}_3(3,17,5,11)$, $\bar{a}_4(2,8,1,3)$ в R_4.

Требуется: а) вычислить линейную комбинацию вектора $\bar{b} = 3\bar{a}_1 + \bar{a}_4 - 2\bar{a}_3 + 4\bar{a}_4$; б) проверить на линейную зависимость вектора $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ и в случае линейной зависимости выразить вектор $\bar{a}_3$ в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_4$. Сделать проверку.

Решение. а) Используя действия над векторами, вычислим линейную комбинацию вектора $\bar{b} = 3\bar{a}_1 + \bar{a}_4 - 2\bar{a}_3 + 4\bar{a}_4 = 3(2,2,-1,-5) + (1,3,2,0) - 2(3,17,5,11) +$
$+4(2,8,1,3) = (6,6,-3,-15) + (1,3,2,0) - (6,34,10,22) + (8,32,4,12) =$
$(6+1-6+8, 6+3-34+32, -3+2-10+4, -15+0-22+12) =$
$= (9,7,-7,-25)$.

б) Проверим на линейную зависимость вектора $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$. Для этого составим нулевую линейную комбинацию: $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_3 + \lambda_4\bar{a}_4 = \bar{0} \leftrightarrow$

$$\lambda_1(2,2,-1,-5) + \lambda_2(1,3,2,0) + \lambda_3(3,17,5,11) + \lambda_4(2,8,1,3) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 17\lambda_3 + 8\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -5\lambda_1 + 0\lambda_2 + 11\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \end{cases}.$$

Найдем определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 17 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \\ -5 & 0 & 11 & 3 \end{vmatrix}$. Для облегчения вычисления этого определителя применим элементарные преобразования и получим определитель, у которого в первой строке будет одна единица, а остальные - нули.

Умножим второй столбец на 2 и от первого столбца вычтем преобразованный столбец (рис.2а)). В результате получим столбец, который в новом определителе будет первым столбцом.

Аналогично рассмотрим остальные столбцы. Умножим второй столбец на 3 и от третьего столбца вычтем преобразованный столбец (рис.2б)). Полученный столбец будет третьим столбцом в новом определителе. Умножим второй столбец на 2 и от четвертого столбца вычтем преобразованный столбец (рис.2в)). Полученный столбец будет четвертым столбцом в новом определителе. второй столбец в этом определителе останется без изменения.

$$\begin{array}{rr|r} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & 4 & -5 \\ -5 & 0 & -5 \end{array} \qquad \begin{array}{rr|r} 3 & 3 & 0 \\ 17 & 9 & 8 \\ 5 & 6 & -1 \\ 11 & 0 & 11 \end{array} \qquad \begin{array}{rr|r} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{array}$$

а) б) в)

Рис.2

Таким образом, новый определитель примет вид: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 8 & 2 \\ -5 & 2 & -1 & -3 \\ -5 & 0 & 11 & 3 \end{vmatrix}$, который равен исходному определителю Δ.

Используя теорему разложения, определитель Δ_1 будет равен:

$$\Delta_1 = 1 \cdot A_{12} = -M_{12} = -\left|\begin{array}{rrr|rr} -4 & 8 & 2 & -4 & 8 \\ -5 & -1 & -3 & -5 & -1 \\ -5 & 11 & 3 & -5 & 11 \end{array}\right. =$$

$$= -\big(12 + 120 - 110 - (10 + 132 - 120)\big) = -(22 - 22) = 0.$$

Имеем, $\Delta = \Delta_1 = 0$. Так как $\Delta = 0$, то система линейных однородных уравнений имеет бесчисленное множество решений. А это означает, что найдется одно ненулевое решение. А, следовательно, вектора $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ линейно зависимы.

Выразим вектор $\bar{a}_3$ в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_4$, т.е. составим линейную комбинацию вектора $\bar{a}_3 = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_4\bar{a}_4$. Получаем $\bar{a}_3 = \lambda_1(2,2,-1,-5) + \lambda_2(1,3,2,0) + \lambda_4(2,8,1,3) \leftrightarrow$
$(3,17,5,11) = \lambda_1(2,2,-1,-5) + \lambda_2(1,3,2,0) + \lambda_4(2,8,1,3) \leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 = 3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_4 = 17 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 5 \\ -5\lambda_1 + 0\lambda_2 + 3\lambda_4 = 11 \end{cases}$$

(1). Решим эту систему линейных уравнений методом Гаусса. Для этого приведем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 17 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ -5 & 0 & 3 & 11 \end{array}\right)$ системы к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования матрицы.

