ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г. ШЕВЧЕНКО

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра общей физики и МПФ

Методические рекомендации по разделу «механика» курса физики для студентов инженерных специальностей физико-математического факультета, для подготовки к промежуточному и итоговому тестированию

Тирасполь, 2012

УДК
ББК

Составители: Хамидуллин Р.А., Брусенская Е.И., Бурлачук А.В.

Рецензенты:
Константинов А.Н., доцент кафедры ОФ и МПФ
Соковнич С.М., доцент кафедры теоретической физики

Методические рекомендации по разделу «механика» курса физики для студентов инженерных специальностей физико - математического факультета для подготовки к промежуточному и итоговому тестированию. Хамидуллин Р.А., Брусенская Е.И., Бурлачук А.В.,г. Тирасполь,
ПГУ им. Т.Г. Шевченко, 2012г.- 73с.

В пособии изложены основные положения, законы и выводы, а также приведены основные соотношения по каждой изучаемой теме раздела «механика». Кроме того, после приведенного справочного материала по соответствующей теме даны варианты тестов промежуточного контроля и примеры практических заданий к нему. В конце пособия приведены тесты итогового контроля по соответствующему разделу физики и примеры контрольных работ с ответами. Данное пособие должно помочь студентам в подготовке к соответствующим формам контроля и является тем минимумом в рамках раздела «механика», который необходим для сдачи экзамена по физике.

Данное пособие рекомендуется студентам инженерных специальностей физико–математического факультета.

УДК
ББК

Утверждено Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Содержание

Введение

Механика – это раздел, с которого начинается курс классической физики. Он является одним из старейших и наиболее завершенных разделов. **Механика** изучает наиболее **общие закономерности** протекания физических явлений и наиболее **общие формы движения** материи. Таким образом, объектом изучения механики является материя.

Всякий вид материи существует в определенном физическом **пространстве** (оно соответствует пространству, в котором мы существуем) и физическом **времени**. Таким образом, эти категории являются **формами существования** материи.

Эти формы обладают рядом свойств, которые позволяют в полной мере решить **задачи** классической механики: описать движение материи или найти общие закономерности протекания некоторых явлений и процессов.

В классической (нерелятивистской) механики эти формы являются независимыми, в специальной теории относительности они связаны между собой (релятивистский интервал).

Физическое пространство обладает следующими свойствами: непрерывность, трехмерность, односвязность, однородность, изотропность.

Первые три свойства являются априорными и указывают на применимость геометрии Евклида при описании механического движения. Опыт показывает, что они являются достоверными в переделах от 10^{-16} до 10^{25} м.

Остальные свойства легли в основу таких фундаментальных законов сохранения в физике как закон сохранения импульса и момента импульса.

Однородность пространства является основой **закона сохранения импульса**. Она подразумевает равноправие свойств физического пространства во всех его точках. Это означает, что параллельный перенос замкнутой системы в пространстве из одной точки в любую другую не изменит ее механических свойств, при сохранении взаимного расположения и скоростей частиц.

Изотропность пространства - основа закона сохранения момента импульса. Она означает равноправие его свойств во всех направлениях и говорит о том, что механические свойства замкнутой системы не должны меняться при повороте ее как целого.

Свойствами **физического времени**, как сугубо скалярной характеристики, можно назвать: непрерывность, одномерность, однонаправленность и однородность.

Первые три свойства, как и у пространства, являются априорными и говорят о том, что события могут развиваться во времени только последовательно согласно причинно-следственным связям между ними возникающим.

Однородность времени лежит в основе закона сохранения энергии. Она означает равнозначность всех моментов времени и указывает на то, что механические свойства замкнутой системы не меняются при ее переносе в другой временной промежуток (равный предыдущему) без изменения координат и скоростей частиц.

Как известно в природе существует **четыре фундаментальных вида взаимодействий** между физическими объектами: гравитационное, электромагнитное, слабое и сильное. Два последних имеют место только в мире микрочастиц. Остальные чаще всего проявляются между объектами, с которыми имеет дело классическая физика и, в частности, механика. Так, например, в механике мерой гравитационного взаимодействия являются силы тяготения, а мерами электромагнитного - силы трения и упругости.

В рамках классической механики и **гравитационное,** и **электромагнитное** взаимодействия описываются **механической** (классической) **моделью**. В основу этой модели положена **теория дальнодействия**, с точки зрения которой объекты взаимодействуют без посредников (например, полей или частиц - переносчиков) и воздействие передается от объекта к объекту мгновенно.

Несмотря на то, что механика зародилась в Древней Греции (статика, разработанная Архимедом, учение Аристотеля о формах движения материи и т.д.), основоположниками классической механики считают Галилео Галилея и Исаака Ньютона.

Как принято считать, что история статики начинается с Архимеда так и неопровержимым является тот факт, что историю динамики открывает Галилей, а Ньютон в своих трудах дает логическое продолжение и систематизирует накопленный материал.

Мировоззрение Галилея, в отличие от античных ученых, основывается на признании **объективного существования мира**, т.е. его существования вне и независимо от человеческого сознания. Подлинную цель науки Галилей видел в отыскании причин явлений. Он утверждал, что познание внутренней необходимости явлений есть высшая ступень знания. Исходным пунктом познания природы Галилей считал **наблюдение**, основой науки – **опыт**.

Он первым в истории физики правильно сформулировал **принцип инерции** (относительности) нашел такие **координатные преобразования**, исходя из свойств пространства и времени, относительно которых законы механики являлись бы инвариантными.

Галилей первым открыл значение **ускорения** в динамике. По Галилею "Ускорение" означает изменение скорости либо по величине, либо по направлению; таким образом, тело, равномерно двигаясь по кругу, в каждый момент времени имеет ускорение, направленное к центру круга.

Галилей полагал, что всякое тело, если оно будет предоставлено самому себе, будет продолжать двигаться по прямой линии с постоянной скоростью; всякие изменения либо в скорости, либо в направлении движения объясняются действием какой-либо "силы". Этот принцип впоследствии был провозглашен Ньютоном как "первый закон движения". Его называют также законом инерции.

Галилей первым установил **закон падения тел**. Он гласит, что когда тело падает свободно, его ускорение постоянно, если не учитывать сопротивления, которое может оказать воздух; ускорение одинаково для всех тел, тяжелых или легких, больших или малых. Но доказать этот закон исчерпывающим образом было невозможно до тех пор, пока не изобрели воздушный насос, что произошло около 1654г. После этого стало возможным наблюдать падение тел в условиях, которые практически можно было считать условиями, близкими к вакууму, и было установлено, что перья падают с такой же скоростью, с какой падает свинец. Таким образом, Галилей доказал, что нет заметного различия между большим и маленьким кусками одного и того же вещества.

Именно Галилей предложил чрезвычайно плодотворный метод использования **закона параллелограмма** при рассмотрении действия на тело нескольких сил. Этот принцип говорит о том, что когда несколько сил действует одновременно, их действие таково, как если бы каждая сила действовала по очереди. Это дает возможность узнать общий результат действия целого ряда сил на движущиеся или покоящиеся тела.

Одна из главных заслуг Галилея состоит в том, что он при исследовании природы предложил новую для того времени **методологию**, которая сохранилась и до наших дней.

Во многих **исследованиях**, которые проводил Галилей, можно, пожалуй, выделить **четыре этапа**. Первый этап – **восприятие явления, чувственный опыт**, привлекающий наше внимание к определенной частной группе явлений, но еще не позволяющий выявить тот или иной закон природы. Вслед за чувственным экспериментом Галилей переходит, как он говорил, к **аксиоме**, или, в современной терминологии, к рабочей **гипотезе**. Это – центральный этап исследования, состоящий в критическом рассмотрении и данных чувственного опыта посредством творческого процесса, основанного на интуиции. Далее идет третий этап, который Галилей называл **математическим развитием**, – нахождение логических следствий из принятой рабочей гипотезы. И наконец, четвертый этап Галилеева эксперимента **- опытная проверка** с учетом только необходимых внешних факторов, являющая собой высший критерий всего процесса открытия. Таким образом, исследование явления природы начинается с опыта и к опыту возвращается, но не может осуществляться без обращения к математике.

Научная деятельность Галилея, сделанные им огромной важности открытия, его научная смелость имели решающее значение для победы гелиоцентрических представлений. Особенно большую роль сыграла его работа, посвященная основным принципам механики. Если основные законы движения и не были высказаны Галилеем с той же четкостью, с какой это сделал Ньютон, то по существу закон инерции и закон сложения движений были им вполне осознаны и применены к решению практических задач.

Современным своим видом классическая механика обязана Ньютону.

Галилей и Гюйгенс развивали механику тел применительно к поверхности Земли. В работах Ньютона обобщены принцип инерции и понятие силы, введено понятие массы, область применимости законов механики распространена на всю Вселенную. Это последнее обобщение, возвратившее миру единство и непрерывность, утраченные в механике Аристотеля, было обосновано Ньютоном с помощью правил рассуждения, которые характеризуют все его исследования по механике.

Первое правило – не принимать иных причин явлений, кроме тех, что достаточны для их объяснения. *Второе правило* – всегда относить аналогичные явления к одной и той же причине. Например, свет от кухонного очага и солнечный свет должны вести себя одинаково. *Третье правило* – считать свойством всех тел вообще такие свойства, которые не могут быть ни ослаблены, ни усилены и которые присущи всем телам, подвергаемым экспериментированию. Это ньютоновское правило индукции, позволяющее, например, сделать вывод о непроницаемости и протяженности всех тел, хотя эксперимент можно поставить лишь на некоторых. И наконец, *четвертое правило* (добавленное лишь в третьем издании “Начал”) – считать правильным всякое утверждение, полученное из опыта с помощью индукции, до тех пор, пока не будут обнаружены другие явления, которые ограничивают это утверждение или противоречат ему.

Ньютон впервые ввел понятия физических времени и пространства как форм существования материи. Он доказал связь равнодействующей силы с ускорением тел, сформулировал три основных закона динамики.

Созданная Ньютоном теория движения небесных тел, основанная на законе всемирного тяготения, была признана крупнейшими английским учеными того времени. Убедительным доводом в пользу теории Ньютона явилось обнаружение рассчитанной им приплюснутости земного шара у полюсов вместо выпуклостей, предполагавшихся по учению Декарта.

Много работ Ньютона посвящено движению тел в сплошных средах (газах и жидкостях). Ньютон заметил, что движущееся в жидкости тело должно не только смещать жидкость, но и преодолевать ее вязкость. Поэтому он считал сопротивление равным сумме двух членов: одного – пропорционального квадрату скорости и другого – пропорционального скорости.

Результаты теории были применены к движению брошенных тел в воздухе, к движению тел под действием центростремительных сил в среде с сопротивлением и к движению маятника. Экспериментальная проверка была произведена в опытах с маятниками и с падением тел в воздухе и воде. Затем Ньютон провел исследование влияния формы тела на сопротивление, испытываемое им при движении, и сформулировал теорему о пропорциональности сопротивления при прочих равных условиях максимальной площади сечения тела, перпендикулярного направлению движения. Этот результат естественно привел его к исследованию аэродинамических профилей, если говорить современным языком, т.е. такой формы тел, которой при прочих равных условиях соответствует наименьшее сопротивление движению в жидкости.

Классическая механика с ее универсальностью и способностью объяснить и описать широчайший круг явлений природы, особенно астрономических, оказали огромное влияние на многие области физики и химии. Ньютон писал, что было бы желательно вывести из начал механики и остальные явления природы, и при объяснении некоторых оптических и химических явлений сам использовал механические модели.

Кинематика поступательного и вращательного движения
Справочный материал к тестированию по теме

Кинематика - это раздел механики, в котором изучается **механическое движение** тел без учета причин его вызывающих.

Механическим движением называют всякое изменение положения тела в пространстве с течением времени. В механике выделяют три наипростейших вида механического движения, последовательная совокупность которых всегда позволяет описать более сложное движение. К ним относятся: поступательное, вращательное и колебательное.

Поступательное – это такое движение, при котором всякая жестко закрепленная с телом прямая перемещается параллельно сама себе. В геометрии этой форме движения соответствует операция параллельного переноса. Кроме того поступательное движение можно определить как такое движение, при котором все его точки описывают одинаковые по отношению к точке, соответствующей центру масс, траектории.

Вращательное – это такое движение, при котором всякая точка тела, кроме точек, лежащих на мгновенной оси вращения, описывает окружность или дугу относительно этой оси в плоскостях перпендикулярных к ней. В геометрии вращательному движению соответствует операция поворота.

Колебательное – это такое движение, при котором материальная точка или точка всякого тела, выведенного из состояния устойчивого равновесия, под действием внутренней возвратной силы совершает периодическое движение, стремясь к этому состоянию.

Основные понятия кинематики:

Материальная точка – тело, размерами которого, согласно условию задачи, можно пренебречь. Например, в случае, когда проходимый телом путь намного больше его линейных размеров. За материальную точку в основном принимают центр масс тела.

Траектория – линия, вдоль которой движется материальная точка (тело).

Пройденный путь – длина траектории.

Перемещение – направленный отрезок (вектор), соединяющий начальное и конечное положение материальной точки (тела) на траектории.

Расстояние – длина направленного отрезка между начальным и конечным положением материальной точки (тела).

Радиус-вектор – направленный отрезок, проведенный из начала координат системы отсчета к некоторой точке на траектории.

Система отсчета – это набор средств, с помощью которых можно достаточно точно описать механическое движение. Она включает в себя начало отсчета (оно в основном совпадает с началом координат), систему координат (например, декартовых), прибор для измерения времени (часы).

Существует **три способа** описания перемещения тел в кинематике:

1. **координатный способ** - задается зависимость от времени для каждой координаты материальной точки. С помощью этих зависимостей можно найти скорость и ускорение точки в любой точке траектории.
2. **векторный способ** – задается зависимость от времени радиус - вектора, с помощью которой можно найти значения мгновенной скорости и ускорения.

3. **метод траекторий** – он позволяет найти скорости и ускорения в любой момент времени по временной зависимости пройденного пути.

При решении конкретных кинематических задач выбирают такой способ, который наиболее оптимально отвечает ее условию.

Для характеристики механического движения используются такие величины как: **скорость** и **ускорение**. Скорость и ускорение в зависимости от вида траектории могут быть как **линейными**, так и **угловыми**. Линейные величины используются при описании прямолинейного движения и, в некоторых случаях, криволинейного, а угловые только при описании криволинейного движения.

Рассмотрим вначале **линейные величины**.

Скорость – это векторная физическая величина, которая характеризует направление и перемещение, совершенное материальной точкой за единицу времени.

Для характеристики движения физического объекта используют понятия мгновенной и средней скорость.

Средняя скорость - это отношение полного перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, за которое оно совершено:

Вектор средней скорости сонаправлен с вектором полного перемещения, который соединяет начальное и конечное положение тела на траектории.

Под **мгновенной скоростью** понимают скорость в данной точке траектории, которая математически определяется как первая производная от вектора перемещения в данной точке.

Мгновенная скорость всегда направлена по касательной к траектории в каждой ее точке.

Ускорение – это векторная физическая величина, определяющая быстроту изменения вектора скорости объекта, как по модульному значению, так и по направлению.

Ускорение можно рассматривать как мгновенное или среднее при описании механического движения.

Мгновенное ускорение это первая производная от полной скорости тела в данной точке.

Вектор мгновенного ускорения всегда направлен внутрь кривизны траектории. Полное мгновенное ускорение можно разложить на две составляющие: **тангенциальную** или **касательную** a_τ (направленную по касательной к траектории в данной точке) и **центростремительную** или **нормальную** a_n (направленную по радиусу от данной точки к центру кривизны). Каждая из приведенных составляющих имеет свой физический смысл. Первая отвечает за изменение модуля скорости, вторая за изменение направления вектора скорости в пространстве.

Среднее ускорение - это отношение полного изменения скорости $\Delta\vec{v}$, в течение рассматриваемого промежутка времени Δt, к данному промежутку.

Для того, чтобы определить направление вектора среднего ускорения необходимо построить годограф скорости. **Годограф скорости** это кривая, которую образуют концы векторов мгновенных скоростей, если их начала совместить параллельным переносом в одну точку. В этом случае, направление вектора среднего ускорения будет совпадать с направлением вектора соединяющего конец вектора начальной скорости и конечной на годографе скорости.

Уравнения движений в механике могут быть достаточно сложными. Однако, в некоторых частных случаях их можно свести к простым. Так, например, если $a_\tau = 0$ рассматриваемое движение является равномерным движением по окружности, а если $a_n = 0$ прямолинейным.

Рассмотрим прямолинейное движение тела. Выделяют два вида такого движения**: равномерное** и **неравномерное.**

Равномерное – это такое движение, при котором тело за равные промежутки времени проходит одинаковые расстояния. В этом случае $\mathrm{v} = const$

Простейшими прямолинейными неравномерными движениями являются **равноускоренное или равнозамедленное** движения. Это такие движения, при которых скорость тела за равные промежутки времени изменяется на равную величину по модулю и не меняет свое направление. При равноускоренном или равнозамедленном прямолинейных движениях $a = const$, причем $a_n = 0,\ a = a_\tau$.

Угловые величины: **угловая скорость** $\vec{\omega}$**, ускорение** $\overline{\beta}$ - определяются по аналогии с соответствующими линейными величинами. Однако вместо обычного перемещения используют понятие **углового перемещения** $\Delta\varphi$ (это угол, на который вместе с телом поворачивается радиус кривизны траектории по мере перемещения объекта). Для описания криволинейного движения также используются понятия средних и мгновенных угловых величин. **Угловые величины** связаны с **линейными** через **радиус кривизны** траектории.

