ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г. ШЕВЧЕНКО

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра ОФ и МПФ

Методические рекомендации по разделу «электричество и магнетизм» курса физики для студентов инженерных специальностей физико-математического факультета, для подготовки к промежуточному и итоговому тестированию

Тирасполь, 2012

УДК
ББК

Составители: Брусенская Е.И., Хамидуллин Р.А., Ляхомская К.Д.

Рецензенты:
Константинов Н.А., доцент кафедры ОФ и МПФ
Соковнич С.М., доцент кафедры теоретической физики

Методические рекомендации по разделу «электричество и магнетизм» курса физики для студентов инженерных специальностей физико – математического факультета для подготовки к промежуточному и итоговому тестированию. Брусенская Е.И., Хамидуллин Р.А., Ляхомская К.Д, г. Тирасполь, ПГУ им. Т.Г. Шевченко, 2012г.- 69с. (электронный вариант)

В пособии изложены основные положения, законы и выводы, а также приведены основные соотношения по каждой изучаемой теме раздела «электричество и магнетизм». Кроме того, после приведенного справочного материала по соответствующей теме даны варианты тестов промежуточного контроля и примеры практических заданий к нему. В конце пособия приведены тесты итогового контроля по соответствующему разделу физики и примеры контрольных работ с ответами. Данное пособие должно помочь студентам в подготовке к соответствующим формам контроля и является тем минимумом в рамках раздела «электричество и магнетизм», который необходим для сдачи экзамена по физике.

Данное пособие рекомендуется студентам инженерных специальностей физико–математического факультета.

УДК
ББК

Утверждено Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Содержание

Введение…………………………………………………………………………...3
Электростатика в вакууме……………………………………………………...6
Электрическое поле в веществе……………………………………………….14
Постоянный электрический ток………………………………………………22
Магнитостатика в вакууме…………………………………………….................28
Магнитное поле в веществе……………………………………………………35
Электромагнитная индукция и уравнения Максвелла………………………41
Движение заряженных частиц в электромагнитных полях.
Классическая теория электропроводности……………………………………..47
Электрические колебания. Переменный ток…………………………………..54
Варианты тестов итогового контроля по разделу:
электричество и магнетизм……………………………………………………61
Примеры контрольных работ с ответами по разделу:
электричество и магнетизм……………………………………………………62
Приложение 1……………………………………………………………………64
Приложение 2……………………………………………………………………66
Приложение 3……………………………………………………………………67
Литература………………………………………………………………………..69

Введение

Данное методическое пособие посвящено одному из разделов курса общей физики – **разделу: «электричество и магнетизм»**. Многие выводы и законы, полученные в рамках этого раздела сыграли в свое время огромную роль в развитии таких областей науки и техники как: электротехника, радиоэлектроника, ускорительная техника, проводные системы передачи информации и связи и.т.д.

Как известно все многообразие взаимодействий между объектами в природе можно свести **к четырем фундаментальным взаимодействиям** в физике: гравитационному, электромагнитному, слабому и сильному. Эти взаимодействия проявляются в различных пространственных масштабах и характеризуются определенной интенсивностью. Из всех перечисленных взаимодействий в основном только **электромагнитные** проявляются в пространственных масштабах, характеризующих нашу повседневную жизнь. Практически все известные силы, приводящие к тем или иным физическим явлениям в нашей повседневной жизни, за исключением сил тяготения, являются **электромагнитными** (так электромагнитную природу имеют, известные из механики, сила упругости, сила трения и т.д.).

Описание электромагнитного взаимодействия в рамках классической физики строится на **полевой модели взаимодействия**. С точки зрения этой модели взаимодействие между объектами осуществляется с помощью посредника – **поля** и передается не мгновенно, а с конечной скоростью (в теории электромагнитных полей эта скорость в основном соизмерима со скоростью света) за конечный промежуток времени. Поэтому главными объектами изучения раздела «Электричество и магнетизм» являются **электрические и магнитные поля**. Как известно в отличие от других объектов классической физики они недоступны для непосредственного наблюдения. Однако об их существовании мы можем судить по их влиянию на определенные объекты.

Так, например, электрические поля способны ускорять (или замедлять) и отклонять заряженные частицы (объекты), в то время как на нейтральные частицы они не оказывают никакого воздействия. Кроме того, переменные электрические поля способны порождать магнитные. Магнитные поля, как правило, можно обнаружить по их способности намагничивать вещество. Помимо этого, переменные магнитные поля способны порождать вихревые электрические поля (в этом и состоит суть явления электромагнитной индукции).

Существование электричества впервые обнаружил в своих опытах древнегреческий философ Фалес Милетский. Он заметил, что, если кусок янтаря потереть о шелк или мех, янтарь обретает способность притягивать мелкие предметы. В средние века открытое Фалесом странное явление тщательно изучал придворный медик английской королевы Елизаветы I Уильям Гильберт, который обнаружил, что способность электризоваться присуща и многим другим веществам. Дальнейшие исследования, проведенные в Англии и других странах Европы, показали, что некоторые вещества ведут себя как изоляторы. Французский ученый Шарль Дюфе установил, что существуют две разновидности электрических зарядов; теперь мы называем их положительными и отрицательными.

В XVIII—XIX вв. природа электричества частично прояснилась после экспериментов Бенджамина Франклина и Майкла Фарадея. Выяснилось, что электрические заряды одного знака отталкиваются, а заряды противоположных знаков притягиваются, и в том и другом случае электрические силы ослабевают с расстоянием в соответствии с законом “обратных квадратов”, который Ньютон вывел ранее для гравитации. Но по величине электрические силы намного превосходят гравитационные. В отличие от слабого гравитационного взаимодействия, наличие которого Кавендишу удалось продемонстрировать только с помощью специального прибора, электрические силы, действующие между телами обычных размеров, можно легко наблюдать.

Работы Фарадея навели на мысль, что электричество скрыто в атоме, но существование электрона было твердо установлено только в 90-е годы 19-го века после того, как Дж. Дж. Томсон открыл “катодные лучи”. Ныне известно, что электрический заряд любой частицы вещества всегда кратен фундаментальной единице заряда — заряду электрона. Однако не все материальные частицы являются носителями электрического заряда (фотон, нейтрино). В этом отношении возникает отличие электромагнитного взаимодействия от гравитационного: все материальные частицы создают гравитационное поле, тогда как с электромагнитным полем связаны только заряженные частицы.

Как и электричество, магнетизм в природе обнаружили древние греки. Примерно к 600 г. до н. э. им были известны свойства магнитного железняка (оксида железа); как обнаружилось, его куски могут действовать друг на друга на расстоянии. Примерно через 500 лет китайцы открыли поразительную способность магнитного железняка определенным образом ориентироваться в пространстве и создали первый примитивный компас.

К концу XVI в. европейские ученые начали постигать истинную природу магнетизма. Гильберт доказал, что Земля ведет себя как большой магнит, свойства которого весьма напоминают свойства построенной им модели — шара из магнитного железняка. Было установлено, что существуют две разновидности магнетизма, которые в соответствии с магнетизмом Земли получили название северного и южного полюсов.

Как и электрические заряды, одноименные магнитные полюса отталкиваются, а разноименные — притягиваются. Однако в отличие от электрических зарядов магнитные полюса встречаются не по отдельности, а только парами — северный полюс и южный полюс. В обычном магните, имеющем форму стержня (прямоугольного параллелепипеда), один конец действует как северный полюс, а другой — как южный. Если стержень разрезать пополам, то на месте разреза возникнут новые полюса, т. е. получатся два новых магнита, каждый из которых имеет и северный, и южный полюса. Все попытки получить таким способом изолированный магнитный полюс — монополь — заканчивались неудачей.

Взаимодействие магнитных полюсов подчиняется закону обратных квадратов, что соответствует особенностям электрического и гравитационного взаимодействия. Следовательно, электрическая и магнитная силы “дальнодействующие”, и их действие ощутимо на больших расстояниях от источника. Например, магнитное поле Земли простирается далеко в космическое пространство. Солнце также порождает магнитное поле, которое заполняет всю Солнечную систему. Существует даже галактическое магнитное поле.

Вначале XIX в. выяснилось, что между электричеством и магнетизмом существует глубокая связь. Датский физик Ханс Кристиан Эрстед открыл, что электрический ток создает вокруг себя магнитное поле, тогда как Майкл Фарадей показал, что переменное магнитное поле индуцирует в проводнике электрический ток. Эти открытия легли в основу работы динамо-машины и электрогенератора, которые и ныне играют важную роль в технике.

Основываясь на этих фактах, в 1860-1865 годах Максвелл разработал единую **теорию электромагнетизма**. Эта теория объяснила все известные в то время экспериментальные факты и предсказала ряд новых явлений, выявленных на практике впоследствии. Например, порождение переменным электрическим полем, магнитного поля.

Важным выводом этой теории стал вывод о существовании **электромагнитных волн**, способных распространяться в различных средах со скоростями, соизмеримыми со скоростью света, но не превышающими её. Теоретическое исследование этих волн привело Максвелла к созданию электромагнитной теории света.

Теория электромагнетизма построена на системе уравнений Максвелла, которые при наличии начальных и граничных условий дают исчерпывающее описание как состояния электромагнитного поля в некоторый момент времени, так и его дальнейшую эволюцию. Таким образом, система уравнений Максвелла играет такую же роль в электромагнетизме как законы Ньютона в механике или как термодинамические начала в молекулярной физике.

Следует подчеркнуть общефилософское и мировоззренческое значение электромагнитной теории. В рамках электромагнитных явлений отчетливо проявляются особенности полевой теории существования материи, на примере электрических и магнитных полей хорошо прослеживается взаимопревращение ее различных форм и как следствие взаимопревращение характеризующих их различных форм энергии.

Электростатика в вакууме
Справочный материал к тестированию по теме

Электростатика – раздел, изучающий взаимодействие неподвижных электрических зарядов и их систем, а также постоянных полей, ими создаваемых.

Основные характеристики электрического поля: напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ.

Напряженность – силовая характеристика, а **потенциал** – энергетическая характеристика электрического поля.

Электрическое поле в пространстве или на плоскости изображается с помощью **силовых линий**, которые начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Эти силовые линии таковы, что касательными к ним являются **вектора напряженности электрического поля** $\vec{E}$. Причем **густота силовых линий** определяет значение величины напряженности электрического поля $\vec{E}$ в соответствующей области пространства. Силовые линии электрического поля могут быть как замкнутыми, так и не замкнутыми. **Отсутствие замкнутости** говорит о том, что в природе существуют **разделенные положительные и отрицательные электрические заряды.**

Число векторов напряженности электрического поля (силовых линий), пронизывающих некоторую поверхность называют **потоком напряженности** электрического поля.

Кроме силовых линий для изображения электрических полей используют **эквипотенциальные поверхности** $\varphi = const$. Они представляют собой линии или поверхности равного потенциала φ (потенциал во всех точках среды, через которые проходит эквипотенциальная поверхность, одинаков).

Силовые линии и эквипотенциальные поверхности **перпендикулярны друг другу**, причем вектора $\vec{E}$ **направлены в сторону убывания потенциала** эквипотенциальных поверхностей.

Система двух зарядов равных по модулю и противоположных по знаку, находящихся на постоянном расстоянии l, которое называют осью или плечом диполя, называют электрическим диполем. Основной характеристикой диполя является дипольный момент $\vec{d}$ (или иначе момент электрического диполя). Он направлен также как и ось диполя от отрицательного заряда к положительному.

Основные соотношения:

Закон Кулона (сила, отвечающая взаимодействию двух точечных зарядов в вакууме):

в векторной форме:

$$\vec{F} = \frac{qq_0\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

в скалярной форме:

$$F = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Определение напряженности (локальная формулировка):

в векторной форме:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

в скалярной форме:

$$E = \frac{F}{q_0},$$

где q_0 - пробный положительный заряд.

Напряженность точечного заряда (нелокальная формулировка):

в векторной форме: в скалярной форме:

$$\vec{E} = \frac{q \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Принцип суперпозиции напряженностей электрического поля в точке P, созданных системой N точечных зарядов (i – номер точечного заряда в системе)**:**

$$\vec{E}_P = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

Определение потенциала: $\varphi = \dfrac{W}{q_0}$

где W – энергия взаимодействия двух точечных зарядов. Для одноименных зарядов она положительна, а для разноименных – отрицательна.

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов:

$$W = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Потенциал точечного заряда: $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Потенциал положительного заряда всегда положителен, а отрицательного – отрицателен.

Принцип суперпозиции для потенциала электрического поля в точке P, созданных системой N точечных зарядов (i – номер точечного заряда в системе)**:**

$$\varphi_P = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i$$

Работа электростатического поля над пробным зарядом q_0:

$$A = W_1 - W_2 = q_0 (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Связь между силовой характеристикой электрического поля **и** его **энергетической характеристикой**:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi\,;$$

$$\nabla = \vec{i}\,\tfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\tfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\tfrac{\partial}{\partial z}$$

Объемная плотность заряда:

$\rho = \dfrac{dq}{dV}$ - в случае непрерывного, но неравномерного распределения заряда.

$\rho = \dfrac{q}{V}$ - в случае непрерывного и равномерного распределения заряда

Поверхностная плотность заряда:

$\sigma = \dfrac{dq}{dS}$ - в случае непрерывного, но неравномерного распределения заряда.

$\sigma = \dfrac{q}{S}$ - в случае непрерывного и равномерного распределения заряда

Линейная плотность заряда:

$\tau = \dfrac{dq}{dl}$ - в случае непрерывного, но неравномерного распределения заряда.

$\tau = \dfrac{q}{l}$ - в случае непрерывного и равномерного распределения заряда

Поток векторов напряженности электрического поля:

$N = \left(\vec{E}, \vec{S}\right)$ - в случае однородного по поверхности поля.

$N = \int \left(\vec{E}, d\vec{S}\right)$ - в случае неоднородного поля.

Теорема Гаусса для характеристик электрического поля:

интегральная форма:

$$N = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

дифференциальная форма:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

где Q - полный заряд системы точечных зарядов.

Связь между потенциалом и объемной плотностью заряда (формула Пуассона):

$$div(grad\varphi) = \left(\nabla, \nabla\right)\varphi = \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа

Напряженности электрических полей, создаваемые простейшими системами зарядов и найденные с использованием теоремы Гаусса:

1. **равномерно заряженная бесконечная нить:**

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

2. **равномерно заряженная бесконечная плоскость:**

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

3. **равномерно заряженный шар:**

вне шара ($r \rangle R$):

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

внутри шара ($r \langle R$):

$$E = \frac{Q \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

где Q - электрический заряд шара

Момент электрического диполя (связанного заряда):

$$\vec{d} = q\vec{l}$$

Потенциал поля диполя при ($r \rangle\rangle l$):

$$\varphi = \frac{\left(\vec{d}, \vec{r}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Напряженность поля диполя при ($r \rangle\rangle l$):

$$E = \frac{d}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + \cos^2\theta}$$

где θ - угол между осью диполя $\vec{l}$ и радиус вектором $\vec{r}$, проведенным из середины диполя в точку, где следует определить напряженность электрического поля.

Момент сил, действующий на диполь во внешнем электрическом поле:

$$\vec{M} = \left[\vec{d}, \vec{E}\right]$$

Потенциальная энергия диполя во внешнем электрическом поле:

$$W_d = -\left(\vec{d}, \vec{E}\right)$$

Ротор электростатического поля:

$$rot\vec{E} = 0$$

Равенство нулю ротора вектора напряженности, говорит о том, что электростатическое поле является безвихревым (потенциальным).

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ №1

1. Вектора напряженности электрического поля всегда направлены по отношению к силовым линиям по __________.
2. Напряженность электрического поля бесконечной равномерно заряженной нити можно рассчитать по соотношению: ___________.
3. Работа электростатических сил по замкнутой траектории равна: ______.
4. Поток вектора напряженности электрического поля в вакууме зависит только от величины _________.
5. Минимальная напряженность поля диполя возможна при условии, что ______.
6. Поверхностная плотность заряда при непрерывном и равномерном его распределении определяется соотношением: ______
7. Зависимость поля шара от расстояния, взятого от центра шара до любой его внутренней точки, является __________.
8. Силовые линии (вектора напряженности) электрического поля, созданного уединенным точечным зарядом, представляют собой ________.
9. Соотношение, соответствующее определению потенциала электрического поля, имеет вид: __________.
10. Потенциал поля диполя обращается в нуль вдоль линии ________.

ТЕСТ №2

1. Связь между силовой и энергетической характеристикой электрического поля определяется соотношением _________.
2. Локальная формулировка для напряженности электрического поля в векторной форме имеет вид _________.
3. Закон Кулона в векторной форме имеет вид __________.
4. Эквипотенциальные поверхности (линии) уединенного точечного заряда представляют __________.
5. Если дипольный момент сонаправлен с вектором напряженности внешнего электрического поля, то момент силы, действующей на диполь равен _____.
6. Соотношение $rot\vec{E} = 0$ указывает на то, что электростатическое поле является _________.
7. Силовые линии (вектора напряженности), созданные бесконечной, равномерно заряженной нитью представляют ____________.
8. Эквипотенциальные поверхности в плоском конденсаторе с бесконечными обкладками имеют вид ____________.

9. Теорема Гаусса в дифференциальной форме определяется соотношением _____.
10. Потенциал точечного заряда равен __________.

ТЕСТ№3

1. Сила взаимодействия двух точечных зарядов в скалярной форме имеет вид ___________.
2. Вектора напряженности электрического поля всегда направлены в сторону ___________ потенциала этого поля.
3. Теорема Гаусса в интегральной форме имеет вид __________.
4. Объемная плотность заряда в случае непрерывного и неравномерного его распределения определяется соотношением __________.
5. Какова зависимость напряженности электрического поля, созданной бесконечной равномерно заряженной плоскостью от расстояния?
6. При каком условии напряженность поля электрического диполя будет максимальной?
7. Чему равна потенциальная энергия диполя в случае, когда напряженность внешнего поля перпендикулярна плечу диполя.
8. Связь между потенциалом и линейной плотностью заряда имеет вид _____.
9. Совокупность точек в пространстве с одинаковым значением потенциала, созданного одним и тем же источником (зарядом), называют _________.
10. Напряженность электрического поля точечного заряда в векторной форме определяется соотношением ________.

ТЕСТ№4

1. Какой потенциал убывает с ростом расстояния быстрее: уединенного точечного заряда (1), электрического диполя (2)?
2. Принцип суперпозиции для потенциала имеет вид __________.
3. Число векторов напряженности электрического поля (силовых линий), пронизывающих некоторую поверхность называют __________.
4. Дипольный момент определяется соотношением ___________.
5. Вектора напряженности (силовые линии) являются нормальными по отношению к _________.
6. Момент сил, действующих на диполь во внешнем электрическом поле, будет максимальным в случае, когда __________.
7. Уравнение $div\vec{E} = 0$ означает, что в заданной области пространства ______.
8. Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов определяется соотношением _________.
9. Работа электростатических сил над пробным положительным зарядом зависит от _____________.
10. Напряженность точечного заряда в скалярной форме имеет вид ________.

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1 Потенциал электрического поля в декартовой системе координат определяется соотношением $\varphi = (x^2 + 3y^2 - z^2)\alpha$, где α - константа. Найти значение напряженности данного поля и ее направление в пространстве, проекцию напряженности в точке $N(1,2,-1)$ на направление вектора $\vec{r}_0 = -3\vec{k}$ и распределение объемного заряда как функцию $\rho = \rho(x, y, z)$.

Решение:

Для нахождения вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ и его модульного значения используем формулу, устанавливающую связь между силовой характеристикой этого поля и его энергетической характеристикой и координатное представление для соответствующих векторов.