Первую строку оставим без изменения. От второй строки отнимем первую и разделим полученную строку на 2. К третьей строке, умноженной на 2, прибавим первую, а к четвертой, умноженной на 2, прибавим первую, умноженную на 5. Получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & 13 \\ 0 & 5 & 16 & 37 \end{array}\right)$ эквивалентную данной матрице. Аналогично преобразуем полученную матрицу: первую и вторую строки оставим без изменения. От третьей, отнимем вторую, умноженную на 5, и разделим полученную строку на (-11). От четвертой, отнимем вторую, умноженную на 5. Получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$. В этой матрице первые три строки оставим без изменения, а от четвертой строки отнимем третью. Полученная матрица $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ и будет ступенчатой для исходной матрицы. Решение представляем в виде следующей цепочки матриц:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 17 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ -5 & 0 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & 13 \\ 0 & 5 & 16 & 37 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Представим ступенчатую матрицу в виде системы линейных уравнений и найдем решение:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 = 3 \\ \lambda_2 + 3\lambda_4 = 7 \\ \lambda_4 = 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3 - 2 \cdot 2 \\ \lambda_2 = 7 - 3 \cdot 2 \\ \lambda_4 = 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 = -1 - 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_4 = 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_4 = 2 \end{cases}.$$

Таким образом, $\bar{a}_3 = -\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + 2\bar{a}_4$.

Проверка.

Подставим решение $(-1,1,2)$ в систему линейных уравнений (1):

$2\cdot(-1)+1\cdot1+2\cdot2=-2+1+4=3\equiv3$

$2\cdot(-1)+3\cdot1+8\cdot2=-2+3+16=17\equiv17$

$-1\cdot(-1)+2\cdot1+1\cdot2=1+2+2=5\equiv5$

$-5\cdot(-1)+0\cdot1+3\cdot2=5+0+6=11\equiv11,$ верно

Ответ: а) $\bar{b}=(9,7,-7,-25)$; б) $\bar{a}_3=-\bar{a}_1+\bar{a}_2+2\bar{a}_4$.

Задание 2. Доказать, что система векторов $\bar{a}_1(1,-1,2)$, $\bar{a}_2(3,1,-1)$, $\bar{a}_3(2,0,3)$ в пространстве R_3 образует базис и найти координаты вектора $\bar{b}$ в этом базисе. Сделать проверку.

Решение. Покажем, что система векторов $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3$ в пространстве R_3 образует базис. Для этого рассмотрим нулевую линейную комбинацию:

$\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\lambda_3\bar{a}_3=\bar{0}\leftrightarrow\ \lambda_1(1,-1,2)+\lambda_2(3,1,-1)+\lambda_3(2,0,3)=(0,0,0)\ \leftrightarrow$

$$\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3=0\\-\lambda_1+\lambda_2+0\lambda_3=0.\\2\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}$$

Вычислим определитель Δ системы уравнений:

$$\Delta=\left|\begin{matrix}1&3&2\\-1&1&0\\2&-1&3\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&3\\-1&1\\2&-1\end{matrix}=3+0+2-(4+0-9)=5+5=10.$$

Так как $\Delta=10\neq0$, то система линейных однородных уравнений имеет единственное решение (0,0,0). А это означает, что система векторов $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3$ линейно независима. Так как эти вектора из пространства R_3 и их число равно трем, то в пространстве R_3 они образуют базис $(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3)$. А тогда любой вектор этого пространства можно разложить по этому базису и коэффициенты этого разложения будут координатами вектора $\bar{b}$ в базисе $(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3)$.

Разложение вектора $\bar{b}$ по базису $(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3)$ имеет вид:

$\bar{b}=\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\lambda_3\bar{a}_3\leftrightarrow(3,-1,0)=\lambda_1(1,-1,2)+\lambda_2(3,1,-1)+\lambda_3(2,0,3)\leftrightarrow$

$$\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3=3\\-\lambda_1+\lambda_2+0\lambda_3=-1.\\2\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}$$

Решим эту систему методом определителей. Так как определитель системы $\Delta = 10 \neq 0$, то система линейных уравнений имеет единственное решение. Найдем определители $\Delta_{\lambda_1}, \Delta_{\lambda_2}, \Delta_{\lambda_3}$, которые получим из определителя Δ путем замены столбца при неизвестных столбцом свободных членов. Имеем,

$$\Delta_{\lambda_1} = \left|\begin{matrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix} = 9 + 0 + 2 - (0 + 0 - 9) = 11 + 9 = 20;$$

$$\Delta_{\lambda_2} = \left|\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix} = -3 + 0 + 0 - (-4 + 0 - 9) = -3 + 13 = 10;$$

$$\Delta_{\lambda_3} = \left|\begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = 0 - 6 + 3 - (6 + 1 + 0) = -3 - 7 = -10.$$

Решение системы уравнений найдем по правилу Крамера: $\lambda_i = \frac{\Delta_{\lambda_i}}{\Delta}$, где $i = \overline{1,3}$.

