**ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**им. Т.Г.Шевченко**

**Физико-математический факультет**

**Кафедра прикладной математики**

**и экономико-математических методов**

# АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**Методические указания для студентов инженерно-технических специальностей заочного отделения**

**Тирасполь, 2013г.**

**УДК 517.2: 517.3(072)**
**ББК В161.11(07)+В161.12(07)**
**П78**

*Составители*:
**А. И. Кудрик, ст. преподаватель кафедры ПМ и ЭММ**
**Л. В. Елкина, ст. преподаватель кафедры ПМ и ЭММ**

*Рецензенты:*
**Л. В. Чуйко, канд. пед. наук , доцент кафедры ПМ и ЭММ,**
**Е. И. Андрианова, ст. преподаватель кафедры ПОВТ и АС**

**Алгебра и аналитическая геометрия: Методические указания для студентов инженерно-технических специальностей заочного отделения / Сост.: А. И. Кудрик, Л. В. Елкина. – Тирасполь: ПГУ имени Т. Г. Шевченко, кафедра ПМ и ЭММ, 2013. – 33с.**

***В пособии приводятся программа курса «Алгебра и аналитическая геометрия», 30 вариантов заданий для контрольной работы и образец выполнения типового задания. Пособие предназначено для студентов первого курса заочной формы обучения, также будет полезно студентам дневной формы обучения всех инженерных специальностей.***

**УДК 517.2: 517.3(072)**
**ББК В161.11(07)+В161.12(07)**

**Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ имени Т. Г. Шевченко**

## ОТ СОСТАВИТЕЛЕЙ

Студенты-заочники инженерно-технических специальностей изучают дисциплину ***«Алгебра и аналитическая геометрия»*** в первом семестре. Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа, которая заключает в себя изучение теоретического материала по учебникам, выполнение упражнений, решение задач с использованием учебных и методических пособий.

В соответствии с учебным планом после освоения необходимого теоретического и практического материала нужно выполнить контрольную работу и сдать экзамен по курсу ***«Алгебра и аналитическая геометрия»***. В процессе всего периода обучения студент может получать у преподавателя необходимые ему устные консультации.

В настоящем пособии приводятся:

-программа курса ***«Алгебра и аналитическая геометрия»***;

-правила выполнения и оформления контрольных работ;

-задание для контрольной работы;

-образец выполнения контрольной работы;

-список вопросов для сессионного контроля;

-литература.

Программа дисциплины составлена в соответствии с государственным стандартом РФ.

## ПРОГРАММА КУРСА

1. Определители II и III порядка, их свойства и вычисление.
2. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя.
3. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.
4. Применение определителей к исследованию и решению систем линейных уравнений. Формулы Крамера.
5. Матрицы. Действия над матрицами.
6. Обратная и транспонированная матрица.
7. Доказательство теоремы о единственности обратной матрицы для невырожденной квадратной матрицы.
8. Ранг матрицы.
9. решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
10. Теорема о совместности системы линейных уравнений (т. Кронекера–Капелли).
11. Понятие векторного пространства, свойства векторных пространств.
12. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Теорема об условии линейной зависимости системы векторов пространства R над полем P (док-во). Следствие.
13. Свойства линейной зависимости векторов в пространстве R.
14. Основная теорема о линейной зависимости системы векторов (без док-ва) и два следствия из нее.
15. Базис и размерность векторного пространства. Теоремы о базисе линейного пространства R (три теоремы без док-ва).
16. Связь между координатами вектора в разных базисах. Теорема о матрице T перехода от одного базиса к другому.
17. Векторное пространство со скалярным умножением. Определение Евклидова пространства $E_n$. Теорема о любых двух векторах пространства $E_n$ (неравенство Коши-Буняковского).
18. Определение ортогональности двух векторов.
19. Ортогональный базис Евклидова пространства.
20. Ортонормированный базис.
21. Основные задачи, решаемые методом координат на плоскости.
22. Линии и их уравнения.
23. Уравнение прямой с угловым коэффициентом (вывод).
24. Вывод уравнения прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (уравнение пучка прямых).
25. Уравнение прямой, проходящей через две точки плоскости.
26. Общее уравнение прямой и его исследование.
27. Угол между двумя прямыми (определение), условие параллельности и условие перпендикулярности двух прямых плоскости.
28. Второй принцип соответствия. Окружность.
29. Эллипс. Его каноническое уравнение.
30. Исследование формы Эллипса. Связь эллипса с окружностью.
31. Директрисы эллипса. Эксцентриситет эллипса. Взаимно сопряженные диаметры эллипса.
32. Гипербола. Ее каноническое уравнение.
33. Исследование формы гиперболы.
34. Асимптоты и директрисы гиперболы. Эксцентриситет гиперболы.
35. Парабола. Ее каноническое уравнение.
36. Исследование формы параболы.
37. Преобразование уравнения линии второго порядка к каноническому виду.
38. Полярная система координат. Полярные уравнения линий.

39. Связь между полярными и прямоугольными координатами. Спираль Архимеда.
40. Координаты точек и координаты векторов в пространстве.
41. Основная формула векторного исчисления. Соотношение между направляющими косинусами.
42. Векторное произведение векторов. Простейшие свойства векторного произведения.
43. Смешанное произведение трех векторов. Момент силы относительно точки.
44. Плоскость. Общее уравнение плоскости. Уравнение в отрезках.
45. Взаимное расположение плоскостей. Угловые соотношения.
46. Основные задачи на составление уравнения плоскости.
47. Прямая в пространстве. Канонические уравнения прямой.
48. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.
49. Задание прямой двумя плоскостями. Параметрические уравнения прямой.
50. Взаимное расположение двух прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости.
51. Расстояние от точки до плоскости и до прямой.
52. Поверхности в пространстве. Поверхность как след, образуемый перемещением некоторой деформируемой плоской кривой.
53. Цилиндрические поверхности. Уравнение поверхности вращения. Сжатие и растяжение поверхностей.
54. Канонические уравнения поверхностей второго порядка. Эллипсоиды.
55. Однополостный и двухполостный гиперболоиды. Эллиптический параболоид. Цилиндры. Конусы. Сфера. Метод параллельных сечений

## ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа должна быть выполнена в срок, указанный в учебном графике.
2. На титульном листе должны быть четко написаны ФИО студента, факультет, курс, группа, номер варианта, номер зачетной книжки и ФИО преподавателя.
3. Все задачи входящие в вариант, должны быть решены. Перед решением каждой задачи необходимо записать полный текст ее условия. Каждую задачу начинайте решать с новой страницы. Работу следует выполнять четким, разборчивым почерком, объяснить ход решения каждого задания, проверить формулы, применяемые при решении задачи, соблюдать смысловые интервалы. После решения каждого задания оставлять место (не менее одной страницы) для учета возможных замечаний.
4. При получении не зачтенной работы, студент должен задачи с ошибками переписать заново без ошибок и сдать работу на проверку повторно. Если в работе имеются замечания, они должны быть учтены.
5. Контрольная работа не проверяется, если студент решил не свой вариант.
6. Зачтенная работа в обязательном порядке предъявляется на экзамене.
7. В контрольную работу входят задания одного варианта, который каждый студент может получить у преподавателя лично.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