Связь между силовой характеристикой электрического поля и его энергетической характеристикой имеет вид:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi \qquad (1)$$

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \qquad (2),$$

а вектор $\vec{E}$ в координатном представлении:

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) получаем:

$$\vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z = -\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (4)$$

Сравнивая компоненты при одинаковых орт векторах, получаем:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (5)$$

При заданном потенциале $\varphi = (x^2 + 3y^2 - z^2)\alpha$, имеем следующие компоненты:

$$E_x = -2x\alpha; \quad E_y = -6y\alpha; \quad E_z = -2z\alpha \qquad (6).$$

Используя (3) находим векторное представление для напряженности $\vec{E}$.

$$\vec{E} = (-2\vec{i}x - 6\vec{j}y + 2\vec{k}z)\cdot\alpha \qquad (7)$$

Модульное значение можно определить по формуле:

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \qquad (8)$$

Для нашей задачи получаем:

$$\left|\vec{E}\right| = \alpha\sqrt{4x^2 + 36y^2 + 4z^2} \qquad (9)$$

Для того чтобы найти проекцию вектора в определенной точке на некоторое направление, необходимо найти значение напряженности в соответствующей точке и умножить полученное значение напряженности на косинус угла между направлением и вектором $\vec{E}$.

Подставляя координаты точки $N(1,2,-1)$ в (7) и (9) находим:

$$\vec{E}(N) = -(2\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k})\cdot\alpha \qquad (10)$$

$$\left|\vec{E}(N)\right| = \alpha\sqrt{4 + 144 + 4} = \alpha\sqrt{152}$$

Проекция $\vec{E}(N)$ на направление $\vec{r}_0 = -3\vec{k}$ в общем случае определяется соотношением:

$$E(N)_{r_0} = \left|\vec{E}(N)\right|\cos(\vec{E}(N), \vec{r}_0) = \left|\vec{E}(N)\right|\frac{E_x^N x_0 + E_y^N y_0 + E_z^N z_0}{\left|\vec{E}(N)\right|\cdot\left|\vec{r}_0\right|} = \frac{E_x^N x_0 + E_y^N y_0 + E_z^N z_0}{\left|\vec{r}_0\right|}$$

Подставляя в это соотношение численное значение, получаем:

$$E(N)_{r_0} = \frac{-2\cdot 0 - 12\cdot 0 - 2\cdot(-3)}{3}\cdot\alpha = 2\alpha \text{ В/м} \qquad (11)$$

Распределение объемного заряда можно найти, используя дифференциальное уравнение Пуассона для вакуума, устанавливающее связь между объемной плотностью заряда и потенциалом:

$$div(grad\varphi) = (\nabla,\nabla)\varphi = \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (12)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (13)$$

Отсюда можно выразить объемную плотность:

$$\rho = -\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \qquad (14)$$

Подставляя φ и дифференцируя, получаем распределение объемной плотности заряда:

$$\rho = -\varepsilon_0(2+6-2)\cdot\alpha = -6\varepsilon_0\alpha \text{ Кл/м}^3 \qquad (15)$$

Из (15) видно, что плотность характеризует однородное распределение заряда.

Ответ: $\vec{E} = (-2\vec{i}x - 6\vec{j}y + 2\vec{k}z)\cdot\alpha$; $\left|\vec{E}\right| = \alpha\sqrt{4x^2 + 36y^2 + 4z^2}$;

$E(N)_{r_0} = \frac{-2\cdot 0 - 12\cdot 0 - 2\cdot(-3)}{3}\cdot\alpha = 2\alpha$ В/м; $\qquad \rho = -\varepsilon_0(2+6-2)\cdot\alpha = -6\varepsilon_0\alpha$ Кл/м^3.

Задание №2. Найти результирующий потенциал электрического поля в некоторой точке Р, созданные системой зарядов, состоящей из точечного заряда $q_0 = 9$ нКл и диполя с плечом $l = 2$ мм и модульным значением заряда $|q| = 1$ нКл. Точка Р находится на расстоянии $r = 50$ см от середины диполя, причем радиус – вектор $\vec{r}$ образует угол $\theta = 45^0$ с осью диполя, а заряд q_0 находится в вершине равнобедренного треугольника, основанием которого является ось диполя l на расстоянии $a = 5$ см.

Решение:

Построим рисунок согласно условию задачи.

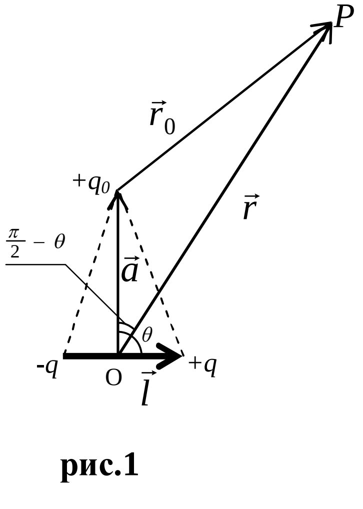


рис.1

Результирующий потенциал системы зарядов есть сумма потенциалов отдельных точечных зарядов в силу принципа суперпозиции. Учитывая, что два заряда системы образуют диполь и $l << r$ результирующий потенциал для этой задачи можно представить в виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{дип} \qquad (1)$$

В зависимости от положения отрицательного и положительного зарядов диполя возможны два случая. Случай, когда отрицательный заряд расположен ближе к точке Р, изображен на рисунке.

Это означает, что потенциал диполя – отрицательный и результирующий потенциал уменьшается. В другом случае, когда ближе к точке Р расположен положительный заряд, потенциал диполя положительный и результирующий потенциал увеличивается. Как известно, вклад потенциала диполя в результирующий потенциал намного меньше, чем вклад потенциала точечного заряда. Поэтому результирующий потенциал в обоих случаях будет положительным.

Потенциал точечного заряда q_0 в вакууме определяется соотношением:

$$\varphi_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \qquad (2)$$

где, как видно из рисунка, значение $\vec{r}_0$ можно определить по теореме косинусов:

$$r_0 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \qquad (3),$$

$\vec{d} = q\vec{l}$ - дипольный момент (он направлен всегда от отрицательного заряда диполя к положительному); $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

Подставляя (3) в (2) получаем:

$$\varphi_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta}} \qquad (4).$$

Потенциал диполя определяется соотношением:

$$\varphi_{дип} = \frac{\left(\vec{d}, \vec{r}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{d\cos(\vec{d}, \vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (5)$$

Далее рассмотрим случай, когда отрицательный заряд расположен ближе к точке P. Тогда $\cos(\vec{d}, \vec{r}) = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ в соответствии с рисунком и (5) формула для потенциала диполя принимает вид:

$$\varphi_{дип} = -\frac{d\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (6)$$

Результирующий потенциал (1) в этом случае с учетом (6) и (4) определяется выражением:

$$\varphi_1 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta}} - \frac{d\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (7)$$

В случае, когда к точке P ближе расположен положительный заряд $\cos(\vec{d}, \vec{r}) = \cos\theta$. Соотношение (5) при этом принимает вид:

$$\varphi_{дип} = \frac{d\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (8)$$

Выражение для результирующего потенциала (1) с учетом (8) и (4)может быть представлено формулой:

$$\varphi_2 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta}} + \frac{d\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (9)$$

Подставляя численные значения параметров в соотношения (7) и (9), можно найти потенциалы для различного положения отрицательного и положительного зарядов диполя по отношению к точке P:

$\varphi_1 = 173{,}68 - 0{,}05 = 173{,}63$ В

$\varphi_2 = 173{,}68 + 0{,}05 = 173{,}72$ В

Расчет проводился в СИ. Как видно из полученных данных вклад диполя в результирующий потенциал действительно очень мал.

Ответ: $\varphi_1 = 173{,}63$ В, $\varphi_2 = 173{,}72$ В.

Электростатическое поле в веществе
Справочный материал к тестированию по теме

Все вещества по реакции на внешнее электрическое поле и способности проводить электрический ток делятся на **три группы**: проводники, диэлектрики и полупроводники.

Проводники отличаются тем, что проводят электрический ток при нормальных условиях, так как в них изначально уже **существуют свободные электрические заряды**. У проводников **первого рода**, к которым в основном относятся металлы, свободными зарядами являются электроны, а у проводников **второго рода -** электролитов - как электроны, так и свободные положительные и отрицательные ионы. Поле внутри проводников, благодаря явлению **электростатической индукции** всегда равно нулю. **Электростатической индукцией** называют явление полного разделения зарядов в проводнике, возникающий под действием внешнего поля, при котором весь заряд **равномерно распределяется по поверхности**. Поэтому поверхность является **эквипотенциальной** $\varphi = const$.

Основной характеристикой проводника является **электроемкость** C. Она определяется отношением заряда проводника к потенциалу на его поверхности. Это **отношение** всегда **постоянно** и зависит от **геометрии** проводника и **диэлектрических свойств** окружающего пространства. Электроемкость проводников можно увеличить, приблизив их, друг к другу. Полученное таким образом устройство называют **конденсатором**. **Конденсатор** служит для разделения и накопления электрических зарядов.

Диэлектрики, в отличие от проводников, не проводят электрический ток, так как у них отсутствуют свободные заряды. Однако у них либо изначально (полярные, ионные и сегнетоэлектрики), либо под действием внешнего электрического поля (неполярные) присутствуют **связанные заряды – диполи**, образованные из атомов, молекул или ионов. Поле в диэлектрике всегда меньше внешнего электростатического поля, так как гасится внутреннем полем, создаваемым связанными зарядами. Внутреннее поле связано с **поляризацией среды диэлектрика** во внешнем электрическом поле. **Поляризацией среды** называют процесс установления дипольных моментов по направлению внешнего поля. Поляризация среды характеризуется таким параметром как **поляризованность диэлектрика** $\vec{P}$, которая связана с напряженностью внешнего поля $\vec{E}$. Все диэлектрики делятся на:

полярные диэлектрики с ориентационной поляризацией;

неполярные диэлектрики с электронной поляризацией;

ионные диэлектрики с ионной поляризацией;

сегнетоэлектрики с остаточной поляризацией.

Первые три вида диэлектриков являются изотропными, а последний - анизотропным. Поэтому связь между поляризованностью среды и внешним электрическим полем для первых трех является линейной, а для последнего нелинейной.

Молекулы **полярных диэлектриков** (CO, HCl, HN и т.д.) состоят из атомов, центры тяжести положительных и отрицательных ионов которых смещены. Поэтому даже в отсутствие электрического поля они имеют отличные от нуля дипольные моменты. Однако эти моменты ориентированы хаотически, что означает равенство нулю поляризованности такого рода диэлектриков. При включении внешнего электрического поля все молекулы ориентируются по направлению его напряженности и поляризованность становиться отличной от нуля, то есть среда поляризуется. Такая поляризация называется **ориентационной**.

Неполярные молекулы (O_2, H_2, N_2 и т.д.) в отсутствии электрического поля не имеют дипольного момента, так как они симметричны и в них нет выделенных положительного и отрицательного центра. При включении внешнего электрического поля их электронные оболочки деформируются таким образом, что у соответствующих молекул появляются отличные от нуля дипольные моменты, ориентированные по полю и, следовательно, отличная от нуля поляризованность. Такой способ поляризации называется **электронным**.

Ионные диэлектрики (NaCl, KCl и т.д.) имеют ионную кристаллическую решетку, состоящую из двух встроенных решеток, в узлах которых находятся либо положительные, либо отрицательные ионы. В отсутствии электрического поля они расположены так, что электрические силы между соответствующими ионами скомпенсированы и поляризованность равна нулю. При внесении во внешнее электрическое поле, решетки, соответственно с положительными и отрицательными ионами, сдвигаются относительно друг друга по направлению поля. В результате дипольные моменты оказываются не скомпенсированными, и поляризованность становится отличной от нуля. Такая поляризация называется **ионной**.

При выключении внешнего электрического поля поляризующего полярные, неполярные и ионные диэлектрики из поляризованность обращается в нуль и вещество снова оказывается неполяризованным.

Сегнетоэлектрики (сегнетова соль, титанат бария, дигидрофосфат калия и т.д.) отличаются от остальных диэлектриков тем, что при выключении внешнего электрического поля в них обнаруживается **остаточная поляризованность**. Это необычное свойство связано с особенностью строения сегнетоэлектриков (они имеют доменную (домен – область кристалла со спонтанной поляризацией) структуру), приводящей к возникновению нелинейной зависимости между поляризованностью и напряженностью внешнего электрического поля. Эта зависимость описывается так называемой петлей гистерезиса. У сегнетоэлектриков относительная диэлектрическая проницаемость может достигать нескольких тысяч единиц. Сегнетоэлектрические свойства проявляются в определенном интервале температур, границы которого определяются точками Кюри. За пределами этого интервала вещество ведет себя как обычный диэлектрик.

Многие сегнетоэлектрики являются **пьезоэлектриками**. На поверхностях таких сегнетоэлектриков при однородной деформации (растяжения или сжатия) в определенных направлениях, называемых полярными осями пьезоэлектрика, возникают электрические заряды противоположных знаков. Знаки зарядов зависят от знака деформации. **Пьезоэффект** связан с анизотропией соответствующих веществ: их кристаллическая подрешетка положительных ионов, как правило, деформируется иначе, чем у отрицательных ионов. Всякий **пироэлектрик** является пьезоэлектриком, хотя обратное утверждение не является верным. **Пироэлектрики** обладают тем свойством, что при изменении температуры они могут определенным образом поляризоваться.

Полупроводники, если они **чистые** (без примесей), не проводят электрический ток при нормальных условиях, так как у них отсутствуют свободные заряды из-за наличия **сильной ковалентной связи**. Однако под действием света или при нагреве они могут перейти в проводящее состояние, обусловленное разрывом ковалентной связи и возникновением свободных зарядов – электронов и дырок. У **примесных проводников** уже изначально имеются свободные заряды – либо электроны, либо дырки в зависимости от типа проводимости, поэтому они могут проводить электрический ток даже при нормальных условиях.

При наличии границы раздела сред двух диэлектриков, **напряженность** электрического поля и связанный с ней **вектор электрического смещения**, в случае перехода от одной среды к другой **испытывают преломление**. При этом, благодаря **потенциальности** электрического поля, сохраняются **тангенциальные** компоненты **напряженности** электрического поля, и, **при отсутствии сторонних зарядов** на границе раздела сред, - **нормальные** компоненты **вектора электрического смещения**.

Основные соотношения:

Поляризуемость молекулы: $\beta = \dfrac{\vec{d}}{\varepsilon_0 \vec{E}}$

Определение поляризованности среды: $\vec{P} = \dfrac{\sum\limits_{\Delta V} \vec{d}}{\Delta V}$

Связь между поляризованностью и напряженностью внешнего электростатического поля: $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$,

где χ - диэлектрическая восприимчивость среды.

Объемная плотность связанных зарядов: $\rho' = -div\vec{P}$

Поверхностная плотность связанных зарядов: $\sigma' = P_n$,

где P_n - нормальная компонента поляризованности среды.

Определение для вектора электрического смещения: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Дивергенция $\vec{D}$ (теорема Гаусса в дифференциальной форме): $div\vec{D} = \rho$,

где ρ - объемная плотность сторонних зарядов.

Связь между напряженностью и вектором электрического смещения: $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$,

где ε - относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Связь между диэлектрической проницаемостью и восприимчивостью среды: $\varepsilon = 1 + \chi$

Вектор электрического смещения поля точечного заряда: $\vec{D} = \dfrac{q \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$

Связь между компонентами векторов электрического поля на границе раздела сред:
тангенциальные: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

нормальные (в отсутствии сторонних зарядов на поверхности): $D_{1n} = D_{2n}$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

Определение **электроемкости** проводника: $C = \dfrac{q}{\varphi}$

Электроемкости некоторых конденсаторов **с разной формой обкладок**:

плоский: $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$,

где S - площадь металлических обкладок, а d - расстояние между ними.

цилиндрический: $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln(R_1/R_2)}$,

где l - высота обкладки конденсатора, а R_1, R_2 - внутренний и внешний радиусы цилиндрических поверхностей.

шаровой: $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$,

где R_1, R_2 - внутренний и внешний радиусы шаровых поверхностей.

Соединения конденсаторов:

параллельное: $C = \sum\limits_{i=1}^{N} C_i$,

последовательное: $\dfrac{1}{C} = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{1}{C_i}$,

где N – число конденсаторов в соединении

Энергия системы электрических зарядов: $W = \frac{1}{2}\sum\limits_i q_i \varphi_i$

Энергия заряженного конденсатора: $W = \frac{1}{2} C U^2$

Плотность энергии электрического поля: $\omega = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. Для каких диэлектриков характерной является ориентационная поляризация?
2. Чему равно поле внутри проводника?
3. Объемная плотность связанного заряда определяется соотношением ____.
4. Электроемкость цилиндрического конденсатора определяется по формуле ___.
5. Какие компоненты напряженности электрического поля сохраняются при переходе через границу раздела сред?
6. Какая связь существует между плотностью энергии электрического поля и его напряженностью?
7. Зависит ли вектор электрического смещения от величины объемной плотности связанных зарядов?

8. Каков потенциал проводника на поверхности во внешнем электрическом поле?
9. Соотношение, с помощью которого определяется связь между напряженностью и вектором электрического смещения, имеет вид ______.
10. Какие полупроводники могут проводить ток при нормальных условиях?

ТЕСТ№2

1. В каких диэлектриках сохраняется остаточная поляризованность?
2. Что происходит с электрическим полем в диэлектрической среде?
3. По какой формуле можно рассчитать поверхностную плотность заряда среды?
4. Поляризуемость молекулы определяется соотношением ________.
5. Электроемкость шарового конденсатора равна ________.
6. Как связаны между собой нормальные компоненты напряженности электрического поля на границе раздела сред в отсутствие сторонних зарядов?
7. Энергия конденсатора может быть найдена по формуле ______.
8. Чему равна электроемкость при параллельном соединении конденсаторов?
9. Определение для вектора электрического смещения в векторной форме имеет вид __________.
10. Проводники проводят электрический ток в присутствии внешней разности потенциалов при наличии в них ______.

ТЕСТ№3

1. Есть ли свободные заряды у чистых проводников при нормальных условиях?
2. Поляризованность среды по определению имеет вид _______.
3. Электроемкость в случае последовательного соединения может быть найдена по формуле _________.
4. Электроемкость плоского конденсатора равна ________.
5. Основной функцией конденсатора является ________.
6. Связь между вектором напряженности и электрического смещения для изотропных сред является ________.
7. От чего зависит электроемкость проводника?
8. Для каких диэлектриков характерна электронная поляризация во внешнем электрическом поле?
9. Энергия системы электрических зарядов равна _______.
10. Какова связь между тангенциальными компонентами вектора электрического смещения на границе раздела сред?

ТЕСТ№4

1. Какой тип поляризации характерен для ионных диэлектриков?
2. Связь между поляризованностью и напряженностью внешнего поля имеет вид _______.
3. В отсутствии сторонних зарядов на границе раздела сред сохраняются нормальные компоненты ______.
4. К проводникам второго рода относятся ______.
5. Величина электрического смещения поля точечного заряда в скалярной форме определяется соотношением _______.
6. Как уменьшит электроемкость плоского конденсатора?
7. Как связаны между собой диэлектрическая восприимчивость и проницаемость среды.

8. Какие факторы могут перевести чистый полупроводник из непроводящего в проводящее состояние?
9. Какой является зависимость плотности энергии от напряженности электрического поля?
10. Является ли зависимость поляризованности от напряженности линейной для сегнетоэлектриков?

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1. Найти напряженность электрического поля $\vec{E}$ в стекле вблизи некоторой точки P, угол между нормалью к этой точке и вектором $\vec{E}$ и поверхностную плотность связанных зарядов, если вблизи точки P границы раздела стекло – вакуум напряженность электрического поля в вакууме $E_0 = 20$ В/м, причем угол между нормалью к границе раздела и напряженностью $\alpha_0 = 30^0$.