Имеем, $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{20}{10} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{10}{10} = 1 \\ \lambda_3 = \frac{-10}{10} = -1 \end{cases}$. Таким образом, $\bar{b} = 2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3$.

Проверка.

$1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 2 + 3 - 2 = 3 \equiv 3$

$-1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -2 + 1 + 0 = -1 \equiv -1$

$2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 4 - 1 - 3 = 0 \equiv 0$, верно.

Ответ: $\bar{b} = 2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3$.

Задание 3. Найти координаты вектора $x(1,10,10)$ в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3) и если известно разложение базисных векторов e_1', e_2', e_3' в базисе (e_1, e_2, e_3):

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 11e_3 \\ e_2' = \frac{11}{10}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Решение. Найдем матрицу перехода T от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису (e_1', e_2', e_3'). Этой матрицей будет матрица, столбцами которой являются координаты векторов e_1', e_2', e_3' в базисе (e_1, e_2, e_3).

Имеем, $T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{10} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем определитель матрицы T: $|T| =$ $\left|\begin{matrix} 1 & \frac{11}{10} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & \frac{11}{10} \\ 1 & -1 \\ 11 & 0 \end{matrix} = -1 + \frac{121}{10} + 0 - \left(11 + 0 + \frac{11}{10}\right) = \frac{111}{10} - 11 -$ $- \frac{11}{10} = 10 - 11 = -1 \neq 0$. Так как $|T| \neq 0$, то существует T^{-1}, а тогда координаты вектора x в базисе (e_1', e_2', e_3') найдем по формуле: $x' = T^{-1} \cdot x$.

Найдем T^{-1} по формуле: $T^{-1} = \frac{1}{|T|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где $|T|$-определитель матрицы T; A_{ij} -алгебраическое дополнение для элемента a_{ij} матрицы T $(i, j = \overline{1,3})$

Найдем алгебраические дополнения:

$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1;$

$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 11) = 10;$

$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 11 = 11;$

$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} \frac{11}{10} & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\left(\frac{11}{10} + 0\right) = -\frac{11}{10};$

$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 11 = 12;$

$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & \frac{11}{10} \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = -\left(0 - \frac{121}{10}\right) = \frac{121}{10};$

$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} \frac{11}{10} & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{11}{10} - 1 = \frac{1}{10};$

$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 1) = -2;$

$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{11}{10} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - \frac{11}{10} = -\frac{21}{10}.$

Таким образом, обратная матрица имеет вид:

$$T^{-1} = -\frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & -\frac{11}{10} & \frac{1}{10} \\ 10 & 12 & -2 \\ 11 & \frac{121}{10} & -\frac{21}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{10} & -\frac{1}{10} \\ -10 & -12 & 2 \\ -11 & -\frac{121}{10} & \frac{21}{10} \end{pmatrix}.$$

Тогда координаты вектора x равны:

$$x' = T^{-1} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{10} & -\frac{1}{10} \\ -10 & -12 & 2 \\ -11 & -\frac{121}{10} & \frac{21}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 11 - 1 \\ -10 - 120 + 20 \\ -11 - 121 + 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -110 \\ -111 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вектор x равен: $x = 11e_1' - 110e_2' - 111e_3'$.

Ответ: $x = 11e_1' - 110e_2' - 111e_3'$.

Домашнее задание

Задание 1. Даны векторы $\bar{a}_1(-2,3,-4,-2)$, $\bar{a}_2(-1,5,2,-3)$, $\bar{a}_3(6,1,5,11)$, $\bar{a}_4(8,2,-6,7)$ в пространстве R_4. Требуется: а) вычислить линейную комбинацию вектора $\bar{b} = 2\bar{a}_1 + 3\bar{a}_4 - \bar{a}_3 + 5\bar{a}_4$; б) проверить на линейную зависимость вектора $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ и в случае линейной зависимости выразить вектор $\bar{a}_3$ в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_4$. Сделать проверку.