### Задание №1.

Вычислить определитель:

1. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 7 \\ 6 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 8 \\ 4 & -4 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 16. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 19. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ 22. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 23. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 9 & 9 \\ 13 & -1 & 17 & 4 \end{vmatrix}$ 26. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 27. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 28. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 3 & -7 \\ 13 & 7 & 4 & -14 \\ 25 & 13 & 7 & -21 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 8 & 28 & 38 & 48 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 14 & 19 & 24 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 30. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -15 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

## Задание №2.

Найти произведение матриц:

1. $\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 2 & 4\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\5 & 2 & 1\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\5 & 6 & 8\end{pmatrix}$

4 $\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 5\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 7 & 2\\8 & 1 & 1\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 5\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\5 & 4 & 3\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}1 & 5\\1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5 & 3\\6 & 2 & 1\end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix}6 & 3\\8 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 11 & 1\\3 & 9 & 2\end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix}15 & 1\\8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\8 & 10 & 0\\5 & 6 & 11\end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix}9 & 3\\5 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4 & 6\\8 & 1 & 2\end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix}12 & 4\\1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 7\\8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 5\\4 & 3 & 8\end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix}10 & 7\\3 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6\\10 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 8 & 4\\1 & 2 & 5\end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\-1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 4\\-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix}6 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 10\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 2 & 3\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix}3 & 1\\6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 8\\5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\7 & 1 & -1\end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix}10 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\1 & 3 & 0\end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix}9 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 1 & -1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix}8 & 1\\-2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix}1 & 9\\7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 5 & 3\\7 & 8 & 1\end{pmatrix}$ .

20. $\begin{pmatrix}1 & 10\\8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 6\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\4 & 4 & -1\end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix}3 & 6\\5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 7\\6 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 6\\5 & -1 & 0\end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix}1 & 8\\6 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -1\\7 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\6 & 2 & 3\end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 5\\4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\3 & 0 & 7\end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix}2 & 7\\5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 6\\1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 5\end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 7 & 8\\4 & 5 & 1\end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix}3 & 5\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\2 & -2 & 2\end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix}5 & -6\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\6 & 3 & -5\end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix}1 & 2\\5 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 9\\-12 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\4 & 2 & 1\end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 20 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

## Задание №3.

Найти обратную матрицу для заданной матрицы с помощью алгебраических дополнений. Выполнить проверку.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 13. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 19. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 25. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 27. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 28. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 29. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

## Задание №4.

Решить систему уравнений тремя способами:
а) с помощью определителей;
б) с помощью обратной матрицы;
в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x + y + 4z = -2 \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x - y - 2z = 4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 1 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x - 2y + 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -2x + 3y + z = -3 \\ x + 4y + 2z = 1 \\ 3x + y + 5z = 2 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x - 4y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 2x + 4y + 3z = 3 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y + 4z = 5 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 4x + y - 5z = 1 \\ 2x + y - 3z = 3 \\ 6x + 2y - 7z = 6 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 3x + y - 5z = 3 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + 2y + 4z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \\ -2x + y - 2z = 5 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 5 \\ x - y + 4z = 5 \\ 3x - 2y + 4z = 6 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 5 \\ x - y + 2z = 2 \\ 4x - 2y + z = 8 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - y - 2z = 1 \\ -2x + 4y - z = -4 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 2x - 2y + z = 2 \\ x + y + z = 16 \\ 5x - 6y + 2z = -3 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 \\ 3x + y + z = 1 \\ 2x - 2y + z = 3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 12 \\ 3x + y + z = 7 \\ -3x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 3x - 2y + 7z = 0 \\ x - y + 3z = -1 \\ 2x - y + 5z = 3 \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ 3x + y + 2z = 4 \\ 2x + y - z = -3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + 3z = -7 \\ x - 3y + z = 2 \end{cases}$ 23. $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 9 \\ x - y - 2z = -2 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x - y + 4z = 4 \\ x - 2y + 6z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - 4z = 12 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x - y - 2z = -3 \\ x - 2y + 2z = -2 \\ -y + 5z = 3 \end{cases}$ 27 $\begin{cases} 2x + 6y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 4 \\ 4x + 8y - z = 2 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 10 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$ 29. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 5 \\ 3x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y - 3z = 13 \\ 3x - 2y + 4z = -15 \end{cases}$

## Задание №5

Даны вершины $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ треугольника. Найти:

1) длину стороны $AC$;
2) внутренний угол $A$ в градусах с точностью до 0,01 градуса;
3) уравнение высоты, проведенной через вершину $B$;
4) уравнение медианы, проведенной через вершину $B$;
5) длину высоты, проведенной через вершину $B$;
6) выполнить чертеж.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | A (-1; -1) | B ( 7; 5) | C (11;-6) |
| 2 | A (-4; -1) | B ( 4; 7) | C ( 8;-4) |
| 3 | A ( 3; 2) | B (11;8) | C (15;-3) |
| 4 | A (-5; 0) | B ( 3; 6) | C ( 7;-5) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | A (-6; 2) | B ( 2; 8) | C ( 6;-3) |
| 6 | A (-8; 1) | B ( 0; 7) | C ( 4;-4) |
| 7 | A ( 1; 0) | B ( 9; 6) | C (13;-5) |
| 8 | A ( 2; 3) | B (10; 9) | C (14;-2) |
| 9 | A (-3; -2) | B ( 5; 4) | C ( 9;-7) |
| 10 | A (-2; 4) | B (6; 10) | C (10; -1) |
| 11 | A (-2; 2) | B ( 6;-4) | C (10;11) |
| 12 | A (-6; 1) | B ( 2; -5) | C (6; 10) |
| 13 | A (-7; 2) | B ( 1;-4) | C (5; 11) |
| 14 | A (-8; 0) | B ( 0;-6) | C ( 4; 9) |
| 15 | A (-3; 1) | B ( 5;-5) | C (9;10) |
| 16 | A (-4; 2) | B ( 4;-4) | C ( 8;11) |
| 17 | A (-5; -3) | B ( 3;-9) | C ( 7; 6) |
| 18 | A (-9; 3) | B (-1;-3) | C ( 3;12) |
| 19 | A (-10;-3) | B -2;-9) | C ( 2; 6) |
| 20 | A (-4; -1) | B ( 4;-7) | C ( 8; 8) |
| 21 | A (-1; 3) | B ( 0; 4) | C ( 7; 3) |
| 22 | A (-3; -3) | B (-2; 4) | C ( 5; 3) |
| 23 | A (-5; -1) | B ( 0; 4) | C ( 5;-1) |
| 24 | A ( 6; -2) | B ( 1; 3) | C (-4;-2) |
| 25 | A (-4; -4) | B (-3; 3) | C ( 4; 2) |
| 26 | A ( 3; 9) | B ( 8; 4) | C (-1; 7) |
| 27 | A (-1; 1) | B (-1; 7) | C ( 8; 4) |
| 28 | A ( 1; 9) | B ( 6; 4) | C (-3; 7) |
| 29 | A (-1; 6) | B ( 3; 4) | C (-1; 4) |
| 30 | A (-4; 5) | B (-1; 4) | C ( 3; 4) |

## Задание № 6.

Построить линии по заданным уравнениям. Определить название каждой линии и вычислить их параметры: координаты фокусов, эксцентриситет и др. Изобразить, где нужно, асимптоты и директрису.