Вектора мгновенных и средних угловых скорости и ускорения при элементарном повороте вокруг некоторой мгновенной оси **расположены вдоль этой оси, а их направление определяется по правилу правого винта**.

Равномерное движение по окружности происходит при условии, что $a_\tau = 0,\ a = a_n$. Для угловых величин это означает, что $\vec{\omega} = const$, а $\beta = 0$. В случае равноускоренного или равнозамедленного движения по окружности $\vec{\beta} = const$. Примечательно, что угловое ускорение связано только с тангенциальной компонентой линейного ускорения, а нормальная его компонента определяется через линейную или угловую скорость и соответствующий радиус кривизны.

Основные соотношения:

1. Линейные величины

Радиус - вектор в прямоугольной декартовой системе координат (ПДСК) $$\vec{r} = \vec{i}\cdot x + \vec{j}\cdot y + \vec{k}\cdot z \quad (1)$$

где x, y, z координаты материальной точки (объекта).

Мгновенная скорость (определение) $$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt} \quad (2)$$

Мгновенная скорость в ПДСК $$\vec{\mathrm{v}} = \vec{i}\mathrm{v}_x + \vec{j}\mathrm{v}_y + \vec{k}\mathrm{v}_z \quad (3)$$

Компоненты **мгновенной скорости** $$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt},\ \mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt}, \mathrm{v}_z = \frac{dz}{dt} \quad (4)$$

Абсолютное значение мгновенной скорости $$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2} \quad (5)$$

$$\mathrm{v} = \frac{ds}{dt} \quad (6),$$

где s - пройденный путь (длина траектории) $s = \int \mathrm{v} dt$

Средняя линейная скорость $\langle \vec{\mathrm{v}} \rangle = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ (7)

Мгновенное ускорение (определение) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \vec{i}\,\dfrac{d\mathrm{v}_x}{dt} + \vec{j}\,\dfrac{d\mathrm{v}_y}{dt} + \vec{k}\,\dfrac{d\mathrm{v}_z}{dt}$ (8)

Мгновенное ускорение в ПДСК $\vec{a} = \vec{i}\,a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$ (9)

Компоненты **мгновенного ускорения** $a_x = \dfrac{d\mathrm{v}_x}{dt},\ a_y = \dfrac{d\mathrm{v}_y}{dt}, a_z = \dfrac{d\mathrm{v}_z}{dt}$ (10)

Абсолютное значение мгновенного ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (11)

Среднее линейное ускорение $\langle \vec{a} \rangle = \dfrac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta t}$ (12)

Тангенциальная составляющая полного ускорения $\vec{a}$ $a_\tau = \dfrac{d\mathrm{v}}{dt}$ (13)

Нормальная составляющая полного ускорения $\vec{a}$ $a_n = \dfrac{\mathrm{v}^2}{R}$ (14)

где R радиус кривизны траектории.

Векторное представление полного ускорения через нормальную и тангенциальную компоненты $\vec{a} = \vec{\tau} \cdot a_\tau + \vec{n} \cdot a_n$ (15)

Абсолютное значение полного мгновенного ускорения $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$ (16)

2. Угловые величины

Мгновенная угловая скорость (определение) $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$ (17)

Средняя угловая скорость $\langle \vec{\omega} \rangle = \dfrac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t}$ (18)

Мгновенное угловое ускорение (определение) $\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ (19)

Среднее угловое ускорение $\langle \vec{\beta} \rangle = \dfrac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$

3. Связь между линейными и угловыми величинами

Пройденный путь (дуга криволинейной траектории)
и угловое перемещение $ds = R \cdot d\varphi$ (20)

Линейная и угловая скорости $\vec{\mathrm{v}} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$ (21)

Угловое ускорение и **тангенциальная компонента** линейного ускорения $\vec{\tau} a_\tau = [\vec{\beta} \cdot \vec{r}]$ (22)

Угловая скорость и **нормальная компонента** линейного ускорения $\vec{n} a_n = [\vec{\omega} \cdot \vec{\mathrm{v}}] = [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]]$ (23)

Здесь $\vec{r}$ - радиус – вектор, проведенный из произвольного начала на мгновенной оси вращения к данной материальной точке на криволинейной траектории.

Уравнение равномерного прямолинейного движения с нулевым началом отсчета $s = \mathrm{v} \cdot t$ (24)

Уравнения равноускоренного прямолинейного движения

с нулевым началом отсчета $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ (25)

$v = v_0 + at$ (26)

При прямолинейном движении перемещение и траектория имеют одинаковые величины.

Уравнение равномерного движения по окружности $\varphi = \omega \cdot t$ (27)

Уравнение равноускоренного движения по окружности $\varphi = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}$ (28)

$\omega = \omega_0 + \beta t$ (29)

Примечание: *уравнения для равнозамедленного движения сходны по виду с уравнениями для равноускоренного движения. Однако вместо знака «+» перед соответствующими ускорениями должен стоять знак «-».*

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. При каком движении всякая жестко закрепленная с телом прямая перемещается параллельно сама себе?
2. Направленный отрезок, соединяющий начальное и конечное положение материальной точки на траектории называют _________.
3. Как направлен вектор мгновенной скорости в данной точке траектории?
4. По определению мгновенная линейная скорость равна ________.
5. Если скорость тела при прямолинейном движении за равные промежутки времени уменьшается на одну и ту же величину, то движение называется _____.
6. Среднее значение линейного ускорения определяется соотношением _______.
7. Какая компонента линейного ускорения отвечает за изменение направления вектора скорости?
8. При каком условии для линейных величин возможно равномерное движение по окружности?
9. Какова связь межу линейной и угловой скоростью?
10. уравнения равноускоренного движения по окружности имеют вид ______.

ТЕСТ№2

1. Какому виду механического движения соответствует операция поворота в геометрии?
2. Линия, вдоль которой движется тело, называется _______.
3. Тело, размерами которого при данных условиях задачи можно пренебречь называют ________.
4. Мгновенная угловая скорость по определению равна _______.
5. Как направлена мгновенная скорость при некотором элементарном повороте относительно заданной мгновенной оси?
6. Чему равно среднее значение линейной скорости.
7. Какой способ применяется для описания механического движения, если в задаче заданы зависимости координат объекта от времени?

8. Абсолютное значение мгновенного ускорения в ПДСК определяется соотношением вида ______.
9. Чему рана нормальная компонента линейного ускорения (ускорение выразить через линейную скорость)?
10. Уравнение прямолинейного равномерного движения имеет вид ______.

ТЕСТ№3

1. Направленный отрезок, проведенный из начала координат системы отсчета к некоторой точке на траектории называют ______.
2. Длинной траектории называют ________.
3. Если известна зависимость радиус вектора от времени во всех точках траектории, то для описания движения используют ________.
4. За изменение модульного значения скорости отвечает ______ компонента полного ускорения.
5. Если тело при прямолинейном движении за равные промежутки времени проходит равные расстояния, то его движение является __________.
6. При каких условиях прямолинейное движение является равноускоренным (равнозамедленным)?
7. Связь между тангенциальной компонентой полного линейного ускорения и угловым ускорением имеет вид ________.
8. Мгновенная угловая скорость по определению равна ______.
9. Уравнения прямолинейного равнозамедленного движения имеют вид ______.
10. Мгновенное ускорение в ПДСК определяется соотношением _______.

ТЕСТ№4

1. Движение, при котором материальная точка, выведенная из состояния устойчивого равновесия, под действием внутренней возвратной силы совершает периодическое движение, стремясь к этому состоянию, называется ______.
2. Система отсчета включает в себя ________.
3. Назовите три основных способа описания механического движения.
4. Кривая, которую образуют концы векторов мгновенных скоростей, если их начала совместить параллельным переносом в одну точку называется ______.
5. Как направлено полное мгновенное ускорение по отношению к годографу скорости?
6. Чему равно абсолютное значение мгновенной скорости в координатном представлении?
7. Как направлена нормальная компонента полного линейного ускорения по отношению к данной точке траектории?
8. Чему равна тангенциальная компонента полного линейного ускорения?
9. Уравнение равномерного движения по окружности имеет вид ______.
10. Какова связь между нормальной компонентой полного ускорения и угловой скоростью?

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1. Радиус – вектор точки А относительно начала координат меняется со временем t по закону $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta \cdot t^2 \vec{j}$, где α, β - постоянные, $\vec{i}, \vec{j}$ - орты осей x и y. Найти: уравнение траектории точки y(x), зависимость от времени скорости $\vec{v}$, ускорения $\vec{a}$ и их модульных значений; зависимость от времени угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{\mathrm{v}}$.

Решение:

В ПДСК выражение для радиус – вектора имеет вид:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \qquad (1)$$

Сравнивая (1) с выражением для радиус – вектора в условии задачи, получаем уравнения для координат с их временной зависимостью:

$$x = \alpha\, t \qquad (2)$$

$$y = \beta\, t^2 \qquad (3)$$

$$z = 0 \qquad (4)$$

Для того, чтобы найти уравнение траектории точки y(x), в (2) время необходимо выразить через координату x и подставить в (3). В результате имеем:

$$t = \frac{x}{\alpha} \qquad (5)$$

$$y = \frac{\beta\, x^2}{\alpha^2} \qquad (6)$$

Соотношение (6) – есть искомое уравнение. Оно является уравнением параболы с вершиной в начале координат.

Для нахождения временных зависимостей для скорости $\vec{\mathrm{v}}$ и ускорения $\vec{a}$ используем координатный метод:

$$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt} = \alpha \qquad (7)$$

$$\mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt} = 2\beta\, t \qquad (8)$$

В ПДСК выражение для скорости имеет вид:

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{i}\,\mathrm{v}_x + \vec{j}\mathrm{v}_\mathrm{y} + \vec{k}\mathrm{v}_\mathrm{z} \qquad (9)$$

Подставляя (7) и (8) в (9), находим мгновенную скорость в векторной форме:

$$\vec{\mathrm{v}} = \alpha\, \vec{i} + 2\beta\, t\, \vec{j} \qquad (10)$$

Из соотношения (7) видно, что скорость в направлении x не зависит от времени, то есть движение равномерное, а соотношение (8) имеет линейную зависимость, то есть движение равноускоренное. Результирующее движение является более сложным

Абсолютное (модульное) значение скорости можно найти по формуле, используя (7) и (8):

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2} \qquad (11)$$

$$\mathrm{v} = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2} = \alpha\sqrt{1 + \frac{4\beta^2 t^2}{\alpha^2}} \qquad (12)$$

Компоненты мгновенного ускорения с учетом (7) и (8) можно найти из соотношений:

$$a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = 0 \qquad (13)$$

$$a_y = \frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = 2\,\beta \qquad (14)$$

Выражение для мгновенного ускорения в ПДСК имеет вид:

$$\vec{a} = \vec{i}\,a_x + \vec{j}a_{\mathrm{y}} + \vec{k}a_{\mathrm{z}} \qquad (15)$$

Подставляя (13) и (14) в (15), получаем:

$$\vec{a} = 2\beta\ \vec{j} \qquad (16)$$

Модульное значение мгновенного ускорения можно найти по формуле:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (17)$$

Используя (13) и (14), находим с помощью (17) необходимое соотношение:

$$a = 2\,\beta \qquad (18)$$

Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{\mathrm{v}}$ можно найти, используя скалярное произведение этих векторов:

$$(\vec{a}, \vec{\mathrm{v}}) = |\vec{a}||\vec{\mathrm{v}}|\cos\varphi = a_{\mathrm{x}}\mathrm{v}_{\mathrm{x}} + a_{\mathrm{y}}\mathrm{v}_{\mathrm{y}} + a_{\mathrm{z}}\mathrm{v}_{\mathrm{z}} \qquad (19)$$

$$\cos\varphi = \frac{a_{\mathrm{x}}\mathrm{v}_{\mathrm{x}} + a_{\mathrm{y}}\mathrm{v}_{\mathrm{y}} + a_{\mathrm{z}}\mathrm{v}_{\mathrm{z}}}{|\vec{a}||\vec{\mathrm{v}}|} \qquad (20)$$

Подставляя в (20) значение соответствующих компонент и модулей, получаем временную зависимость для φ:

$$\cos\varphi = \frac{4\beta^2 t}{2\beta\cdot\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}} = \frac{2\beta\cdot t}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}} \qquad (21)$$

Угловую зависимость в данном случае удобней выразить через тангенс искомого угла:

$$tg^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 \qquad (22)$$

Подставляя (21) в (22), окончательно получаем:

$$tg^2\varphi = \frac{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}{4\beta^2 t^2} - 1 = \frac{\alpha^2}{4\beta^2 t^2} \qquad (23)$$

$$tg\varphi = \frac{\alpha}{2\beta\cdot t} \qquad (24)$$

Ответ: $y = \dfrac{\beta\,x^2}{\alpha^2}$; $\vec{\mathrm{v}} = \alpha\,\vec{i} + 2\beta\,t\ \vec{j}$; $\mathrm{v} = \alpha\sqrt{1 + \dfrac{4\beta^2 t^2}{\alpha^2}}$; $\vec{a} = 2\beta\ \vec{j}$; $a = 2\,\beta$;

$tg\varphi = \dfrac{\alpha}{2\beta\cdot t}$.

Задание №2. Точка движется по плоскости так, что ее тангенциальное ускорение $a_\tau = \alpha$, а нормальное ускорение $a_n = \beta\,t^4$, где α, β - постоянные, t - время. В момент $t = 0$ точка покоилась. Найти зависимость от пройденного пути s радиуса кривизны R траектории точки и его полного ускорения a.

Решение:

Используя значение тангенциальной компоненты полного ускорения, найдем модульное значение скорости по формуле:

$$a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \alpha \qquad (1)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\mathrm{v}(t) = \alpha\, t + C \qquad (2)$$

Удовлетворив начальным условиям задачи $\mathrm{v}(0) = 0$, получаем окончательно:

$$\mathrm{v}(t) = \alpha\, t, C = 0 \qquad (3)$$

Далее находим временную зависимость для пройденного пути, используя соотношение:

$$s = \int_0^t \mathrm{v} dt = \int_0^t \alpha\, t dt = \frac{\alpha\, t^2}{2} \qquad (4)$$

В формуле (4) выразим время через пройденный путь:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{\alpha}} \qquad (5)$$

Подставляя (5) в выражение для нормальной компоненты тангенциального ускорения, находим:

$$a_n = \beta\, t^4 = \frac{4\beta s^2}{\alpha^2} \qquad (6)$$

Воспользовавшись формулой для нахождения абсолютного значения полного мгновенного ускорения через его компоненты, получаем его зависимость от пройденного пути s:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{4\beta s^2}{\alpha^2}\right)^2 + \alpha^2} = \alpha\sqrt{1 + \left(\frac{4\beta s^2}{\alpha^3}\right)^2} \qquad (7)$$

Зависимость радиуса кривизны R от пройденного пути s можно найти, воспользовавшись формулой, связывающей линейную скорость v и нормальную компоненту a_n полного ускорения:

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} = \beta\, t^4 \qquad (8)$$

Соотношение (8) с учетом (3)примет вид:

$$\frac{(\alpha\, t)^2}{R} = \beta\, t^4 \qquad (9)$$

Отсюда находим R (s) с учетом (5):

$$R = \frac{\alpha^2}{\beta\, t^2} = \frac{\alpha^3}{2\beta \cdot s} \qquad (10)$$

Ответ: $a = \alpha\sqrt{1 + \left(\frac{4\beta s^2}{\alpha^3}\right)^2}$, $\quad R = \frac{\alpha^3}{2\beta \cdot s}$

Задание №3. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = at - bt^3$, где $a = 6$ рад/с, $b = 2$ рад/с^3. Найти средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от $t = 0$ до остановки; угловое ускорение в момент остановки тела.

Решение:

Для того чтобы определить время остановки тела, воспользуемся тем фактом, что как линейная так и угловая скорости в этот момент обращаются в нуль $\omega(t_0)=0$. Временную зависимость для угловой скорости можно найти, зная временную зависимость для угла φ из условия задачи:

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=a-3bt^2 \qquad (1)$$

$$0=a-3bt_0^2, \Rightarrow t_0=\sqrt{\frac{a}{3b}} \qquad (2)$$

Среднее значение угловой скорости за соответствующий промежуток времени можно рассчитать по формуле:

$$\langle\omega\rangle=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\varphi(t_0)-\varphi(0)}{t_0} \qquad (3)$$

$$\varphi(t_0)=a\sqrt{\frac{a}{3b}}-b\left(\sqrt{\frac{a}{3b}}\right)^3=a\sqrt{\frac{a}{3b}}-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3b}}=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3b}} \qquad (4)$$

$$\varphi(0)=0 \qquad (5)$$

Подставляя (4), (5) и (2) в (3), находим среднюю угловую скорость:

$$\langle\omega\rangle=\frac{\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3b}}-0}{\sqrt{\frac{a}{3b}}}=\frac{2a}{3} \qquad (6)$$

Среднее значение углового ускорения можно найти из соотношения:

$$\langle\beta\rangle=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega(t_0)-\omega(0)}{t_0} \qquad (7)$$

$$\omega(t_0)=a-3b\left(\sqrt{\frac{a}{3b}}\right)^2=a-a=0 \qquad (8)$$

$$\omega(0)=a \qquad (9)$$

Подставляя (8), (9) и (2) в (7), находим искомое среднее значение углового ускорения:

$$\langle\beta\rangle=\frac{0-a}{\sqrt{\frac{a}{3b}}}=-\sqrt{3ab} \qquad (10)$$

Знак у среднего углового ускорения указывает на то, что движение является равнозамедленным.