Задание 2. Доказать, что система векторов $\bar{a}_1(-4,-1,3)$, $\bar{a}_2(8,3,-6)$, $\bar{a}_3(1,1,-1)$ в пространстве R_3 образует базис и найти координаты вектора $\bar{b}(-2,1,3)$ в этом базисе. Сделать проверку.

Задание 3. Найти координаты вектора $x(1,6,3)$ в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3) и если известно разложение базисных векторов e_1', e_2', e_3' в базисе (e_1, e_2, e_3):

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 10e_3 \\ e_2' = \frac{10}{9}e_1 + e_2 \\ e_3' = -e_1 - 2e_2 + e_3 \end{cases}.$$

ТЕМА 6: Линейный оператор, его матрица. Переход от одного базиса к другому. Операции над линейными операторами. Обратный оператор. Образ и ядро линейного оператора

Оператор – это отображение φ линейного пространства L в себя, т.е. $\varphi: L \to L$.

Результат действия оператора φ на элемент (вектор) x из L обозначают $\varphi(x)$. Элемент (вектор) $\varphi(x)$ называют *образом* элемента x, элемент x *прообразом* элемента $\varphi(x)$.

Множество элементов линейного пространства L, для которых определено действие оператора φ, называют *областью определения* оператора и обозначают $D(\varphi)$.

Множество элементов линейного пространства L, которые являются образами элементов из области определения оператора φ, называют *образом* оператора и обозначают $Im(\varphi)$.

Оператор φ называется *линейным*, если выполняются следующие условия:

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для всех x, y из L;
2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ для всех x из L и любого числа α.

Пусть линейный оператор φ действует в n–мерном линейном пространстве, т.е. $L = R^n$ и пусть $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ – базис в пространстве R^n. Обозначим через $\varphi(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), \dots, \varphi(e_n) = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$ образы базисных векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Матрица $A_\varphi = (a_{ij})_{n\times n}$, столбцами которой являются координаты образа базисных векторов, а строками, называется *матрицей линейного оператора* в заданном базисе.

Пусть $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ другой базис пространства R^n, тогда оператор φ в этом базисе имеет матрицу A'_φ, которую можно найти по формуле $A'_\varphi = T^{-1} \cdot A_\varphi \cdot T$, где $T = (t_{ij})_{n\times n}$ – матрица перехода от базиса $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ к базису $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ (координаты векторов $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ в базисе $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ записаны в виде строк).

Образ $Im(\varphi)$ линейного оператора φ – линейное пространство. Размерность образа линейного оператора φ называется *рангом* оператора φ. Обозначается $rang(\varphi) = r = \dim(Im(\varphi))$. Ранг линейного оператора φ равен рангу матрицы A_φ этого оператора, т.е. $rang(\varphi) = rang(A_\varphi)$.

Ядром линейного оператора φ называется множество элементов из L, образом которых является нулевой элемент. Обозначается $Ker(\varphi)$: $Ker(\varphi) = \{x \in L: \varphi(x) = \mathbf{0}\}$. Ядро линейного оператора – линейное пространство. Размерность ядра линейного оператора называется *дефектом оператора*. Обозначается $Def(\varphi)$: $d = Def(\varphi) = \dim(Ker(\varphi))$.

Сумма ранга и дефекта линейного оператора φ равно размерности, в котором действует оператор: $rang(\varphi) + Def(\varphi) = \dim(L) = n$ или $\dim\big(Im(\varphi)\big) + \dim(Ker(\varphi) = n$.

Если φ и ψ – линейные операторы пространства L с матрицами A_φ и A_ψ в базисе $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, то операторы произведения $\psi \circ \varphi\big((\psi \circ \varphi)(x)\big) = \psi(\varphi(x))$ и суммы $\varphi + \psi\big((\varphi + \psi)(x)\big) = \varphi(x) + \psi(x)$ – линейные и имеют в том же базисе матрицы $A_\psi A_\varphi$ и $A_\varphi + A_\psi$ соответственно.

Линейный оператор ψ называется *обратным* линейному оператору φ, если $\varphi \circ \psi(x) = (\psi \circ \varphi)(x)$ для любого x из L. Обозначается $\psi = \varphi^{-1}$. Для того чтобы φ^{-1} существовал необходимо и достаточно, чтобы φ был невырожденным оператором. Если A_φ – матрица оператора φ в некотором базисе, то оператор φ^{-1} в этом же базисе имеет матрицу A_φ^{-1}.