***Вариант 1***: $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$; $(x-5)^2+(y+4)^2=36$ ; $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$; $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$ ;$y^2=18x$.

***Вариант 2***: $(x-3)^2+(y+4)^2=16$ ; $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$; $y^2=12x$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$; $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$.

***Вариант 3***: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{81}=1$; $\frac{x}{16}+\frac{y}{9}=1$; $(x+9)^2+(y-4)^2=25$ ; $x^2=6y$; $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{36}=-1$.

***Вариант 4***: $\frac{x}{25}+\frac{y}{36}=1$; $y^2=-36x$; $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{49}=1$; $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; $(x-3)^2+(y+2)^2=49$.

***Вариант 5***: $(x-5)^2+(y+4)^2=36$; $\frac{x}{36}+\frac{y}{9}=1$; $y^2=12x$; $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$.

***Вариант 6***: $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{36}=-1$; $x^2=6y$; $\frac{x}{49}+\frac{y}{9}=1$; $(x+8)^2+(y-1)^2=25$; ; $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{81}=1$.

***Вариант 7***: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$; $\frac{x}{15}+\frac{y}{16}=1$; $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$; $y^2=-18x$; $(x-8)^2+(y+4)^2=16$.

***Вариант 8***: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$;$(x+1)^2+(y+4)^2=49$; $\frac{x}{9}+\frac{y}{8}=1$; $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$; $y^2=4x$.

***Вариант 9***: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$; $\frac{x}{4}+\frac{y}{25}=1$;$(x+5)^2+(y-4)^2=9$; $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$; $x^2=-6y$.

***Вариант 10***: $y^2=18x$; $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{36}=1$; $\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1$; $(x+1)^2+(y+4)^2=64$.

***Вариант 11***: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$; $(x-7)^2+(y+4)^2=49$; $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$; $y^2=14x$; $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

***Вариант 12***: $(x-1)^2+(y-4)^2=25$; $\frac{x}{18}+\frac{y}{15}=1$; $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=-1$; $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{81}=1$; $x^2=6y$.

***Вариант 13***: $\frac{x}{4}+\frac{y}{7}=1$; $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; $(x-4)^2+(y+4)^2=9$; $y^2=-18x$; $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$.

***Вариант 14***: $y^2=4x$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$; $\frac{x}{2}+\frac{y}{9}=1$; $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=-1$; $(x-7)^2+(y+4)^2=81$.

***Вариант 15***: $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{36}=-1$; $(x+9)^2+(y-5)^2=25$; $\frac{x}{10}+\frac{y}{9}=1$; $x^2=-46y$; $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{81}=1$.

***Вариант 16***: $(x-5)^2+(y+3)^2=81$; $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$; $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$; $y^2=8x$; $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$.

***Вариант 17***: $y^2=22x$; $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{36}=-1$; $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$; $(x-3)^2+(y-1)^2=9$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$.

***Вариант 18:*** $(x+7)^2+(y-4)^2=25$; $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{81}=1$; $x^2=-6y$; $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{36}=-1$; $\frac{x}{17}+\frac{y}{19}=1$.

***Вариант 19***: $\frac{x}{2}+\frac{y}{7}=1$; $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$; $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$; $(x-1)^2+(y+4)^2=1$; $y^2=-8x$.

***Вариант 20***: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$; $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$; $(x-6)^2+(y+4)^2=81$; $y^2=4x$; $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1$.

***Вариант 21***: $x^2=36y$; $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=-1$; $\frac{x}{6}+\frac{y}{9}=1$; $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$; $(x+5)^2+(y+1)^2=64$.

***Вариант 22***: $x^2+(y+4)^2=36$ ; $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{36}=1$; $\frac{x}{15}+\frac{y}{13}=1$; $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$; $y^2=-8x$.

***Вариант 23***: $y^2 = 2x; \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1; \frac{x}{9} + \frac{y}{7} = 1; \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1; (x-3)^2 + y^2 = 16.$

***Вариант 24***: $x^2 = -26y; (x+9)^2 + (y-1)^2 = 4; \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1; \frac{x}{19} - \frac{y}{9} = 1; \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = -1$

***Вариант 25***: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1; (x-5)^2 + (y-2)^2 = 49; \frac{x}{5} - \frac{y}{7} = 1; \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1; y^2 = 28x.$

***Вариант 26***: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{25} = 1; \frac{x}{7} - \frac{y}{10} = 1; (x-3)^2 + (y-6)^2 = 16; y^2 = -12x; \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1.$

***Вариант 27***: $x^2 = 36y; \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = -1; \frac{x}{16} - \frac{y}{25} = 1; (x+2)^2 + (y-4)^2 = 25; \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{81} = 1.$

***Вариант 28***: $(x-5)^2 + y^2 = 16; \frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1; y^2 = 14x; \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1.$

***Вариант 29***: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1; \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1; \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1; y^2 = -12x; (x-3)^2 + (y-6)^2 = 16.$

***Вариант 30***: $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{36} = -1; \frac{x}{16} + \frac{y}{9} = -1; \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1; x^2 = 8y; (x-1)^2 + (y-4)^2 = 25.$

## Задание №7.

***Вариант 1***: Даны точки: A(-1;2;3),B(2;-1;0), C(1;0;-2), D(-2;1;-1). Составить уравнение плоскости ABC. Найти расстояние от точки D до плоскости ABC.

***Вариант 2***: Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A(-1;1;4) на прямую $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+6}{-1}$.

***Вариант 3***: Даны точки: A(-1;2;4), B(5;-1;0), C(-1;0;-2), D(-3;1;-2). Составить уравнение плоскости ABC. Найти уравнение плоскости, которая проходит через точку D и параллельна плоскости ABC.

***Вариант 4***: Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z+3}{1}$ и параллельно координатной оси O $z$.

***Вариант 5***: Даны точки: A(-3;-2;-1), B(0;1;0), C(1;1;2), D(-3;1;-1). Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку D и перпендикулярна плоскости ABC.

***Вариант 6***: Составить уравнение плоскости проходящей через точку M(1;-3;-2) и перпендикулярно координатной оси O$z$. Найти уравнение прямой, проходящей через точку M и начало координат. Найти угол между этой прямой и плоскостью.

***Вариант 7***: Даны точки: A(1;2;5), B(4;-1;0), C(-1;-6;-2), D(2;1;1). Составить уравнение плоскости ABC. Найти угол между прямой A D и плоскостью ABC.

***Вариант 8***: Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+5}{2}$ и параллельно координатной оси О $x$.

***Вариант 9***: Даны точки: A(-3;-2;-1), B(2;1;4), C(1;-1;-2), D(2;1;-1). Составить уравнение плоскости ABC. Найти уравнение прямой, которая проходит через точку D и перпендикулярна плоскости ABC.