Для определения углового ускорения в момент остановки тела найдем вначале его временную зависимость, используя (1), а затем подставим в нее время из соотношения (2):

$$\beta=\frac{d\omega}{dt}=-6bt \qquad (11)$$

$$\beta(t_0) = -6b\sqrt{\frac{a}{3b}} = -2\sqrt{3ab} \qquad (12)$$

Подставляя значения постоянных a и b в (6), (10), (12), находим абсолютные значения искомых величин:

$\langle\omega\rangle = 4$ рад/с, $\left|\langle\beta\rangle\right| = 6$ рад/с^2, $\left|\beta(t_0)\right| = 12$ рад/с^2

Ответ: $\langle\omega\rangle = \frac{2a}{3} = 4$ рад/с; $\left|\langle\beta\rangle\right| = \sqrt{3ab} = 6$ рад/с^2,

$\left|\beta(t_0)\right| = 2\sqrt{3ab} = 12$ рад/с^2.

Динамика поступательного движения и механические силы Справочный материал к тестированию по теме

Динамика – это раздел механики, в котором движение тела рассматривается с учетом причин его вызывающих. Существуют основные законы динамики – **законы Ньютона**, которые позволяют описать такое движение тел в инерциальной системе отсчета

Система отсчета (см. предыдущую тему) является важным понятием в физике. **Идеальной системой** отсчета является система, начало координат и оси которой не изменяют своего положения в пространстве с течением времени. По отношению к Земле и другим планетам солнечной системы идеальной можно считать **гелиоцентрическую систему отсчета**. Ее центр связан с Солнцем.

По отношению к идеальной системе все остальные системы отсчета являются либо **инерциальными** (ИСО), либо **неинерциальными** (НИСО).

ИСО – это система отсчета, которая движется поступательно с постоянной скоростью или неподвижна относительно идеальной системы.

НИСО – это система отсчета, которая движется ускоренно относительно идеальной системы.

Первый закон Ньютона – закон инерции показывает, что тело в ИСО будет покоиться или двигаться прямолинейно с постоянной скоростью, если на него не действуют другие тела или действие других тел скомпенсировано.

Второй закон Ньютона представляет собой уравнение движения тела с учетом воздействующих на него сил. Он гласит, что: р**авнодействующая всех сил** действующих на тело, отличная от нуля, является **причиной** возникновения у данного тела **ускорения**. Коэффициентом пропорциональности между силой и ускорением является масса.

Масса тела – это скалярная аддитивная величина, определяющая меру инертности тела или гравитационного взаимодействия. **Инертность** – это свойство тела сохранять свою скорость постоянной по значению и направлению, если на него не действуют другие тела или действие их скомпенсировано**. Аддитивность физической величины**, характеризующей объект, означает, что она может быть представлена в виде алгебраической суммы тех же физических величин, характеризующих все части этого объекта.

Третий закон Ньютона – закон противодействия, гласит, что тела действуют друг на друга независимо с силами равными по модулю и противоположными по направлению.

Третий закон Ньютона имеет место в ИСО в том случае, если выполняются **следующие условия**:

1) **тела** непосредственно **контактируют** друг с другом и могут перемещаться в пространстве как одно целое.
2) **тела** находятся **на постоянном расстоянии** друг от друга при движении или **неподвижны** в пространстве.

Нарушение третьего закона Ньютона может проявляться в релятивистской механике или теории электромагнетизма тогда, когда тела движутся со скоростями соизмеримыми со скоростью передачи соответствующего взаимодействия.

Силы, которые рассматриваются в пределах классической механики, называют **механическими**. К механическим силам относятся: силы упругости, трения, тяготения и т.д.

Причиной возникновения **сил упругости** является деформация тела. Эти силы имеют электромагнитную природу. При деформации тела электронные оболочки атомов, из которого оно состоит, тоже деформируются, что приводит к потере электронейтральности атомами, и они ведут себя как заряженные частицы. В этом случае между ними возникают электромагнитные силы, стремящиеся вернуть атомы в электронейтральное состояние. Результирующая этих сил и есть сила упругости.

Деформация – это изменение формы и размеров тела при внешнем воздействии на него.

Выделяют следующие этапы деформации:

1) **упругая** – тело принимает прежнюю форму и размеры после снятия деформации.
2) **пластическая** – тело не принимает прежней формы и размеров
3) приводящая к **разрыву молекулярных связей**.

Выделяют также следующие **виды** деформации: растяжение (сжатие), изгиб кручение, сдвиг.

Выражение для силы упругости называют **законом Гука**, который показывает, что сила упругости пропорциональна величине деформации и направлена против нее. Сила упругости по III закону Ньютона равна по модулю и противоположна по направлению деформирующей силе.

Механическое напряжение это величина равная деформирующей силе приходящейся на единицу поверхности, к которой она приложена. Выделяют два вида механического напряжения – **тангенциальное** τ и **нормальное** σ. **Тангенциальное** механическое **напряжение** возникает тогда, когда деформирующая сила направлена по касательной к поверхности, а **нормальное** – по нормали к поверхности. При равномерном распределение деформирующих сил в теле и малых величинах деформации, деформацию растяжения (сжатия) характеризуют нормальным напряжением, а деформацию сдвига тангенциальным напряжением. Экспериментально установлено, что нормальное напряжение пропорционально относительному удлинению физического объекта при его деформации.

Сила трения также имеет электромагнитную природу и причиной ее возникновения является непосредственное соприкосновение двух тел. В области контакта приповерхностные атомы теряют свою электронейтральность за счет искажения электронной оболочки и между ними возникает электромагнитное взаимодействие, которое препятствует свободному перемещению одного тела вдоль другого.

Силы трения бывают **четырех видов**: трение покоя, скольжения, качения, вязкое трение. Первые три не зависят от площади соприкосновения объектов и явно от их скорости и пропорциональны только силе реакции опоры (весу). **Сила реакции опоры** – это сила, с которой опора или подвес действуют на тело.

Силы **трения покоя** и **скольжения** приложены к поверхности контактирующих тел и направлены против их возможного или реального перемещения относительно друг друга. Значение силы трения покоя полностью определяется величиной приложенной тяговой силы и может изменяться от нуля (тяговая сила отсутствует) до ее максимально возможного значения, при бесконечно малом превышении которого тело выходит из состояния покоя.

Чтобы уменьшить силу трения скольжения между соприкасающимися телами вводят вращающиеся механизмы: валы, оси, подшипники и т.д. В отличие от сил трения скольжения и покоя, силы **трения качения** зависят еще от радиуса вращающегося механизма (рис. 8):

Силы **вязкого трения** возникают тогда, когда между соприкасающимися телами вводят жидкую смазку. Эти силы существенным образом отличаются от вышеперечисленных сил трения. Они зависят от скорости движения слоев жидкости, от ее природы и от поверхности соприкосновения слоев.

Центростремительные силы возникают при движении тела по окружности при наличии реальной связи (например, резиновый шнур) между центром окружности и телом как реакция этой связи на удаление тела от центра. Вектор этой силы приложен к телу и направлен к центру вдоль связи.

Центробежная сила – это сила, которая действует со стороны тела на связь и противоположна по направлению центростремительной силе. По третьему закону Ньютона она ее уравновешивает.

Сила тяжести действует на тело со стороны Земли. Она является одним из проявлений гравитационного взаимодействия и может быть получена из общего закона гравитации для тел, обладающих массами.

Вес тела – это сила, с которой тело действует на опору или подвес. В отличие от силы тяжести вес создается телом и зависит от ускоренного движения тела вверх или вниз, и от географической широты земного шара. Вес тела приложен к области соприкосновения тела с опорой или подвесом, а сила тяжести к центру масс. Сила тяжести наплавлена вдоль земного радиуса к центру земли, направление же веса тела зависит от широты земного шара и составляет некоторый малый угол (угол отвеса) с направлением силы тяжести. В состоянии покоя вес тела определяется тем же соотношением, что и сила тяжести.

Центральными называют силы, которые зависят от расстояния между взаимодействующими объектами и направлены вдоль линии соединяющей их. К ним можно отнести кулоновские, гравитационные, центростремительные силы и т.д. Остальные силы являются **нецентральными.**

Однородными называют силы, которые имеют в любой точке пространства одинаковое значение и направление. Например, к ним можно отнести силу тяжести вблизи поверхности Земли, если область рассматриваемого пространства не велика. Если это условие не выполняется – силы **неоднородные**.

Стационарными называют силы, которые не зависят от времени. Например, сила вида: $F = \alpha \cdot t$ является **нестационарной**.

Однородные и центральные силы, если они являются стационарными всегда можно назвать **консервативными**, то есть их работа по замкнутой траектории равна нулю или, если траектория не замкнута, зависит только от начального и конечного положения тела.

Кроме того консервативные силы являются **потенциальными**. Потенциальность означает, что между силой и потенциальной энергией (потенциалом) существует градиентная связь.

Принцип относительности Галилея в классической механике гласит: все механические явления и процессы протекают совершенно одинаково в различных ИСО. Это означает, что все физические уравнения, описывающие те или иные процессы или явления в природе, **инвариантны** (не изменяют своего вида) относительно преобразования координат и времени в таких системах отсчета.

При анализе движения любого объекта необходимо выбрать наиболее удобную систему отсчета. Связь между координатами двух ИСО основывается на априорных свойствах физического пространства. Его трехмерность и эвклидовость позволяют применять для установления их связи обычную геометрию.

Преобразования координат двух ИСО в классической физике называют **преобразованием Галилея**. Из этих преобразований легко получить **закон сложения скоростей**. Для этого нужно продифференцировать все уравнения координат по времени. Используя преобразования Галилея также можно доказать **инвариантность** (одинаковость) длин, промежутков времени, ускорений в классической механике.

Основные соотношения:

Второй закон Ньютона в интегральной форме $\vec{F} = m\vec{a}$ (1)

Второй закон Ньютона в дифференциальной форме $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (2),

где $\vec{p}$ - импульс тела

Равнодействующая сил (принцип суперпозиции) $\vec{F}_p = \sum_i \vec{F}_i$ (3),

где $\vec{F}_i$ - сила, действующая со стороны i объекта на заданное тело

Третий закон Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (4)

Закон Гука (сила упругости в случае
линейной упругой деформации) $\vec{F} = -k\vec{x}$ (5)

где k - коэффициент жесткости, зависящий от природы и геометрии подверженных деформации тел, а x - величина деформации

Относительное удлинение (деформация) $\varepsilon = \dfrac{x}{l}$ (6)

где l - исходный размер тела в направлении деформации

Механическое напряжение: нормальное $\sigma = \dfrac{F_n}{S}$ (7)

тангенциальное $\tau = \dfrac{F_\tau}{S}$ (8)

где S - площади поверхностей, к которым приложены деформирующие силы

Связь нормального механического напряжения

с относительным удлинением $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ (9)

где E - **модуль Юнга**, зависящий от природы деформируемого объекта

Связь межу E и k $k = \frac{ES}{l}$ (10)

Относительный сдвиг (деформация сдвига) $\gamma = tg\varphi$ (11)

где φ - угол сдвига - угол между исходным положением поверхности тела и ее положением при соответствующей деформации

Угол сдвига при упругих (малых) деформациях $\varphi = tg\varphi$ (12)

Связь тангенциального механического напряжения

с относительным сдвигом $\gamma = \frac{\tau}{G}$ (13)

где G - модуль сдвига

Сила трения скольжения $F = \mu N$ (14)

где μ - коэффициент трения, зависящий от природы соприкасающихся поверхностей, а N - модуль силы реакции опоры

Сила вязкого трения при **малых** скоростях объектов $\vec{F} = -\mu' \vec{\mathrm{v}}$ (15)

Сила вязкого трения при **больших** скоростях объектов $\vec{F} = -\mu'' \mathrm{v}^2 \vec{e}_{\mathrm{v}}$ (16)

где μ' и μ'' - коэффициенты пропорциональности, обусловленные вязким трением, $\vec{e}_{\mathrm{v}}$ - орт вектор, совпадающий по направлению с вектором скорости

Центростремительная сила $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}$ (17)

Закон Всемирного тяготения $\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$ (18)

где G - гравитационная постоянная

Сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ (19)

где g - ускорение свободного падения

Вес тела в состоянии покоя $\vec{P} = m\vec{g}$ (20)

Вес, при ускоренном движении **вниз** $P = m(a - g)$ (21)

Вес, при ускоренном движении **вверх** $P = m(a + g)$ (22)

Зависимость **веса тела**

от широты земного шара $P = m\left(G\frac{M}{R_з^2} - R_з\omega^2\cos^2(\varphi)\right)$ (23)

Зависимость **ускорения свободного падения**

от широты земного шара $g = G\frac{M}{R_з^2} - R_з\omega^2\cos^2(\varphi)$ (24)

где ω - циклическая частота вращения земного шара, φ - угол соответствующий определенной широте земного шара

Потенциальная сила (определение) $\vec{F} = -\nabla U(x, y, z) = \nabla \Pi(x, y, z)$ (25)

где $U(x,y,z)$ - потенциальная энергия, а $\Pi(x,y,z)$ - соответствующий ей потенциал; $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ оператор набла или градиент в ПДСК. Градиентом называют вектор, в направлении которого скалярная функция быстро возрастает.

Преобразования Галилея для координат

$$\begin{cases} x = x' + \mathrm{v}_0 t' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$ - прямое (24);

$$\begin{cases} x' = x - \mathrm{v}_0 t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$ - обратное (26),

где $\mathrm{v}_0 = const$ - скорость ИСО, совершающей прямолинейное движение в направлении оси OX, относительно другой неподвижной ИСО. Штрихованные координаты относятся к движущейся ИСО, а не штрихованные - к неподвижной ИСО.

Закон сложения скоростей в векторной форме $\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}' + \vec{\mathrm{v}}_o$ (27)

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. Раздел механики, изучающий движение тел с учетом причин его вызывающих называют _________.
2. Закон инерции показывает, что если на тело не действуют другие тела или действие других тел скомпенсировано, то в ИСО оно ______.
3. Второй закон Ньютона в дифференциальной форме имеет вид ______.
4. Какие механические силы: тяготения, трения, упругости имеют электромагнитную природу?
5. Закону Гука соответствует следующее соотношение ______.
6. Назовите последовательно основные этапы деформации тел.
7. Чему равно максимальное значение силы трения покоя?
8. Силы, которые имеют в любой точке пространства одинаковое значение и направление называют ___________.
9. Зависит ли явно от скорости сила трения скольжения?
10. Где вес тела больше: на экваторе или на полюсе?

ТЕСТ№2

1. Согласно третьему закону Ньютона два тела взаимодействуют друг с другом ________.
2. Какие механические силы имеют гравитационную природу: центробежная, упругости или тяготения?
3. Второй закон Ньютона в интегральной форме имеет вид ______.
4. Деформацией тела называют ________.
5. Что называют массой тела?
6. Чему равно относительное удлинение при растяжении?
7. Совпадают ли по сути понятия массы тела и его веса?
8. Какие силы называются консервативными?

9. Какова связь нормального механического напряжения с относительным удлинением? (формула)
10. Формула, которая отражает определение нормального механического напряжения, имеет вид _______.

ТЕСТ№3

1. Система отсчета, которая движется поступательно с постоянной скоростью или неподвижна относительно идеальной системы называется _______.
2. Сформулировать первый закон Ньютона.
3. Что такое инертность?
4. Всегда ли выполняется третий закон Ньютона? Поясните ответ.
5. Принцип суперпозиции для сил в математической формулировке имеет вид _________.
6. Силы, которые зависят от расстояния между взаимодействующими объектами и направлены вдоль линии соединяющей их называются ________.
7. Как связаны коэффициент жесткости и модуль Юнга? (формула)
8. Чему равна сила трения скольжения?
9. Как зависит вес тела от его ускоренного движения вверх или вниз? (формулы)
10. Сформулируйте принцип относительности Галилея.

ТЕСТ№4

1. Сформулируйте второй закон Ньютона.
2. Что такое вес тела?
3. В чем отличие веса тела от силы тяжести?
4. В состоянии покоя вес тела определяется соотношением ______.
5. Назовите виды деформации?
6. Для каких этапов деформации применим закон Гука?
7. Какие силы возникают при движении тела по окружности при наличии реальной связи между центром окружности и телом?
8. Чему равна центростремительная сила?
9. Приведите формулу для закона всемирного тяготения.
10. Приведите математическое определение потенциальной силы.

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1 Частица движется вдоль оси x по закону $x=\alpha t^2-\beta t^3$, где α и β положительные постоянные. В момент $t=0$ сила, действующая на частицу, равна F_0. Найти значения F_x силы в точках поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x=0$.

Решение:

В точках поворота скорость частицы должна обращаться в нуль $\mathrm{v}_x=0$. Найдем мгновенную скорость частицы, зная ее закон движения по оси x, и приравняем к нулю, для того, чтобы определить соответствующие моменты времени:

$$\mathrm{v}_x=\frac{dx}{dt}=2\alpha t-3\beta t^2 \qquad (1)$$

$$0 = 2\alpha\, t - 3\beta\, t^2, \Rightarrow t_1 = \frac{2\alpha}{3\beta}, t_2 = 0 \qquad (2)$$

По второму закону Ньютона:

$$F_x = ma_x = m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = m\cdot(2\alpha - 6\beta\, t) \qquad (3)$$

Используя условие задачи $F_x(0) = F_0 = 2m\alpha$ (3), находим F_x в момент времени t_1:

$$F_x(\mathrm{v}_x = 0) = m\cdot\left(2\alpha - 6\beta\frac{2\alpha}{3\beta}\right) = m(2\alpha - 4\alpha) = -2m\alpha = -F_0 \qquad (4)$$

Найдем время возвращения тела в исходную точку. Для этого удовлетворим условию $x = 0$:

$$x = \alpha\, t^2 - \beta\, t^3 = 0 \qquad (5)$$

Решая (5) находим соответствующее время:

$$t_3 = \frac{\alpha}{\beta},\ t_4 = 0 \qquad (6)$$

Время $t_4 = 0$ соответствует начальному моменту движения, который нас не интересует. Поэтому для нахождения соответствующей силы используем t_3, подставляя его в (3):

$$F_x(x = 0) = m\cdot\left(2\alpha - 6\beta\frac{\alpha}{\beta}\right) = -4m\alpha = -2F_0 \qquad (7)$$

Ответ: $F_x(\mathrm{v}_x = 0) = -F_0$; $\qquad F_x(x = 0) = -2F_0$

Задание №2. Тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15^0$ с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в $\eta = 2$ раза меньше времени спуска.