Задание 1. Доказать, что оператор $\varphi(x) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3; x_1; x_1 + 2x_2 + 3x_3)$ является линейным. Найти матрицу A_φ линейного оператора φ.

Решение. Оператор является линейным, если выполняются два условия: 1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$; 2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$, $\alpha = const$. Докажем, что эти условия выполняются для данного оператора.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ два вектора. Наложим на них оператор φ. Получим $\varphi(x) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3; x_1; x_1 + 2x_2 +$

$3x_3)$ и $\varphi(y) = (4y_1 - 3y_2 - 2y_3; y_1; y_1 + 2y_2 + 3y_3)$. Найдем координаты вектора $x + y$.

Имеем, $x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.
Наложим на вектор $x + y$ оператор φ. Получим:
$\varphi(x + y) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3; x_1; x_1 + 2x_2 + 3x_3) + (4y_1 - 3y_2 - 2y_3; y_1;$
$y_1 + 2y_2 + 3y_3) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + (4y_1 - 3y_2 - 2y_3); x_1 + y_1; x_1 + 2x_2 +$
$+3x_3 + (y_1 + 2y_2 + 3y_3)) = (4(x_1 + y_1) - 3(x_2 + y_2) - 2(x_3 + y_3); x_1 + y_1;$
$(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3))$

Найдем сумму линейных операторов $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. Имеем: $\varphi(x) + \varphi(y) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3; x_1; x_1 + 2x_2 + 3x_3) + (4y_1 - 3y_2 - 2y_3; y_1; y_1 + 2y_2 + 3y_3) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4y_1 - 3y_2 - 2y_3; x_1 + y_1;\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + {}$
$+y_1 + 2y_2 + 3y_3) = (4(x_1 + y_1) - 3(x_2 + y_2) - 2(x_3 + y_3); x_1 + y_1;$
$(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3))$. Замечаем, что $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
Проверим выполнимость второго условия: $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$, где $\alpha = const$.

Рассмотрим $\varphi(\alpha x)$ и $\alpha\varphi(x)$, где $\alpha = const$. Имеем, $\alpha x = \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$, тогда $\varphi(\alpha x) = (4\alpha x_1 - 3\alpha x_2 - 2\alpha x_3; \alpha x_1; \alpha x_1 + 2\alpha x_2 + 3\alpha x_3) = (\alpha(4x_1 - 3x_2 - 2x_3); \alpha x_1; \alpha(x_1 + 2x_2 + 3x_3)) = \alpha(4x_1 - 3x_2 - 2x_3; x_1; x_1 + 2x_2 + 3x_3)$. Так как $\varphi(x) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3; x_1; x_1 + 2x_2 + 3x_3)$, то $\alpha\varphi(x) = \alpha(4x_1 - 3x_2 - 2x_3; x_1; x_1 + 2x_2 + 3x_3)$. Замечаем, что $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$. Таким образом, оператор φ является линейным.

Найдем матрицу A_φ оператора φ. Пусть даны вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $\varphi(x) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3; x_1; x_1 + 2x_2 + 3x_3)$ и матрица $A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$. Тогда $A_\varphi \cdot x = \varphi(x)$, т.е. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$. Получаем систему линейных уравнений:

$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{21} \cdot x_2 + a_{31} \cdot x_3 = 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{32} \cdot x_3 = x_1 \\ a_{13} \cdot x_1 + a_{23} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$. Учитывая, что левая часть уравнения равна правой, когда равны коэффициенты при x_1, x_2, x_3, то матрица линейного оператора имеет вид: $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Дана матрица $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти линейный оператор φ.

Решение. Матрица A_φ – это матрица линейного оператора φ, действующего из R^2 в R^3. Пусть $x(x_1, x_2) \in R^2$, тогда $\varphi(x) \in R^3$. Имеем $A_\varphi \cdot x = \varphi(x)$. Замечаем, что $A_\varphi \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \varphi(x)$, Таким образом, линейный оператор φ имеет вид: $\varphi(x) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$.

Ответ: $\varphi(x) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$.

Задание 3. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(x) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3; x_1; x_1 + 2x_2 + 3x_3)$, $\psi(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - x_3, x_1 + 3x_2)$. Найти матрицы операторов $\psi(\varphi(x))$ и $(\psi^2 + \varphi)(x)$.