***Вариант 10***: Доказать, что прямые $\frac{x-1}{6}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{-2}$ и $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{3}$ параллельны. Составить уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

***Вариант 11***: Даны точки: A(-1;1;-3), B(2;-1;3), C(1;0;-2), D(0;1;-1). Найти уравнения двух перпендикулярных плоскостей, одна из которых проходит через прямую AB, другая – через прямую CD.

***Вариант 12***: Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+5}{2}$ и перпендикулярно плоскости $3x-5y+z-2=0$.

***Вариант 13***: Даны точки: A(6;5;-3), B(1;-1;3), C(1;3;-2), D(-4;1;-1). Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и прямую AB. Найти угол между прямой CD и этой плоскостью. В какой точке прямая CD пересекает эту плоскость?

***Вариант 14***: Найти точку пересечения прямых $\frac{x-12}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+5}{-2}$ и $\frac{x+2}{5}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{3}$. Составить уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

***Вариант 15:*** Даны точки: A(-1;2;0), B(3;-1;5), C(1;2;-2), D(-3;1;-1). Составить уравнение плоскости ABC. Найти угол между этой плоскостью и прямой, проходящей через начало координат и точку D.

***Вариант 16***: Даны точки: A(-1;3;-3), B(2;-1;-6), C(5;0;-2), D(-2;1;-1). Составить уравнение плоскости ABC. Найти проекцию точки D на плоскость ABC.

***Вариант 17***: Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A(2;1;-1) на прямую $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+1}{-1}$.

***Вариант 18***: Даны точки: A(-1;2;0), B(2;-1;1), C(1;3;-2), D(2;1;-1). Составить уравнение плоскости ABC. Найти уравнение прямой, параллельной плоскости ABC, проходящей через точку D и через ось O$z$.

***Вариант 19***: Найти угол между прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+5}{2}$ и плоскостью $3x+4y-z-1=0$, найти точку пересечения прямой и плоскости.

***Вариант 20***: Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(-2;1;-4) и перпендикулярно координатной оси O$y$. Найти уравнение прямой, проходящей через точку M и начало координат. Найти угол между этой прямой и плоскостью.

***Вариант 21***: Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку (-2;1;-1) и перпендикулярна прямой $\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{4}$.

***Вариант 22***: Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A(-1;-1;2) на прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-1}$.

***Вариант 23***: Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{2}$ и параллельно координатной оси Oy.

***Вариант 24***: Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(3;1;-5) и перпендикулярно координатной оси Ox. Найти уравнение прямой, проходящей через точку M и начало координат. Найти угол между этой прямой и плоскостью.

***Вариант 26***: Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A(-1;2;-3) на прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{-1}$.

***Вариант 27***: Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (-3;4;-1) и  и перпендикулярно п*рямой* $\frac{x+5}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-7}{-1}$.

***Вариант 28***: Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{5} = \frac{z+5}{2}$ и перпендикулярно плоскости $x-y+3z-2=0$.

***Вариант 29:*** Найти точку пересечения прямых $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+5}{-2}$ и $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{3}$. Составить уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

***Вариант 30***: Доказать, что прямые $\frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+1}{2}$ и $\frac{x-4}{-9} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+1}{-3}$ параллельны. Составить уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

## Задание №8

Даны координаты вершин пирамиды ABCD.

Требуется:

1. записать векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов;
2. найти угол между векторами $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$,
3. найти проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$;
4. вычислить площадь грани ABC;
5. найти объем пирамиды ABCD.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A(2;-3;1) | B(6;1;-1) | C(4;8;-9) | D(2;-1;2) |
| 2 | A(5;-1;4) | B(9;3;-6) | C(7;10;-14) | D(5;1;-3) |
| 3 | A(1;-4;0) | B(5;0;-2) | C(3;7;-10) | D(1;-2;1) |
| 4 | A(-3;-6;2) | B(1;-2;0) | C(-1;5;-8) | D(-3;-4;3) |
| 5 | A(-1;1;5) | B(3;5;-7) | C(1;12;-15) | D(-1;3;-4) |
| 6 | A(-4;2;-1) | B(0;6;-3) | C(-2;13;-11) | D(-4;4;0) |
| 7 | A(0;4;3) | B(4;8;1) | C(2;15;-7) | D(0;6;4) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | A(-2;0;2) | B(2;4;-4) | C(0;11;-12) | D(-2;2;-1) |
| 9 | A(3;3;-3) | B(7;7;-5) | C(5;14;-13) | D(3;5;-2) |
| 10 | A(4;-2;5) | B(8;2;3) | C(6;9;-5) | D(4;0;6) |
| 11 | A(-5;0;1) | B(-4;-2;3) | C(6;2;11) | D(3;4;9) |
| 12 | A(1;-4;0) | B(2;-6;2) | C(12;-2;10) | D(9;0;8) |
| 13 | A(-1;-2;-8) | B(0;-4;-6) | C(10;0;2) | D(7;2;0) |
| 14 | A(0;2;-10) | B(1;0;-8) | C(11;4;0) | D(8;6;-2) |
| 15 | A(3;1;-2) | B(4;-1;0) | C(14;3;8) | D(11;5;6) |
| 16 | A(-8;3;-1) | B(-7;1;1) | C(3;5;9) | D(0;7;7) |
| 17 | A(2;-1;-4) | B(3;-3;-2) | C(13;1;6) | D(10;3;4) |
| 18 | A(-4;5;-5) | B(-3;3;-3) | C(7;7;5) | D(4;9;3) |
| 19 | A(-2;-3;2) | B(-1;-5;4) | C(9;-1;12) | D(6;1;10) |
| 20 | A(-3;4;-3) | B(-2;2;-1) | C(8;6;7) | D(5;8;5) |
| 21 | A(4;-3;1) | B(6;3;-1) | C(4;1;-9) | D(2;-1;2) |
| 22 | A(5;0;4) | B(7;3;-6) | C(7;5;-14) | D(3;1;-3) |
| 23 | A(1;2;0) | B(1;0;-2) | C(3;6;-10) | D(3;-2;1) |
| 24 | A(-3;-5;2) | B(2;-2;0) | C(-1;4;-8) | D(3;-4;3) |
| 25 | A(0;1;5) | B(3;2;-7) | C(1;5;-15) | D(-1;3;-4) |
| 26 | A(-4;1;-1) | B(2;6;-3) | C(-2;4;-11) | D(-4;3;0) |
| 27 | A(1;4;3) | B(4;6;1) | C(2;10;-7) | D(1;6;4) |
| 28 | A(-2;0;2) | B(2;3;-4) | C(0;11;-13) | D(-2;5;-1) |
| 29 | A(3;4;-3) | B(7;5;-5) | C(5;5;-13) | D(2;5;-2) |
| 30 | A(3;-2;5) | B(8;1;3) | C(6;0;-5) | D(4;0;6) |

## ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание № 1

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение.