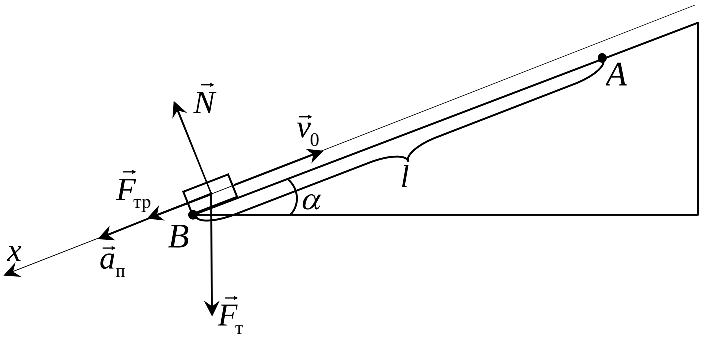


рис. 1.1

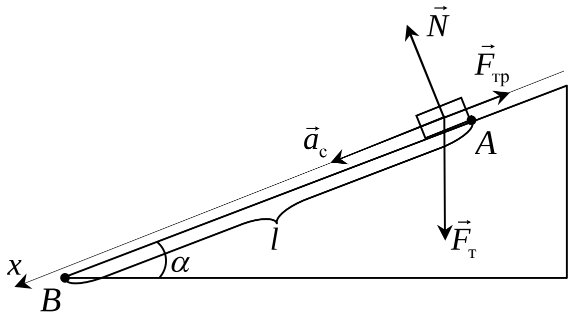


рис. 1.2

Решение:

Двигаясь по наклонной плоскости снизу вверх, тело, как известно, совершает равнозамедленное движение, пока не остановиться в некоторой точке. При этом оно проходит расстояние:

$$l = \mathrm{v}_0 t_n - \frac{a_n t_n^2}{2} \qquad (1)$$

где $\mathrm{v}_0 = a_n t_n$ - начальная скорость тела, a_n - ускорение при подъеме, t_n - время подъема.

Подставляя начальную скорость, окончательно получаем:

$$l = \frac{a_n t_n^2}{2} \qquad (2)$$

Когда тело будет двигаться в обратном направлении (вниз по наклонной плоскости), его движение станет равноускоренным. В итоге оно пройдет то же расстояние l:

$$l = \frac{a_c t_c^2}{2} \qquad (3)$$

где a_c - ускорение при спуске, t_c - время спуска.

По условию задачи время спуска и подъема связаны соотношением:

$$t_c = \eta\, t_n \qquad (4)$$

Учитывая (4) и то, что левые части (2) и (3) равны, находим как связаны ускорения при подъеме и спуске:

$$a_n = \eta^2 a_c \qquad (5)$$

Далее можно записать второй закон Ньютона вдоль оси, параллельной наклонной плоскости с учетом действующих сил трения (см.рис 1.1 и 1.2):

1) в случае подъема:

$$ma_n = m\eta^2 a_c = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha \qquad (6)$$

2) в случае спуска:

$$ma_c = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \qquad (7)$$

Для того, чтобы найти коэффициент трения μ, необходимо из (6) вычесть (7):

$$m(\eta^2 - 1)a_c = 2\mu mg\cos\alpha \qquad (8)$$

$$\mu = \frac{(\eta^2 - 1)a_c}{2g\cos\alpha} \qquad (9)$$

Ускорение спуска можно найти, сложив (6) и (7):

$$m(\eta^2 + 1)a_c = 2mg\sin\alpha \qquad (10)$$

$$a_c = \frac{2g\sin\alpha}{(\eta^2 + 1)} \qquad (11)$$

Подставляя (11) в (9) окончательно получаем:

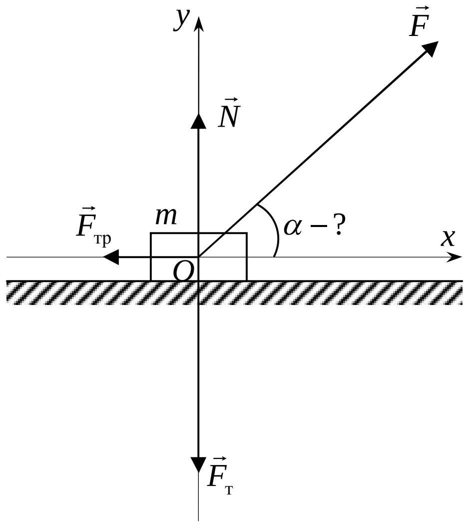
$$\mu = \frac{(\eta^2 - 1)}{2g\cos\alpha} \cdot \frac{2g\sin\alpha}{(\eta^2 + 1)} = tg\alpha\,\frac{(\eta^2 - 1)}{(\eta^2 + 1)} \qquad (12)$$

Подставляя в (12) значения α и η, окончательно находим:

$\mu = 0{,}16$

Ответ: $\mu = 0{,}16$

Задание №3 Брусок массы m тянут за нить так, что они движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ. Найти угол α, при котором натяжение нити будет наименьшим. Чему оно равно?



Решение:

Для решения задачи введем две координатные оси: одна пусть будет направлена вдоль направления движения бруска (горизонтально), а другая перпендикулярно ей (вертикально). Из рисунка видно, что на тело действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{mp}$, сила натяжения нити $\vec{F}$. Так как по условию задачи движение является равномерным, запишем условие равновесия сил, действующих на брусок:

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} = 0 \qquad (1)$$

Проекции сил на выбранные оси можно записать в виде:

1) по оси OX:

$$0 = F\cos\alpha - F_{mp} \qquad (2)$$

2) по оси OY:

$$0 = F\sin\alpha + N - mg \qquad (3)$$

Сила трения скольжения определяется по формуле:

$$F_{mp} = \mu N \qquad (4)$$

Силу реакции опоры можно выразить из соотношения (3):

$$N = -F\sin\alpha + mg \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получаем:

$$F_{mp} = -\mu F\sin\alpha + \mu mg \qquad (6)$$

Найдем выражение для силы натяжения как функции от угла α, используя (2) и (6):

$$0 = F\cos\alpha + \mu F\sin\alpha - \mu mg \qquad (7)$$

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \qquad (8)$$

Для того чтобы найти угол, при котором значение силы натяжения будет наименьшим, необходимо удовлетворить условию нахождения экстремума функции. В нашем случае по условию функцией является сила натяжения, а аргументом - угол между направлением этой силы и горизонтом:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = F'(\alpha) = 0 \qquad (9)$$

$$F'(\alpha) = \frac{\mu mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2} \qquad (10)$$

Нулю может быть равно только выражение в числителе, следовательно:

$$\mu = tg\alpha \qquad (11)$$

Тогда угол, при котором сила натяжения будет иметь наименьшее значение, определяется по формуле:

$$\alpha = arctg\mu \qquad (12)$$

Подставим (11) в (8) и получим наименьшее значение силы натяжения нити:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha \cdot (1+\mu^2)} = \frac{\mu mg\sqrt{1+\mu^2}}{(1+\mu^2)} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad (13)$$

Ответ: $\alpha = arctg\mu$, $\quad F = \dfrac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

Законы сохранения в ИСО
Справочный материал к тестированию по теме

Очень важную роль при решении физических задач и в рассмотрении различных явлений играют **универсальные законы сохранения физических величин**, которые связаны с определенными свойствами пространства и времени. Эти законы сохранения выполняются для замкнутых систем.

Система тел называется **замкнутой**, если тела системы взаимодействуют только друг с другом и не взаимодействуют с телами не входящими в систему или воздействие на них других тел скомпенсировано.

Если на систему взаимодействующих тел воздействуют внешние объекты, то система является **незамкнутой**.

Под **импульсом тела** $\vec{p}$ понимают векторную величину, совпадающую по направлению со скоростью тела и равную произведению этой скорости на массу. **Импульсом системы тел** называют векторную величину, совпадающую по направлению со скоростью центра масс системы и равную произведению этой скорости на суммарную массу тел системы.

Центром масс (центром инерции) называют точку тела или системы тел, в которой сосредоточена вся масса тела (она соответствует материальной точке). Положение центра масс геометрически задается с помощью радиус вектора проведенного из заданного начала отсчета в эту точку. Если начало отсчета совпадает с центром масс то соответствующий радиус вектор равен нулю.

Для удобства написания закона сохранения импульса в основном применяют две системы отсчета:

1. **систему центра масс** (систему центра инерции (СЦИ)) – это система отсчета, в которой центр масс покоится;

2. лабораторную систему координат (ЛСК) – это система отсчета , связанная с измерительными приборами или неподвижным наблюдателем.

Как было указано во введении, **закон сохранения импульса** связан с **однородностью физического пространства.** Он выполняется только для замкнутых систем. Если на тело или систему тел оказывается внешнее воздействие, то в общем случае их импульс не сохраняется. Тогда, согласно второму закону Ньютона в дифференциальной форме, должен выполняться **закон изменения импульса** геометрическая разность конечного и начального импульса тела или системы равна импульсу соответствующих сил или силы $\vec{P}$.

Для замкнутой системы многих тел **закон сохранения импульса** формулируется в виде: геометрическая сумма импульсов всех тел замкнутой системы есть величина постоянная независящая от их взаимодействия и последующего перемещения.

Закон сохранения энергии вытекает из свойства однородности времени. **Энергия** представляет собой функцию состояния тела или системы физических тел. Для того чтобы тело перешло из одного состояния в другое над ним надо совершить работу.

Работа A – это скалярная физическая величина, которая представляет собой функцию процесса, описывающую переход тела из одного состояния в другое с изменением его полной энергии. **Геометрический смысл работы** состоит в том, что она численно равна значению площади на декартовой плоскости, на одной оси которой отложены значения силы, а на другой - перемещения.

Работа, совершаемая за единицу времени, называется **мощностью.** Таким образом, **мощность -** есть скорость (быстрота) совершения работы. Мощность может быть представлена как скалярное произведение силы на скорость.

Полная механическая энергия E является суммой кинетической энергии тела или системы, потенциальной энергии тела (системы) в поле консервативных сил и потенциальной энергии взаимодействия между объектами системы в фиксированном состоянии.

Кинетическая энергия T – это энергия движущегося тела или системы тел. Ее значение зависит от скорости тела (системы тел).

Потенциальная энергия U – это энергия взаимодействия тел в системе или их энергия в поле консервативных сил. Ее вид зависит от рода взаимодействия и вида консервативных сил

Полная механическая энергия будет сохраняться, если механическая работа равна нулю. Такое может наблюдаться только при отсутствии диссипации в системе, а также при условии, что внешние силы, действующие на систему, консервативны.

Диссипация – это рассеяние механической энергии. Примером такого явления может служить ее преобразование в тепловую энергию при наличии сил трения, которые являются неконсервативными.

Если на систему действуют неконсервативные силы, то вместо закона сохранения полной механической энергии должен выполняться **закон изменения** этой энергии: разность полных механических энергий в конечном и начальном состоянии равна работе неконсервативных сил.

В замкнутых системах выполняется еще один закон сохранения – **закон сохранения момента импульса** (момент количества движения). Эта величина связана с **изотропией физического пространства**.

Момент импульса относительно произвольного начала отсчета (центра вращения) - это вектор, равный векторному произведению радиус – вектора $\vec{r}$, проведенного из начала отсчета к материальной точке (телу) и импульса $\vec{p}$ в этой точке и перпендикулярный их плоскости. Направление вектора момента импульса $\vec{L}$ можно определить по правилу правой тройки векторов. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}$ и $\vec{p}$, равна модулю вектора $\vec{L}$.

Момент импульса относительно неподвижной оси, проведенной через центр вращения, является проекцией момента импульса на эту ось.

Закон сохранения момента импульса гласит, что: полный момент импульса замкнутой системы является величиной постоянной в любой момент времени и равен векторной сумме моментов импульса всех тел, ее образующих. Аналогичный результат получается для проекции на неподвижную ось вращения.

Если на систему действует внешняя сила, момент которой отличен от нуля, то полный момент импульса системы не сохраняется и имеет место **закон изменения момента импульса:** геометрическая разность конечного и начального моментов импульса равна произведению момента вращающей силы, вызвавшей это изменение, на время, в течение которого этот момент действовал.

Моментом вращающей силы относительно произвольного начала отсчета (центра вращения) называют вектор, равный векторному произведению радиус – вектора $\vec{r}$, проведенного из начала отсчета к материальной точке (телу) и приложенной силы $\vec{F}$ в этой точке и перпендикулярный их плоскости. Направление вектора момента вращающей силы $\vec{M}$ можно определить по правилу правой тройки векторов. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}$ и $\vec{F}$, равна модулю вектора $\vec{M}$.

Момент вращающей силы относительно оси (z), проходящей через точку O есть проекция момента силы относительно этой точки на данную ось.

Особый интерес в механике представляют задачи на **соударения двух тел**. Существует два предельных случая соударения: абсолютно упругое и абсолютно неупругое. Для них всегда можно рассчитать значения энергий и импульсов взаимодействующих объектов, и указать направление этих импульсов по начальным данным.

Абсолютно упругим ударом называют такой удар, при котором выполняются как закон сохранения импульса, так и закон сохранения полной механической энергии. При таком ударе тела не испытывают деформацию и не образуются новые тела.

Абсолютно неупругим ударом называют такой удар, при котором выполняются только закон сохранения импульса, а закон сохранения механической энергии нарушается, так как вследствие деформации тел часть ее превращается во внутреннюю (тепловую). При таком ударе могут образоваться новые тела или из несколько тел образуется одно.

Центральным ударом называют удар, при котором тела (например, однородные шары) до удара движутся вдоль прямой, соединяющей их центры масс (геометрические центры).

Особый интерес также представляет **движение частицы в центральном поле сил.** Законы сохранения энергии и момента импульса приводят к следующим выводам относительно возможных траекторий частиц:

1. в случае **отталкивания** $(\alpha > 0)$ частицы от центра взаимодействия (источника центральных сил), траекторией частицы может являться только **гипербола**, а **полная энергия всегда больше нуля**;
2. в случае **притяжения** $(\alpha < 0)$ частицы к центру взаимодействия, вид траектории определяется **знаком полной энергии** E. Если $E > 0$, то траекторией частицы является **гипербола**; если $E < 0$, то траектория – **эллипс** (в частном случае - **окружность**); если $E = 0$, то траектория – **парабола**.

Движение по гиперболе и параболе является **инфинитным** (бесконечным), а по эллипсу или окружности – **финитным** (конечным).

Интерес в физике также представляет **задача двух тел**. Система этих тел является замкнутой, поэтому они могут взаимодействовать только друг с другом. Задача двух тел сводится к задаче о движении одной частицы в центральном поле сил. Под частицей понимают **центр масс системы двух тел**, масса которой равна **приведенной массе** этих тел. Обе частицы движутся относительно центра масс по подобным траекториям, причем прямая, соединяющая частицы все время проходит через него.

Основные соотношения:

Импульс тела $\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}$ (1)

Импульс системы тел $\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{c}}$ (2)

где $\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{c}}$ - скорость центра масс системы тел

Импульс силы $\vec{P} = \vec{F}t$ (3)

Закон **изменения импульса** тела (системы) $\vec{P} = \vec{p} - \vec{p}_0$ (4)

Закон **сохранения импульса** системы тел $\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \vec{p} = const$ (5)

Радиус - вектор **центра масс** $\vec{r}_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$ (6)

Скорость **центра масс** $\vec{\mathrm{v}}_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\mathrm{v}}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$ (7)

Механическая работа (определение) $A = E - E_0$ (8)

где E - конечное значение полной механической энергии, а E_0 - ее начальное значение

Полная механическая энергия

$E = T + U_{конс} + U_{вз}$ (9)

где T - кинетическая энергия, $U_{конс}$ - потенциальная энергия в поле консервативных сил, $U_{вз}$ - потенциальная энергия взаимодействия тел системы

Кинетическая энергия тела $T = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{2}$ (10)

Потенциальная **энергия в поле силы тяжести** $U = mgh$ (11)

где h - высота поднятия тела над уровнем Земли

Потенциальная **энергия упругой деформации** $$U = \frac{kx^2}{2} \quad (12)$$

Механическая работа в случае **неоднородной силы** $$A = \int_{S_1}^{S_2} \vec{F}(s) d\vec{s} \quad (13)$$

где $\vec{F}(s)$ - неоднородная сила, действующая на тело вдоль всего пути от s_1 до s_2.