Решение. Пусть A_φ и A_ψ матрицы линейных операторов φ и ψ. Тогда $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Матрицу оператора $\psi(\varphi(x))$ найдем по формуле $A_{\psi\varphi} = A_\psi \cdot A_\varphi$. Имеем, $A_{\psi\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot$ $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1 + 1 & -3 + 0 + 2 & -2 + 0 + 3 \\ 8 + 0 - 1 & -6 + 0 - 2 & -4 + 0 - 3 \\ 4 + 3 + 0 & -3 + 0 + 0 & -2 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 7 & -8 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Матрицу оператора $(\psi^2 + \varphi)(x)$ найдем по формуле $A_{\psi^2+\varphi} = A_{\psi^2} + A_\varphi$.

Имеем, $A_{\psi^2+\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 + 1 & -1 + 0 + 3 & 1 + 1 + 0 \\ 2 + 0 - 1 & -2 + 0 - 3 & 2 + 0 + 0 \\ 1 + 6 + 0 & -1 + 0 + 0 & 1 - 3 + 0 \end{pmatrix} +$

$$\begin{pmatrix}4 & -3 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & -5 & 2\\ 7 & -1 & -2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & -3 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}0+4 & 2-3 & 2-2\\ 1+1 & -5+0 & 2+0\\ 7+1 & -1+2 & -2+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & -5 & 2\\ 8 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A_{\psi\varphi} = \begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 7 & -8 & -7\\ 7 & -3 & -2\end{pmatrix}$, $A_{\psi^2+\varphi} = \begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & -5 & 2\\ 8 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Задание 4. Найти матрицу A_φ оператора φ в базисе (e_1', e_2', e_3'), если она задана в базисе (e_1, e_2, e_3) $A_\varphi = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$. Известно также разложение базисных векторов e_1', e_2', e_3' в базисе (e_1, e_2, e_3):

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 + e_3\\ e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3.\\ e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3\end{cases}$$

Решение. Найдем матрицу перехода T от базиса (e_1, e_2, e_3) к базису (e_1', e_2', e_3'). Этой матрицей будет матрица, строками которой являются координаты векторов e_1', e_2', e_3' в базисе (e_1, e_2, e_3).

Имеем, $T = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Найдем определитель матрицы T: $|T| =$

$$\left|\begin{matrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ -1 & 2\end{matrix} = 1 - 2 - 2 - (-1 - 4 + 1) = -3 + 4 = 1 \neq 0.$$

Так как $|T| \neq 0$, то существует T^{-1}, а тогда матрицу A_φ оператора φ в базисе (e_1', e_2', e_3') найдем по формуле: $A_\varphi' = T^{-1} \cdot A_\varphi \cdot T$.

Найдем T^{-1} по формуле: $T^{-1} = \frac{1}{|T|} \cdot \begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$, где $|T|$- определитель матрицы T; A_{ij} -алгебраическое дополнение для элемента a_{ij} матрицы T $(i, j = \overline{1,3})$

Найдем алгебраические дополнения:

$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 1 + 4 = 5;$

$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix} = -(-1 - 2) = 3;$

$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1;$

$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 2) = 3;$

$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2;$

$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1;$

$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1;$

$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 1) = 1;$

$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$

Таким образом, обратная матрица T^{-1} имеет вид: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Тогда матрица A'_{φ} оператора φ в базисе (e'_1, e'_2, e'_3) равна: $A'_{\varphi} = T^{-1} \cdot A_{\varphi} \cdot T =$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 - 3 + 1 & -5 + 6 - 1 & 0 + 3 + 3 \\ 6 - 2 + 1 & -3 + 4 - 1 & 0 + 2 + 3 \\ -2 + 1 + 0 & 1 - 2 + 0 & 0 - 1 + 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2 + 0 & -6 + 2 + 0 & -6 + 4 + 0 \\ 3 - 2 - 1 & -3 + 2 + 2 & -3 + 4 - 1 \\ 1 - 1 + 1 & -1 + 1 - 2 & -1 + 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} *$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 4 - 2 & -4 - 4 + 4 & -4 - 8 - 2 \\ 0 - 1 + 0 & 0 + 1 + 0 & 0 + 2 + 0 \\ 1 + 2 + 2 & -1 - 2 - 4 & -1 - 4 + 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -14 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix}..$$

Таким образом, матрица A'_{φ} оператора φ в базисе (e'_1, e'_2, e'_3) имеет вид:

$$A'_{\varphi} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -14 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A'_{\varphi} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -14 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix}$.