Вычислим данный определитель, например, разложив его по элементам второй строки

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Найдем каждый из определителей третьего порядка, используя правило треугольников.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 2 + (-1)\cdot 5\cdot 2 - 2\cdot(-3)\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot 1 = -3+6-10+12-15+1 = -9$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 2 + (-1)\cdot 5\cdot(-1) - (-1)\cdot(-3)\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 3 - 1\cdot(-1)\cdot 1 = -9+6+5-6-45+1 = -48$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 5\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 5\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 1 = 3+4-5+2-30-1 = -27$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot(-1) + 1\cdot(-3)\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot(-3)\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 3 = 9-2+3-1+18-3 = 24$$

Тогда исходный определитель четвертого порядка равен:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{2+1}\cdot(-9) + 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot(-48) + 3\cdot(-1)^{2+3}\cdot(-27) + 4\cdot(-1)^{2+4}\cdot 24 = 18+81+96 = 195$$

Ответ: 195

Задание №2

Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Найдем произведение первых двух матриц.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 + 1\cdot 0 & 5\cdot(-2) + 1\cdot 6 \\ (-2)\cdot 3 + 4\cdot 0 & (-2)\cdot(-2) + 4\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -4 \\ -6 & 20 \end{pmatrix}$$

Полученную матрицу умножим на третью матрицу:

$$\begin{pmatrix} 15 & -4 \\ -6 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\cdot 1+(-4)\cdot(-3) & 15\cdot 2+(-4)\cdot 4 & 15\cdot 2+(-4)\cdot 1 \\ (-6)\cdot 1+20\cdot(-3) & (-6)\cdot 2+20\cdot 4 & (-6)\cdot 2+20\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 14 & 26 \\ -66 & 68 & 8 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 27 & 14 & 26 \\ -66 & 68 & 8 \end{pmatrix}$

Задание №3.

Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ с помощью алгебраических дополнений. Выполнить проверку.

Решение.

Найдем определитель матрицы

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 0 + 1 - 0 - 2 = 2$$

Так как $D(A) \neq 0$, то матрица $A$ является невырожденной и для нее существует обратная. Найдем ее по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 1) = 0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 1) = 2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0+2) = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1$$

Тогда обратная матрица примет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Выполним проверку. Найдем произведение матриц $A \cdot A^{-1}$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1/2 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-3/2) & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 1/2 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1/2) \\ 2\cdot 1/2 + 1\cdot(-1) + 0\cdot(-3/2) & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 2\cdot 1/2 + 1\cdot(-1) + 0\cdot(-1/2) \\ 1\cdot 1/2 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot(-3/2) & 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1/2 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot(-1/2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

где $E$- единичная матрица.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

## Задание №4.

Решить систему уравнений тремя способами:

1) с помощью определителей;
2) с помощью обратной матрицы;
3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} -2x + 3y + z = 12 \\ x - 2y - z = -8 \\ 3x + y + z = -2 \end{cases}$$

Решение

1) Решим данную систему уравнений с помощью определителей.

Найдем определитель данной системы

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 9 + 6 - 2 - 3 = -3 \neq 0$$

Следовательно, система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера

$$x = \frac{D_1}{D}, \qquad y = \frac{D_2}{D}, \qquad z = \frac{D_3}{D}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 & 1 \\ -8 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -24 - 8 + 6 - 4 + 12 + 24 = 6$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 12 & 1 \\ 1 & -8 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 16 - 2 - 36 + 24 + 4 - 12 = -6$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 12 \\ 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 72 + 12 + 72 - 16 + 6 = -6$$

Тогда

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{6}{-3} = -2, \qquad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-6}{-3} = 2, \qquad z = \frac{D_3}{D} = \frac{-6}{-3} = 2$$

2) Решим данную систему с помощью обратной матрицы.

Обозначим через $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$, тогда данная система уравнений в матричной форме имеет вид:

$$A \cdot X = B.$$

Решением этого матричного уравнения является: $X = A^{-1} \cdot B$, где $A^{-1}$–обратная матрица для матрицы $A$.

Найдем обратную матрицу $A^{-1}$ с помощью алгебраических дополнений по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$D(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 9 + 6 - 2 - 3 = -3$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 3) = -4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7$$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3-1) = -2$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2-3 = -5$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-2-9) = 11$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3+2 = -1$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -4 & -5 & -1 \\ 7 & 11 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 4/3 & 5/3 & 1/3 \\ -7/3 & -11/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Решение исходной системы уравнений в матричной форме примет вид:

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 4/3 & 5/3 & 1/3 \\ -7/3 & -11/3 & -1/3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3\cdot 12 + 2/3\cdot(-8) + 1/3\cdot(-2) \\ 4/3\cdot 12 + 5/3\cdot(-8) + 1/3\cdot(-2) \\ -7/3\cdot 12 + (-11/3)\cdot(-8) + (-1/3)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/3 \\ 6/3 \\ 6/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $x = -2$, $y = 2$, $z = 2$

3) Решим данную систему методом Гаусса.

Совершим прямой ход метода Гаусса. Для этого выпишем расширенную матрицу заданной системы уравнений и с помощью элементарных преобразований, приведем ее к ступенчатому виду.

Расширенная матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 1 & 12 \\ 1 & -2 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Поменяем первую строку в матрице со второй.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -8 \\ -2 & 3 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Далее с помощью элементарных преобразований приведем полученную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -8 \\ -2 & 3 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)_{\substack{\mathrm{I}\cdot 2+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\cdot(-3)+\mathrm{III}}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & 4 & 22 \end{array}\right)_{\mathrm{II}\cdot 7+\mathrm{III}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

Совершим обратный ход. Выпишем из последней матрицы систему уравнений.

$$\begin{cases} x-2y-z=-8 \\ -y-z=-4 \\ -3z=-6 \end{cases}; \begin{cases} x-2y-2=-8 \\ -y-2=-4 \\ z=2 \end{cases}; \begin{cases} x-2\cdot 2=-6 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}; \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$$

Ответ: $x=-2$, $y=2$, $z=2$

Задание №5.

Даны вершины $A(1;4);B(-2;3);C(5;8)$ треугольника. Найти:

1) длину стороны $AC$;

2) внутренний угол $A$ в градусах с точностью до 0,01 градуса;

3) уравнение высоты, проведенной через вершину $B$;

4) уравнение медианы, проведенной через вершину $B$;

5) длину высоты, проведенной через вершину $B$;

6) выполнить чертеж.