Решение:

Изобразим границу раздела сред, точку P, нормаль к границе раздела в этой точке и соответствующие вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ и $\vec{E}_0$. Обозначим также соответствующие углы между нормалью и векторами $\vec{E}$ и $\vec{E}_0$

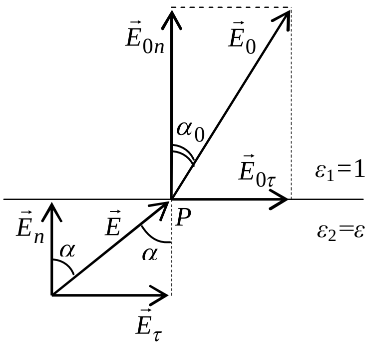


рис.2

Для того, чтобы найти напряженность электрического поля в стекле на границе раздела сред, необходимо применить граничные условия для векторов электрического поля. Как известно в силу потенциальности электрического поля сохраняются тангенциальные компоненты напряженности электрического поля и нормальные компоненты вектора электрического смещения при условии отсутствия сторонних поверхностных зарядов на границе:

$$E_\tau = E_{0\tau} \quad (1)$$

$$\varepsilon E_n = E_{0n} \quad (2)$$

Из рисунка можно легко найти компоненты вектора $\vec{E}_0$:

$$E_{0\tau} = E_0 \sin\alpha_0 \quad (3)$$

$$E_{0n} = E_0 \cos\alpha_0 \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (1) и (2) соответственно, получаем:

$$E_\tau = E_0 \sin\alpha_0 \quad (5)$$

$$E_n = \frac{E_0 \cos\alpha_0}{\varepsilon} \quad (6)$$

В результате можно определить значение напряженности электрического поля в точке P:

$$E = \sqrt{E_\tau^2 + E_n^2} \quad (7)$$

Подставляя (5) и (6) в (7), получаем:

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon}\sqrt{\cos^2\alpha_0+\varepsilon^2\sin\alpha_0} \qquad (8)$$

Угол между нормалью и вектором $\vec{E}$ в стекле можно найти из соотношения:

$$tg\alpha=\frac{E_\tau}{E_n}=\frac{\varepsilon E_0\sin\alpha_0}{E_0\cos\alpha_0}=\varepsilon\cdot tg\alpha_0 \qquad (9)$$

Поверхностная плотность связанных зарядов в некоторой точке границы раздела равна разности нормальных компонент вектора поляризованности на ней (в нашем случае только от поляризованности в стекле, так как поляризованность в вакууме равна нулю):

$$\sigma'=P_n \qquad (10)$$

где $P_n=\varepsilon_0\chi E_n=\varepsilon_0(\varepsilon-1)\dfrac{E_0\cos\alpha_0}{\varepsilon}$ (11)

Следовательно, поверхностная плотность зарядов на границе раздела вблизи точки Р определяется соотношением:

$$\sigma'=\varepsilon_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}E_0\cos\alpha_0 \qquad (12)$$

Подставляя численные значения в соотношения (8), (9) и (12), получаем: $E=10{,}4$ В/м, $\alpha=74^0$, $\sigma'=128$ пКл/м^2.

Ответ: $E=10{,}4$ В/м, $\alpha=74^0$, $\sigma'=128$ пКл/м^2.

Задание №2. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено последовательно двумя диэлектриками с толщинами d_1 и d_2 диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 соответственно. Площадь каждой обкладки равна S. Найти: 1) емкость конденсатора; 2) плотность связанных зарядов на границе раздела диэлектрических слоев, если напряжение на конденсаторе равно U и электрическое поле направлено от слоя 1 к слою 2.

Решение:

Сделаем схематический рисунок к задаче (хотя задачу можно решить и без него).

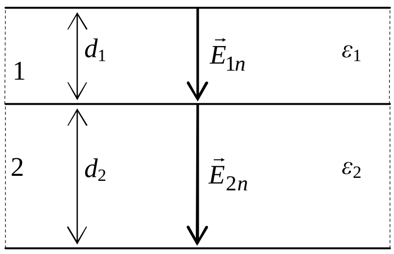


рис.3

По условию задачи границу раздела двух диэлектриков можно рассматривать как некую обкладку конденсатора, параллельную и равную по площади двум ее металлическим обкладкам. Однако следует учитывать, что на ней скапливаются не сторонние электрические заряды, а связанные с поверхностной плотностью σ'. Таким образом, конденсатор можно рассматривать как систему двух последовательно соединенных плоских конденсаторов с различными диэлектрическими средами ε_1 и ε_2.

В этом случае общая электроемкость:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \qquad (1),$$

где электроемкость первого плоского конденсатора:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1} \qquad (2);$$

а второго конденсатора:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_2} \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим окончательное выражение для емкости конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{d_2 \varepsilon_1 + d_1 \varepsilon_2} \qquad (4)$$

Так как по определению поверхностная плотность связанных зарядов определяется разностью нормальных компонент поляризованности соответствующих сред, то:

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n} \qquad (5)$$

Поляризованность, в свою очередь, связана с напряженностью в соответствующей среде соотношением:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \qquad (6)$$

где χ - диэлектрическая восприимчивость среды:

$$\chi = \varepsilon - 1 \qquad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (5), получаем:

$$\sigma' = (\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_0 E_{1n} - (\varepsilon_2 - 1)\varepsilon_0 E_{2n} = \varepsilon_0 (\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n}) + \varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) \qquad (8)$$

Так как на границе раздела диэлектриков по условию сторонних зарядов нет, то должно выполняться условие для нормальных компонент:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \qquad (9)$$

С учетом (9) соотношение (8) примет вид:

$$\sigma' = \varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) \qquad (10)$$

В плоском конденсаторе напряженность и напряжение связаны формулой:

$$U = Ed \qquad (11)$$

В нашем случае для каждого конденсатора (11) примет вид:

$$E_{1n} = \frac{U_1}{d_1} = \frac{q}{d_1 C_1} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S} \qquad (12)$$

$$E_{2n} = \frac{U_2}{d_2} = \frac{q}{d_2 C_2} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S} \qquad (13)$$

где $U_1 + U_2 = U_0$ - напряжение на конденсаторе.

Подставляя (12) и (13) в (10), находим:

$$\sigma' = \frac{q}{S}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \qquad (14)$$

Электрический заряд q на обкладках конденсатора можно выразить через его электроемкость и внешнее напряжение:

$$q = CU_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S U_0}{d_2 \varepsilon_1 + d_1 \varepsilon_2} \qquad (15)$$

Следовательно, выражение (14) с учетом (15) примет вид:

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_0 U_0}{d_2 \varepsilon_1 + d_1 \varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \qquad (16)$$

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{d_2 \varepsilon_1 + d_1 \varepsilon_2}$; $\quad \sigma' = \dfrac{\varepsilon_0 U_0}{d_2 \varepsilon_1 + d_1 \varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$.

Постоянный электрический ток
Справочный материал к тестированию по теме

Электрическим током называют поток свободных заряженных частиц, возникающих в веществе под действием внешнего поля (внешней разности потенциалов). Вещества, в которых может протекать электрический ток при нормальных условиях, называют **проводниками**.

Основной характеристикой тока является **сила тока**. Она является скалярной величиной и соответствует количеству заряда, переносимого через некоторую поверхность за единицу времени под действием внешнего поля (при наличии внешней разности потенциалов). За **направление тока** исторически принято **направление движения положительно заряженных частиц**. **Сила тока**, а, следовательно, и **ток** являются **постоянными**, если за единицу времени через одно и то же поперечное сечение протекает одинаковое количество заряда. **Дивергенция от плотности постоянного тока** всегда равна **нулю**. Это означает что **поток заряда**, протекающего через поперечную поверхность за единицу времени, **не меняется**, и **линии постоянного тока** являются **замкнутыми**.

Кроме тока поток заряженных частиц характеризуется **плотностью тока**. Она является векторной величиной и совпадает по направлению со скоростью заряженных частиц. **Плотность тока** представляет собой свободный заряд, протекающий через единицу поверхности в единицу времени. **Скорость**, которую приобретают свободные заряды под действием внешней разности потенциалов, называют **дрейфовой**.

У **металлов** как проводников первого рода имеется только один тип проводимости – **электронный**, у **электролитов** как проводников второго рода два типа: **электронный и ионный**.

Для того чтобы в цепи не исчезал электрический ток, необходимо на ее концах поддерживать постоянную разность потенциалов. Для этого применяют специальные устройства – **генераторы**, которые разделяют электрические заряды, действуя против сил электростатического поля. Силы, действующие в генераторе, следовательно, не могут иметь электростатическую природу. Поэтому называются **сторонними**. Они могут являться электромагнитными, механическими, химическими и т.д. Работу сторонних сил над точечным единичным зарядом называют **электродвижущей силой (ЭДС)**. **Полная работа** есть сумма работы сторонних и электростатических сил. Полную работу, совершаемую над единичным зарядом на некотором участке, называют **падением напряжения**.

Участок (электрическую цепь), на котором действуют сторонние силы, называют **неоднородным**, а на котором не действуют – **однородным**.

Всякий проводящий материал обладает определенным **сопротивлением**. **Сопротивление** зависит только от **геометрии** этого материала и его **природы** и **температуры**. С ростом температуры сопротивление проводника растет, а полупроводника – падает. У металлов сопротивление падает с ростом поперечного сечения и при уменьшении длины проводника.

Элемент, характеризующийся определенным сопротивлением, называют **резистором**. С помощью различного **соединения резисторов** можно изменять сопротивление участка или электрической цепи в целом. Так, параллельное соединение (шунтирование) уменьшает сопротивление участка, а последовательное – увеличивает.

У большой группы металлов и сплавов сопротивление при некоторой критической температуре, отличной от нуля, может обращаться в нуль. Это явление было открыто Камерлинг-Оннесом для ртути и получило название **сверхпроводимости**. Сверхпроводимость существует также и цинка, олова, алюминия, свинца и т.д. Состояние сверхпроводимости может быть разрушено действием на проводник магнитного поля.

Электрические цепи бывают **разветвленными** и **неразветвленными**. Вторые состоят лишь из одного электрического контура, а первые из двух и более. При описании неразветвленных цепей применяются **законы Ома для однородных и неоднородных участков**, а при описании разветвленных цепей, помимо законов Ома используют и **правила Кирхгофа** для узлов и контуров.

Постоянный ток, протекающий по проводнику, может оказывать следующие воздействия на окружающую среду:

тепловое,
магнитное,
химическое.

Основные соотношения:

Определение силы тока: $I = \dfrac{dq}{dt}$

Определение плотности тока: $j = \dfrac{dI}{dS_{\perp}}$,

где $S_{\perp}$ - поперечное сечение проводника.

Связь между плотностью тока и дрейфовой скоростью: $j = e^{-}n^{-}u_{-} + e^{+}n^{+}u_{+}$,

где e, n, u - соответственно заряд, концентрация и дрейфовая скорость носителей (в случае «+» - положительных, а в случае «-» - отрицательных)

Уравнение непрерывности: $div\vec{j} + \dfrac{d\rho}{dt} = 0$

Дивергенция плотности постоянного тока: $div\vec{j} = 0$

Определение электродвижущей силы (ЭДС): $\mathrm{E}_{12} = \dfrac{A_{ст}}{q_0}$,

где $A_{ст}$ - работа сторонних не электростатических сил.

Полная работа в неоднородной электрической цепи: $A = A_{ст} + A_{эс}$

Работа электростатических сил: $A_{эс} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$

Определение для **падения напряжения**: $U = \dfrac{A}{q_0}$

Падение напряжения на неоднородном участке цепи: $U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathrm{E}_{12}$

Закон Ома для однородного участка цепи: $I = \dfrac{U}{R}$

Закон Ома для неоднородного участка цепи: $$I = \frac{\mathrm{E}_{12}}{R + r},$$

где r - внутреннее сопротивление источника (генератора)

Закон Ома для однородного участка цепи

в дифференциальной форме: $$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho},$$

где σ - электропроводность, а ρ - удельное сопротивление.

Зависимость **сопротивления проводника**

от геометрии и природы: $$R = \frac{\rho \cdot l}{S},$$

где l - длина проводника, а S - его поперечное сечение.

Соединение резисторов (проводников):

последовательное: $$R = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

параллельное: $$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i},$$

где N - число резисторов в соединении.

Правила Кирхгофа:

для узлов: $$\sum_{i=1}^{M} I_i = 0,$$

где I_i - токи входящие и выходящие из узла. Положительные токи входят, а отрицательные - выходят. M - число проводников с токами в узле;

для контуров: $$\sum_{j=1}^{K} \mathrm{E}_j = \sum_{i=1}^{M} U_i,$$

где $U_i = I_i R_i$ - падения напряжения на M участках контура, а E_j - ЭДС, действующие в контуре (K - их количество).

Мощность тока: $$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

Определение удельной мощности тока: $$P_{уд} = \frac{\Delta P}{\Delta V}$$

Связь удельной мощности с плотностью тока: $$P_{уд} = j^2 \rho = \vec{j}\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right),$$

где $\vec{E}, \vec{E}^*$ - напряженности электростатического поля и сторонних сил соответственно.

Закон Джоуля – Ленца в интегральной форме: $$Q = IUt = I^2 Rt$$

Определение удельной тепловой мощности тока: $$Q_{уд} = \frac{d^2 Q}{dV dt}$$

Связь удельной тепловой мощности с плотностью тока: $$Q_{уд} = j^2 \rho$$

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. Уравнение непрерывности имеет вид _________.
2. За направление электрического тока принято направление движения ________ зарядов.
3. Сопротивление проводника _____________с ростом температуры.
4. Закон Ома для неоднородного участка соответствует соотношению _______.
5. В случае шунтирования сопротивление участка ____________.
6. Цепь, состоящая из нескольких и более контуров, называется ___________.
7. Электрический ток возникает только под влиянием _____________.
8. Мощность электрического тока определяется по формуле ____________.
9. Удельная тепловая мощность, выделяемая проводником с током, вследствие его теплового действия __________.
10. Имеет ли ЭДС электростатическую природу?

ТЕСТ№2

1. Плотность тока определяется соотношением ___________.
2. Дивергенция от плотности постоянного тока равна _______.
3. Устройство, разделяющее электрические заряды за счет сторонних (не электростатических) сил называется __________.
4. Полная работа над единичным зарядом в электрической цепи есть сумма ___________.
5. Явление резкого падения сопротивления материала до нуля при некоторой критической температуре называют __________.
6. Алгебраическая сумма всех входящих в него токов и выходящих равна _________.
7. Электрический ток под действием внешней разности потенциалов может возникать тогда, когда в веществе имеются _________.
8. Цепь или участок, на котором действует ЭДС, называют __________.
9. Доля того, чтобы увеличить сопротивление участка, необходимо ______ подключит резистор с нужным сопротивлением.
10. Какие действия оказывает постоянный ток на окружающую среду?

ТЕСТ№3

1. Связь между плотностью тока и дрейфовой скоростью имеет вид ______.
2. Закон Ома для однородного участка цепи описывается соотношением _______.
3. Сопротивление проводников зависит только от их природы и геометрии и определяется по формуле ______.
4. Цепь, состоящая из одного контура, называется _______.
5. Как можно разрушить состояние сверхпроводимости?
6. При параллельном соединении сопротивление цепи _________.
7. Утверждение о том, что в контуре сумма всех ЭДС равна сумме всех падений напряжение, называется ________.
8. С ростом температуры сопротивление полупроводника ________.
9. Закон Джоуля Ленца имеет вид ________.
10. Правило узлов можно записать в следующей математической форме _______.

ТЕСТ№4

1. Сила тока в общем случае определяется следующим соотношением _________.
2. Цепь или участок цепи, на котором не действует ЭДС, называется _______.
3. Зависимость сопротивления от площади поперечного сечения является _______.
4. Правило контуров можно записать в следующей математической форме ______.
5. Сопротивление резисторов при параллельном соединении можно рассчитать по формуле _______.
6. Падение напряжения на неоднородном участке цепи имеет вид _______.
7. Закон Ома в дифференциальной форме для участка цепи определяется соотношением _______.
8. Цепь называется разветвленной, если она состоит из _______.
9. Удельная мощность постоянного электрического тока определяется по формуле __________.
10. Каким образом магнитное поле влияет на состояние сверхпроводимости?

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1. Длинный проводник круглого сечения радиуса a сделан из материала, удельное сопротивление которого зависит только от расстояния r до оси проводника по закону $\rho = \alpha / r^2$, где α - постоянная. Найти: 1)сопротивление единицы длины такого проводника; 2) напряженность электрического поля в проводнике, при которой по нему будет протекать ток I /

Решение:

Для определения напряженности используем закон Ома в дифференциальной форме:

$$E = j(r)\rho(r) \qquad (1)$$

Плотность тока связана с током в проводнике по формуле:

$$dI = j(r)dS \qquad (2)$$

Так как по условию проводник является цилиндром с круглым сечением, то равноудаленные от оси этого цилиндра точки лежат в пределах кольца с бесконечно малой толщиной и имеют одинаковое удельное сопротивление. В этом случае элементарную площадь можно определить как площадь кольца с бесконечно малой толщиной:

$$dS = 2\pi r dr \qquad (3)$$

Подставляя (3) и (1) в (2) и учитывая, что удельное сопротивление по условию $\rho = \alpha / r^2$, получаем следующее выражение приращения тока:

$$dI = \frac{E}{\rho(r)} dS = \frac{2\pi E r^3 dr}{\alpha} \qquad (4)$$

Проинтегрируем (4) вдоль радиуса цилиндра и, учитывая, что по условию полный ток равен I, а напряженность связана только со свойствами внешнего поля, получим:

$$I = \frac{2\pi E}{\alpha}\int_0^a r^3 dr = \frac{2\pi E a^4}{4\cdot\alpha} = \frac{\pi E a^4}{2\cdot\alpha} \qquad (5)$$

Отсюда выражаем искомую напряженность:

$$E = \frac{2I\alpha}{\pi a^4} \qquad (6)$$

Для нахождения сопротивления приходящегося на единицу длины проводника, используем связь между напряжением и напряженностью (она однородна вдоль проводника):

$$E = \frac{U}{l} \qquad (7),$$

и закон Ома в интегральной форме:

$$I = \frac{U}{R} \qquad (8).$$

Подставляя (5) и (7) в (8), получаем выражение:

$$\frac{U}{R} = \frac{\pi a^4 U}{2 \cdot \alpha \cdot l} \qquad (9)$$

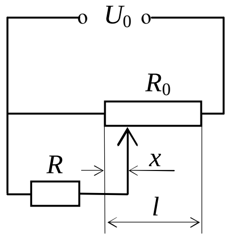
Отсюда получаем соотношение для сопротивления единицы длины проводника:

$$\frac{R}{l} = \frac{2 \cdot \alpha}{\pi a^4} \qquad (10)$$

Ответ: $\frac{R}{l} = \frac{2 \cdot \alpha}{\pi a^4}$; $E = \frac{2I\alpha}{\pi a^4}$.

Задание №2. Дана схема потенциометра (см. рис в решении задачи), с помощью которой можно менять напряжение U, подаваемое на некоторый прибор с сопротивлением R. Потенциометр имеет некоторую длину l, сопротивление R_0 и находиться под напряжением U_0. Найти напряжение U как функцию длины x. Исследовать отдельно случай $R >> R_0$

Решение:



Как видно из рисунка напряжение U_0 можно рассматривать как сумму напряжений на различных участках потенциометра, которые образуют последовательное соединение:

$$U_0 = U(x) + U(l - x) \qquad (1)$$

рис.4

Однако ток I_n на участке потенциометра, к которому присоединяется прибор с сопротивлением R, меньше тока I_0, идущего от источника U_0 и проходящего через свободный участок потенциометра. Это связано с тем, что ток I_0 в узле разветвляется на I_n и I, идущий через прибор. Следовательно, для тока в узле можно применить правило Кирхгофа:

$$I_0 = I_n + I \qquad (2)$$

Исходя из рисунка, можно записать законы Ома для соответствующих участков потенциометра:

$$U(x) = IR = I_n R_0 \frac{x}{l} \qquad (3)$$

$$U(l - x) = I_0 R_0 \frac{l - x}{l} = (I_n + I) R_0 \frac{l - x}{l} \qquad (4)$$

Выражая ток I через I_n с помощью (3), подставляем в (4), а затем (3) и (4) - в соотношение (1):

$$U_0 = I_n R_0 \frac{x}{l} + I_n R_0 \frac{l-x}{l} + I_n R_0 \frac{R_0}{R} \frac{(l-x)x}{l^2} = I_n R_0 \left(1 + \frac{R_0}{R} \frac{(l-x)x}{l^2}\right) \qquad (5)$$

Из (5) выразим ток I_n на участке потенциометра, к которому присоединен прибор с сопротивлением R

$$I_n = \frac{U_0}{R_0 \left(1 + \frac{R_0}{R} \frac{(l-x)x}{l^2}\right)} \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (3), получаем:

$$U(x) = \frac{U_0}{\left(\frac{l}{x} + \frac{R_0}{R} \frac{(l-x)}{l}\right)} \qquad (7)$$

Рассмотрим случай, когда $R >> R_0$. Это неравенство можно переписать в виде - $\frac{R_0}{R} << 1$, то есть отношение сопротивлений есть величина бесконечно малая. Следовательно, вторым слагаемым в знаменателе (7) можно пренебречь. В этом случае данное соотношение примет вид:

$$U(x) = \frac{U_0 x}{l} \qquad (8)$$

Ответ: $U(x) = \frac{U_0}{\left(\frac{l}{x} + \frac{R_0}{R} \frac{(l-x)}{l}\right)}$, $\quad U(x) = \frac{U_0 x}{l}$, при условии $R >> R_0$.