Задание5. Дан линейный оператор $\varphi(x) = (-x_1 + x_2 - x_3; x_1 - x_2 - x_3; x_1 - x_2 - 3x_3)$. Найти ядро и дефект этого оператора

Решение. Так как ядром линейного оператора φ называется множество векторов из L, образом которых является нулевой вектор, то $Ker(\varphi) = \{x \in L: \varphi(x) = \mathbf{0}\}$. Решим систему уравнений $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$. Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Представим ступенчатую матрицу в виде системы линейных уравнений и решим ее: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

Таким образом, $Ker(\varphi) = \{x(x_2, x_2, 0), \text{где } x_2 \text{ любое действительное число}\}$.

Найдем дефект оператора φ. Так как дефектом оператора φ называется размерность ядра этого оператора, то $Def(\varphi) = dimKer(\varphi) = 1$. Действительно, из того, что $rang(\varphi) + Def(\varphi) = n = 3$, так как $dimR^3 = 3$, то $Def(\varphi) = 3 - rang(\varphi) = 3 - rangA_{\varphi} = 3 - 2 = 1$. Покажем, что $rangA_{\varphi} = 2$. Имеем, $A_{\varphi} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Так как число ненулевых строк ступенчатой матрицы матрицы A_{φ} равно двум, то $rangA_{\varphi} = 2$.

Ответ: $Ker(\varphi) = \{x(x_2, x_2, 0), \text{где } x_2 \text{ любое действительное число}\}$;
$Def(\varphi) = 1$

Задание 6. Дан линейный оператор $\varphi(x) = (4x_1 - x_2 - 2x_3; x_1 + x_2; x_1 + 2x_2 + 3x_3)$. Найти обратный оператор и его матрицу.
Решение. Матрица линейного оператора φ имеет вид: $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найдем определитель матрицы A_φ: $|A_\varphi| = \left|\begin{matrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix} = 6 + 0 - 4 - (2 + 0 - 3) = 2 + 1 = 3 \neq 0.$
Так как $|A_\varphi| \neq 0$, то матрица A_φ невырожденная, а, следовательно, существует обратная матрица для матрицы A_φ, которую найдем по формуле: $A_\varphi^{-1} = \frac{1}{|A_\varphi|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где A_{ij} – алгебраические дополнения.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 0) = -3;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3;$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-3 + 4) = -1;$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4;$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2;$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 2) = -2;$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3.$

Таким образом, обратная матрица имеет вид: $A_\varphi^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Эта матрица является матрицей линейного оператора φ^{-1}, который является обратным оператором данного оператора φ. Тогда обратный оператор имеет вид: $\varphi^{-1}(x) = (x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3, -x_1 + \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3, x_1 - x_2 + x_3)$.

Ответ: $\varphi^{-1}(x) = (x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3, -x_1 + \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3, x_1 - x_2 + x_3)$;

$A_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Домашнее задание

Задание 1. Доказать, что оператор $\varphi(x) = (5x_1 - 3x_2 - 7x_3; x_1 + 4x_2 - x_3; x_1 + 5x_2 - x_3)$ является линейным. Найти матрицу A_φ линейного оператора φ.

Задание 2. Дана матрица $A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти линейный оператор φ.

Задание 3. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(x) = (-x_1 + 3x_2 - 4x_3; x_1; x_1 - 4x_2 + 3x_3)$, $\psi(x) = (x_1 - 3x_2 + x_3, 2x_1 - 5x_3, x_1 + 2x_2)$. Найти матрицы операторов $\psi(\varphi(x))$ и $(\psi^2 + \varphi\psi)(x)$.

Задание 4. Найти матрицу A_φ оператора φ в базисе (e_1', e_2', e_3'), если она задана в базисе (e_1, e_2, e_3) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Известно также разложение базисных векторов e_1', e_2', e_3' в базисе (e_1, e_2, e_3):

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - 2e_2 + 3e_3 \\ e_2' = -e_1 + 3e_2 - 2e_3. \\ e_3' = -4e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}$$

Задание5. Дан линейный оператор:

$\varphi(x) = (-3x_1 + 4x_2 - x_3; x_1 - 2x_2 - x_3; x_1 - 3x_2 - 3x_3)$.

Найти ядро и дефект этого оператора

Задание 6. Дан линейный оператор:

$\varphi(x) = (3x_1 - 5x_2 + 3x_3; x_1 - 2x_2; x_1 - x_2 + 4x_3)$.