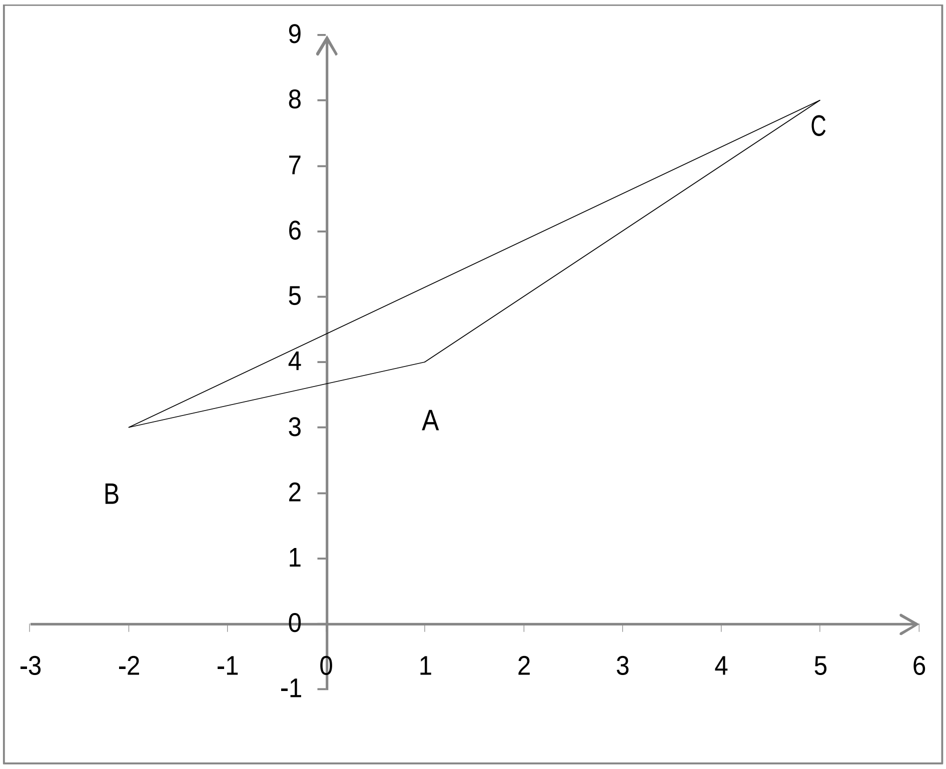
Решение.

1) Найдем длину стороны $AC$ по формуле нахождения длины отрезка.

$|AC|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, то есть

$$|AC|=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(5-1)^2+(8-4)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$$

2) Выполним чертеж




Внутренний $A$ найдем как угол между прямыми $AB$ и $AC$ по формуле

$$tg\ \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

Тогда

$$tg\ A = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}}$$

Угловые коэффициенты прямых найдем по формуле $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-4}{-2-1} = \frac{1}{3}$$

$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{8-4}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$$

$$tg\ A = \frac{1/3 - 1}{1 + 1 \cdot 1/3} = \frac{-2/3}{4/3} = -\frac{1}{2}$$

$$A = arctg\left(-\frac{1}{2}\right) = 153{,}43°$$

3) Найдем уравнение высоты, проведенной через вершину B, используя уравнение прямой, проходящей через одну заданную точку.

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$$

$$y - y_B = k_{BD} \cdot (x - x_B)$$

Угловой коэффициент высоты BD найдем, используя условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

Так как $BD \perp AC$, то $k_{BD} \cdot k_{AC} = -1$.

$$k_{BD} = \frac{-1}{k_{AC}} = \frac{-1}{1} = -1$$

Подставляем полученное в уравнение:

$$y - 3 = -1 \cdot (x + 2)$$

$$y - 3 = -x - 2$$

$x + y - 1 = 0$ – уравнение высоты BD

4) Найдем уравнение медианы BE. Так как точка E является серединой отрезка AC, то найдем ее координаты по формулам

$$x_E = \frac{x_A + x_C}{2}; \quad y_E = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$x_E = \frac{1 + 5}{2} = 3; \quad y_E = \frac{4 + 8}{2} = 6 \Rightarrow E(3; 6)$$

Для нахождения уравнения медианы воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки, вида

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x - x_B}{x_E - x_B} = \frac{y - y_B}{y_E - y_B}$$

$$\frac{x + 2}{3 + 2} = \frac{y - 3}{6 - 3}$$

$$\frac{x + 2}{5} = \frac{y - 3}{3}$$

$$3 \cdot (x + 2) = 5 \cdot (y - 3)$$

$$3x + 6 = 5y - 15$$

$3x - 5y + 21 = 0$– уравнение медианы BE

5) Найдем длину высоты BD, как расстояние от точки B до прямой AC по формуле:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

где A, B, C – коэффициенты уравнения прямой AC, а $x_1 = x_B = -2$, $y_1 = y_B = 3$

Найдем уравнение прямой AC

$$\frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A}$$

$$\frac{x - 1}{5 - 1} = \frac{y - 4}{8 - 4}$$

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 4}{4}$$

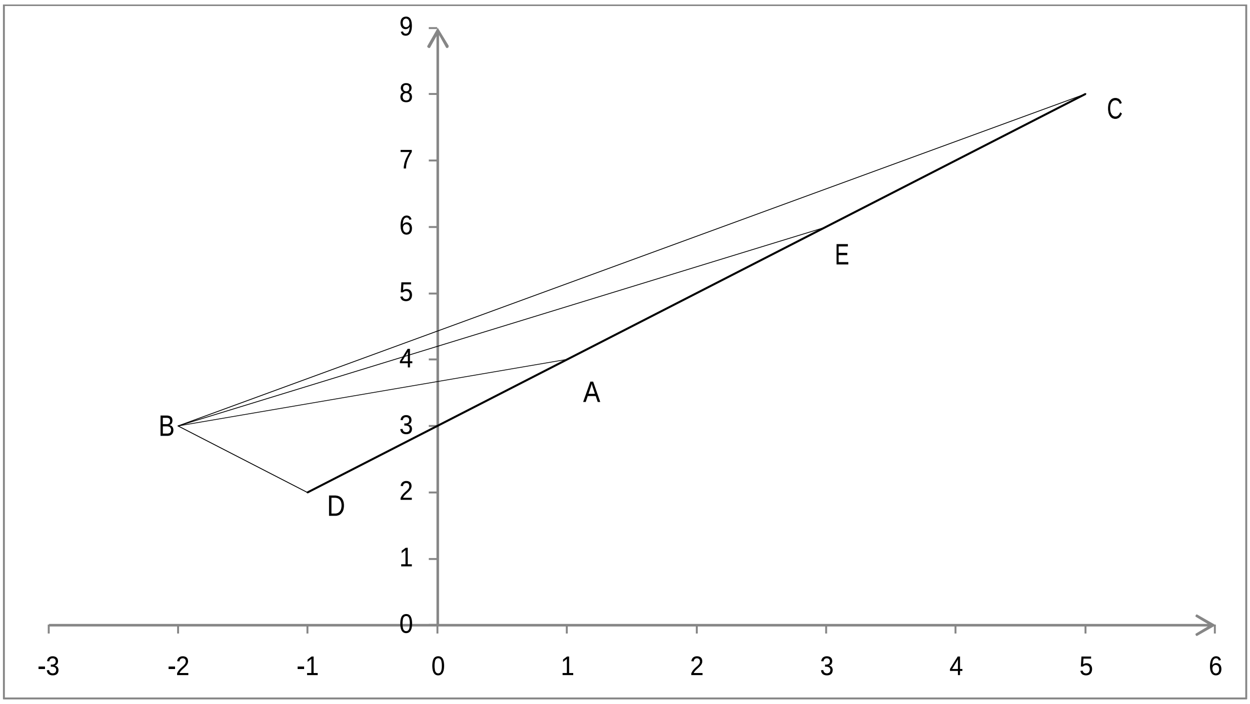
$$x - 1 = y - 4$$

$x - y + 3 = 0$ –уравнение стороны AC

Тогда $A = 1, B = -1, C = 3$.