Магнитостатика в вакууме
Справочный материал к тестированию по теме

Магнитное поле – особый вид материи, который существует независимо от наших знаний о нем и о существовании которого можно судить по его влиянию на вещество. Всякое вещество, попадая в магнитное поле, намагничивается.

Постоянное магнитное поле создается:

1. движущимися зарядами;
2. постоянными токами;
3. природными магнитами

Магнитное поле, как и электростатическое, изображается **с помощью силовых линий**, касательными к которым являются **вектора магнитной индукции** $\vec{B}$. **Густота силовых линий** определяет **значение** $\vec{B}$ в соответствующей области пространства. Особенностью **силовых линий** является то, что они всегда **замкнуты**, так как **магнитное поле** в отличие от электростатического поля **является вихревым (соленоидальным)**. Замкнутость силовых линий говорит об отсутствии отдельных магнитных зарядов в природе. Для векторов магнитной индукции выполняется **принцип суперпозиции**, для которого можно выделить две формулировки:

1. Если проводник можно некоторым образом полностью уместить на плоскости или движение заряженной частицы является плоским, то результирующий вектор магнитной индукции всегда лежит на прямой перпендикулярной соответствующей плоскости. Он равен алгебраической сумме

векторов магнитной индукции, созданных различными элементарными участками проводника или отдельными положениями заряда.

2. Если проводник или движение заряда являются пространственными, то направление результирующего вектора зависит от геометрии проводника или траектории. Он равен геометрической сумме векторов магнитной индукции, созданных различными элементарными участками проводника или отдельными положениями заряда.

Основными опытами в магнитостатике являются **опыты Ампера** и **Эрстеда**. Ампер проводил опыт с двумя параллельными проводниками с током. Он заметил, что при протекании по ним тока одного направления, они притягиваются, а при протекании противоположных токов – отталкиваются. Эрстед изучал влияние тока в проводнике на стрелку компаса. Он заметил, что в присутствии проводника, стрелка компаса испытывает дополнительное отклонение

Силовые линии магнитного поля, созданные **прямым током**, являются концентрическими окружностями, охватывающими проводник и лежащими в плоскостях перпендикулярных проводнику. Направление циркуляции вектора магнитной индукции вдоль силовой линии определяется по правилу буравчика (правого винта): если поступательно движущуюся часть буравчика (винта) направить по току, то вращающаяся часть будет указывать на направление циркуляции вектора $\vec{B}$.

Силовые линии **кругового тока** представляют собой замкнутые кривые линии, охватывающие круговой контур. Направление вектора $\vec{B}$ в центре кругового тока, а, следовательно, и направление его циркуляции также определяется по правилу буравчика (правого винта): если вращающуюся часть сонаправить с током, то поступательная часть будет указывать на направление вектора $\vec{B}$.

Силовые линии **соленоида** похожи на силовые линии кругового тока и являются замкнутыми, а **соленоид** представляет собой **провод, навитый на круглый цилиндрический каркас**. В отличие от кругового тока и прямого провода он является **пространственным проводником**. Вне бесконечно длинного соленоида магнитная индукция равна нулю.

Магнитное поле воздействует на объекты, которые его создают. Так, на проводник с током действует со стороны магнитного поля **сила Ампера**. Она перпендикулярна плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$ и проводник с током. На движущийся заряд со стороны магнитного поля действует **магнитная сила**, которая перпендикулярна плоскости векторов $\vec{B}$ и скорости движущегося заряда. Если помимо магнитного поля на частицу действует и электрическое поле, то результирующую силу называют **силой Лоренца**. Следовательно, с помощью электрических и магнитных полей можно управлять движением заряженных частиц. Эта возможность используется в ускорительной технике.

Дивергенция вектора индукции магнитного поля всегда равна нулю, что говорит о его вихревом характере (о замкнутости его силовых линий). Ротор вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ равен вектору плотности тока $\vec{j}$ и совпадает с ним по направлению. Из выражения для ротора можно получить **закон полного тока** (закон Эрстеда): циркуляция вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ вдоль замкнутого контура равна алгебраической сумме токов, охваченных соответствующим контуром. Алгебраическую сумму токов называют **полным током.**

Потоком вектора $\vec{B}$ называют число линий пронизывающих некоторую поверхность**. Работа** над проводником с током в магнитном поле пропорциональна изменению потока, вызванного их взаимодействием и току, протекающему по проводнику. Магнитное взаимодействие движущихся зарядов всегда меньше электрического в c^2/υ^2 раз, где υ, c - соответственно скорости зарядов и света. Поэтому его считают **релятивистским эффектом**.

Основные соотношения:

Сила взаимодействия двух **параллельных токов** в вакууме: $F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{b}$,

где I_k - взаимодействующие токи, μ_0 - постоянная магнитная проницаемость, b - расстояние между проводниками.

Поле свободно **движущегося заряда**: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{\upsilon}, \vec{r}]}{r^3}$,

где $\vec{\upsilon}, \vec{r}$ - соответственно скорость движущейся частицы и радиус – вектор, проведенный от начального фиксированного положения частицы до точки среды, в которой создается магнитное поле; q - заряд частицы.

Закон **Био – Савара – Лапласа** (БСЛ): $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$,

где $d\vec{l}$ - бесконечно малый линейный элемент провода, $\vec{r}$ - расстояние от линейного элемента $d\vec{l}$ до точки среды, в которой создается магнитное поле.

Магнитное поле **прямого тока** в случае бесконечного проводника на расстоянии b: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$

Магнитное поле **кругового тока** радиуса r: $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$

Магнитное поле внутри бесконечного соленоида с числом витков n на единицу длины: $B = \mu_0 nI$

Поток вектора $\vec{B}$: $\Phi_m = \int \vec{B}d\vec{S}$

Работа, совершаемая в магнитном поле над контуром с током: $A = I \cdot \Delta\Phi_m$

Сила Лоренца: $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{\upsilon}, \vec{B}]$

Закон **Ампера**: $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$

Магнитный момент контура с током: $\vec{p}_m = I\vec{S}$

где I - величина элементарного кругового тока, а S - площадь, ограниченная током.

Момент силы, действующий на магнитный момент $\vec{p}_m$ в магнитном поле $\vec{B}$: $\vec{N} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$

Энергия взаимодействия магнитного момента $\vec{p}_m$ с $\vec{B}$: $W = -(\vec{p}_m, \vec{B})$

Дивергенция вектора $\vec{B}$: $div\vec{B} = 0$

Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$: $\oint \vec{B}d\vec{S} = 0$

Ротор вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ $\quad rot\vec{H} = \vec{j}$

Закон **полного тока** (Эрстеда): $\quad \oint \vec{H} d\vec{l} = \sum_k I_k$

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. Отсутствие в природе отдельных магнитных зарядов говорит о том, что силовые линии магнитного поля всегда _________.
2. Вектор магнитной индукции по отношению к силовой линии всегда направлен по ________.
3. Вектор магнитной индукции поля движущегося заряда определяется соотношением ________.
4. В случае плоского проводника с током результирующий вектор магнитной индукции в некоторой точке пространства равен __________ сумме соответствующих векторов, создаваемых отдельными участками.
5. Работа, совершаемая в магнитном полем над проводником с током, равна: ____ .
6. На проводник с током в постоянном магнитном поле действует сила _______ .
7. Момент силы действующей на магнитный момент со стороны магнитного поля можно найти по формуле: ________.
8. Магнитное взаимодействие двух движущихся зарядов по отношению к электрическому считают _________ эффектом.
9. Чему равен ротор вектора напряженности магнитного поля?
10. Вектор магнитной индукции в центре кругового тока определяется выражением: ________ .

ТЕСТ№2

1. Силовые линии прямого тока имеют вид ____________ и лежат в плоскости __________ проводнику.
2. Взаимодействие двух параллельных проводников с токами описывается соотношением ______.
3. Закон Био – Савара – Лапласа имеет вид _________.
4. Чем не может быть создано постоянное магнитное поле: 1) природными магнитами; 2) покоящимися зарядами; 3) проводниками с постоянными электрическими токами? ______ (указать необходимую цифру или цифры)
5. Чему равна дивергенция от вектора магнитной индукции?
6. Какая сила действует со стороны электромагнитного поля на движущуюся заряженную частицу?
7. Поток вектора магнитной индукции через поперечную площадку в случае однородного поля и поверхности определяется по формуле ______.
8. Чему равен магнитный момент элементарного контура с током?
9. Закон полного тока имеет вид: _______.
10. Как направлена сила Ампера по отношению к плоскости проводника и вектора магнитной индукции?

ТЕСТ№3

1. Магнитное поле в отличие от электростатического является ________.

2. Чем может быть создано постоянное магнитное поле: 1) силовыми линиями; 2) покоящимися зарядами; 3) проводниками с постоянными электрическими токами? ______ (указать необходимую цифру или цифры)
3. Вектор магнитной индукции прямого проводника с током в некоторой точке пространства равен ________.
4. Провод, навитый на круглый цилиндрический каркас, называют ______.
5. Энергия взаимодействия магнитного момента элементарного кругового тока с магнитным полем является максимальной, если магнитный момент _______ вектору магнитной индукции.
6. Чему равна магнитная сила в случае, когда скорость частицы сонаправлена с вектором магнитной индукции?
7. Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции имеет вид ________.
8. Магнитное поле внутри соленоида определяется соотношением _______.
9. Сила ампера равна нулю при наличии магнитного поля и проводника с током, в случае когда _______.
10. Циркуляция вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ вдоль замкнутого контура равна _________, охваченных соответствующим контуром.

ТЕСТ№4

1. Всякое вещество, попадая в магнитное поле, __________
2. Эрстед заметил, что в присутствии проводника, _____ испытывает дополнительное отклонение.
3. Магнитное поле вне бесконечного соленоида равно _______.
4. Момент силы имеет максимальное значение, если магнитный момент ______ вектору магнитной индукции.
5. Густота силовых линий определяет значение _________.
6. Сила Лоренца есть сумма ___________ сил.
7. Чему равна работа магнитного поля над контуром, если поток пронизывающий контур не изменяется.
8. Сила Лоренца равна __________.
9. Создает ли движущаяся частица магнитное поле, в случае, когда она совершает радиальное движение
10. Магнитное взаимодействие движущихся зарядов _______ электрического в c^2/υ^2 раз

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1. По квадратной рамке течет ток, силой I Она расположена в одной плоскости с линейным бесконечным проводником с током I_0. Сторона рамки l. Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстоянии, которое в α раз больше стороны рамки. Найти: 1) силу Ампера, действующую на рамку, 2) работу, которую нужно совершить при медленном повороте рамки вокруг ее оси на 180^0.

Решение:

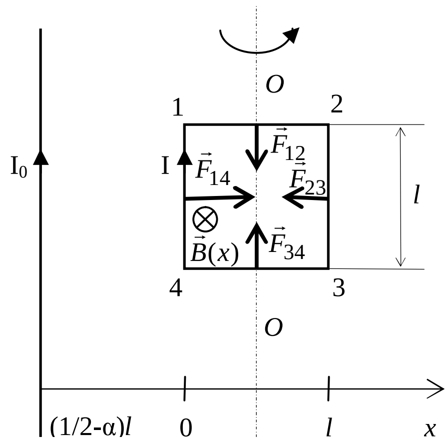


рис. 5

В общем случае сила Ампера, действующая со стороны магнитного поля на элемент проводника с током, определяется соотношением:

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right] \qquad (1)$$

Мысленно разобьем квадратную рамку, приведенную на рисунке на линейные участки (соответствующие стороны квадрата) и рассмотрим в отдельности силы Ампера, действующие на каждый участок. Из рисунка и соотношения (1) видно, что силы, действующие вдоль участков 12 и 34, равны по модулю и противоположны по направлению.

Действительно:

$$dF_{12} = IB(x)dx \qquad (2)$$

$$dF_{34} = -IB(x)dx \qquad (3)$$

где вектор индукции магнитного поля в точке x участков проводника 12 или 34, созданный линейным проводником с током I_0 и равный:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\left(l(\alpha - 1/2) + x\right)} \qquad (4)$$

Пределы интегрирования для (2) и (3) одинаковы: от 0 до l. Следовательно:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{34} = o \qquad (5)$$

Таким образом, результирующая сила Ампера есть сумма соответствующих сил на участках 23 и 14:

$$\vec{F}_p = \vec{F}_{23} + \vec{F}_{14} \qquad (6)$$

Так как все точки участков 23 и 14 равноудалены соответственно от проводника с током I_0 на фиксированные расстояния, то вектора магнитной индукции, действующие на соответствующие участки, постоянны и определяются соотношениями:

$$B_{23} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(\alpha + 1/2)l} \qquad (7)$$

$$F_{23} = \frac{\mu_0 I_0 Il}{2\pi(\alpha + 1/2)l} = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi(\alpha + 1/2)} \qquad (8)$$

$$B_{14} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(\alpha - 1/2)l} \qquad (9)$$

$$F_{14} = \frac{\mu_0 I_0 Il}{2\pi(\alpha - 1/2)l} = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi(\alpha - 1/2)} \qquad (10)$$

Подставляя выражения для сил на каждом участке (8) и (10) в (6) с учетом их направлений, указанных на рисунке, получаем окончательное соотношение для силы Ампера, действующей на квадратную рамку:

$$F_p = F_{14} - F_{23} = \frac{\mu_0 I_0 I}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha - 1} - \frac{1}{2\alpha + 1}\right) = \frac{2\mu_0 I_0 I}{\pi(4\alpha^2 - 1)} \qquad (11)$$

Вклад в работу будут вносить только силы Ампера, действующие на участках 23 и 14, так как их сумма и сумма соответствующих работ равна нулю.

В общем случае работу будем искать в виде:

$$dA = Id\Phi = IlB(x)dx \qquad (12)$$

В соответствии с рисунком при повороте рамки на 180^0 верхняя и нижняя стороны квадратной рамки меняются местами:

Работа, которая совершается над нижней рамкой, определяется соотношением (12) с учетом (4):

$$A_H = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi}\int_0^l \frac{dx}{(\alpha - 1/2)l + x} = \frac{\mu_0 I_0 I\, l}{2\pi}\ln\frac{2\alpha+1}{2\alpha-1} \qquad (13)$$

Для верхней рамки работа равна:

$$A_B = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi}\int_l^0 \frac{dx}{(\alpha + 1/2)l + x} = -\frac{\mu_0 I_0 I\, l}{2\pi}\ln\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1} = \frac{\mu_0 I_0 I\, l}{2\pi}\ln\frac{2\alpha+1}{2\alpha-1} \qquad (14)$$

Полная работа есть сумма всех работ совершаемых над элементами системы:

$$A = A_H + A_B \qquad (15)$$

Подставляя (13) и (14) в (15), получаем формулу для работы, совершаемой при медленном повороте рамки на 180^0:

$$A = \frac{\mu_0 I_0 I\, l}{\pi}\ln\frac{2\alpha+1}{2\alpha-1} \qquad (16)$$

Ответ: $F_p = \dfrac{2\mu_0 I_0 I}{\pi(4\alpha^2 - 1)}$; $\quad A = \dfrac{\mu_0 I_0 I\, l}{\pi}\ln\dfrac{2\alpha+1}{2\alpha-1}$.

Задание №2. Найти индукцию магнитного поля точечного заряда в точке Р, если он в этот момент создает в соответствующей точке электрическое поле напряженностью $E = 600$ В/м и движется со скоростью $\mathrm{v} = 900$ м/с. Угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{\mathrm{v}}$ равен $\alpha = 30^0$.

Решение:

Как известно, движущаяся заряженная частица создает не только электрическое, но и магнитное поле, вектор магнитной индукции которого определяется соотношением:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{\mathrm{v}}, \vec{r}]}{r^3} \qquad (1)$$

С другой стороны напряженность электрического поля в точке Р в тот же момент имеет вид:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{r^3} \qquad (2)$$

Из (2) выразим следующую величину:

$$\frac{q\vec{r}}{r^3} = 4\pi\varepsilon_0\vec{E} \qquad (3)$$

Подставим (3) в (1) и получим:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec{\mathrm{v}}, q\vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0 4\pi\varepsilon_0}{4\pi}[\vec{\mathrm{v}}, \vec{E}] \qquad (4)$$

Соотношение (4) в скалярной форме примет вид:

$$B == \mu_0\varepsilon_0 E\mathrm{v}\sin\alpha \qquad (5)$$

Подставляя в (5) численные значения соответствующих величин, получаем:

$$B = 3\,\text{пТл}$$

Следует отметить, что вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости векторов $\vec{E}$ и $\vec{v}$

Ответ: $B = 3$ пТл.

Магнитное поле в веществе
Справочный материал к тестированию по теме

Всякое вещество, помещенное во внешнее магнитное поле и являющееся магнетиком определенного типа, **намагничивается**. Причиной намагничивания веществ является наличие у их атомов **механических**, а, следовательно, и **магнитных моментов**. **Магнитный момент атома** связан непосредственно с механическим, который связан с орбитальным и спиновым движением электронов в атоме и собственным моментом ядра. Электрон и ядро вследствие своего движения создают **молекулярные токи**. Выделяют три типа **магнетиков**: диамагнетики (ослабляют на малую величину внешнее поле); парамагнетики (усиливают на малую величину внешнее поле); ферромагнетики (значительно усиливают внешнее поле и способны сохранять остаточную намагниченность).

Диамагнетики подобны неполярным молекулам в электростатическом поле. В отсутствии магнитного поля их магнитный момент равен нулю, а при его наличии у атомов диамагнетика индуцируется такой магнитный момент, который направлен противоположно по отношению к вектору магнитной индукции внешнего поля. В результате суперпозиции результирующего поля, созданного вследствие ориентации магнитных моментов в веществе и внешнего поля, поле в веществе ослабевает.

Для **парамагнетиков**, как и для полярных диэлектриков характерна ориентационная намагниченность. Это означает, что у атомов изначально уже имеются хаотически ориентированные магнитные моменты. При этом в отсутствии внешнего магнитного поля их геометрическая сумма равна нулю. При внесении парамагнетика во внешнее поле магнитные моменты атомов ориентируются по полю. В результате внешнее поле усиливается в веществе.

У **ферромагнетиков** существует остаточная намагниченность, связанная с нелинейной зависимостью между такими характеристиками магнитного поля как: намагниченность $\vec{J}$, вектор магнитной индукции $\vec{B}$, напряженность магнитного поля $\vec{H}$. В этом отношении они похожи на сегнетоэлектрики, у которых существует остаточная поляризация, также вызванная нелинейной связью между характеристиками электрического поля. Ферромагнетик, как и сегнетоэлектрик, состоит из отдельных доменов с определенной ориентацией магнитных моментов.