Механическая работа в случае **однородной силы** $$A = (\vec{F} \cdot \vec{s}) \quad (14)$$

Механическая мощность (определение) $$P = \frac{dA}{dt} \quad (15)$$

Механическая мощность $$P = \left(\vec{F}, \vec{\mathrm{v}}\right) \quad (16)$$

Закон **сохранения полной механической энергии** $$\sum_{i=1}^{N} T_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} U_{ij} + U_{конс} = E = const \quad (17)$$

где U_{ij} - потенциальная энергия взаимодействия тел (i и j) системы между собой, T_i - кинетическая энергия i тела

Закон **изменения полной механической энергии** $$E - E_0 = A_{неконс} \quad (18)$$

Момент импульса относительно **центра вращения** (точки) $$\vec{L} = \left[\vec{r} \cdot \vec{p}\right] \quad (19)$$

Момент импульса относительно **оси вращения** $$L_z = \left[\vec{r} \cdot \vec{p}\right]_z \quad (20)$$

Закон **сохранения момента импульса** замкнутой системы относительно **центра вращения** $$\sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i\right] = \vec{L} = const \quad (21)$$

Закон **сохранения момента импульса** замкнутой системы относительно **оси вращения** $$\sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i\right]_z = L_z = const \quad (22)$$

Момент вращающей силы относительно **центра вращения** $$\vec{M} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right] \quad (23)$$

Момент вращающей силы относительно **оси вращения** $$M_z = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right]_z \quad (24)$$

Закон **изменения момента импульса** в **дифференциальной** форме $$\vec{M} dt = d\vec{L} \quad (25)$$

Закон **изменения момента импульса** в **интегральной** форме $$\vec{M} \cdot t = \vec{L} - \vec{L}_0 \quad (26)$$

Конечная скорость **при неупругом соударении** двух тел $$\vec{\mathrm{v}} = \frac{m_1 \vec{\mathrm{v}}_{10} + m_2 \vec{\mathrm{v}}_{20}}{m_1 + m_2} \quad (27)$$

Конечные скорости **при упругом соударении** двух тел $$\vec{\mathrm{v}}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{\mathrm{v}}_{10} + 2m_2 \vec{\mathrm{v}}_{20}}{m_1 + m_2} \quad (28)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_{10} + (m_2 - m_1)\vec{v}_{20}}{m_1 + m_2} \quad (29)$$

Система дифференциальных уравнений **для энергии и импульса частицы в центральном поле сил**

$$\begin{cases} mr^2\dot{\varphi} = L_z = const \\ m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 + \dfrac{2\alpha}{r} = 2E = const \end{cases} \quad (30)$$

где α - константа центральных сил, знак которой определяет их как силы притяжения ($\alpha < 0$), либо как силы отталкивания ($\alpha > 0$); $\dot{\varphi}$ - мгновенная угловая скорость; $\dot{r}$ - мгновенная линейная скорость; r - расстояние от центра поля (притяжения или отталкивания) до частицы в поле центральных сил.

Приведенная масса двух частиц (тел)

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (31)$$

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. Что называют импульсом тела?
2. Привести формулу для импульса силы.
3. Формула, выражающая определение работы имеет вид ______.
4. С однородностью физического пространства связан закон сохранения _____.
5. Момент импульса относительно центра вращения определяется соотношением ________.
6. Утверждение о том, что геометрическая разность конечного и начального моментов импульса равна произведению момента вращающей силы, вызвавшей это изменение, на время, в течение которого этот момент действовал, называют _________.
7. Полная механическая энергия E является суммой _________.
8. Какой удар называют абсолютно упругим?
9. Какова конечная скорость (в общей векторной форме) при неупругом соударении двух тел.
10. При каких условиях траекторией частицы в центральном поле сил будет парабола? (привести условия для полной энергии и коэффициента α).

ТЕСТ№2

1. Запишите закон изменения импульса в математической форме.
2. Чему равен импульс системы тел?
3. Как определяется радиус - вектор центра масс системы тел? (формула)
4. Какую энергию называют кинетической?
5. Чему равна потенциальная энергия в поле силы тяжести?
6. Механическая работа в случае однородной силы определяется соотношением _________.
7. Закон сохранения момента импульса системы гласит _______.
8. Момент вращающей силы относительно некоторой оси вращения равен ______.
9. Чему равна приведенная масса двух тел, образующих замкнутую систему? (формула)

10. При каких условиях частица в центральном поле сил будет совершать финитное движение? (привести условия для полной энергии и коэффициента α).

ТЕСТ№3

1. Сформулируйте закон сохранения импульса для системы физических тел.
2. С однородностью физического времени связан закон сохранения _______.
3. Чему равна кинетическая энергия?
4. Скорость центра масс определяется соотношением _________.
5. Чему равна работа неоднородных механических сил?
6. Что называют диссипацией?
7. Чему равна потенциальная энергия упруго деформированного тела?
8. Какой удар называют абсолютно неупругим?
9. Чему равен момент вращающей силы относительно центра вращения?
10. При каких условия частица в центральном поле сил будет двигаться по гиперболе? (привести условия для полной энергии и коэффициента α).

ТЕСТ№4

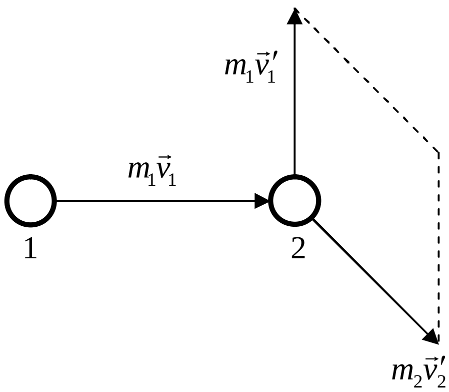
1. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии.
2. Запишите математическое соотношение для закона сохранения полной механической энергии.
3. Будет ли сохраняться энергия, если в системе действуют силы трения? Кратко поясните.
4. С каким свойством пространства или времени связан закон сохранения момента импульса?
5. Момент импульса относительно оси вращения определяется соотношением ________.
6. Чему равна работ однородных сил в случае, когда сила всегда направлена перпендикулярно перемещению?
7. Закон сохранения для момента импульса при вращении тела относительно оси определяется соотношением _______.
8. Запишите закон изменения момента импульса в интегральной форме.
9. Какой удар называется центральным?
10. Запишите систему дифференциальных уравнений для энергии и импульса частицы в центральном поле сил.

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1. Шайба 1, скользившая по шероховатой горизонтальной поверхности, испытала соударение с покоившейся шайбой 2. После столкновения шайба 1 отскочила под прямым углом к своему первоначальному направлению и прошла до остановки путь $s_1 = 1{,}5$ м, а шайба 2 – путь $s_2 = 4$ м. Найти скорость шайбы непосредственно перед столкновением, если ее масса в $\eta = 1{,}5$ раза меньше массы шайбы 2 и коэффициент трения равен $\mu = 0{,}17$.

Решение:

Изобразим на рисунке импульсную диаграмму столкновения шайб в соответствии с условием задачи.



Закон сохранения импульса в векторной форме будет иметь вид:

$$m_1\vec{\text{v}}_1 = m_1\vec{\text{v}}_1' + m_2\vec{\text{v}}_2' \qquad (1)$$

Согласно рисунку вектора импульсов образуют прямоугольный треугольник. Следовательно, в скалярной форме закон сохранения импульса примет вид:

$$\text{v}_1^2 = \frac{m_2^2}{m_1^2}\text{v}_2'^2 - \text{v}_1'^2 = \eta^2\text{v}_2'^2 - \text{v}_1'^2 \qquad (2)$$

Движение шайб после столкновения является равнозамедленным, так как происходит под действием сил трения:

$$F_{тр} = \mu N_i = m_i a_i \qquad (3)$$

где i - номер соответствующей шайбы.

Сила реакции опоры уравновешена силой тяжести:

$$N_i = m_i g \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем ускорения шайб:

$$a_i = \mu g \qquad (5)$$

Из (5) видно, что ускорения одинаковы.

Тормозные пути и скорости после столкновения связаны с ускорением соотношениями:

$$s_i = \frac{\mu g t_i^2}{2} \qquad (6)$$

$$\text{v}_i' = \mu g t_i \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и избавляясь от времени, получаем:

$$s_i = \frac{\text{v}_i'^2}{2\mu g};\ \text{v}_i'^2 = 2\mu g s_i \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (2), находим скорость первой шайбы в момент удара:

$$\text{v}_1^2 = 2\mu g(\eta^2 s_2 - s_1) \qquad (9)$$

$$\text{v}_1 = \sqrt{2\mu g}\sqrt{\eta^2 s_2 - s_1} \qquad (10)$$

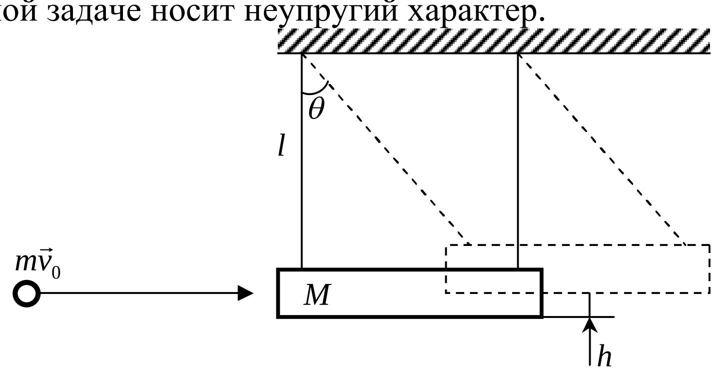
$$\text{v}_1 = 5\,\text{м/с}$$

Ответ: $\text{v}_1 = \sqrt{2\mu g}\sqrt{\eta^2 s_2 - s_1}$; $\text{v}_1 = 5$ м/с

Задание №2. Летевшая горизонтально пуля массы m попала, застряв в теле массой M, которое подвешено на двух одинаковых нитях длины l. В результате нити отклонились на угол θ. Считая $m << M$, найти: скорость пули перед попаданием в тело; относительную долю первоначальной кинетической энергии пули, которая перешла во внутреннюю энергию.

Решение:

В результате взаимодействия пули и тела, представленных на рисунке, пуля передала свой импульс телу, сообщив ему кинетическую энергию. Взаимодействие пули и тела в данной задаче носит неупругий характер.



Закон сохранения импульса для данной задачи имеет вид:

$$m\text{v}_0 = (m+M)\text{v} \qquad (1)$$

Кинетическая энергия образованной системы полностью преобразовалась в потенциальную энергию в поле силы тяжести:

$$\frac{(m+M)\text{v}^2}{2} = (m+M)gh \qquad (2)$$

где h - высота тела по отношению к его начальному положению. Из рисунка и в соответствии с условием задачи она равна:

$$h = l(1-\cos\theta) \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), находим выражение для скорости, приобретенной телом при попадании в него пули:

$$\text{v} = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)} = 2\sqrt{2gl}\sin\frac{\theta}{2} \qquad (4)$$

Далее подставляя (4) в (1) и учитывая, что $m \ll M$, выражаем искомую скорость пули:

$$\text{v}_0 = \frac{M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\theta)} = \frac{2M}{m}\sqrt{2gl}\sin\frac{\theta}{2} \qquad (5)$$

Внутренняя энергия, выделяемая при ударе, равна разности начальной и конечной кинетической энергии взаимодействующих тел:

$$U = \frac{m\text{v}_0^2}{2} - \frac{M\text{v}^2}{2} \qquad (6)$$

Относительная доля первоначальной кинетической энергии пули, которая перешла во внутреннюю энергию определяется соотношением:

$$\gamma = \frac{2U}{m\text{v}_0^2} = 1 - \frac{M\text{v}^2}{m\text{v}_0^2} \qquad (7)$$

Подставляя (4) и (5) в (7), получаем:

$$\gamma = 1 - \frac{m}{M} \qquad (8)$$

Ответ: $\text{v}_0 = \frac{2M}{m}\sqrt{2gl}\sin\frac{\theta}{2}, \quad \gamma = 1 - \frac{m}{M}.$

Задание №3. Потенциальная энергия частицы в некотором поле имеет вид: $U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$, где a и b - положительные постоянные, r - расстояние от центра поля. Найти значение r_0, соответствующее равновесному положению частицы; выяснить устойчиво ли это положение; найти максимальное значение силы притяжения.

Решение:

Равновесие имеет место тогда, когда результирующая сила обращается в нуль. Вид потенциальной энергии говорит о том, что это энергия центрального поля. Центральные силы, как известно, являются консервативными и потенциальными, Следовательно, центральные силы связаны с потенциальной энергией по формуле:

$$F = -\frac{dU}{dr} \qquad (1)$$

Подставляя в (1) выражение для потенциальной энергии, приведенное в условие задачи, находим выражение для центральной силы:

$$F = \frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2} \qquad (2)$$

Приравнивая силу к нулю, находим r_0:

$$\frac{2a}{r_0^3} - \frac{b}{r_0^2} = 0 \qquad (3)$$

$$r_0 = \frac{2a}{b} \qquad (4)$$

Устойчивость равновесия определяет знак второй производной U по r в точке r_0:

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} = -\frac{6a}{r_0^4} + \frac{2b}{r_0^3} = -\frac{6a\cdot b^4}{16a^4} + \frac{2b^4}{8a^3} = -\frac{b^4}{8a^3} < 0$$

Так как знак отрицательный, то это указывает на вогнутость функции U в r_0. Это указывает на устойчивость данного равновесия.

Для того, чтобы найти максимальное значение силы, необходимо решить задачу на нахождение экстремума функции, роль которой играет сила, а роль аргумента – расстояние от центра поля r. Поэтому продифференцируем (возьмем производную) выражение для силы по r и приравняем к нулю:

$$\frac{dF}{dr} = -\frac{6a}{r^4} + \frac{2b}{r^3} = 0 \qquad (5)$$

$$r = \frac{3a}{b} \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (2), получаем максимальное значение силы притяжения:

$$F_{\max} = \frac{2a\cdot b^3}{27a^3} - \frac{b^3}{9a^2} = \frac{b^3}{a^2}\left(\frac{2}{27} - \frac{3}{27}\right) = -\frac{b^3}{27a^2} \qquad (7)$$

Ответ: $r_0 = \frac{2a}{b}$, устойчиво, $F_{\max} = -\frac{b^3}{27a^2}$.

Неинерциальные системы отсчета (НИСО). Динамика и законы сохранения в них

Справочный материал к тестированию по теме

Неинерциальные системы отсчета (НИСО), как известно, движутся **с некоторым ускорением** относительно идеальной системы отсчета или какой либо другой ИСО. Следовательно, ускорение какого либо объекта в НИСО будет отличаться от его же ускорения в ИСО. Причем, **векторная разность его ускорений в ИСО и НИСО соответственно будет равна ускорению рассматриваемой НИСО, относительно данной ИСО**.

Основные законы динамики (законы Ньютона) выполняются только в **инерциальных системах отсчета** (ИСО).

Если тело находится **в неинерциальной системе отсчета**, то законы Ньютона не выполняются. Однако введение сил особого рода **- сил инерции**, дает возможность использовать **второй закон Ньютона** и в неинерциальных системах отсчета. **Силы инерции** обусловлены **свойствами самой НИСО**. Поэтому их невозможно ставить в один ряд с другими механическими силами – силами, обусловленными воздействием одних тел на другие. В этом отношении **силы инерции считают фиктивными**. Поэтому **невозможно указать природу этих сил**, то есть какого рода взаимодействие (фундаментальное) их вызвало.

Силы инерции, в отличие от многих других механических сил, **пропорциональны массе тела**. Таким же свойством обладают и силы тяготения. Поэтому, если представить, что некоторое тело, прикрепленное с помощью пружины к потолку закрытой кабины, удаленной от всех внешних тел, ускоренно движется «вверх» с ускорением равным ускорению свободного падения, то на него действует сила инерции равная и сонаправленная с силой тяготения, которая бы действовала на это же тело в однородном гравитационном поле. Таким образом, силы инерции эквивалентны силам тяготения. Приведенное рассуждение представляет собой принцип **эквивалентности**, который лег в основу общей теории относительности Эйнштейна.

Всякая **сила инерции противоположна по направлению ускорению** рассматриваемой НИСО относительно выбранной ИСО.

Неинерциальная система может быть как поступательной, так и вращающейся (например, Земля) по отношению к выбранной ИСО. Силу инерции, возникающую во вращающейся системе отсчета, называют **центробежной силой инерции**. Центробежная сила инерции пропорциональна **массе тела** и **нормальному ускорению системы** и направлена **противоположно ему**.

Кроме центробежных сил инерции, для тела движущегося относительно вращающейся НИСО с отличной от нуля скоростью в направлении, не совпадающем с мгновенной осью вращения, возникает дополнительная сила инерции – **сила Кориолиса**. Она зависит как от свойств НИСО – угловая скорость вращения $\vec{\omega}$, так и от скорости частицы относительно этой НИСО - $\vec{v}'$. Вектор силы Кориолиса лежит на прямой, перпендикулярной плоскости векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{v}'$.

С действием **кориолисовых сил** связано множество явлений вблизи поверхности Земли: отклонение тел, совершающих свободное падение на восток; неодинаковый износ рельсов; при качании маятников; неодинаковое подмывание берегов рек и т.д. Например, анализ стрельбы из орудия в направлении различных сторон света может привести к следующим выводам. При выстреле с запада на восток вдоль экватора, под действием кориолисовой силы, снаряд приподнимается над Землей, а в обратном направлении – прижимается к ней. При выстреле вдоль меридиана на юг, снаряд в северном полушарии будет отклоняться к западу, а в южном – к востоку. При выстреле вдоль меридиана на север отклонения снаряда в соответствующих полушариях будут противоположными.

Так как благодаря введению сил инерции второй закон Ньютона выполняется и в НИСО, то останутся справедливыми и законы сохранения, полученные для ИСО, которые, однако, тоже будут учитывать действие на тело сил инерции.