$$|BD| = \frac{|1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

6) Выполним чертеж



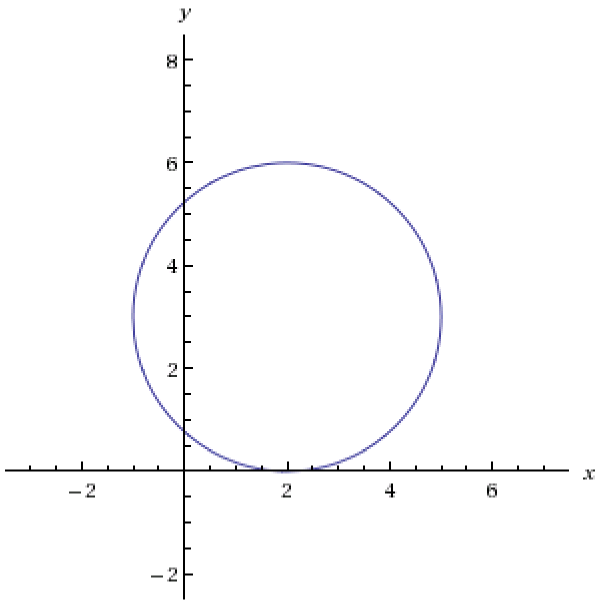

Задание №6.

Построить линии по заданным уравнениям. Определить название каждой линии и вычислить их параметры: координаты фокусов, эксцентриситет и др. Изобразить, где нужно, асимптоты и директрису.

$(x-2)^2+(y-3)^2=9$ ; $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{16}=1$; $y^2=-4x$; $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; $\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=1$

Решение.

1) Уравнение $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ определяет на плоскости окружность с центром в точке $A(2;3)$ и радиусом $R=3$, так как уравнение окружности в общем виде имеет вид:
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, где $(x_0;y_0)$– координаты центра окружности и $R$– радиус окружности




2) Уравнение $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{16}=1$ определяет гиперболу.

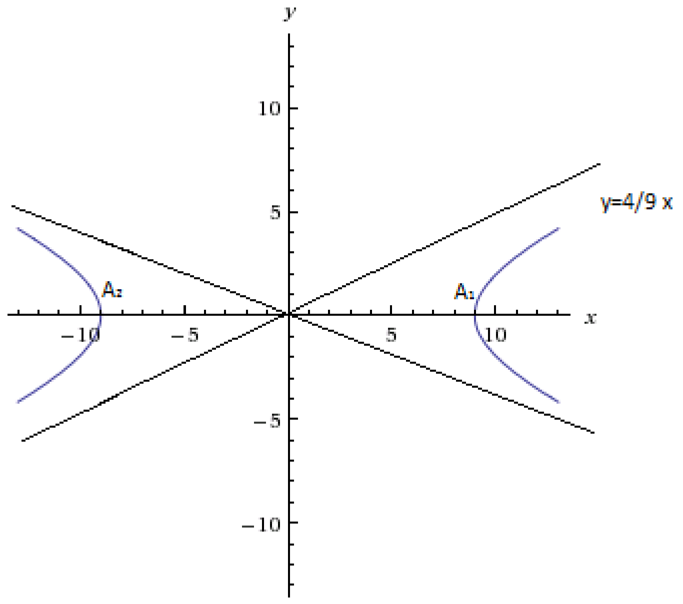
Каноническое уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Следовательно,

$a^2=81$, $a=9$ и $b^2=16$, $b=4$.

Вершины гиперболы располагаются в точках $A_1(a;0)=(9;0)$и $A_2(-a;0)=(-9;0)$.

Фокусы располагаются в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, где $c^2=a^2+b^2$. Следовательно, $c^2=81+16=97$, $c=\sqrt{97}\approx 9{,}85$, а фокусы в точках $F_1(\sqrt{97};0)$ и $F_2(-\sqrt{97};0)$.

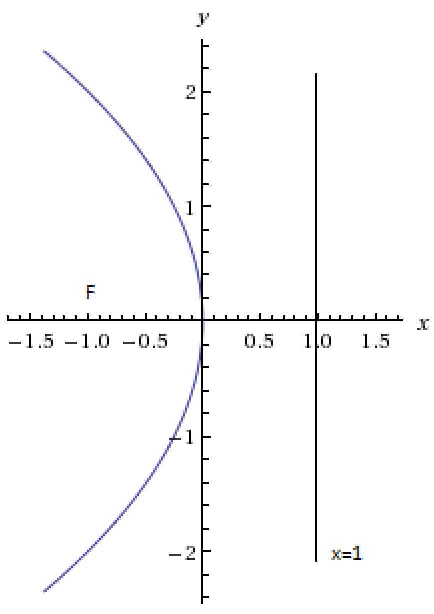
Эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{97}}{9}$=1,09. Асимптотами гиперболы являются две прямые определяемые уравнениями $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$, то есть $y=\frac{4}{9}x$, $y=-\frac{4}{9}x$




3) Графиком функции $y^2 = -4x$ является парабола, ветви которой направлены влево.

Так как каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$, где $p$ – параметр параболы, то параметр заданной параболы равен $p = -2$. Фокус параболы располагается в точке $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) = (-1; 0)$.

Уравнение директрисы имеет вид: $x = -\frac{p}{2}$; $x = 1$. Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.



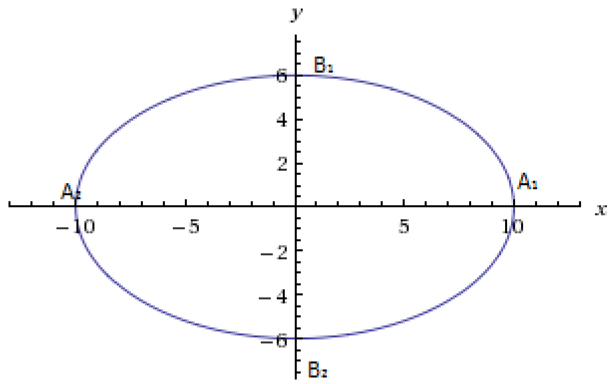

4) Графиком функции $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ является эллипс.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Следовательно,

$a^2 = 100$, $a = 10$ и $b^2 = 36$, $b = 6$. Вершины эллипса располагаются в точках $A_1(a; 0) = (10; 0)$и $A_2(-a; 0) = (-10; 0)$;. $B_1(b; 0) = (6; 0)$и $B_2(-a; 0) = (-6; 0)$

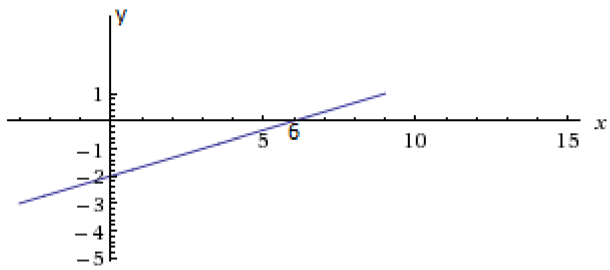
Фокусы располагаются в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, где $c^2 = a^2 - b^2$. Следовательно, $c^2 = 100 - 36 = 64$, $c = \sqrt{64} = 8$, а фокусы в точках $F_1(8;0)$ и $F_2(-8;0)$.

Эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{8}{10}$=0,8.




5) Уравнение прямой в отрезках имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Тогда уравнение

$\frac{x}{6} - \frac{y}{2} = 1$ определяет прямую, где $a = 6$, $b = -2$. Прямая пересекает оси координат в точках $A(6;0), B(0;-2)$.




Задание №7.

Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;-3;4)$; $M_2(0;-2;-1)$; $M_3(1;1;-1)$.

## Решение.

Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2), M_3(x_3;y_3;z_3)$, вида:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Подставляя координаты заданных точек, получим:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-4 \\ 0-1 & -2+3 & -1-4 \\ 1-1 & 1+3 & -1-4 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-4 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-5\cdot(x-1) - 4\cdot(z-4) + 0\cdot(y+3) - 0\cdot(z-4) + 20\cdot(x-1) - 5\cdot(y+3) = 0;$$

$$-5x + 5 - 4z + 16 + 20x - 20 - 5y - 15 = 0;$$

$15x - 5y - 4z - 14 = 0$

Ответ: $15x - 5y - 4z - 14 = 0$

## Задание №8

Даны координаты вершин пирамиды ABCD.

$$A(5;1;-4); B(1;2;-1); C(3;3;-4); D(2;2;2)$$

Требуется:

1. записать векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов;
2. найти угол между векторами $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$,
3. найти проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$;
4. вычислить площадь грани ABC;
5. найти объем пирамиды ABCD.

Решение.

1. Найдем координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (1-5; 2-1; -1+4) = (-4;1;3)$$

$$\overline{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (3-5; 3-1; -4+4) = (-2;2;0)$$

$$\overline{AD} = (x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A) = (2-5; 2-1; 2+4) = (-3;1;6)$$

Запишем данные векторы в системе орт и найдем их модули:

$$\overline{AB} = -4\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k};\ |\overline{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$$

$$\overline{AC} = -2\bar{i} + 2\bar{j};\ |\overline{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AD} = -3\bar{i} + \bar{j} + 6\bar{k};\ |\overline{AD}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{9+1+36} = \sqrt{46}$$

2. Найдем угол между векторами $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$ по формуле:

$$cos\alpha = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|}$$

Скалярное произведение векторов $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = (-4)\cdot(-2) + 1\cdot 2 + 3\cdot 0 = 8 + 2 = 10.$

Тогда

$$cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{26}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$$

$$\alpha = arccos\left(\frac{5\sqrt{13}}{26}\right) \approx arccos(0{,}69) \approx 46{,}1°$$

3. Найдем проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$, используя формулу

$$\text{Пр}_{\overline{AB}}\overline{AD} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|\overline{AB}|}$$

$$\text{Пр}_{\overline{AB}}\overline{AD} = \frac{(-4)\cdot(-3) + 1\cdot 1 + 3\cdot 6}{\sqrt{26}} = \frac{12 + 1 + 18}{\sqrt{26}} = \frac{31}{\sqrt{26}} \approx 6{,}08$$

4. Вычислим площадь грани ABC.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$$

Зная координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, найдем векторное произведение векторов $\overline{AB}\times\overline{AC}$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \bar{\imath}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \bar{\jmath}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{\imath}\cdot(0-6) - \bar{\jmath}\cdot(0+6) + \bar{k}\cdot(-8+2) = -6\bar{\imath} - 6\bar{\jmath} - 6\bar{k}$$

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}(\text{кв. ед.})$

5. Найдем объем пирамиды ABCD по формуле:

$$V_{ABCD} = \pm\frac{1}{6}(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD})$$

Зная координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, найдем смешанное произведение векторов

$$(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}) = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -48 - 6 + 0 + 18 - 0 + 12 = -24$$

Тогда $V_{ABCD} = \pm\frac{1}{6}(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}) == \pm\frac{1}{6}\cdot(-24) = 4(\text{куб. ед.})$

## СПИСОК ВОПРОСОВ СЕССИОННОГО КОНТОЛЯ

1. Определители второго и третьего порядка, их основные свойства. Миноры и алгебраические дополнения.
2. Понятие определителя n-го порядка.
3. Применение определителей к решению систем линейных уравнений. Правило Крамера.
4. Матрицы, действия над матрицами. Понятие ранга матрицы. Понятие ранга матрицы. Обратные матрицы. Решение матричных уравнений.
5. Исследование решения систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
6. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
7. Алгебраические структуры. Векторное пространство. Ранг системы векторов. Базис векторного пространства. Линейная зависимость векторов. Линейное пространство и его базис.
8. Метод координат на плоскости. Прямоугольная декартова система координат. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости.
9. Полярная система координат. Построение кривых в полярной системе координат.
10. Линии и их уравнения. Прямая линия, ее уравнение с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой, его исследование. Параметрическое уравнение прямой.
11. Уравнение прямой, проходящей через две точки плоскости. Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку. Определение угла между двумя прямыми. Условие параллельности и условие перпендикулярности двух прямых.
12. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, парабола, гипербола. Вывод канонических уравнений этих кривых. Общее уравнение линий второго порядка и его преобразование к каноническому виду.
13. Декартова прямоугольная система координат в пространстве. Элементы векторной алгебры: векторы и скаляры. Линейные операции над векторами. Координаты вектора в пространстве.
14. Произведения векторов: скалярное, векторное, смешанное, их свойства и приложение к решению геометрических задач.
15. Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве. Основные положения теории проекций в пространстве.
16. Плоскость, нормальное и общее уравнения плоскости. Исследование общего уравнения плоскости.
17. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку; проходящей через три точки. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями, условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.
18. Прямая линия в пространстве, ее канонические и параметрические уравнения. Прямая линия как пересечение двух плоскостей. Угол между прямыми, условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.
19. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи на сочетание прямой и плоскости.
20. Поверхности второго порядка, их уравнения и изображение на чертеже.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Часть 1 и 5.–Харьков: Выща школа, 1973
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971.
3. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. – М.: Просвещение, 1989.
4. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970.
5. Маркушевич А.И., Сикорский К.П., Черкасов Р.С. Алгебра и элементарные функции. – М.: Наука, 1968.
6. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1963.
7. Окунев А.Я. Высшая алгебра. – М.: Просвещение, 1966.
8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1964.
9. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984.
10. Фадеев Д.К., Соломинский И.С. Алгебра. – М.: Наука, 1964.
11. Фадеев Д.К., Соломинский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1968.


**Дополнительная литература**


12. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Наука, 1997.
13. Завало С.Т. Практикум по решению задач. – Киев: Вища школа, 1971.
14. Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.И. Алгебра и теория чисел. – Киев: Вища школа, 1971.
15. Кручкрвич Т.И. Сборник задач по курсу высшей математики. – М: Высшая школа, 1973.
16. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989.
17. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1967.

# Оглавление