Основной характеристикой намагничения магнетика является **намагниченность $\vec{J}$. Намагниченность** – это векторная физическая величина, сонаправленная с результирующим магнитным моментом вещества и соответствующая этому магнитному моменту в единице объема. Кроме намагниченности для характеристики используется **магнитная проницаемость μ.** Для каждого магнетика она имеет свое значение. **Магнитная проницаемость** диамагнетиков меньше единицы, парамагнетиков больше единицы, а у ферромагнетиков может достигать достаточно больших значений.

На границе раздела сред двух различных магнетиков происходит **«преломление» векторов магнитного поля $\vec{B}$ и $\vec{H}$** аналогичное «преломлению» векторов электростатического поля. При этом в соответствии с теоремой Гаусса для **вектора магнитной индукции** сохраняются его **нормальные компоненты**. Сохранение **тангенциальных компонент напряженности магнитного поля** в отсутствии токов проводимости связано с законом полного тока (законом Эрстеда).

Основные соотношения:

Определение **намагниченности**: $\vec{J} = \dfrac{\sum\limits_{\Delta V} \vec{p}_m}{\Delta V}$

Результирующий вектор магнитной индукции в веществе: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$

где $\vec{B}_0$ - вектор магнитной индукции внешнего поля, $\vec{B}'$ - вектор магнитной индукции, созданный молекулярными токами $\vec{j}_{мол}$.

Дивергенция $\vec{B}$ в веществе: $div\vec{B} = div\vec{B}_0 + div\vec{B}' = 0$

Данное соотношение означает, что магнитное поле в веществе, как и поле в вакууме не имеет источников, то есть его силовые линии замкнуты.

Ротор $\vec{B}$ в веществе: $rot\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \vec{j}_{мол}\right)$

Ротор $\vec{B}'$: $rot\vec{B}' = \mu_0 \vec{j}_{мол}$

Определение для **плотности молекулярных токов**: $\vec{j}_{мол} = rot\vec{J}$

Определение **напряженности магнитного поля** $\vec{H}$: $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$

Связь между намагниченностью $\vec{J}$ и напряженностью $\vec{H}$ поля: $\vec{J} = \chi\vec{H}$

Для изотропных сред вектора $\vec{H}$ и $\vec{J}$ совпадают по направлению, а для анизотропных зависимость является нелинейной.

Связь между магнитной проницаемостью μ и магнитной восприимчивостью χ: $\mu = 1 + \chi$

Связь между вектором магнитной индукции $\vec{B}$ и напряженностью поля $\vec{H}$: $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$

Для изотропных сред вектора $\vec{H}$ и $\vec{B}$ совпадают по направлению, а для анизотропных зависимость является нелинейной.

Условия на границе сред двух различных магнетиков:

для **нормальных** компонент: $B_{1n} = B_{2n}$, $\dfrac{H_{1n}}{H_{2n}} = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$

для **тангенциальных** компонент: $H_{1\tau} = H_{2\tau}$, $\dfrac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. Как реагирует вещество на наличие магнитного поля?
2. Какой магнетик способен сохранять остаточную намагниченность в отсутствие магнитного поля?
3. Формула для определения намагниченности имеет вид _________.
4. Чем вызваны в магнетике молекулярные токи?
5. Плотность молекулярных токов определяется соотношением _________.

6. Какова связь между магнитной проницаемостью и восприимчивостью? (привести формулу)
7. Совпадают ли по направлению вектор магнитной индукции и напряженность в случае, когда среда магнетика изотропна?
8. Чему равна дивергенция вектора магнитной индукции в веществе?
9. Из какого закона следует равенство тангенциальных компонент векторов напряженности магнитного поля на границе раздела сред?
10. Нормальные компоненты векторов напряженности магнитного поля на границе сред связаны соотношением вида ________.

ТЕСТ№2

1. В отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов диамагнетика равны _______.
2. Вектор магнитной индукции в парамагнетике в присутствии внешнего поля всегда _____ соответствующей величины внешнего поля.
3. Дивергенция вектора магнитной индукции в веществе равна нулю, следовательно, силовые линии магнитного поля в нем _______.
4. Определение для напряженности магнитного поля имеет вид ______.
5. Что определяет ротор намагниченности?
6. Связь между вектором магнитной индукции и напряженности определяется соотношением _______.
7. Ротор вектора магнитной индукции, созданной молекулярными токами, имеет вид _____.
8. Сохранение нормальных компонент вектора магнитной индукции на границе раздела магнетиков следует из _______.
9. Если среда является анизотропной, то вектора намагниченности и напряженности ________ по направлению.
10. Какова магнитная проницаемость у диамагнетиков по сравнению с единицей?

ТЕСТ№3

1. В отсутствии внешнего поля магнитные моменты атомов парамагнетика ориентированы _______.
2. Анизотропия ферромагнетиков приводит к возникновению ____________ намагниченности.
3. Намагниченность магнетика определяется соотношением ________.
4. Причиной молекулярных токов является _________.
5. Чему равен ротор вектора магнитной индукции в веществе?
6. Результирующий вектор магнитной индукции в веществе определяется соотношением ________.
7. В каком типе магнетика происходит ослабление внешнего магнитного поля?
8. Напряженность магнитного поля определяется соотношением _______.
9. В случае, когда $\mu_1 \rangle \mu_2$ для нормальных компонент вектора напряженности имеет место неравенство вида ________.
10. Будут ли сохраняться тангенциальные компоненты вектора напряженности при наличии на границе раздела токов проводимости?

ТЕСТ№4

1. В каком типе магнетиков возникает ориентационная намагниченность?

2. У какого магнетика магнитная проницаемость может быть очень большой?
3. Связь между векторами намагниченности и напряженности определяется соотношением _______.
4. В отсутствии магнитного поля молекулярные токи диамагнетиков равны _____.
5. Вектора магнитной индукции и напряженности в изотропных средах _______ по направлению.
6. Связь между магнитной проницаемостью и восприимчивостью имеет вид _______.
7. В случае, когда $\mu_1 \rangle \mu_2$ нормальные компоненты вектора магнитной индукции связаны неравенством или равенством вида ______.
8. Тангенциальные компоненты векторов магнитной индукции связаны соотношением ________.
9. При каком дополнительном условии равны тангенциальные компоненты вектора напряженности магнитного поля?
10. В случае, когда $\mu_1 \rangle \mu_2$ тангенциальные компоненты вектора магнитной индукции связаны неравенством или равенством вида ______.

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности магнетика равна B, а вектор $\vec{B}$ составляет угол α с нормалью к границе раздела. Магнитная проницаемость магнетика μ. Найти: 1) поток вектора $\vec{H}$ через поверхность сферы радиуса R с центром, совпадающим с вектором $\vec{B}$ и лежащим на поверхности магнетика; 2) циркуляцию вектора $\vec{B}$ по квадратному контуру Г со стороной l. Точка пересечения диагоналей контура лежит на поверхности, а две противоположные стороны параллельны ей.

Решение:

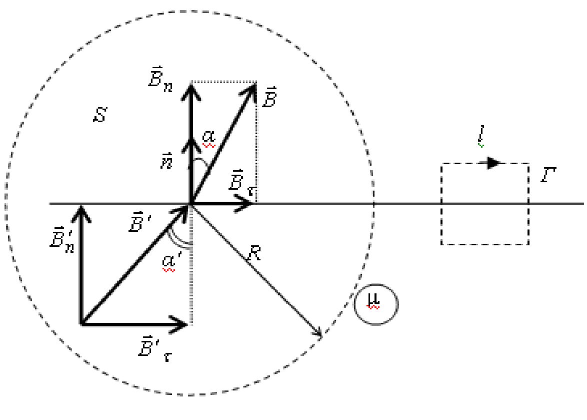


рис. 6

Поток вектора $\vec{H}$ через замкнутую поверхность определяется соотношением (теоремой Гаусса в интегральной форме):

$$\int_V div\vec{H}dV = \oint \vec{H}d\vec{S} = \oint \left(\vec{H}\cdot\vec{n}\right)dS \qquad (1)$$

Сферу пронизывает как вектор $\vec{B}$, находящийся в вакууме, так и вектор $\vec{B}'$ - в среде, причем поток зависит от угла между нормалью и $\vec{B}$ и $\vec{B}'$ в вакууме и среде соответственно.

Следовательно, вклад в поток вносят только нормальные компоненты векторов напряженности магнитного поля и магнитной индукции. Условия для них имеют вид:

$$B_n = B'_n \qquad (2)$$

$$\frac{H_n}{H'_n} = \mu \qquad (3)$$

Так как по условию задачи угол между нормалью и $\vec{B}$ в вакууме равен α, а вектора магнитных и электрических полей, проходя через границу раздела сред, преломляются под разными углами, то между нормалью и $\vec{B}'$ будет угол α', который определяется с помощью соотношения (2)

$$B\cos\alpha = B'\cos\alpha' \qquad (4)$$

Вектор $\vec{B}$ выходит из рассматриваемой сферы по условию задачи, следовательно, его поток положительный, а вектор $\vec{B}'$ входит, следовательно, его поток отрицательный. Результирующий поток равен сумме соответствующих потоков с учетом их знаков.

$$\oint \vec{H}d\vec{S} = \oint H_n dS - \oint H'_n dS = \left(H_n - H'_n\right)\oint dS \qquad (5)$$

где $\oint dS = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} rdr \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \pi R^2$ - площадь соответствующей замкнутой поверхности (поверхности полусферы в вакууме и соответственно такой же полусферы в среде).

Связь между компонентами векторов магнитной индукции и напряженностью магнитного поля имеет вид:

$$B_n = \mu_0 H_n \qquad (6)$$

$$B'_n = \mu_0 \mu H'_n \qquad (7)$$

Подставляя (4), (6) и (7) в (5), получаем искомый поток:

$$\oint \vec{H}d\vec{S} = \left(\frac{B\cos\alpha}{\mu_0} - \frac{B'\cos\alpha'}{\mu\mu_0}\right)\pi R^2 = \frac{\pi R^2 B\cos\alpha}{\mu_0\mu}(\mu - 1) \qquad (8)$$

Циркуляция вектора магнитной индукции в общем случае определяется как (теорема Стокса в интегральной форме):

$$\int\limits_{S'} rot\vec{B}d\vec{S}' = \oint\limits_{\Gamma} \vec{B}d\vec{r} \qquad (9)$$

В силу симметрии задачи на участках перпендикулярных к границе раздела циркуляция взаимно компенсируется и равна нулю. Следовательно, вклад дают только тангенциальные компоненты векторов магнитной индукции:

$$\frac{B_\tau}{B'_\tau} = \frac{1}{\mu} \qquad (10)$$

Учитывая, что поле в пределах одной среды однородно и , получаем:

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{B}d\vec{r} = B_\tau l - B'_\tau l = B_\tau l - \mu B_\tau l = B_\tau l(1 - \mu) \qquad (11)$$

Тангенциальная компонента вектора $\vec{B}$ по условию определяется соотношением:

$$B_\tau = B\sin\alpha \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (11) получаем соотношение для искомой циркуляции:

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{B}d\vec{r} = Bl\sin\alpha(1 - \mu) \qquad (13)$$

Ответ: $\oint \vec{H}d\vec{S} = = \frac{\pi R^2 B\cos\alpha}{\mu_0\mu}(\mu - 1)$; $\oint\limits_{\Gamma} \vec{B}d\vec{r} = Bl\sin\alpha(1 - \mu)$.

Задание №2. Круговой контур с током лежит на плоской границе вакуума и магнетика. Проницаемость последнего равна μ. Найти индукцию $\vec{B}$ магнитного поля в произвольной точке на оси контура, если индукция поля в этой точке в отсутствие магнетика равна $\vec{B}_0$. Обобщить полученный результат на все поле.

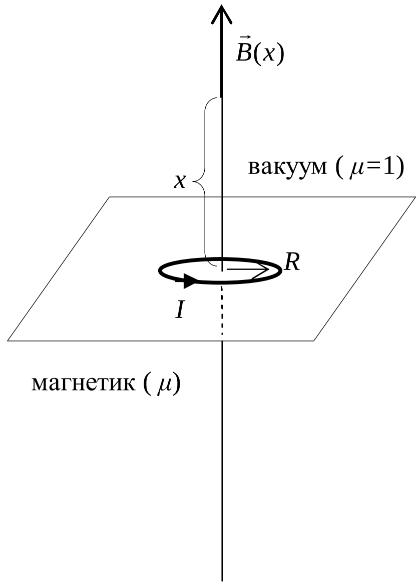


рис.7

Решение:

Так как по условию задачи причиной возникновения магнитного поля является ток, текущий по круговому контуру, находящемуся на границе раздела вакуум – магнетик, то можно считать, что вектора магнитной индукции и напряженности магнитного поля имеют только нормальную компоненту в любой точке на оси, проходящей через центр кругового тока и перпендикулярной к нему. Тангенциальные компоненты в данном случае оказываются взаимно скомпенсированными. Для соответствующих напряженностей при этом выполняется закон полного тока (Эрстеда):

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = I \qquad (1)$$

Учитывая, что магнитное поле возникает на границе раздела сред интеграл (1) распадается на сумму двух интегралов, соответственно в вакууме и магнетике:

$$\int_0^\infty H_{0n}dl + \int_0^\infty H_n dl = I \qquad (2)$$

где dl - элемент силовой линии, проходящей через центр кругового тока, вдоль которой циркулирует вектор напряженности магнитного поля.

Выразим напряженности через соответствующее значение вектора магнитной индукции $\vec{B}$, как в вакууме, так и в магнетике:

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \qquad (3)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu} \qquad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2) и считая, что магнетик изотропная среда получаем:

$$\int_0^\infty \frac{B}{\mu_0}dl + \int_0^\infty \frac{B}{\mu_0\mu}dl = I \qquad (5)$$

Объединив интегралы в левой части (5), получаем:

$$\left(\frac{\mu+1}{\mu_0\mu}\right)\int_0^\infty Bdl = I \qquad (6)$$

С другой стороны в отсутствии магнетика закон полного тока примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_0}{\mu_0} dl = 2\int_{0}^{\infty} \frac{B_0}{\mu_0} dl = I \qquad (7)$$

Сравнивая левые части (7) в (6) и учитывая, что интегрирование ведется по одной и той же переменной, получаем:

$$B = B_0 \frac{2\mu}{\mu + 1} \qquad (8)$$

При учете сонаправленности векторов магнитной индукции вдоль оси кругового тока (как было сказано ранее это только нормальные компоненты) соотношение (8) может быть переписано в векторной форме:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \frac{2\mu}{\mu + 1} \qquad (9)$$

Ответ: $\vec{B} = \vec{B}_0 \dfrac{2\mu}{\mu + 1}$.

Электромагнитная индукция и уравнения Максвелла Справочный материал к тестированию по теме

Под **электромагнитной индукцией (ЭМИ)** понимают явление возникновения индукционного тока в проводящем контуре при изменении магнитного потока пронизывающего этот контур. Причем, в соответствии с **правилом Ленца**, индукционный ток имеет такое направление, что его магнитное поле препятствует изменению потока внешнего поля. Наличие индукционного тока говорит о действии в контуре **сторонних (немагнитных) сил**, приводящих к его возникновению. Эти сторонние силы имеют электрическую природу и их силовые линии являются замкнутыми и проходят вдоль линии проводящего контура. **Электродвижущая сила индукции** пропорциональна скорости изменения потока магнитной индукции с противоположным знаком. **Отрицательный знак потока** обеспечивает выполнение правила Ленца.

Если поток пронизывает не один контур, а несколько связанных контуров (например, в катушке индуктивности), то его можно представить в виде алгебраической суммы потоков пронизывающих отдельные контуры. В этом случае его рассматривают как **потокосцепление**.

В массивных проводниках площадь поперечных сечений велика, а, следовательно, сопротивление мало. Поэтому изменение магнитного потока, пронизывающего такой проводник, приводит к возникновению индукционных токов большой силы – **токов Фуко**. Токи Фуко являются **вихревыми**, так как не имеют источников. Они могут играть как положительную, так и отрицательную роль в технике. Так, токи Фуко используются в индукционных печах для плавления металлов. С помощью них можно осуществлять демпфирование (успокоение) колеблющихся частей прибора, например стрелки измерительного устройства. С другой стороны они могут оказывать разрушающее воздействие на проводник.

Под **самоиндукцией** понимают явление возникновения индукционного тока в контуре, по которому течет переменный основной ток. Вследствие постепенного изменения значения тока, происходит изменение пронизывающего магнитного потока. В результате возникает индукционный ток, магнитное поле которого препятствует изменению магнитного потока через контур: индукционный ток сонаправлен с основным, если тот уменьшается, и противоположен, если увеличивается. Коэффициент, связывающий поток пронизывающий контур с током в контуре называют **коэффициентом самоиндукции**. Он зависит только от геометрии контура и электромагнитных свойств окружающей среды.

Явление **взаимоиндукции** наблюдается тогда, когда в пространстве имеются два или более контура по одному из которых течет переменный электрический ток. Оно связано с тем, что переменный ток порождает переменный магнитный поток, пронизывающий второй контур, который и приводит к возникновению переменного индукционного тока в нем, препятствующего изменению основного тока. **Коэффициент взаимоиндукции** зависит не только от геометрии контуров и природы сердечников их соединяющих, но и от величин токов в них. Однако в частном случае, когда длины и поперечные сечения контуров одинаковы, а сердечник не является ферромагнетиком, коэффициент взаимоиндукции определяется довольно простым соотношением, сходным по форме с коэффициентом самоиндукции и зависит только от геометрии контуров.

Уравнения Максвелла устанавливают прочную и глубокую связь между электрическими и магнитными явлениями, объединяя их в одну теорию. Уравнения Максвелла представляют собой собранные воедино и дополненные основные законы электричества и магнетизма и образуют исчерпывающую систему уравнений, описывающую электромагнитные явления. Дополнения были сделаны для закона полного тока (закона Эрстеда) и закона электромагнитной индукции (закона Фарадея). Чтобы закон полного тока выполнялся не только для постоянных токов, но и для переменных было введено понятие **тока смещения**. **Ток смещения**, по сути, является изменяющимся во времени электрическим полем в вакууме или в веществе. В законе Фарадея помимо вихревого электрического поля, связанного с действием электродвижущей силой индукции, необходимо учитывать и потенциальное поле, созданное неподвижными зарядами.

Уравнения Максвелла состоят из двух пар основных уравнений и трех дополнительных – материальных уравнений. К дополнительным уравнениям относят и уравнение непрерывности (закон сохранения заряда). Первая пара уравнений связывает вектор магнитной индукции $\vec{B}$ и напряженность электрического поля $\vec{E}$. Она содержит дополненный закон Фарадея и условие замкнутости силовых линий магнитного поля (замкнутость линий говорит о том, что в природе не существует соответствующих зарядов). Вторая пара уравнений связывает вектора электрического смещения $\vec{D}$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}$. К данной паре уравнений относится закон полного тока и теорема Гаусса для $\vec{D}$. Материальные уравнения включают в себя закон Ома в дифференциальной форме и уравнения, связывающие вектора соответствующих полей: электрического ($\vec{D}$ и $\vec{E}$) и магнитного ($\vec{B}$ и $\vec{H}$).

Основные соотношения:

Закон ЭМИ для контура: $\mathrm{E}_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

Потокосцепление: $\Psi = \sum\limits_i \Phi_i$

Закон ЭМИ для катушки индуктивности (соленоида): $\mathrm{E}_i = -\dfrac{d\Psi}{dt}$

Связь между магнитным потоком и основным током в контуре: $\Phi = LI$,

где L - коэффициент самоиндукции (индуктивность), I - сила основного тока.
Связь между магнитным потоком и основным током в соленоиде: $\Psi = LI$

Индуктивность соленоида: $L = \mu_0 \mu\, n^2 l S$

где n - число витков на единице длины катушки (соленоида), S - площадь сечения соленоида, а l - его длина.