Основные соотношения:

Сила инерции (определение) $\vec{F}_{in} = -m \cdot \vec{a}_{in}$ (1)

где $\vec{a}_{in}$ - ускорение НИСО относительно выбранной ИСО.

Второй закон Ньютона с учетом **силы инерции** $\vec{F} + \vec{F}_{in} = m \cdot \vec{a}'$ (2)

где $\vec{F}$ - равнодействующая всех сил относительно некоторой ИСО, в которой рассматривается тело; $\vec{F}_{in}$ - сила инерции, которая связана с ускорением НИСО относительно выбранной ИСО; $\vec{a}'$ - ускорение тела относительно НИСО.

Связь между **ускорениями тела в НИСО и ИСО** $\vec{a} - \vec{a}' = \vec{a}_{in}$ (3)

где $\vec{a}$ - ускорение тела относительно ИСО.

Центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{R}$ (4)

где $\vec{R}$ - радиус – вектор, проведенный от оси вращения к телу.

Сила Кориолиса $\vec{F}_К = 2m\left[\vec{v}', \vec{\omega}\right]$ (5)

где $\vec{v}'$ - скорость тела относительно НИСО.

Ускорение Кориолиса $\vec{a}_К = -2\left[\vec{v}', \vec{\omega}\right]$ (6)

Второй закон Ньютона во вращающейся системе отсчета для движущегося в ней тела $\vec{F} + m\omega^2\vec{R} + 2m\left[\vec{v}', \vec{\omega}\right] = m \cdot \vec{a}'$ (7)

Закон **изменения полной механической энергии в НИСО** $E_2 - E_1 = A_{12неконс.} + A_{12инерц.}$ (8)

Закон **изменения импульса в НИСО** $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{внешн.} + \sum \vec{F}_{инерц.}$ (9)

Закон **изменения момента импульса в НИСО** $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{внешн.} + \sum \vec{M}_{инерц.}$ (10)

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. Системы отсчета, которые движутся с ускорением относительно идеальной, называют ________.
2. Пропорциональны ли массе тела силы инерции? Какие известные вам силы также пропорциональны массе?
3. Является ли сила инерции механической? Поясните почему?
4. Чему равна центробежная сила инерции?
5. Ускорение Кориолиса определяется соотношением ______.

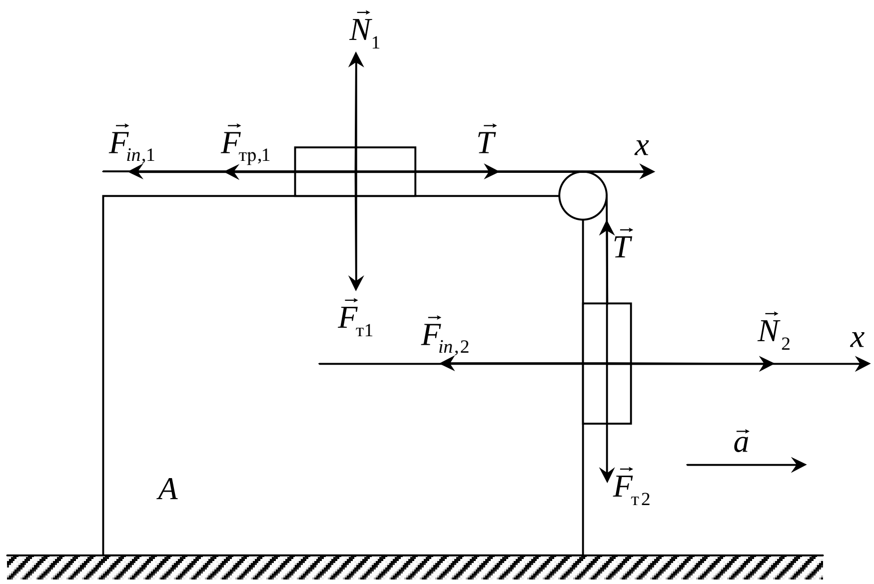
6. Второй закон Ньютона в НИСО имеет вид ______.
7. Какое действие будет оказывать сила Кориолиса на тело, которое движется с запада на восток вдоль экватора?
8. Какой берег рек в северном полушарии размыт сильнее? Указать причину его размывания?
9. Закон изменения полной механической энергии в НИСО имеет вид _____.
10. Если вектор скорости тела совпадает с осью вращения, будет ли действовать на него сила Кориолиса?

ТЕСТ№2

1. Каким образом возможно использование второго закона Ньютона для описания движения объектов в НИСО?
2. Каково ускорение тела относительно некоторой НИСО, если в ИСО оно является неподвижным, а ускорение данного НИСО относительно данного ИСО равно $\vec{a}$?
3. Можно ли указать природу сил инерции? Почему?
4. Математическое определение силы инерции _______.
5. В чем суть принципа эквивалентности?
6. Силы инерции являются свойством ________.
7. Второй закон Ньютона с учетом силы Кориолиса имеет вид _______.
8. В каком случае тело под действием силы Кориолиса будет прижиматься к Земле?
9. Закон изменения импульса в НИСО
10. В каком случае импульс в НИСО будет неизменным?

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1. С каким минимальным ускорением следует перемешать в горизонтальном направлении брусок А, приведенный на рисунке, чтобы тела 1 и 2 не двигались относительно него? Массы тел одинаковы, коэффициент трения между бруском и обоими телами равен μ. Масса блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет.



Решение:

Из рисунка к задаче видно, что призма должна двигаться с таким ускорением, чтобы у второго тела оно было равно нулю. В такой ситуации на тело 1 действуют: сила трения, сила натяжения нити в направлении движения призмы и сила тяжести с силой реакции опоры – в перпендикулярном направлении. Сила инерции, действующая на тело 1 вдоль направления движения призмы, равна:

$$\vec{F}_{in1} = -m_1\vec{a} \qquad (1)$$

Второй закон Ньютона в векторной форме для тела 1 с учетом силы инерции примет вид:

$$\vec{T} + \vec{F}_{mp1} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 - m_1\vec{a} = 0 \qquad (2)$$

Спроецируем силы, действующие на тело 1 на направление движения призмы (горизонтальное направление - OX) и направление перпендикулярное ему (вертикальное направление - OY):

$$OX: T - F_{mp1} = m_1 a \qquad (3)$$

$$OY: N_1 = m_1 g \qquad (4)$$

Учитывая, что по определению сила трения скольжения равна $F_{mp1} = \mu N_1$ и используя (4), преобразуем (3) к виду:

$$T = \mu m_1 g + m_1 a = m_1(\mu g + a) \qquad (5)$$

На тело 2, как видно из рисунка, действуют: сила трения, сила натяжения нити и сила тяжести в направлении движения призмы и сила инерции с силой реакции опоры – в перпендикулярном направлении.

Второй закон Ньютона в векторной форме для тела 2 определяется соотношением:

$$\vec{T} + \vec{N}_2 + m\vec{g} + \vec{F}_{mp2} + \vec{F}_{in2} = 0 \qquad (6)$$

где

$$\vec{F}_{in2} = -m_2\vec{a} \qquad (7)$$

Спроецируем силы, действующие на тело 2 на направление движения призмы (горизонтальное направление - OX) и направление перпендикулярное ему (вертикальное направление - OY):

$$OY: T + F_{mp2} - m_2 g = 0 \qquad (8)$$

$$OX: N_2 = m_2 a \qquad (9)$$

Учитывая, что по определению сила трения скольжения равна $F_{mp2} = \mu N_2$ и используя (9), преобразуем (8) к виду:

$$T = m_2 g - \mu m_2 a = m_2(g - \mu a) \qquad (10)$$

Приравнивая правые части (5) и (10), получаем:

$$m_1(\mu g + a) = m_2(g - \mu a) \qquad (11)$$

Отсюда находим искомое ускорение призмы, с учетом одинаковости масс тела 1 и 2:

$$a = g\frac{1-\mu}{1+\mu} \qquad (12)$$

Ответ: $a = g\dfrac{1-\mu}{1+\mu}$

Задание №2. Поезд массы $m = 2000$т движется на северной широте $\varphi = 60^0$. Определить: 1) Модуль и направление силы бокового давления поезда на рельсы, если он движется вдоль меридиана на север со скоростью $\mathrm{v} = 54$км/ч; 2) В каком направлении и с какой скоростью должен был бы двигаться поезд, чтобы результирующая сил инерции, действующих на поезд в системе отсчета «Земля», была равна нулю.

Решение:

Решим первую часть задачи.

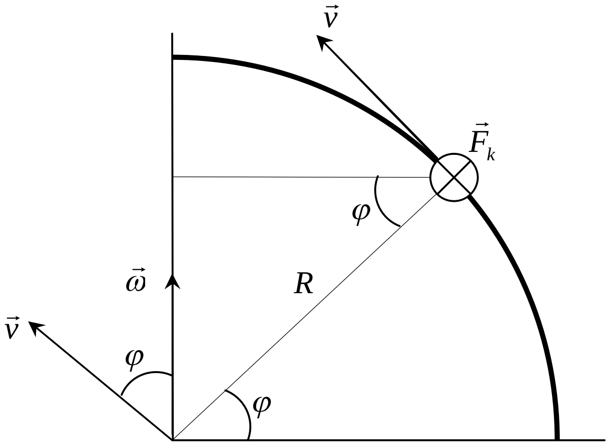


рис. 6.1

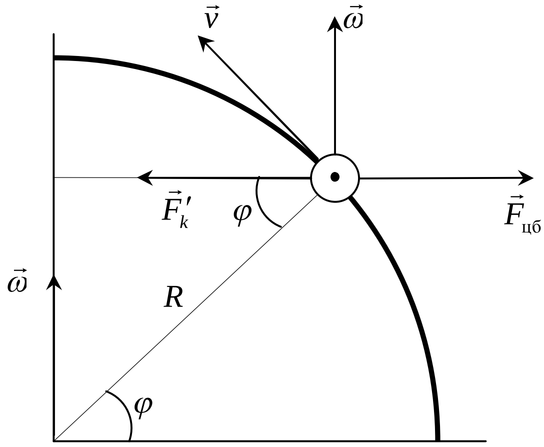


рис. 6.2

Сила бокового давления вызвана действием силы Кориолиса и полностью ей определяется:

$$\vec{P} = \vec{F}_K \qquad (1)$$

Сила Кориолиса по определению равна:

$$\vec{F}_к = 2m[\vec{\mathrm{v}}, \vec{\omega}] \qquad (2)$$

Из соотношения (1) можно определить направление силы Кориолиса, используя правило правой тройки векторов: при повороте первого вектора, векторного произведения по направлению ко второму по часовой стрелке в плоскости рассматриваемых векторов, результирующий вектор векторного произведения лежит на прямой перпендикулярной этой плоскости и направлен от нас. Если поворот происходит против часовой стрелки, то результирующий вектор смотрит на нас. В нашем случае $\vec{\mathrm{v}}$ направлено по касательной к меридиану к северу, а $\vec{\omega}$ вдоль земной оси. Следовательно, **сила Кориолиса направлена вдоль параллели**, соответствующей по условию широте 60^0, **с запада на восток**. Так же направлена и сила бокового давления, то есть **давление оказывается на правый рельс по направлению движения поезда**. Модульное значение силы Кориолиса, а, следовательно, и силы бокового давления определяется соотношением:

$$P = F_K = 2m\mathrm{v}\omega \sin\varphi \qquad (3)$$

Найдем направление движения и скорость для 2) пункта задачи.

Центробежная сила инерции действует вдоль радиуса окружности, проходящей через соответствующую параллель, и направлена от ее центра. Следовательно, сила Кориолиса должна быть направлена вдоль радиуса к ее центру, чтобы силы инерции были скомпенсированы в соответствии с условием задачи:

$$\vec{F}_{in} = \vec{F}'_K + \vec{F}_{цб} = 0, \; F'_K = F_{цб} \qquad (4)$$

Учитывая (2) это возможно только в том случае если **тело движется в направлении с востока на запад**, а вектор скорости направлен по касательной к выше обозначенной окружности.

Модульное значение силы Кориолиса в рассматриваемом случае равно:

$$F_K' = 2m\mathrm{v}_0\omega \qquad (5)$$

Модульное значение центробежной силы инерции:

$$F_{цб} = m\omega^2 R\cos\varphi \qquad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4), находим значение скорости v_0:

$$\mathrm{v}_0 = \frac{\omega R}{2}\cos\varphi \qquad (7)$$

где ω - определяется через период T суточного вращения земли по формуле:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и (3) окончательно получаем:

$$\mathrm{v}_0 = \frac{\pi R}{T}\cos\varphi \qquad (9)$$

$$P = \frac{4\pi m\mathrm{v}}{T}\sin\varphi \qquad (10)$$

Подстановка данных в условии задачи и соответствующих констант (радиуса Земли и ее периода вращения) дает:

$$P = 3{,}8\,\text{кН} \qquad (11)$$

$$\mathrm{v}_0 = 420\,\text{км/ч} \qquad (12)$$

Ответ: 1) $P = 3{,}8$ кН, давление оказывается на правый рельс по направлению движения поезда; 2) $\mathrm{v}_0 = 420$ км/ч, тело движется в направлении с востока на запад.

Динамика вращательного движения
Справочный материал к тестированию по теме

Материальная точка, в силу своего определения может совершать только **поступательное движение**. Движение всякого твердого тела является более сложным. **Абсолютно твердым телом** называют тело – это система, состоящая из бесконечно большого числа частиц (материальных точек) расстояния между которыми остаются неизменными при любых движениях и взаимодействиях тела. Любое движение твердого тела может быть представлено как наложение его **поступательного** и **вращательного** движения. Выделяют два типа сложного движения твердого тела: **плоское** и **неплоское**.

Плоское – это такое движение, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. В случае плоского движения скорость поступательного движения всех точек $\vec{\mathrm{v}}_0$ одинакова и перпендикулярна угловой скорости $\vec{\omega}$. Поэтому **плоское движение** можно представить как **ряд последовательных элементарных вращений** относительно **мгновенных осей**.

Мгновенная ось вращения – это ось, относительно которой тело совершает элементарный поворот в данный момент времени.

В случае **неплоского движения** элементарное перемещение тела можно представить как поворот относительно мгновенной оси только в том случае, если $\vec{\omega} \perp \vec{v}_0$. Когда указанное условие не выполняется, то всякое элементарное перемещение есть наложение двух движений в каждый момент времени: вращения относительно этой оси и поступательного вдоль нее.

Центр масс тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу сил.

При вращательном движении вместо массы, используется скалярная физическая величина – **момент инерции тела** I. Как и масса, она является мерой инертности тела и обладает свойством аддитивности. В отличие от массы численное значение момента инерции зависит от выбора оси вращения тела.

Момент инерции материальной точки есть произведение массы m этой точки на квадрат расстояния r от этой точки до оси или центра вращения.

В случае, если тело нельзя представить в виде материальной точки, то оно мысленно разбивается на **элементарные массы** (предельно малые элементы тела) и **момент инерции твердого тела** относительно оси, проходящей через центр масс можно представить в виде суммы произведений значений элементарных масс m_i на квадраты расстояний r_i от них до оси вращения.

Если ось вращения не проходит через центр масс твердого тела, то его момент инерции можно найти по **теореме Штейнера**: момент инерции I, относительно оси, не проходящей через центр масс, равен сумме момента инерции I_c относительно воображаемой оси, проходящей через центр масс параллельно реальной оси и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями.

Оси, проведенные через центр масс тела и сохраняющие свое направление в пространстве при вращении относительно них тела, называют **свободными осями**. Три взаимноперпендикулярные свободные оси, которые являются осями симметрии, называют **главными осями инерции**. **Устойчивым** является вращение только относительно тех главных осей, **момент инерции** относительно которых является **минимальным или максимальным в отсутствии какого-либо воздействия**. Если **внешнее воздействие существует**, то **устойчивым** будет только вращение относительно главной оси **с минимальным моментом инерции**.

Если у однородного тела все моменты инерции одинаковы, то он является **шаровым волчком**. Если однородное тело обладает осевой симметрией и два главных момента инерции одинаковы, то оно – **симметричный волчок**. Однородное тело, у которого все три главных момента различны – **асимметричный волчок.**

Проекция момента импульса на ось OZ - L_z, совпадающую с некоторой фиксированной осью вращения, проходящей через твердое тело равна произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость, которая совпадает с этой осью. Это справедливо для любого тела.

Вектор момент импульса $\vec{L}$ равен произведению момента инерции тела относительно некоторой оси вращения на вектор угловой скорости. Это утверждение верно лишь в случае, когда тело вращается вокруг оси симметрии или несимметричное тело вращается относительно одной из главных осей инерции.

Основной закон динамики вращательного движения связывает суммарный момент внешних сил $\vec{M}$, действующих на абсолютно твердое тело, с угловым ускорением. Они связаны через момент инерции тела относительно заданной оси вращения. **В векторной форме** этот закон выполняется только при вращении тела **относительно главных осей инерции**. **Проекция суммарного момента внешних сил** на ось M_z, совпадающую с реальной фиксированной осью вращения, равна произведению момента инерции относительно этой оси на проекцию углового ускорения. Это утверждение выполняется относительно любых оси и тела. Основной закон динамики вращательного движения является аналогом второго закона Ньютона в интегральной форме. Момент инерции в нем играет роль массы.

Кинетическая энергия вращающегося тела, как и кинетическая энергия поступательно движущегося объекта, пропорциональна квадрату угловой скорости ω. Причем коэффициентом пропорциональности является момент инерции I.

Механическая работа внешних сил при вращательном движении тела обусловлена его поворотом, если вектор угла поворота не перпендикулярен моменту внешних сил.