Найти обратный оператор и его матрицу.

НУЛЕВОЙ ВАРИАНТ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЯ

1. Найти матрицу A^{-1} обратную данной: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{pmatrix}$. Показать, что $A^{-1}\cdot A=E$ -единичная матрица.
2. Решить систему уравнений методом определителей:
$$\begin{cases}x+y+2z=4\\ 2x-y+3z=9\\ 2x+3y-z=-3\end{cases}$$
3. Даны вектора $a_1=(1;2;3)$, $a_2=(3;0;2)$, $a_3=(-2;-3;0)$, $b=(2;4;1)$. Доказать, что вектора a_1, a_2 и a_3 образуют базис в пространстве R^3 и разложить вектор b по этому базису.
4. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$.
5. .Проверить линейность оператора
$$x\varphi=(3x_1+4x_2; 6x_1-7x_2+x_3;\ 9x_1-x_2)$$
6. Дана матрица линейного оператора А в базисе $\mathrm{e}_1(1{,}0)$, $\mathrm{e}_2(0{,}1)$. Найти матрицу линейного оператора в базисе $\mathrm{e}'_1(3{,}4)$, $\mathrm{e}'_2(5{,}2)$, если в базисе $(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2)$ она имеет вид $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа
$$3x_1^2+7x_3^2+6x_1x_2-6\sqrt{3}x_1x_3.$$
8. Выяснить является ли квадратичная форма положительно определенной?
$$8x_1^2+8x_2^2+8x_3^2+4\sqrt{2}x_1x_2-4\sqrt{2}x_1x_3$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

1. Определители второго порядка, их основные свойства и вычисления.
2. Определители третьего порядка, их основные свойства и вычисления.
3. Миноры и алгебраические дополнения.
4. Теорема разложения определителя.
5. Системы линейных уравнений. Основные понятия.
6. Системы линейных уравнений. Правило Крамера(метод определителей). Условия существования решения СЛУ.
7. Матрицы, действия над ними.
8. Понятие ранга матрицы. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга матрицы.
9. Транспонированная и обратная матрицы. Нахождение обратной матрицы через алгебраические дополнения и элементарные преобразования.
10. Нахождение обратной матрицы с помощью таблиц Гаусса.
11. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Условия решения СЛУ в матричной форме.
12. Метод Гаусса-решения систем линейных уравнений.
13. Метод Жордана-Гаусса.
14. Нахождение опорного решения системы линейных уравнений.
15. Общее решение СЛУ. Базисные и свободные переменные.
16. Теорема Кронекера-Капелли.
17. Система линейных однородных уравнений, ее решения.
18. Фундаментальная система решений.
19. Квадратичная форма. Матрица квадратичной формы.
20. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод ортогональных преобразований.
21. Приведение квадратичной формы к каноническому виду Метод Лагранжа.
22. Главные миноры матрицы квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду, используя главные миноры матрицы квадратичной формы.

23. Положительно определенные квадратичные формы. Теоремы.
24. Отрицательно определенные квадратичные формы. Положительно полуопределенные квадратичные формы.
25. Векторы. Линейные операции над векторами.
26. Линейная комбинация векторов. Разложение вектора по системе векторов.
27. Линейно-зависимые и линейно-независимые системы векторов. Основные теоремы.
28. Ранг и базис системы векторов. Базис пространства R^3.
29. Линейный оператор. Матрица линейного оператора.
30. Образы, прообразы. Область определения и область значения.
31. Ранг линейного оператора.
32. Нахождение матрицы линейного оператора в новом базисе, зная ее в старом
33. Ядро линейного оператора.
34. Дефект линейного оператора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. – 176 с
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989.
3. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. – М.: ВШ, 1994.
4. Практикум по линейной алгебре. Методическое пособие / Сост.: Л.В. Чуйко, Н.П. Стратан – Бендеры, ООО «РВТ», 2008. – 44 с.
5. Справочная математическая библиотека под общей редакцией Л.Ю. Люстерника и А.Р. Ямпольского. Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра). М., Физматгиз, 1962г. – 300 с.
6. Элементы алгебры и аналитической геометрии. Методическое пособие / Сост.: А.М.Чебан, Л.В.Чуйко, Л.С.Николаева. – Тирасполь: РИО ПГУ, 2002. – 104 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Косюк Наталья Валерьевна
Косюк Василий Васильевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум

Усл. печ. 4.5. тираж 20

Тирасполь ПГУ им. Т.Г. Шевченко