ЭДС самоиндукции (в отсутствии ферромагнетика): $\mathrm{E}_s = -L\dfrac{dI}{dt}$

Коэффициент взаимоиндукции в отсутствии ферромагнетиков при одинаковом сечении S и длине l: $L_{12} = L_{21} = \mu_0 \mu N_1 N_2 \dfrac{S}{l}$

Энергия магнитного поля электрического тока: $W = \dfrac{LI^2}{2}$

Плотность энергии магнитного поля: $\omega = \dfrac{\mu_0 \mu H^2}{2}$

Энергия связанных контуров с током: $W = \frac{1}{2}\sum L_{ik} I_i I_k$

Плотность тока смещения: $\vec{j} = \dfrac{d\vec{D}}{dt}$

Первая пара уравнений Максвелла:

закон ЭМИ (Фарадея): $rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

дивергенция вектор магнитной индукции: $div\vec{B} = 0$

Вторая пара уравнений Максвелла:

закон полного тока (Эрстеда): $rot\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

теорема Гаусса для $\vec{D}$: $div\vec{D} = \rho$

Дополнительные уравнения:

Закон Ома в дифференциальной форме: $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$

Связь между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$: $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$

Связь между векторами $\vec{B}$ и $\vec{H}$: $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$

Уравнение непрерывности (закон сохранения заряда): $div\vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Первые три уравнения являются материальными, четвертое – нет.

Используя теоремы Стокса и Гаусса – Остроградского можно уравнения Максвелла представить в интегральной форме. Тогда для первой и второй пары уравнений имеем:

закон ЭМИ: $\oint \vec{E} d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S}$

поток магнитного поля через замкнутую поверхность: $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$

закон полного тока: $\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \dfrac{d}{dt}\int_S \vec{D} d\vec{S}$

Поток электрического поля через замкнутую поверхность: $\oint \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho\, dV$

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. Явлением электромагнитной индукции называют явление возникновения _________ в контуре при изменении пронизывающего его магнитного потока.
2. Закон Фарадея соответствует соотношению ________.
3. В массивных проводниках при изменении потока пронизывающего контур возникают _________.
4. Что такое демпфирование?
5. Формула для индуктивности соленоида имеет вид _______.
6. При увеличении основного положительного тока в контуре индукционный ток направлен _____.
7. Ток смещения определяется соотношением ______.
8. Первое уравнение первой пары уравнений Максвелла является законом _______ и имеет вид _______ (в дифференциальной форме).
9. Материальное уравнение, связующее вектора магнитной индукции и напряженности магнитного поля определяется выражением ______.
10. Закон полного тока в интегральной форме имеет вид ______.

ТЕСТ№2

1. Явлением ЭМИ называют явление возникновения индукционного тока в контуре при ____.
2. Знак минус в законе Фарадея указывает на то, что индукционный ток имеет такое направление, при котором ________.
3. Потокосцепление в соленоиде равно _______.
4. ЭДС самоиндукции в отсутствии ферромагнетика определяется соотношением _________.
5. Являются ли обычные заряды источниками токов Фуко?
6. Второе уравнение второй пары уравнений Максвелла имеет вид _______.
7. Плотность энергии магнитного поля описывается соотношением _______.
8. В законе ЭМИ учитываются не только вихревые электрические поля, но и _______.
9. Первое уравнение во второй паре уравнений Максвелла представляет ________ и в дифференциальной форме имеет вид ______.
10. Поток магнитной индукции в интегральной форме описывается уравнением _____.

ТЕСТ№3

1. Правило Ленца гласит, что индукционный ток имеет такое направление, при котором его _________.
2. ЭДС индукции в замкнутом контуре определяется соотношением _______.
3. Для плавления металлов в индукционных печах используют ________.
4. Явление возникновения индукционного тока в уединенном контуре, по которому течет переменный основной ток, называют _________.
5. Что представляет собой ток смещения?
6. Коэффициент взаимоиндукции в отсутствии ферромагнетика имеет вид ______.
7. Энергия магнитного поля проводника с электрическим током может быть рассчитана по формуле _______.

8. Закон ЭМИ в интегральной форме имеет вид ______.
9. При уменьшении основного положительного тока в контуре, возникающий в нем индукционный ток является __________ с основным током.
10. Поток электрического поля через замкнутую поверхность в интегральной форме определяется соотношением.

ТЕСТ№4

1. Явление возникновения индукционного тока в контуре при протекании переменного тока в близкорасположенном параллельном контуре называют __.
2. Каким по величине является сопротивление массивных проводников?
3. Сторонние силы, приводящие к возникновению индукционного тока, имеют _______ природу.
4. ЭДС индукции пропорционально ________.
5. ЭДС самоиндукции можно найти по формуле ________.
6. Материальное уравнение, связывающее вектор электрического смещения с напряженностью электрического поля имеет вид ________.
7. Теорема Гаусса в дифференциальной форме определяется выражением ______.
8. Закон сохранения заряда (уравнение непрерывности) соответствует уравнению вида ________.
9. Закон Фарадея в интегральной форме определяется соотношением ________.
10. Поток магнитного поля через замкнутую поверхность всегда равен ________.

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1. Квадратную рамку со стороной a поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью v в магнитном поле бесконечного линейного проводника, лежащего в одной плоскости с рамкой. Найти ЭДС индукции в рамке как функцию расстояния x.

Решение:

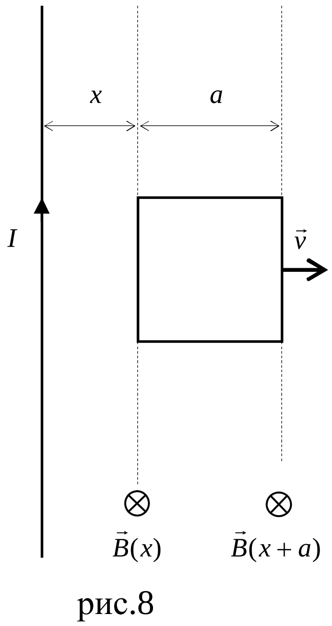


рис.8

Бесконечный линейный проводник с током создает магнитное поле, вектора индукции которого являются перпендикулярными к рамке. Причем, исходя из формулы для вектора магнитной индукции бесконечного прямого провода, полученной из закона БСЛ, магнитное поле монотонно убывает с ростом расстояния от проводника. Это означает, что поле пронизывающее рамку оказывается неоднородным: поле у ближней стороны рамки по отношению к проводнику с током больше поля у дальней стороны.

В соответствии с рисунком магнитная индукция у ближней стороны рамки определяется соотношением:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \tag{1}$$

Тогда у дальней стороны вектор магнитной индукции равен:

$$B(x+a)=\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)} \qquad (2)$$

Монотонное изменение вектора магнитной индукции вдоль направления перемещения рамки можно охарактеризовать с помощью отношения:

$$\frac{\Delta B}{\Delta x}=\frac{B(x+a)-B(x)}{a} \qquad (3)$$

Отсюда изменение магнитной индукции с учетом (1) – (3) имеет вид:

$$\Delta B=-\frac{\mu_0 I\Delta x}{2\pi x(x+a)} \qquad (4)$$

ЭДС индукции возникает в рамке вследствие ее равномерного перемещения в неоднородном магнитном поле и определяется в соответствии с законом ЭМИ (Фарадея):

$$\mathrm{E}_i=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad (5)$$

Поток магнитной индукции характеризует число линий пронизывающих контур и определяется скалярным произведением векторов магнитной индукции и площади. В нашем случае площадка перпендикулярна векторам магнитной индукции, следовательно:

$$\Phi=\left(\vec{B},\vec{S}\right)=BS \qquad (6)$$

Изменение потока может быть связано только с изменением значений векторов магнитной индукции при поступательном перемещении рамки. При этом площадь рамки остается неизменной и (6) принимает вид:

$$\Delta\Phi=\Delta B\cdot S \qquad (7)$$

Площадь квадратной рамки со стороной a определяется соотношением:

$$S=a^2 \qquad (8)$$

Подставим (7) и (8) в (5) и получим:

$$\mathrm{E}_i=-\frac{\Delta B\cdot a^2}{\Delta t} \qquad (9)$$

Далее, заменяя в (9) ΔB на соответствующее ему выражение, находим:

$$\mathrm{E}_i=\frac{\mu_0 I a^2}{2\pi x(x+a)}\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (10)$$

В соотношении (10) $\frac{\Delta x}{\Delta t}=\mathrm{v_x}=\mathrm{v}$ - скорости поступательного движения рамки. Следовательно, это соотношение примет вид:

$$\mathrm{E}_i=\frac{\mu_0 I a^2}{2\pi x(x+a)}\cdot\mathrm{v}$$

Ответ: $\mathrm{E}_i=\frac{\mu_0 I a^2}{2\pi x(x+a)}\cdot\mathrm{v}$

Задание №2. Показать, что из уравнений Максвелла следует закон сохранения электрического заряда, т.е. $div\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$.

Решение:

Получим закон сохранения электрического заряда, используя вторую пару уравнений Максвелла: теорему Гаусса в дифференциальной форме и закон полного тока. Закон полного тока имеет вид:

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (1)$$

Возьмем от обеих частей (1) дивергенцию:

$$div(rot\vec{H}) = div\vec{j} + div\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \qquad (2)$$

Учитывая, что дифференцирование по времени и пространству в нерелятивистской механике ведется независимо, получаем:

$$div(rot\vec{H}) = div\vec{j} + \frac{\partial\left(div\vec{D}\right)}{\partial t} \qquad (3)$$

По теореме Гаусса:

$$div\vec{D} = \rho \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим:

$$div(rot\vec{H}) = div\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (5)$$

Дивергенцию и ротор можно переписать через соответствующие скалярные и векторные произведения оператора набла на заданный вектор:

$$div(rot\vec{H}) = \left(\nabla, \left[\nabla, \vec{H}\right]\right) \qquad (6)$$

Используя свойства смешанного произведения в (6), найдем:

$$\left(\nabla, \left[\nabla, \vec{H}\right]\right) = \left(\vec{H}, [\nabla, \nabla]\right) \qquad (7)$$

Векторное произведение двух равных векторов всегда равно нулю, так как они параллельны или совпадают и угол между ними 0, либо π .Отсюда следует что (7) также равно нулю:

$$\left(\vec{H}, [\nabla, \nabla]\right) = 0 \qquad (8)$$

Учитывая (6) – (8) и (3), получим:

$$0 = div\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (9)$$

Отсюда: $div\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, что и **требовалось доказать**.

Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. Классическая теория электропроводности Справочный материал к тестированию по теме

Как известно, заряженные частицы в электромагнитном поле движутся под действием **силы Лоренца**, которая является суперпозицией электрической и магнитной сил. Электрические и магнитные поля способны оказывать как **ускоряющие**, так и **отклоняющие воздействия** на потоки частиц в зависимости от их собственных характеристик: масс и электрических зарядов, а также от значений и направлений начальных скоростей. Влияние электрических и магнитных полей на заряды широко используется в электронной и ускорительной технике не только для их ускорения, но и для управления их потоками. Очень важными в электронной технике являются следующие частные случаи взаимного направления полей и скоростей частиц: частица в продольных и поперечных полях, частица влетает под углом к силовой линии магнитного поля.

Если на заряженную частицу действует только **продольное электрическое поле** (скорость сонаправлена с вектором напряженности электрического поля), то оно оказывает только ускоряющее или замедляющее воздействие. Отклоняться частица в таком поле не будет, и ее траекторией является прямая линия. При действии **поперечного электрического поля** (скорость перпендикулярна вектору напряженности электрического поля), частица не только ускоряется, но и испытывает отклоняющее воздействие. Траекторией частицы является ветвь параболы. Движение заряженной частицы в поперечном электрическом поле можно рассматривать как движение заряда в конденсаторе, когда он влетает параллельно его пластинкам. Если ось ОХ направить вдоль пластинок, а OY сонаправить с электрическим полем, то окажется, что в направлении оси ОХ на частицу ничего не действует и она движется прямолинейно и равномерно, а вдоль оси OY испытывает отклонение, так как движется равноускоренно.

Из определения **силы Лоренца**, в случае, когда на частицу действует только **продольное магнитное поле**, следует, что она **равна нулю**, то есть такое поле никакое влияние на частицу не оказывает. Заряженная частица в таком поле движется равномерно и прямолинейно. Если **магнитное поле** является **поперечным**, то **сила Лоренца** имеет **максимальное значение** и сообщает частице **нормальное ускорение** – частица движется по окружности относительно силовой линии магнитного поля в плоскости перпендикулярной ей. Радиус и период окружности зависят от величины поля. Когда частица попадает **в магнитное поле под углом к его силовым линиям**, ее траекторией является **спираль**. Чтобы описать такое движение необходимо вектор скорости заряда разложить на две составляющие: совпадающую с направлением поля и поперечную ему. Первая приводит к равномерному прямолинейному движению, а вторая к равномерному по окружности. При наложении этих движений получается спиралевидная траектория с постоянным шагом спирали.

Классическая теория электропроводности была создана Друде и доработана Лоренцем. Как известно, металлы проводят электрический ток из-за наличия в них **свободных электронов**. Экспериментальным доказательством этого факта стали результаты опытов Мандельштама и Папалекси, а также Толмена и Стюарта.

Суть этих опытов заключается в том, что при резком торможении равномерно вращающейся катушки из проводящего материала, заряды по инерции будут продолжать свое упорядоченное движение. В результате в электрической цепи с катушкой некоторое время будет протекать электрический ток. Зафиксировав полный заряд и зная такие характеристики материала как сопротивление, длину провода и скорость вращения катушки, можно найти значение удельного заряда частиц создающих ток. Оказалось этот удельный заряд (отношение заряда к массе частицы) равен удельному заряду электрона.

Друде предположил, что электроны проводимости в металле ведут себя подобно молекулам идеального газа. В промежутках между столкновениями с узлами кристаллической решетки они движутся свободно с некоторой длиной свободного пробега λ. При этом между собой электроны не сталкиваются. Столкновение электронов с узлами кристаллической решетки приводят к установлению теплового равновесия между решеткой и электронным газом.

Использование классической теории электропроводности позволило вскрыть природу электрического сопротивления проводников и оценить удельные значения сопротивления и проводимости, получить значение удельной тепловой мощности, соответствующей закону Джоуля – Ленца, установить взаимосвязь между электропроводностью и теплопроводностью металла, которая определяется экспериментальным законом Видемана – Франца.

Однако при построении этой теории возник ряд затруднений. Так, например, из формулы, полученной в классической теории для удельного сопротивления, следует, что оно увеличивается с ростом температуры как $\sqrt{T}$. Эксперимент же показывает, что эта зависимость является линейной. Другое противоречие возникает при расчете молярных теплоемкостей проводников. Из эксперимента она имеет примерно такое же значение, как и теплоемкость диэлектриков. Расчет, основанный на классической теории электропроводности, дает результат в 1,5 раза больший. Эти противоречия были решены только в результате создания квантовой теории электропроводности.

Одним из важных гальваномагнитных явлений, объяснимых в рамках электронной теории, стал **эффект Холла**. Он был открыт в 1879 г. **Эффект Холла** состоит в том, что при протекании электрического тока в проводнике, помещенном в магнитное поле, вектор магнитной индукции которого перпендикулярен току, в направлении перпендикулярном плоскости вектора магнитной индукции и плотности электрического тока возникает, так называемая холловская разность потенциалов. Она зависит от величины вектора магнитной индукции B, плотности тока j, ширины проводника b, определяемой в направлении перпендикулярном векторам $\vec{B}$ и $\vec{j}$. Эффект Холла наблюдается не только в металлах, но и в полупроводниках, причем по знаку эффекта (холловской разности потенциалов) можно судить о принадлежности полупроводника к n или p – типу проводимости.

Основные соотношения:

Сила Лоренца в векторной форме: $\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]$

Ускорение заряженной частицы q в электростатическом поле E: $a = \dfrac{qE}{m}$

Уравнение движения в поперечном электростатическом (ЭС) поле: $y = \dfrac{qEx^2}{2m{\upsilon_0}^2}$

Скорость υ частицы в поперечном ЭС поле E

в любой момент времени t: $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + \dfrac{q^2E^2t^2}{m^2}$

Радиус кривизны траектории заряженной частицы q, влетающей со скоростью υ в поперечное магнитное поле B: $r = \dfrac{m\upsilon}{qB}$

Период обращения частицы в поперечном магнитном поле: $T = \dfrac{2\pi m}{qB}$

Так как период обращения частицы не зависит от скорости, то он будет таким же для случая, когда частица влетает под углом α к вектору $\vec{B}$ и движется вдоль спирали с постоянным шагом h. Кроме того для этого случая:

радиус кривизны: $r = \dfrac{m\upsilon\sin\alpha}{qB}$

шаг спирали: $h = \dfrac{2\pi m\upsilon\cos\alpha}{qB}$

Проводимость с точки зрения

классической теории электропроводности: $\sigma = \dfrac{ne^2\lambda}{2mv}$,

где n - концентрация электронов проводимости, v - тепловая скорость электронов.

Удельная тепловая мощность (закон Джоуля - Ленца): $Q_{уд} = \dfrac{ne^2\lambda}{2mv}E^2$

Связь между **теплопроводностью**

и проводимостью (Закон Видемана - Франца): $\dfrac{\chi}{\sigma} = \dfrac{kmv^2}{e^2} = 3T\left(\dfrac{k}{e}\right)^2$

Холловская разность потенциалов: $U_H = RbjB$,

где R - постоянная Холла, равная: $R = \dfrac{1}{ne}$

Подвижность зарядов с дрейфовой скоростью u: $u_0 = \dfrac{u}{E}$

Связь между проводимостью и подвижностью: $\sigma = neu_0$

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

Тест№1

1. Силой Лоренца называют силу, действующую со стороны электромагнитного поля на ______.
2. В поперечном магнитном поле траектории частицы является _______.
3. Уравнение движения Заряженной частицы в поперечном электростатическом поле имеет вид ______.
4. Период обращения частицы в поперечном магнитном поле определяется формулой ______.
5. Действует ли на заряженную частицу продольное магнитное поле?
6. За счет чего металлы проводят электрический ток?
7. От чего зависит подвижность зарядов?
8. Как, с точки зрения классической теории, удельное сопротивление зависит от температуры?
9. Соотношение для эффекта Холла имеет вид _______.
10. Что можно определить по знаку эффекта Холла для полупроводников?

ТЕСТ№2

1. Чему равна сила Лоренца?
2. Действует ли сила Лоренца на нейтральные частицы?
3. Какое воздействие оказывает электростатическое, продольное поле?
4. Ускорение, получаемое частице в продольном электростатическом поле, равно ______
5. Шаг спирали, по которой движется заряженная частица, попадая в магнитное поле под углом, определяется соотношением _______.
6. Чему равна постоянная Холла?
7. Может ли возникнуть эффект Холла в отсутствии магнитного поля? Дайте пояснение.

8. Как определяется удельная тепловая мощность с точки зрения классической теории электропроводности? (формула)
9. Связь между проводимостью и подвижностью имеет вид _______.
10. Друде предположил, что электроны проводимости в металле ведут себя подобно _______.

ТЕСТ№3

1. Сила Лоренца в отсутствии электрической составляющей имеет вид ________.
2. Траекторией заряженной частицы в продольном электростатическом поле является _______.
3. Чему равен радиус кривизны траектории заряженной частицы в поперечном магнитном поле?
4. Как найти скорость электрона в поперечном электростатическом поле в любой точке траектории?
5. При каких условиях магнитная часть силы Лоренца имеет максимальное значение? Чему оно равно?
6. Холловская разность потенциалов определяется соотношением _______.
7. Существует ли связь между теплопроводностью и проводимостью металлов? Если да, то какова она?
8. Может ли наблюдаться эффект Холла если заряды проводника, помещенного в магнитное поле, покоятся? Почему?
9. Какова экспериментальная зависимость удельного сопротивления от температуры?
10. С ростом напряженности электростатического поля подвижность _______.

ТЕСТ№4

1. Сила Лоренца в отсутствии магнитной составляющей имеет вид _______.
2. Траекторией заряженной частицы в поперечном электростатическом поле является _______.
3. Чему равен радиус кривизны траектории заряженной частицы, скорость которой направлена под углом к линиям магнитного поля?
4. Зависит ли период обращения заряженной частицы в магнитном поле от ее скорости?
5. При каких условиях магнитная часть силы Лоренца имеет минимальное значение? Чему оно равно?
6. О типе проводимости полупроводника можно судить по _________.
7. С ростом температуры удельное сопротивление металла _______.
8. Чем больше подвижность носителей заряда, тем проводимость металла _______.
9. С чем испытывает соударения свободный электрон в свете классической теории электропроводности?
10. К какого роду физических явлений относиться эффект Холла?