Кинетическая энергия тела при плоском движении слагается из энергии поступательного движения, со скоростью равной скорости центра масс $\vec{v}_c$, и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс тела.

Основные соотношения:

Момент инерции материальной точки $$I = mr^2 \quad (1)$$

Момент инерции абсолютно твердого тела

относительно некоторой оси $$I = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \quad (2)$$

Момент инерции однородного тела или тела

с непрерывно распределенной плотностью ρ $$I = \int\limits_{V} \rho \cdot r^2 dV \quad (3)$$

где V - объем тела

Теорема Штейнера $$I = I_c + md^2 \quad (4)$$

Момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости диска $$I = \frac{mR_0^2}{2} \quad (5)^*$$

где R_0 - радиус диска

Момент инерции диска относительно оси, совпадающей

с диаметром диска $D = 2R_0$ $$I = \frac{mR_0^2}{4} \quad (6)$$

Момент инерции шара радиуса R $$I = \frac{2mR^2}{5} \quad (7)$$

Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр $$I = \frac{ml^2}{12} \quad (8)$$

где l - длина стержня.

Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец $I = \dfrac{ml^2}{3}$ (9)

Примечание: Соотношение (5) также является моментом инерции цилиндра при любом отношении его высоты к радиусу R_0.

Основной закон динамики вращательного движения (векторная форма) $\vec{M} = I \cdot \vec{\beta}$ (10)

Основной закон динамики вращательного движения (проекция на направление фиксированной оси вращения) $M_z = I \cdot \beta_z$ (11)

Момент импульса тела (векторная форма) $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$ (12)

Проекция момента импульса тела на направление фиксированной оси вращения $L_z = I \cdot \omega_z$ (13)

Кинетическая энергия тела вращающегося относительно неподвижной оси $T_{вр} = \dfrac{I\omega^2}{2}$ (14)

Кинетическая энергия тела при плоском движении $T = \dfrac{I_c\omega^2}{2} + \dfrac{m\mathrm{v}_c^{\,2}}{2}$ (15)

где v_c - скорость центра масс тела, а I_c - момент инерции относительно оси проходящей через центр масс.

Элементарная работа суммарного момента внешних сил $dA = (\vec{\omega}, \vec{M})dt = M_\omega d\varphi$ (16)

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. Какое движение твердого тела называют плоским?
2. В каких случаях неплоское движение можно представит как ряд последовательных элементарных поворотов относительно мгновенных осей?
3. В чем состоит отличие массы тела и его моментом инерции?
4. Момент инерции абсолютно твердого тела, относительно некоторой оси равен ________.
5. Чем больше расстояние материальной точки до оси вращения, тем ее момент инерции ______.
6. Если ось вращения не проходит через центр масс твердого тела, то его момент инерции равен ________.
7. Момент инерции шара равен _____.
8. Основной закон динамики вращательного движения в векторной форме имеет вид _______.
9. Проекция момента импульса тела на направление фиксированной оси вращения равна _______. (формула)
10. Кинетическая энергия тела при плоском движении определяется соотношением _______.

ТЕСТ№2

1. Какое тело называют абсолютно твердым?
2. Мгновенная ось вращения – это такая ось _______.
3. Что общего у массы и момента инерции?
4. Момент инерции материальной точки определяется соотношением _____.
5. Момент инерции однородного стержня относительно оси перпендикулярной к нему и проходящей через его середину равен ______.
6. Какое тело называют шаровым волчком?
7. При каком случае вращение тела будет устойчивым в отсутствии внешнего воздействия?
8. Кинетическая энергия, вращающегося относительно неподвижной оси тела, определяется соотношением.
9. При каких условиях верна векторная форма для момента импульса тела?
10. Чему равна элементарная работа суммарного момента внешних сил?

ТЕСТ№3

1. Оси, проведенные через центр масс тела и сохраняющие свое направление в пространстве при вращении относительно них тела, называют _______.
2. Произведение массы m этой точки на квадрат расстояния r от этой точки до оси или центра вращения есть ________.
3. Соотношение для теоремы Штейнера имеет вид ________.
4. Момент инерции однородного тела определяется соотношением _______.
5. Момент инерции цилиндра, у которого ось вращения совпадает с осью симметрии, равен _______.
6. Какое тело называют симметричным волчком?
7. Три взаимноперпендикулярные свободные оси, которые являются осями симметрии, называют ______.
8. Если на тело оказывают внешнее воздействие, то устойчивым будет только вращение относительно ________.
9. Основной закон динамики вращательного движения относительно неподвижной оси имеет вид ______.
10. Кинетическая энергия тела при плоском движении равна сумме кинетических энергий _________.

ТЕСТ№4

1. Зависит ли момент инерции от выбора оси вращения?
2. Зависит ли от выбора оси масса тела?
3. Какое тело называют асимметричным волчком?
4. Какую ось называют мгновенной?
5. Вращение тела в отсутствии внешних воздействий относительно главной оси инерции с минимальным моментом инерции является ________.
6. Момент инерции материальной точки равен _______.
7. Теорема Штейнера гласит, что ________.
8. Момент импульса в векторной форме имеет вид _____.
9. Момент инерции диска относительно оси, совпадающей с диаметром, определяется соотношением ________.
10. Чему равна кинетическая энергия тела, вращающегося относительно неподвижной оси, проходящей через центр масс?

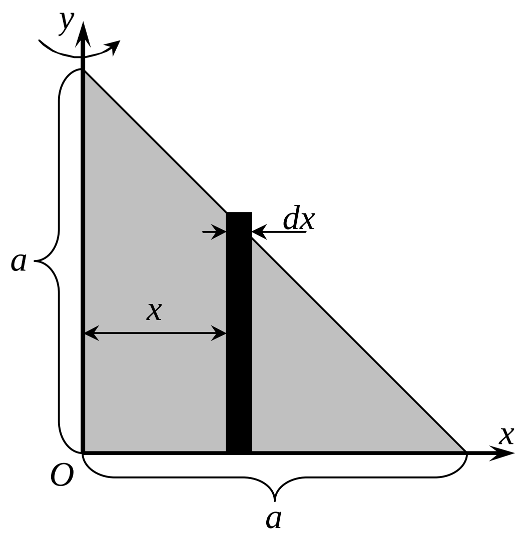
Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1 Тонкая однородная пластинка массы m = 0,60 кг имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника. Найти её момент инерции относительно сои, совпадающей с одним из катетов, длина которого a = 200 мм.

Решение:

Момент инерции тела можно найти как сумму моментов инерции всех его малых частей массой dm, находящихся на различных расстояниях x от оси вращения.

$$I = \int dm \cdot x^2 \qquad (1)$$



Выберем систему координат таким образом, чтобы начало её совпадало с вершиной треугольника при прямом угле, а ось вращения была направлена по оси Oy. Тогда, момент инерции треугольника можно найти как момент инерции тонких полосок малой толщины dx, находящихся на расстояниях x от оси вращения Oy.

$0 \le x \le a$.

Высота y этих полосок зависит от их дальности от катета, прилегающего к оси вращения. Так как прямоугольный треугольник к тому же и равнобедренный, то эта зависимость выражается уравнением

$y = a - x$.

Масса тонкой полоски треугольника пропорциональна её площади.

$$dm = m \cdot \frac{dS}{S} = m \cdot \frac{y \cdot dx}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{2m}{a^2}(a - x)dx. \qquad (2)$$

Итак, момент инерции треугольника

$$I = \int_0^a \frac{2m}{a^2}(a - x)dx \cdot x^2 = \frac{2m}{a^2}\int_0^a \left(ax^2 - x^3\right)dx = \frac{2m}{a^2}\left(\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^a = \frac{2m}{a^2}\left(\frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{4}a^4\right) =$$

$$= \frac{2m}{a^2} \cdot \frac{4 - 3}{12}a^4 = \frac{1}{6}ma^2. \qquad (3)$$

$I = \frac{1}{6} \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}004$ (кг·м^2).

Ответ: 0,004 кг·м^2.

Задание № 2 К точке с радиус-вектором $\vec{r}_1 = a\vec{i}$ приложена сила $\vec{F}_1 = A\vec{j}$, а к точке с $\vec{r}_2 = b\vec{j}$ – $\vec{F}_2 = B\vec{i}$. Здесь оба радиус-вектора определены относительно начала координат *O*, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей *x* и *y*, *A* и *B* – постоянные. Найти плечо равнодействующей силы относительно точки *O*.

Решение:

Момент силы относительно точки равен векторному произведению силы на радиус-вектор точки, к которой приложена сила

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] \qquad (1)$$

Суммарный момент силы относительно одной и той же точки равен сумме моментов сил.

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \left[\vec{r}_1 \times \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2 \times \vec{F}_2\right] = \left[a\vec{i} \times A\vec{j}\right] + \left[b\vec{j} \times B\vec{i}\right] = aA \cdot \left[\vec{i} \times \vec{j}\right] + bB \cdot \left[\vec{j} \times \vec{i}\right] =$$
$$= aA \cdot \left[\vec{i} \times \vec{j}\right] - bB \cdot \left[\vec{i} \times \vec{j}\right] = (aA - bB) \cdot \left[\vec{i} \times \vec{j}\right] = (aA - bB)\vec{k}. \qquad (2)$$

Здесь $\vec{k} = \left[\vec{i} \times \vec{j}\right]$ – вектор, перпендикулярный векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Равнодействующая сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равна их векторной сумме.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = A\vec{j} + B\vec{i} \qquad (2)$$

Этот вектор лежит в плоскости $(\vec{i}, \vec{j})$ и перпендикулярен вектору $\vec{M}$, который направлен по нормали $\vec{k}$ к этой плоскости. Следовательно, плечо равнодействующей силы можно найти как отношение величины моменты силы относительно точки *O* к величине равнодействующей силы.

$$\vec{F} \perp \vec{M} \qquad \Rightarrow \qquad l = \frac{\left|\vec{M}\right|}{\left|\vec{F}\right|} = \frac{aA - Bb}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (3)$$

Ответ: $l = \dfrac{aA - Bb}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

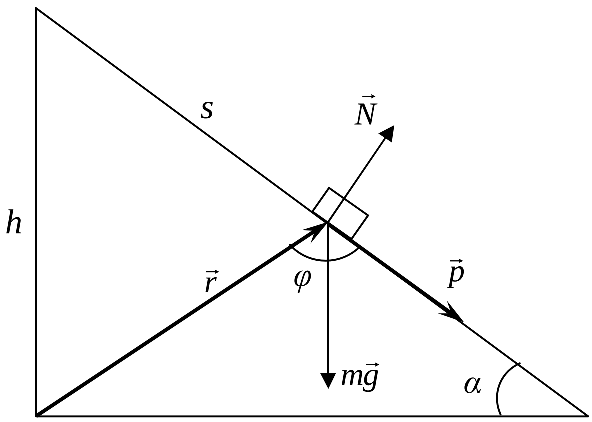
Задание №3 Небольшая шайба массы m = 50 г начинает скользить с вершины гладкой наклонной плоскости, высота которой h = 100 см и угол наклона к горизонту α = 15°. Найти модуль момента импульса шайбы относительно оси *O*, проходящей перпендикулярно к плоскости рисунка, через t = 1,3 с после начала движения.

Решение:

Момент импульса $\vec{L}$ частицы относительно некоторого начала отсчёта определяется векторным произведением её радиус-вектора и импульса:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \qquad (1)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы относительно выбранного неподвижного в данной системе отсчёта начала отсчёта, $\vec{p}$ – импульс частицы.



Найдём скорость шайбы, приобретённую ей за время движения *t*, в которое угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$ равен некоторому значению φ. Модуль момент импульса можно выразить через величину радиус-вектора, импульса и угла между ними.

$$L = rp\sin\varphi . \qquad (2)$$

На шайбу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ (силами трения пренебрегаем). Запишем второй закон Ньютона для шайбы в проекции на наклонную плоскость.

$$mg\sin\alpha = ma . \qquad (3)$$

Отсюда можно выразить ускорение шайбы и её скорость через время *t*.

$$a = g\sin\alpha ;$$

$$v = at = gt\sin\alpha . \qquad (4)$$

По теореме синусов для треугольника на радиус-векторе $\vec{r}$ и горизонтали длиной $h/\operatorname{tg}\alpha$, на которую опирается наклонная плоскость, можем записать

$$\frac{r}{\sin\alpha} = \frac{h/\operatorname{tg}\alpha}{\sin\varphi} \qquad (5)$$

Отсюда выразим произведение $r\sin\varphi$ и найдём момент импульса шайбы относительно оси *O*.

$$r\sin\varphi = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha}\sin\alpha ; \quad r\sin\varphi = h\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad L = rp\sin\varphi = ph\cos\alpha ; \qquad (6)$$

$$p = mv = mgt\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad L = mgt\sin\alpha \cdot h\cos\alpha = \frac{1}{2}mght\sin 2\alpha . \qquad (7)$$

$$L = \frac{1}{2}\cdot 0{,}05\cdot 9{,}8\cdot 1\cdot 1{,}3\cdot \sin 30° = 0{,}16 \ (\text{кг·м}^2/\text{с}^2).$$

Ответ: 0,16 кг·м^2/с^2.

Задание №4 Волчок массы *m* = 0,5 кг, ось которого наклонена под углом $\vartheta = 30°$ к вертикали, прецессирует под действием силы тяжести. Момент инерции волчка относительно его оси симметрии *I* = 2,0 г·м^2, угловая скорость вращения вокруг этой оси ω = 350 рад/с, расстояние от точки опоры до центра масс волчка *l* = 20 см. Найти:

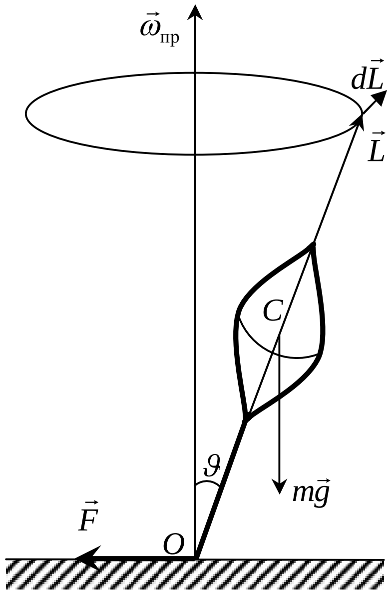
а) угловую скорость прецессии волчка;

б) модуль и направление горизонтальной составляющей силы реакции, действующей на волчок в точке опоры.

Решение:

Обозначим $\omega_{пр}$ – угловую скорость прецессии волчка – вращения оси симметрии волчка вокруг вертикальной оси, $\vec{\omega}_{пр}$ направлена вертикально. Момент импульса волчка направлен вдоль оси его симметрии, вокруг которой он вращается, и равен

$\vec{L} = I\vec{\omega}, \qquad L = I\omega.$ (1)



Момент импульса $\vec{L}$ относительно точки *O* получает за время *dt* приращение

$d\vec{L} = \vec{M}dt,$ (2)

совпадающее по направлению с вектором $\vec{M}$ – моментом силы тяжести $m\vec{g}$ относительно той же точки *O*. Видно, что вектор приращения $d\vec{L}$ момента импульса перпендикулярен вектору момента импульса $\vec{L}$. В результате вектор $\vec{L}$, а, следовательно, и ось волчка, будет поворачиваться вместе с вектором момента силы тяжести $\vec{M}$ вокруг вертикали, описывая круговой конус с углом полураствора ϑ. Волчок будет прецессировать вокруг вертикальной оси с некоторой угловой скоростью $\omega_{пр}$.

Приращение момента импульса за время *dt*, в которое направление момента импульса можно считать неизменным, равно

$d\vec{L} = [\vec{\omega}_{пр} \times \vec{L}]dt;$

$dL = L\omega_{пр} \sin\vartheta \cdot dt$ (3)

Следовательно, связь выражение связи приращения момента импульса и момента силы тяжести примет вид

$dL = Mdt;$

$L\omega_{пр} \sin\vartheta \cdot dt = Mdt.$ (4)

Момент силы тяжести, образующей с осью вращения угол ϑ и приложенной к центру тяжести волчка, находящегося на расстоянии *l* от точки опоры,

$M = mgl \sin\vartheta$ (5)

Подставим выражения для момент импульса волчка и момента силы тяжести в выражение для приращения момента импульса.

$L\omega_{пр} \sin\vartheta = mgl \sin\vartheta;$

$I\omega \cdot \omega_{пр} = mgl;$

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{mgl}{I\omega} \qquad (6)$$

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 350} = 1{,}4 \ (\text{с}^{-1}).$$

Центр масс движется по окружности. Следовательно, вектор силы $\vec{F}$, действующей на волчок в точке опоры, направлен к центру этой окружности, т.е. вектор силы $\vec{F}$ всегда направлен в противоположную сторону от центра масс волчка.

Запишем второй закон Ньютона для волчка:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (7)$$

Центр массы которого вращается по окружности радиусом

$$R = l \sin \vartheta \qquad (8)$$

Здесь a – центростремительное ускорение волчка:

$$a = \omega_{\text{пр}}^2 R \qquad (9)$$

Таким образом, второй закон Ньютона для волчка примет вид

$$F = ma = m\omega_{\text{пр}}^2 R = m\omega_{\text{пр}}^2 l \sin \vartheta .$$

$$F = 0{,}5 \cdot 1{,}4^2 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}098 \ (\text{Н}).$$

Ответ: а) 1,4 с^{-1}; б) 0,098 Н; в противоположную сторону от центр масс волчка.