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1. При измерении эффекта Холла в медном проводнике, помещенном в магнитное поле с индукцией $B = 100$ мТл, напряженность поперечного электрического поля у данного проводника оказалась в $\eta = 3{,}1 \cdot 10^3$ раз меньше напряженности продольного электрического поля. Найти подвижность электронов.

Решение:

По определению подвижность носителей определяется формулой:

$$u_0 = \frac{u}{E} \qquad (1)$$

где $E = E_{II}$ - напряженность обычного ускоряющего поля, обусловленная созданной на концах проводника разностью потенциалов. Она отвечает продольной компоненте результирующего поля в эффекте Холла.

Поперечная компонента напряженности характеризует так называемое эквивалентное электрическое поле, связанное с действием магнитной силы на движущиеся заряды и выражается из следующих соотношений:

$$F_{м} = euB \qquad (2)$$

$$F^{*}_{эл} = eE_{\perp} \qquad (3)$$

Магнитная сила перпендикулярна плоскости векторов дрейфовой скорости и магнитной индукции (см. рисунок к задаче). Поперечная компонента для отрицательных носителей заряда противоположна вектору магнитной силы.

Эквивалентное электрическое поле подбирается таким образом, чтобы соответствующая ему сила была равна магнитной:

$$F_{м} = F^{*}_{эл} \qquad (4)$$

$$uB = E_{\perp} \qquad (5)$$

Из (5) находим выражение для дрейфовой скорости:

$$u_0 = \frac{E_{\perp}}{E_{II}B} \qquad (6)$$

Так как по условию $\frac{E_{\perp}}{E_{II}} = \frac{1}{\eta}$, то (6) примет вид:

$$u_0 = \frac{1}{\eta B} \qquad (7)$$

Подставляя значения соответствующих физических величин, получаем для подвижности следующее значение:

$u_0 = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ м^2/В·с

Ответ: $u_0 = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ м^2/В·с

Задание №2. Катушка радиуса $r = 25$ см, содержащая $l = 500$ м тонкого медного провода, вращается с угловой скоростью $\omega = 300$ рад/с вокруг своей оси. Через скользящие контакты катушка подключена к баллистическому гальванометру. Общее сопротивление всей цепи $R = 21$ Ом. Найти удельный заряд носителей тока в меди, если при резком торможении катушки через гальванометр проходил заряд $q = 10$ нКл.

Решение:

Постановка задачи соответствует опыту, проведенному в свое время Мандельштамом и Папалекси. Этот опыт подтвердил гипотезу классической теории электропроводности о том, что электрический ток в металлах переноситься свободными электронами.

Рассмотрим выделенный свободный электрон в данном медном проводнике. В нашем случае, механическая работа, действующая на каждый свободный электрон при резком торможении катушки, соответствует электростатической работе над ним:

$$A_{мех} = A_{эс} \qquad (1)$$

Механическая работа, совершаемая над каждым электроном, определяется соотношением:

$$A_{мех} = N\varphi \qquad (2)$$

где N - модульное значение момента вращающей силы, возникающей при торможении, а φ - полный угол поворота.

$$N = Fr = ma_{\tau}r \qquad (3)$$

где m - масса электрона, a_{τ} - тангенциальная компонента полного ускорения, всегда направленная по касательной в произвольной точке траектории. Так как электрон при торможении движется вдоль всего проводника равнозамедленно, то:

$$a_{\tau} = \frac{2l}{t^2} \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), а затем (3) в (2) получаем окончательное выражение для механической работы:

$$A_{мех} = mr\frac{2l}{t^2}\varphi \qquad (5)$$

Электростатическая работа над свободным электроном определяется соотношением:

$$A_{эс} = eU = eIR = e\frac{q}{t}R \qquad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (1) получаем:

$$mr\frac{2l}{t^2}\varphi = e\frac{q}{t}R \qquad (7)$$

Из (7) находим удельный заряд:

$$\frac{e}{m} = \frac{2lr\varphi}{qRt} \qquad (8)$$

Определим время t в (8), используя уравнения равнозамедленного вращательного движения, приводящего к остановке объекта:

$$\omega = \beta t \qquad (9)$$

$$\varphi = \frac{\beta t^2}{2} = \frac{\omega t}{2} \qquad (10)$$

Используя (10) получаем:

$$t = \frac{2\varphi}{\omega} \qquad (11)$$

Подставляя (11) в (8), находим окончательное выражение для удельного заряда свободного электрона:

$$\frac{e}{m} = \frac{2lr\varphi\omega}{2qR\varphi} = \frac{lr\omega}{qR} \qquad (12)$$

При подстановке значений физических величин в (12), находим:

$$\frac{e}{m} = 1{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{Кл/кг}$$

Ответ: $\frac{e}{m} = 1{,}8 \cdot 10^{11}$ Кл/кг

Электрические колебания. Переменный ток
Справочный материал к тестированию по теме

Электрические колебания представляют собой смещение значений физических величин, характеризующих ток, с течением времени относительно некоторого их основного значения.

Такие временные изменения могут быть как малыми, так и большими по амплитудным значениям. Малые колебания являются **гармоническими**, то есть совершаются в соответствии с законами синуса и косинуса. Кроме того, колебания могут проходить с различной частотой. В случае колебаний электрических величин с относительно малой частотой связь между их мгновенными значениями может описываться законами Ома и правилами Кирхгофа, полученными для постоянного тока. Если за время $\tau = l/c$, необходимое для передачи возмущения в самую дальнюю точку цепи, сила тока изменяется незначительно, то мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи будут практически одинаковыми. Токи, удовлетворяющие такому условию, называются **квазистационарными**. Для квазистационарных токов законы Ома и правила Кирхгофа выполняются всегда. Условием квазистационарности является условие вида: $\tau << T$, где T - период изменения значений физических величин.

Идеальные электрические колебания возможны в **идеальном электрическом контуре**, состоящем из конденсатора и катушки индуктивности, сопротивлением которых можно пренебречь. Идеальные электрические колебания описываются уравнениями сходными с уравнением идеальных механических колебаний. Однако в отличие от механики в этих уравнениях отслеживается изменение таких величин как ток I, заряд q, напряжение U и т.д. Решением таких уравнений является гармоническая функция. В решение можно выделить постоянную амплитуду (т.е. идеальные колебания не затухают), частоту, начальную фазу колебания и его общую фазу в данный момент времени. Колебания в идеальном колебательном контуре приводят к полному преобразованию электрической энергии конденсатора в магнитную энергию катушки и наоборот. Такие преобразования энергии связаны с такими физическими явлениями как накопление заряда на конденсаторе и самоиндукцией в катушке. Период T идеальных колебаний описывается формулой Томсона. Он, как и частота ω_0 электрических колебаний, зависят от значений электроемкости конденсатора C и индуктивности катушки L.

На самом деле все электрические контуры обладают определенным активным сопротивлением и, следовательно, не могут быть абсолютно идеальными. В таких контурах колебания являются затухающими. Учет затухания приводит к тому, что амплитуда колебания уменьшается по экспоненциальному закону, а в уравнении свободных затухающих колебаний появляется слагаемое, связанное с затуханием. **Причиной затухания** является **выделение некоторого тепла на активном сопротивлении**, приводящее к диссипации энергии. **Свободные затухающие колебания** происходят либо с собственной частотой ω_0 (при бесконечно малом коэффициенте затухания β), либо с меньшей частотой, близкой к собственной.

Затухание характеризуется логарифмическим декрементом затухания, который является величиной обратной числу колебаний совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз. Величиной обратной декременту затухания является **добротность контура**. Она тем выше, чем больше колебаний произойдет до того момента как амплитуда уменьшиться в e раз. В случае слабого затухания добротность растет с уменьшением значения активного сопротивления и с ростом отношения индуктивности к электроемкости.

Вынужденные колебания возникают тогда, когда на систему оказывается периодическое воздействие с определенной частотой. **Частота вынужденных колебаний** совпадает с частотой вынуждающей силой. **Амплитуда вынужденных колебаний** определяется значением вынуждающей силы в числителе и разностью квадратов собственной ω_0 и вынужденной ω частот в знаменателе. Для вынужденных колебаний возможны резонансные явления. **Резонанс электрических колебаний** связан с резким возрастанием значений колеблющихся физических величин в случае совпадения собственной и вынужденной частоты.

Электрическая система, в которой могут происходить свободные затухающие или вынужденные колебания, называется RLC – контуром (цепью). Все электрические цепи не бывают идеальными и обладают определенными емкостями, индуктивностями и активными сопротивлениями. Ток I на емкости опережает по фазе $(\pi/2)$ напряжение U_C в силу того, что для накопления заряда на обкладках конденсатора первичным должно быть протекание тока в цепи. Ток I на индуктивности возникает за счет явления самоиндукции, следовательно, он отстает по фазе $(\pi/2)$ от напряжения U_L. На активном сопротивлении ток I и напряжение U_R совпадают. Ток и соответствующие напряжения можно изобразить в виде векторов, соответствующей длины, на плоскости с учетом обозначенных выше фаз. В результате получается так называемая векторная диаграмма. Полное напряжение U в RLC – контуре определяется как векторная сумма напряжений на всех элементах этого контура. Фаза между полным напряжением и током определяется из этой диаграммы, как $tg\varphi = |U_C - U_L|/U_R$. Амплитудные значения тока и полного напряжения связаны друг с другом через **полное электрическое сопротивление (импеданс)**. Емкостное и индуктивное сопротивления называют **реактивными сопротивлениями**. Если в цепи отсутствует активное сопротивление R, то полное сопротивление называют **реактансом.**

Мощность переменного тока тоже является переменной величиной и колеблется около среднего значения с частотой в два раза превышающей частоту тока (напряжения). **Среднее значение мощности** зависит не только от амплитудных значений тока и напряжения в контуре, но и от фазы между полным напряжением и током.

Основные соотношения:

Полная энергия в идеальном колебательном контуре: $W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}$

Формула Томсона: $T = 2\pi\sqrt{LC}$

Связь между амплитудными значениями между током и напряжением в идеальном контуре: $U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m$

Уравнение колебаний в идеальном контуре для заряда: $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Решение уравнения колебаний для заряда

в идеальном контуре: $q = q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$

Аналогичные выражения можно получить для тока и напряжения, учитывая, что напряжение имеет ту же фазу что и заряд, а фаза тока отличается на $(\pi/2)$.

Уравнение свободных затухающих колебаний

для заряда в контуре: $\ddot{q} + 2\beta\,\dot{q} + \omega_0^2\, q = 0$, $\beta = \dfrac{R}{2L}$

Решение уравнения

затухающих колебаний: $q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Напряжение изменяется по тому же закону, как и заряд, а колебания тока происходят со сдвигом по фазе большим, чем $(\pi/2)$.

Определение для логарифмического

декремента затухания: $\lambda = \beta T = \dfrac{1}{N_e}$

Логарифмический декремент затухания

в случае, когда $(\omega^2{}_0 >> \beta^2)$: $\lambda = \pi R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

Определение добротности колебательной системы: $Q = \dfrac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$

Добротность электрического контура в случае $(\omega^2{}_0 >> \beta^2)$: $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

Уравнение вынужденных колебаний

в RLC – контуре: $\ddot{q} + 2\beta\,\dot{q} + \omega_0^2\, q = \dfrac{U_m}{L}\cos\omega t$

Частное решение уравнения вынужденных колебаний электрического заряда
в RLC – контуре: $q = q_m \cos(\omega t - \varphi)$,

где $q_m = \dfrac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$, $tg\varphi = \dfrac{R}{(1/\omega C) - L\omega}$

Колебание значения напряжения на конденсаторе совпадает по фазе с колебаниями заряда, колебания на индуктивности идут в противофазе, а колебания на активном сопротивлении совпадают по фазе с колебаниями тока и отстают по фазе $(\pi/2)$ от напряжения на конденсаторе.

Связь между амплитудным значением напряжения на конденсаторе и тока

в RLC – контуре: $U_{Cm} = \dfrac{I_m}{\omega C}$

Связь между амплитудным значением напряжения на индуктивности и тока
в RLC – контуре: $U_{Lm} = \omega L I_m$

Связь между амплитудным значением тока и полного напряжения

в RLC – контуре: $I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$

Полное электрическое сопротивление (импеданс): $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$

Реактивное сопротивление (реактанс): $X = \omega L - 1/\omega C$

Емкостное сопротивление: $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$

Индуктивное сопротивление: $X_L = \omega L$

Средняя мощность переменного тока: $P = \dfrac{I_m U_m}{2}\cos\phi$

где $\phi = \varphi - \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\phi = \dfrac{R}{Z}$ - коэффициент мощности.

Мгновенное значение мощности: $P(t) = \dfrac{I_m U_m}{2}\cos\phi + \dfrac{I_m U_m}{2}\cos(2\omega t - \phi)$

Действующие (эффективные) значения тока и напряжения: $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$, $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. Смещение значений физических величин, характеризующих ток, с течением времени относительно некоторого их основного значения называют ________.
2. Для каких переменных токов всегда выполняются законы Ома и правила Кирхгофа?
3. Уравнение колебаний заряда в идеальном колебательном контуре имеет вид __.
4. Решение уравнения для свободных затухающих колебаний заряда определяется соотношением ______.
5. Какова разность фаз между колебаниями заряда и тока в случае их свободных затухающих колебаний в электрическом RCL - контуре?
6. Добротность RCL – контура рассчитывается по формуле ______.
7. С какой частотой происходят вынужденные колебания?
8. Резкое возрастание колеблющихся физических величин (в частности тока) при совпадении собственной частоты и частоты вынуждающей силы называют ____.
9. Действующие значения тока и напряжения определяются соотношениями ____.
10. Средняя мощность переменного тока имеет вид _____.

ТЕСТ№2

1. Идеальным колебательным контуром называют ________.
2. Полная энергия в идеальном колебательном контуре определяется соотношением ______.
3. При полной разрядке конденсатора вся энергия идеального контура преобразуется в _____.
4. Связь между амплитудными значениями тока и напряжения в идеальном контуре имеет вид _____.
5. От чего зависит частота идеальных электрических колебаний?
6. С какой частотой происходят свободные затухающие колебания при коэффициенте затухания отличном от нуля? Можно привести формулу.
7. На конденсаторе ток _________ по фазе ________ от напряжения.
8. Декремент затухания в колебательном RLC – контуре в случае бесконечно малого коэффициента затухания определяется соотношением _______.
9. Уравнение вынужденных колебаний в RLC – контуре имеет вид ______.
10. Полное сопротивление RLC – контура называется ______ и определяется соотношением _______.

ТЕСТ№3

1. Формула Томсона имеет вид _________.
2. При отсутствии тока на катушке индуктивности вся энергия идеального колебательного контура сосредотачивается на _________.
3. Решение уравнения колебаний для заряда в идеальном контуре имеет вид ____.
4. На индуктивности ток _______ напряжение на фазу _______.
5. Уравнение свободных затухающих колебаний имеет вид _______.
6. По какому закону происходит колебание напряжения при свободных затухающих колебаниях в контуре?
7. Частное решение уравнения вынужденных колебаний электрического заряда RLC – контуре определяется соотношением __________.
8. Амплитудное значение электрического заряда в случае вынужденных колебаний определяется по формуле _________.
9. Индуктивное сопротивление рассчитывается по формуле ________.
10. Связь между амплитудным значением тока и полного напряжения в RLC – контуре определяется выражением _________.

ТЕСТ№4

1. Электрические колебания представляют собой _____ физических величин, характеризующих ток, с течением времени относительно _______.
2. Величиной обратной декременту затухания является _______.
3. Электрическая система, в которой могут происходить свободные затухающие или вынужденные колебания, называется _______.
4. Фаза между полным напряжением и током определяется как ________.
5. Какими параметрами RLC – контура определяется значение коэффициента затухания? Привести формулу.
6. По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний для заряда? Можно привести формулу.
7. Емкостное сопротивление определяется соотношением ________.
8. Если в цепи отсутствует активное сопротивление R, то полное сопротивление называют ______. Привести формулу.
9. Колебания мгновенной мощности в RLC – контуре происходят с частотой ____, чем частота тока и напряжения.
10. Какова начальная фаза вынужденных колебаний заряда в RLC – контуре? Привести формулу.

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1. В колебательном контуре, приведенном ниже на рисунке индуктивность катушки $L = 2{,}5$ мГн, а емкости конденсаторов $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 3$ мкФ. конденсаторы зарядили до напряжения $U = 180$ В и замкнули ключ *К*. Найти период собственных колебаний T и амплитудное значение тока I_m через катушку.

Решение:

По закону сохранения энергии вся энергия конденсаторов должна перейти в энергию катушки:

$$W_{C_1} + W_{C_2} = W_L \qquad (1)$$

Энергия конденсатора определяется соотношением вида:

$$W_C = \frac{CU_m{}^2}{2} \qquad (2)$$

Энергия катушки индуктивности имеет вид:

$$W_L = \frac{LI_m{}^2}{2} \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем:

$$\frac{C_1 U_m{}^2}{2} + \frac{C_2 U_m{}^2}{2} = \frac{LI_m{}^2}{2} \qquad (4)$$

Используя (4) выражаем амплитудное значение тока, учитывая, что начальное напряжение на конденсаторах и есть максимально возможное:

$$I_m = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L}}U \qquad (5)$$

где $U = U_m$.

Период собственных колебаний можно найти по формуле Томсона, принимая во внимание, что на рисунке задачи конденсаторы подсоединены параллельно, то есть их общая электроемкость:

$$C = C_1 + C_2 \qquad (6)$$

Формула Томсона, как известно, имеет вид:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad (7)$$

Подставляя (6) в (7) окончательно получаем:

$$T = 2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)} \qquad (8)$$

Используя значения известных величин, находим амплитудное значение тока и период собственных колебаний:

$I_m = 8$ А, $\quad T = 0{,}7$ мс.

Ответ: $I_m = 8$ А, $\quad T = 0{,}7$ мс.

Задание. №2 В контуре, добротность которого $Q = 50$ и собственная частота колебаний $\nu_0 = 5{,}5$ Гц, возбуждаются затухающие колебания. Через сколько времени энергия, запасенная в контуре, уменьшиться в $\eta = 2$ раза?

Решение:

Полная энергия колебательной системы в каждый момент времени, как известно, пропорциональна квадрату амплитуды колебания соответствующей физической величины (например электрического заряда или тока). В начальный момент времени:

$$W_0 = \alpha \cdot A_0^2 \qquad (1)$$

Тогда через время t энергия будет равна:

$$W = \alpha \cdot A^2 \qquad (2)$$

Коэффициент пропорциональности α при этом содержит неизменные характеристики самой колебательной системы и квадрат частоты колебания, которая также не зависит от времени.

Амплитуды колебаний соответствующих величин связаны соотношением:

$$A = A_0 e^{-\beta \cdot t} \qquad (3)$$

где β - коэффициент затухания.

По условию задачи:

$$\eta = \frac{W_0}{W} = \frac{A_0^2}{A^2} \qquad (4)$$

Подставляя (3) в (4) получаем:

$$\eta = e^{2\beta \cdot t} \qquad (5)$$

Коэффициент затухания связан с декрементом затухания λ и добротностью Q соотношениями:

$$\lambda = \beta \cdot T \qquad (6)$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta \cdot T} \qquad (7)$$

где T - период затухающих колебаний системы:

$$T = \frac{1}{\nu_0} \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и выражая коэффициент затухания через добротность, получаем:

$$\beta = \frac{\pi \nu_0}{Q} \qquad (9)$$

Используя (9), перепишем соотношение (5) в виде:

$$\eta = e^{2\frac{\pi \nu_0}{Q} \cdot t} \qquad (10)$$

Возьмем натуральные логарифмы от обеих частей (10) и найдем необходимое время:

$$t = \frac{Q \ln \eta}{2\pi \nu_0} \qquad (11)$$

Подставляя необходимые значения в (11) получаем:

$t = 1$мс.

Ответ: $t = 1$мс.

Варианты тестов итогового контроля по разделу: электричество и магнетизм.

ТЕСТ №1

1. Силовые линии электростатического поля всегда являются _____. (замкнутыми или не замкнутыми)
2. Потенциал точечного заряда определяется по формуле _____.
3. Связь между объемной плотностью заряда и потенциалом имеет вид ______.
4. В каком соотношении находятся нормальные компоненты векторов электрического поля в отсутствии свободных поверхностных зарядов на границе раздела сред?
5. Объемная плотность связанного заряда связана с поляризованностью среды соотношением ________.
6. С ростом поперечного сечения сопротивление проводника при прочих неизменных параметрах _______. (увеличивается или уменьшается)
7. Участок электрической цепи или электрическая цепь, в которой действует электродвижущая сила, называется _______.
8. Могут ли все токи втекать в электрический узел? Почему?
9. Какая сила действует на проводник с током? Чему она равна?
10. Чему равна дивергенция вектора магнитной индукции? Что это значит?
11. Вектор магнитной индукции, созданный бесконечным линейным проводником равен _______.
12. Тангенциальные компоненты векторов магнитного поля в отсутствии токов проводимости на границе раздела сред связаны соотношениями ______.
13. Закон полного тока имеет вид _______.
14. Чему равна напряженность магнитного поля по определению?
15. Явление возникновения индукционного тока в проводящем контуре при изменении магнитного потока пронизывающего этот контур называют _______.
16. Вторая пара уравнений Максвелла в дифференциальной форме имеет вид _____.
17. Определение подвижности электрического заряда _____. (привести формулу)
18. Как связаны амплитудные значения тока и напряжения в идеальном колебательном контуре?
19. Чему равен импеданс RLC – контура?
20. Всегда ли частота затухающих колебаний совпадает с собственной частотой? Приведите формулу и краткие разъяснения, если они необходимы.

ТЕСТ№2

1. Закон Кулона в векторной форме имеет вид _______.
2. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом определяется соотношением _______.
3. Чему равна напряженность бесконечной равномерно заряженной нити
4. Число силовых линий (векторов напряженностей) электрического поля, пронизывающих некоторую поверхность называют _______.
5. Поверхностная плотность связанных зарядов на границе раздела вещество – вакуум связана с поляризованностью среды формулой _______.
6. Поляризованность определяется соотношением ______.
7. Закон Ома в дифференциальной форме имеет вид _______.
8. Цепь, состоящая из одного электрического контура, называется _______.

9. Работа сторонних сил над единичным зарядом называется _______.
10. Закон БСЛ в дифференциальной форме определяется соотношением _____.
11. Поток вектора магнитной индукции равен ______.
12. Чему равно поле движущегося заряда?
13. Как намагниченность связана с магнитными моментами отдельных атомов?
14. Чему равна плотность молекулярных токов?
15. Закон ЭМИ в дифференциальной форме имеет вид _____.
16. Теорема Гаусса в дифференциальной форме в уравнениях Максвелла определяется формулой _______.
17. Соотношение для Холловской разности потенциалов имеет вид ______.
18. Период обращения частицы в поперечном магнитном поле равен _____.
19. Что в конденсаторе отстает по фазе: ток или напряжение?
20. Чему равен реактанс?

Примеры контрольных работ с ответами по разделу: электричество и магнетизм.

Вариант 1

1. Три одинаковых заряда закреплены в вершинах равностороннего треугольника. Найти напряженность поля в центре треугольника. Каким должен быть заряд в одной из вершин, чтобы при прежних значениях оставшихся, поле в центре треугольника было в два раза больше напряженности одного исходного заряда? Сторона треугольника 5 см, величина зарядов 2мкКл.

Ответ: $E = 0$, $q_0 = 6$ мкКл.

2. Найти распределение объемной плотность заряда, потенциал которого в некоторой области пространства зависит только от x и равен $\varphi = -ax^3 + b$, где a и b - некоторые постоянные.

Ответ: $\rho(x) = 6\varepsilon_0 ax$

3. Найти вектор магнитной индукции в центре квадратной рамки с током. Сторона рамки 3см, сила тока в рамке 2мА.

Ответ: $B = 7{,}54 \cdot 10^{-8}$ Тл.

Вариант 2

1. Бесконечно длинная прямая нить заряжена равномерно с линейной плотностью $\lambda = 0.4$ мкКл/м. вычислить разность потенциалов точек 1 и 2, Если точка 2 находится дальше от нити, чем точка 1, в $\eta = 2$ раза.

Ответ: $\Delta\varphi = 5$ кВ

2. Электрон со скоростью $2*10^6$м/с влетает в плоский конденсатор параллельно его пластинкам. При этом он получает смещение в 8 раз меньшее длины пластинок. Напряженность электрического поля 300 В/см. Найти время пребывания электрона в конденсаторе.

Ответ: $t = 0{,}1$ нс

3. Найти значение и направление тока через сопротивление R в схеме, приведенной ниже на рисунке, если $E_1 = 1.5$ В, $E_2 = 3.7$ В, R_1=10Ом, R_2=20Ом и R=5Ом. Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.

Ответ: $I = 20$ мА, ток течет слева направо.

Вариант 3

1. Потенциал электрического поля имеет вид $\varphi = \alpha\left(xy - z^2\right)$, где α - постоянная. Найти проекцию напряженности электрического поля в точке M(2,1,-3) на направление $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k}$.

Ответ: $E_a = -6\alpha$

2. Два параллельных длинных провода с током по 6А в каждом (токи направлены в одну сторону) удалили друг от друга так, что расстояние между ними стало в 2 раза больше первоначального. Какую работу на единицу длины проводов совершили при этом силы ампера?

Ответ: $A = -5$ мкДж/м

3. Электрон, ускоренный разностью потенциалов U=1 кВ, движется в однородном магнитном поле под углом 30^0 к вектору индукции магнитного поля, модуль которого B=29 мТл. Найти шаг винтовой траектории электрона.

Ответ: $h = 2$ см.

Вариант 4

1. Найти емкость цилиндрического конденсатора длиной l, радиусы обкладок которого равны a и b, причем $a < b$, если пространство между обкладками заполнено диэлектриком, проницаемость которого зависит от расстояния r до оси цилиндра как $\varepsilon = \alpha/r$, α - постоянная.

Ответ: $C = 2\pi\varepsilon_0\alpha l\left(b - a\right)$

2. Магнитная индукция в вакууме вблизи плоской поверхности однородного изотропного магнетика равна B, причем вектор $\vec{B}$ составляет угол α с нормалью к поверхности. Магнитная проницаемость магнетика μ. Найти магнитную индукцию B' магнитного поля в магнетике вблизи поверхности.

Ответ: $B' = B\sqrt{\mu^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$

3. Провод, имеющий форму параболы $y = kx^2$, находится в однородном магнитном поле с индукцией B. Из вершины параболы в момент $t = 0$ начали перемещать перемычку, параллельную оси OX. Найти ЭДС индукции в образовавшемся контуре как функцию y, если перемычку перемещают с постоянной скоростью v.

Ответ: $E_i = 2B\mathrm{v}\sqrt{\mathrm{y}/\mathrm{k}}$

Приложение 1

Основные формулы электромагнетизма, имеющие различное написание в СИ и гауссовой системе

Наименование	СИ	Гауссова система
Закон Кулона	$F=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r^2}$	$F=\dfrac{q_1q_2}{r^2}$
Напряженность поля точечного заряда	$E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\varepsilon r^2}$	$E=\dfrac{q}{\varepsilon r^2}$
Напряженность поля между заряженными плоскостями	$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}$	$E=\dfrac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$
Потенциал точечного заряда	$\varphi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\varepsilon r}$	$\varphi=\dfrac{q}{\varepsilon r}$
Связь между поляризованностью $\vec{P}$ и напряженностью электрического поля $\vec{E}$	$\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$	$\vec{P}=\chi\vec{E}$
Электрическое смещение (определение)	$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$	$\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}$
Дивергенция вектора $\vec{D}$	$\left(\nabla,\vec{D}\right)=\rho$	$\left(\nabla,\vec{D}\right)=4\pi\rho$
Теорема Гаусса для $\vec{D}$	$\oint\left(\vec{D},d\vec{S}\right)=\sum q$	$\oint\left(\vec{D},d\vec{S}\right)=4\pi\sum q$
Связь между диэлектрической проницаемостью ε и диэлектрической восприимчивостью χ	$\varepsilon=1+\chi$	$\varepsilon=1+4\pi\chi$
Связь между $\vec{D}$ и $\vec{E}$	$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$	$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$
Емкость плоского конденсатора	$C=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$	$C=\dfrac{\varepsilon S}{4\pi d}$
Плотность энергии электрического поля	$\omega=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}$	$\omega=\dfrac{\varepsilon E^2}{8\pi}$
Сила взаимодействия двух параллельных токов в вакууме	$F=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2I_1I_2}{b}$	$F=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{2I_1I_2}{b}$
Поле свободно движущегося заряда	$\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\left[\vec{\mathrm{v}},\vec{r}\right]}{r^3}$	$\vec{B}=\dfrac{1}{c}\dfrac{q\left[\vec{\mathrm{v}},\vec{r}\right]}{r^3}$
Закон Био – Савара - Лапласа	$d\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}$	$d\vec{B}=\dfrac{1}{c}\dfrac{I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}$
Сила Лоренца	$\vec{F}=q\vec{E}+q\left[\vec{\mathrm{v}},\vec{B}\right]$	$\vec{F}=q\vec{E}+\dfrac{q}{c}\left[\vec{\mathrm{v}},\vec{B}\right]$
Закон Ампера	$d\vec{F}=I\left[d\vec{l},\vec{B}\right]$	$d\vec{F}=\dfrac{1}{c}I\left[d\vec{l},\vec{B}\right]$
Напряженность магнитного поля (определение)	$\vec{H}=\dfrac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{J}$	$\vec{H}=\vec{B}-4\pi\vec{J}$

Связь между магнитной проницаемостью μ и магнитной восприимчивостью χ	$\mu = 1 + \chi$	$\mu = 1 + 4\pi\chi$
Связь между $\vec{B}$ и $\vec{H}$	$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$
Ротор вектора $\vec{H}$ в случае стационарного поля	$\left[\nabla, \vec{H}\right] = \vec{j}$	$\left[\nabla, \vec{H}\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$
Циркуляция вектора $\vec{H}$ в случае стационарного поля	$\oint\left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \sum I$	$\oint\left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \frac{4\pi}{c}\sum I$
Напряженность магнитного поля прямого тока	$H = \frac{1}{4\pi}\frac{2I}{b}$	$H = \frac{1}{c}\frac{2I}{b}$
Напряженность магнитного поля в центре кругового тока	$H = \frac{I}{2R}$	$H = \frac{2\pi}{c}\frac{I}{R}$
Напряженность поля соленоида	$H = nI$	$H = \frac{4\pi}{c}nI$
Работа над контуром с током в магнитном поле	$A = I\Delta\Phi$	$A = \frac{1}{c}I\Delta\Phi$
ЭДС индукции (определение)	$\mathrm{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}$	$\mathrm{E}_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Psi}{dt}$
Индуктивность (определение)	$L = \frac{\Psi}{I}$	$L = c\frac{\Psi}{I}$
Индуктивность соленоида	$L = \mu_0 \mu n^2 lS$	$L = 4\pi\mu n^2 lS$
ЭДС самоиндукции (в отсутствие ферромагнетиков)	$\mathrm{E}_i = -L\frac{dI}{dt}$	$\mathrm{E}_i = -\frac{1}{c^2}L\frac{dI}{dt}$
Энергия магнитного поля	$W = \frac{LI^2}{2}$	$W = \frac{1}{c^2}\frac{LI^2}{2}$
Плотность энергии магнитного поля	$\omega = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$	$\omega = \frac{\mu H^2}{8\pi}$
Энергия связанных контуров с током	$W = \frac{1}{2}\sum L_{ik} I_i I_k$	$W = \frac{1}{2c^2}\sum L_{ik} I_i I_k$
Плотность тока смещения	$\vec{j}_{см} = \frac{d\vec{D}}{dt}$	$\vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi}\frac{d\vec{D}}{dt}$
Уравнение Максвелла в дифференциальной форме	$\left[\nabla, \vec{E}\right] = -\frac{d\vec{B}}{dt}$ $\left(\nabla, \vec{B}\right) = 0$ $\left[\nabla, \vec{H}\right] = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$ $\left(\nabla, \vec{D}\right) = \rho$	$\left[\nabla, \vec{E}\right] = -\frac{1}{c}\frac{d\vec{B}}{dt}$ $\left(\nabla, \vec{B}\right) = 0$ $\left[\nabla, \vec{H}\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{d\vec{D}}{dt}$ $\left(\nabla, \vec{D}\right) = 4\pi\rho$
Соотношение между амплитудами векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в электромагнитной волне	$E_m\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} = H_m\sqrt{\mu_0\mu}$	$E_m\sqrt{\varepsilon} = H_m\sqrt{\mu}$
Вектор Пойтинга	$\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]$	$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right]$
Плотность импульса электромагнитного поля	$\vec{K} = \frac{1}{c^2}\left[\vec{E}, \vec{H}\right]$	$\vec{K} = \frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E}, \vec{H}\right]$

Приложение 2

Единицы физических величин раздела электричество и магнетизм в СИ и СГС.

Наименование величины	**Единица величины**		**Отношение ед. СИ/ед. СГС**
	СИ	**СГС**	
Заряд (количество электричества) q	Кл	СГСЭ-ед.	$3\cdot10^{9}$
Потенциал φ	В	СГСЭ-ед.	1/300
Напряженность электрического поля $\vec{E}$	В/м	СГСЭ-ед.	$1/(3\cdot10^{4})$
Электрическое смещение $\vec{D}$	Кл/м^2	СГСЭ-ед.	$12\pi\cdot10^{5}$
Электрический момент диполя $\vec{p}$	Кл·м	СГСЭ-ед.	$3\cdot10^{11}$
Поляризованность $\vec{P}$	Кл/м^2	СГСЭ-ед.	$3\cdot10^{5}$
Емкость C	Ф	см	$9\cdot10^{11}$
Сила тока I	А	СГСЭ-ед.	$3\cdot10^{9}$
Плотность тока $\vec{j}$	А/м^2	СГСЭ-ед.	$3\cdot10^{5}$
Сопротивление R	Ом	СГСЭ-ед.	$1/(9\cdot10^{11})$
Удельное сопротивление ρ	Ом·м	СГСЭ-ед.	$1/(9\cdot10^{9})$
Проводимость σ	См	СГСЭ-ед.	$9\cdot10^{11}$
Магнитная индукция $\vec{B}$	Тл	Гс	10^{4}
Магнитный поток ψ,Φ	Вб	Мкс	10^{8}
Напряженность магнитного поля $\vec{H}$	А/м	Э	$4\pi\cdot10^{-3}$
Намагниченность $\vec{J}$	А/м	СГСМ-ед.	10^{-3}
Индуктивность L	Гн	см	10^{9}

Примечание: *Электрические и магнитные единицы в СГС даны в гауссовой системе.*

Приложение 3

Основные формулы векторного анализа

1. Оператор набла в декартовых координатах:

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

2. Формула градиента в декартовых координатах:

$$grad\varphi(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z) = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

3. Формула градиента в цилиндрических координатах:

$$grad\varphi(\rho,z,\alpha) = \nabla\varphi(\rho,z,\alpha) = \vec{e}_\rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \vec{e}_\alpha\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \vec{e}_z\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

4. Формула градиента в сферических координатах:

$$grad\varphi(r,\theta,\alpha) = \nabla\varphi(r,\theta,\alpha) = \vec{e}_r\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{e}_\alpha\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \vec{e}_\theta\,\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

где α - полярный угол, а θ - азимутальный.

5. Градиент сложной функции:

$$gradU(\varphi(x,y,z)) = \frac{\partial U}{\partial\varphi}\,grad\varphi$$

6. Полный дифференциал:

$$d\varphi(x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = grad\varphi d\vec{r}$$

7. Формула дивергенции в декартовых координатах:

$$div\vec{a}(x,y,z) = (\nabla,\vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

8. Формула дивергенции в цилиндрических координатах:

$$div\vec{a}(\rho,z,\alpha) = \vec{e}_\rho\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\rho) + \vec{e}_\alpha\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\alpha}{\partial\alpha} + \vec{e}_z\,\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

9. Формула дивергенции в сферических координатах:

$$div\vec{a}(r,\theta,\alpha) = \vec{e}_r\,\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \vec{e}_\alpha\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\alpha}{\partial\alpha} + \vec{e}_\theta\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, a_\theta)$$

10. Дивергенция от произведения скалярной функции и вектора:

$$div(\vec{a}(x,y,z)\cdot\varphi(x,y,z)) = (\nabla,(\vec{a}\varphi)) = \varphi\; div\vec{a} + \vec{a}grad\varphi$$

11. Дивергенция сложной функции:

$$div(\vec{a}\varphi(x,y,z)) = \frac{d\vec{a}}{d\varphi}grad\varphi$$

12. Формула ротора в декартовых координатах:

$$rot\vec{a}(x,y,z) = [\nabla,\vec{a}] = \vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

13. Формула ротора в цилиндрических координатах:

$$rot\vec{a}(\rho,z,\alpha) = \vec{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial z}\right) + \vec{e}_z\,\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho\, a_\alpha)}{\partial\rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial\alpha}\right) + \vec{e}_\alpha\left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right)$$

14. Формула ротора в сферических координатах:

$$rot\vec{a}(r,\theta,\alpha)=\vec{e}_r\,\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\,a_\alpha)}{\partial\theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial\alpha}\right)+\vec{e}_\theta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\alpha}-\frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\alpha)}{\partial r}\right)+\vec{e}_\alpha\,\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right)$$

15. Ротор от произведения скалярной функции и вектора:

$$rot(\vec{a}(x,y,z)\cdot\varphi(x,y,z))=[\nabla,(\vec{a}\varphi)]=\varphi\,rot\vec{a}+[(grad\varphi)\,\vec{a}]$$

16. Ротор сложной функции:

$$rot(\vec{a}\varphi(x,y,z))=-\left[\frac{d\vec{a}}{d\varphi}grad\varphi\right]$$

17. Дивергенция градиента:

$$div\;grad\varphi=(\nabla\nabla)\varphi=\nabla^2\varphi=\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа в декартовых координатах

18. Ротор градиента:

$$rot\;grad\varphi=[\nabla\nabla]\varphi=0$$

19. Дивергенция ротора:

$$div\,rot\vec{a}=(\nabla[\nabla\vec{a}])=0$$

20. Ротор ротора:

$$rot\;rot\vec{a}=[\nabla[\nabla\vec{a}]]=\nabla(\nabla\vec{a})-\Delta\vec{a}=grad\;div\vec{a}-\Delta\vec{a}$$

21. Оператор Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\Delta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

22. Оператор Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

23. Теорема Остроградского – Гаусса:

$$\int\limits_{V} div\vec{a}d\mathrm{V}=\oint\limits_{S}(\vec{a}d\vec{S})$$

24 Теорема Стокса:

$$\int\limits_{S} rot\vec{a}d\vec{S}=\oint\limits_{l}(\vec{a}d\vec{l})$$

Литература

1. Савельев И.В., Курс общей физики, Т.2, Москва «Наука»,1988.
2. Матвеев А.Н. , Электричество и магнетизм, Москва «Высшая школа», 1983.
3. Иродов И.Е., Задачи по общей физике, С. – Петербург «Лань», 2001.
4. А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. Курс физики. М., Высшая школа, 2002.
5. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М., Наука, 1977.
6. С.Г. Калашников. Электричество. М., Наука, 1970.
7. И.Е. Тамм. Основы теории электричества. М., Наука, 1976.
8. Д.И. Сахаров. Сборник задач по физике. М., Просвещение, 1973.
9. В.С. Волькенштейн. Сборник задач по физике. М., Просвещение, 1984.