Задание №5 Диск массы m = 5,0 кг и радиуса R = 5,0 см вращается с ω = 330 рад/с. Расстояние между подшипниками, в которых установлена ось диска, l = 15 см. Ось вынуждают совершать гармонические колебания вокруг горизонтальной оси с периодом T = 1,0 с и амплитудой φ_m = 20°. Найти максимальное значение гироскопических сил, действующих на подшипники со стороны оси диска.

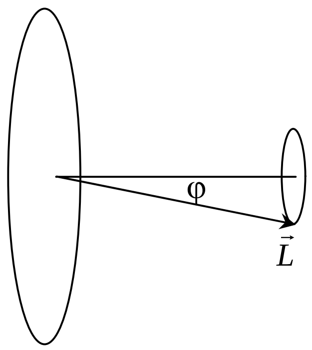
Решение:

Момент инерции и момент импульса диска

$$I = \frac{1}{2} mR^2 \quad \Rightarrow \quad L = I\omega = \frac{1}{2} mR^2 \omega \qquad (1)$$

Гармонические колебания оси происходят по закону

$$\varphi = \varphi_m \sin 2\pi \frac{t}{T} \qquad (2)$$



Действие гармонических колебаний на диск такое же, как если бы диск прецессировал с угловой скоростью $\omega_{\text{пр}}$ равной скорости изменения угла колебаний оси.

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \varphi_m \cos 2\pi \frac{t}{T} \qquad (3)$$

Скорость изменения момента импульса пропорциональна действующему на диск моменту сил.

$$L \cdot \omega_{пр} = M \qquad (4)$$

Момент силы M пропорционален силе F, с которой ось действует на подшипники, так как по третьему закону Ньютона подшипники действуют на ось. Плечо этой силы равно половине длины оси крепления диска, если считать, что диск закреплён посередине между подшипниками.

$$\frac{1}{2}mR^2\omega \cdot \omega_{пр} = F \cdot \frac{l}{2};$$

$$F = mR^2\omega \cdot \omega_{пр} \qquad (5)$$

Максимальное значение силы, действующей на подшипники, достигается в момент, когда $\omega_{пр}$ достигает максимального значения, т.е. когда угол отклонения оси меняется с максимальной скоростью.

$$\omega_{пр,\ max} = \frac{2\pi}{T}\varphi_m \qquad \Rightarrow \qquad F_{max} = mR^2\omega \cdot \omega_{пр,\ max} = mR^2\omega\frac{2\pi}{T}\varphi_m .$$

$$F_{max} = 5 \cdot 25 \cdot 10^{-2} \cdot 330 \cdot \frac{2\pi}{1} \cdot \frac{\pi}{9} \approx 905 \text{ (Н)}.$$

Ответ: 905 Н.

Механические колебания. Маятники
Справочный материал к тестированию по теме

Колебательное движение - это такое движение, при котором тело, выведенное из положения устойчивого равновесия, стремится вернуться в него, совершая относительно этого положения периодическое движение под действием внутренней возвратной силы. Возвратную силу называют еще **восстанавливающей**.

Малые колебания - это колебания, при которых углы отклонения колебательной системы, от положения устойчивого равновесия достаточно малы. Малые колебания описываются **гармоническими законами** (законами синуса или косинуса), поэтому называются **гармоническими.**

Изучение колебательного движения в искусственных условиях проводится на трех моделях: **пружинный, математический** и **физический маятники**. **Пружинный маятник** – это вертикально подвешенная растянутая пружина с коэффициентом жесткости k и массой m. **Математический маятник** представляет собой точечное тело, подвешенное на невесомой нити длиной l. **Физический маятник** – это любое твердое тело, находящееся на горизонтальной оси, не проходящей через его центр тяжести. **Приведенной длиной** физического маятника называют длину такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом данного физического маятника. Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется **центром качания** физического маятника. **Точка подвеса** и **центр качания** обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становиться новым центром качания.

Всякое колебательное движение обладает следующими характеристиками:

Амплитуда колебания A - максимальное отклонение тела от положения равновесия.

Фаза колебания $\omega t + \varphi$ - величина, определяющая положение тела в любой момент времени.

Начальная фаза колебания φ - отклонение тела от положения равновесия, зафиксированное в начальный момент времени.

Циклическая частота колебаний ω - соответствует числу колебаний за 2π секунды и связана с нормальной частотой ν .

Нормальная частота колебаний ν – это число полных колебаний в единицу времени. Эта величина связана с периодом T .

Период T – это время, за которое совершается одно полное колебание.

В положении равновесия **скорость** колеблющегося тела является **максимальной**, а **ускорение равно нулю**. В положении максимального отклонения, при такой же начальной фазе, **скорость равна нулю** (тело останавливается), а **ускорение** имеет **максимальное** значение. Причем оно направлено **против смещения**, так как **причиной** его возникновения является **возвратная сила**, роль которой играет квазиупругая сила.

Полная механическая энергия колебательного движения равна сумме кинетической и потенциальной энергии упругой силы в отсутствие затухания. Она должна быть постоянной и не зависеть от времени, что соответствует закону сохранения полной механической энергии. **Полная механическая энергия** колебательного движения **зависит** только от **частоты колебания**, его **амплитуды** и **массы** колеблющегося тела.

Если колебательная система является идеальной, то ее колебания являются **незатухающими**. Это означает, что их амплитуда не изменяется с течением времени. Если амплитуда с течением времени убывает, то колебание является **затухающим**. В случае свободных колебаний затухание является экспоненциальным и обусловлено наличием сил вязкого трения, окружающей колебательный источник, среды.

Колебания также делятся на **свободные** и **вынужденные**.

Свободными называют такие колебания, которые после внешнего кратковременного воздействия, вызвавшего начальное отклонение тела от положения устойчивого равновесия, продолжаются под действием внутренней возвратной силы, имеющей упругую природу. Такие колебания в реальных условиях являются затухающими. Эти колебания происходят с собственной частотой ω_0 .

Вынужденными называю колебания, которые происходят не только под действием внутренней возвратной силы, но и под действием внешней вынуждающей периодической силы: $F = F_0 \sin(\omega t)$. Частота этих колебаний совпадает с частотой вынуждающей силы ω .

Особую роль в физике играет **явление резонанса**. Под **резонансом** механических колебаний понимают резкое возрастание их амплитуды при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте колебаний. То есть колебательная система при такой частоте оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы.

Для характеристики колебательной системы используется такая величина как ее **добротность**. Она пропорциональна числу колебаний системы за время, в течение которого амплитуда уменьшится в e раз. Добротность является величиной обратной **декременту затухания**. Декрементом затухания называют отношение амплитуд затухающего колебания, соответствующих моментам времени, отличающимся на период колебания.

Основные соотношения:

Второй закон Ньютона для

колебательного движения $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (1)$$

где x - смещение тела относительно положения равновесия, $\frac{d^2x}{dt^2}$ - его ускорение

Уравнение идеальных колебаний $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (2)$$

где $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Решение уравнения идеальных колебаний $$x = A\sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

Связь между **циклической** и **нормальной частотой** $$\omega = 2\pi\nu \quad (4)$$

Скорость колеблющегося тела (маятника)

в любой момент времени $$\mathrm{v}(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

Ускорение колеблющегося тела (маятника)

в любой момент времени: $$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 A\sin(\omega t + \varphi + \pi) \quad (6)$$

Кинетическая энергия $$T = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \varphi)}{2} \quad (7)$$

Потенциальная энергия $$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)}{2} \quad (8)$$

Полная энергия

идеальной колебательной системы $$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = const \quad (10)$$

Второй закон Ньютона для

свободных **затухающих** колебаний $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2b\frac{dx}{dt} - kx \quad (11)$$

где $f_{вяз.тр.} = -2b\frac{dx}{dt}$ - сила вязкого трения среды, в которой происходит колебание.

Уравнение движения

свободных **затухающих** колебаний $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (12)$$

где $\gamma = \frac{b}{m}$, b - коэффициент вязкого трения.

Решение уравнения затухающих колебаний $$x = A\exp(-\gamma t)\sin(\omega t + \varphi) \quad (13)$$

где **а**мплитудой колебания является $B(t) = A\exp(-\gamma\, t)$

Период затухающих колебаний $$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (14)$$

Декремент затухания $$e^{\gamma T} = \frac{B(t)}{B(t+T)} \quad (15)$$

Логарифмический декремент затухания $$\lambda = \ln\frac{B(t)}{B(t+T)} = \gamma T \quad (16)$$

Добротность колебательной системы $$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e \quad (17)$$

Второй закон Ньютона для

вынужденных колебаний $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2b\frac{dx}{dt} - kx + F_0 \sin\omega\, t \quad (18)$$

Решение уравнения вынужденных колебаний $$x = a\cos(\omega\, t - \varphi) \quad (19)$$

где амплитуда колебания $a = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$, а начальная фаза $tg\varphi = \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Резонансная частота $$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (20)$$

Амплитуда при резонансе $$a = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (21)$$

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. Какое движение называют колебательным?
2. Что представляет собой физический маятник?
3. Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется _______.
4. Если амплитуда с течением времени убывает, то колебание является ________.
5. Что называют 6начальной фазой колебания?
6. Уравнение идеальных колебаний определяется соотношением _________.
7. Решение уравнения для свободных затухающих колебаний имеет вид ______.
8. Что такое добротность колебательной системы?
9. Чему равен логарифмический декремент затухания?
10. Какова математическая связи периода колебаний с циклической частотой?

ТЕСТ№2

1. Какие колебания можно считать гармоническими.
2. Что называют математическим маятником?
3. Что представляет приведенная длина физического маятника?
4. Максимальное отклонения тела от положения равновесия при колебательном движении – это _______.

5. Что такое период колебания?
6. Второй закон Ньютона для затухающих колебаний имеет вид _______.
7. Амплитуда вынужденных колебаний определяется соотношением?
8. Что называют резонансом механической системы?
9. Как резонансная частота связана с собственной частотой системы?
10. В каком положении у колеблющегося тела скорость максимальна? Чему при этом равно ускорение?

ТЕСТ№3

1. Если колебание совершается по законам синуса или косинуса, то оно является ________.
2. Что представляет физический маятник?
3. В чем заключается свойство взаимности точки подвеса и центра качания?
4. Что называют фазой колебания?
5. Колебания, которые происходят не только под действием внутренней возвратной силы, но и под действием внешней вынуждающей периодической силы называют ____________.
6. Декрементом затухания называют ________.
7. Чему равна кинетическая энергия колеблющегося тела?
8. Чему равна полная энергия идеальной колебательной системы? Изменяется ли она со временем?
9. Какой вид имеет решение уравнения идеальных колебаний?
10. Чему равна амплитуда при резонансе?

ТЕСТ№4

1. Какое колебание называется свободным?
2. Если амплитуда не изменяется с течением времени, то колебания являются _______.
3. Что называют циклической частотой колебания? Как она связана с нормальной частотой?
4. При каком положении колебательной системы скорость обращается в нуль, а ускорение является максимальным?
5. Какой вид имеет второй закон Ньютона для вынужденных колебаний?
6. Чему равна амплитуда при резонансе?
7. По какой формуле можно определить период затухающих колебаний.
8. По какому закону изменяется амплитуда свободных затухающих колебаний? (формула)
9. Потенциальная энергия колеблющегося тела равна ______.
10. Решение уравнения идеального колебания имеет вид ______.

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1 Частица массы m находится в одномерном силовом поле, где её потенциальная энергия зависит от координаты x как $U(x) = U_0(1 - \cos ax)$, где U_0 и a – постоянные. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.

Решение:

Если на тело действует возвращающая сила, пропорциональная смещению тела от положения равновесия

$$F = -kx, \quad (1)$$

то тело совершает гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2)$$

Уравнение гармонических колебаний можно получить интегрированием второго закона Ньютона для этого тела в дифференциальной форме:

$$m\ddot{x} = -kx,$$

$$x(0) = A,\ \dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \quad (3)$$

Здесь $\ddot{x}$, $\dot{x}$ – ускорение и скорость точки соответственно. Найдём возвращающую силу, которая действует на точку в одномерном силовом поле, как градиент потенциальной энергии точки в этом поле.

$$F = -\frac{dU}{dx} = U_0 a \cdot \sin(ax) \quad (4)$$

Считая отклонения x точки от положения равновесия малыми, приближённо примем

$$\sin(ax) \approx ax, \quad ax << 1. \quad (5)$$

Второй закон Ньютона для точки примет вид:

$$m\ddot{x} = F \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = U_0 a \cdot ax; \quad (6)$$

$$m\ddot{x} = U_0 a^2 \cdot x. \quad (7)$$

Следовательно, циклическая частота колебаний точки

$$\omega = \sqrt{\frac{U_0 a^2}{m}} = a\sqrt{\frac{U_0}{m}} \quad (8)$$

Из связи циклической частоты и периода колебаний можно выразить период колебаний точки.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{m}{U_0}} \quad (9)$$

Ответ: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{m}{U_0}}$.

Задание №2 Частица совершает гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия $x = 0$. Частоты колебаний $\omega = 4{,}00$ с$^{-1}$. В некоторый момент координата частицы $x_0 = 25{,}0$ см и её скорость $v_{x0} = 100$ см/с. Найти координату x и скорость v_x частицы через $t = 2{,}40$ с после этого момента.

Решение:

Уравнение гармонических колебаний точки имеет вид

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

Здесь A – амплитуда колебаний, φ_0 – начальная фаза колебаний.

Скорость точки можно найти как первую производную по времени от координаты x точки.

$$v_x = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0). \quad (2)$$

В какой-то момент времени t_0 координата x и скорость v_x точки соответственно равны

$x_0 = x(t_0) = A\sin(\omega t_0 + \varphi_0)$; (3)

$v_{x0} = v_x(t_0) = A\omega\cos(\omega t_0 + \varphi_0)$. (4)

Выразим из этих уравнений фазу колебаний в этот момент.

$$\sin(\omega t_0 + \varphi_0) = \frac{x_0}{A}; \quad \cos(\omega t_0 + \varphi_0) = \frac{v_{x0}}{A\omega} \qquad (5)$$

Координата x и скорость v_x частицы через время t после этого момента

$$x(t_0 + t) = A\sin(\omega(t + t_0) + \varphi_0) = A\sin(\omega t_0 + \varphi_0 + \omega t) =$$
$$= A\sin(\omega t_0 + \varphi_0)\cos(\omega t) + A\cos(\omega t_0 + \varphi_0)\sin(\omega t) =$$
$$= x_0\cos(\omega t) + \frac{v_{x0}}{\omega}\sin(\omega t). \qquad (6)$$
$$v_x(t_0 + t) = A\omega\cos(\omega(t + t_0) + \varphi_0) = A\omega\sin(\omega t_0 + \varphi_0 + \omega t) =$$
$$= A\omega\cos(\omega t_0 + \varphi_0)\cos(\omega t) - A\omega\sin(\omega t_0 + \varphi_0)\sin(\omega t) =$$
$$= v_{x0}\cos(\omega t) - x_0\omega\sin(\omega t). \qquad (7)$$

Подставим значения величин и вычислим искомые координату x и скорость v_x частицы.

$$x(t_0 + t) = 0{,}25 \cdot \cos(4 \cdot 2{,}4) + \frac{1}{4}\sin(4 \cdot 2{,}4) = 0{,}288 \ (\text{м}).$$
$$v_x(t_0 + t) = 1 \cdot \cos(4 \cdot 2{,}4) - 0{,}25 \cdot 4 \cdot \sin(4 \cdot 2{,}4) = 0{,}819 \ (\text{м/с}).$$

Ответ: x = 0,288 м; v_x = 0,819 м/с.

Релятивистская механика
Справочный материал к тестированию по теме

Преобразования Галилея не применимы для описания объектов, которые движутся **со скоростями соизмеримыми со скоростью света (релятивистских объектов)**. Так, например, не имеет смысла закон сложения скоростей, из которого следует, что при векторном сложении скоростей может получиться скорость большая скорости света, что будет противоречить экспериментальным данным. Эксперименты по определению скорости света ставились с давних времен, но наиболее точное значение этой величины было получено впервые в опытах Майкельсона и Морли.

Чтобы учесть постоянство скорости света в преобразованиях Галилея, Эйнштейн ввел **два постулата**:

1. Принцип постоянства скорости света: скорость света в вакууме одинакова во всех ИСО и не зависит от движения источников и приемников света.
2. Принцип относительности Эйнштейна: все законы природы одинаковы во всех ИСО, а уравнения, выражающие эти законы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени при переходе от одной ИСО к другой.

Хотя создается впечатление, что принципы относительности в классической и релятивистской механиках похожи по формулировке, принцип относительности Эйнштейна является наиболее общим и относится ко всем физическим явлениям и процессам и ко всем объектам (релятивистским и нерелятивистским). Этот принцип в совокупности с принципом постоянства скорости света приводит к понятию **четырехмерного пространства**, в котором **физическое время и пространство взаимосвязаны**. В классической механике время и пространство являются абсолютными и не выражаются друг через друга, что видно из преобразований Галилея.

В четырехмерном пространстве **событию** отвечает точка с координатами (x, y, z, ct). Такую точку называют **мировой точкой**. **Объекту** же в четырехмерном пространстве соответствует **мировая линия**. Даже если объект неподвижен в обычном трехмерном пространстве, в четырехмерном пространстве ему соответствует линия параллельная оси ct. Четырехмерное пространство называют **пространством Минковского**, оно является **псевдоевклидовым** и квадрат расстояния Δs^2 между двумя точками в нем задается по формуле, в чем то сходной с формулой для квадрата расстояния в евклидовом пространстве и учитывающей временную координату.

Это расстояние Δs между двумя событиями называют **интервалом**. Он является одним из физических инвариантов в релятивистской механике и отражает взаимосвязанность между физическим пространством и временем.

Интервалы бывают **времени-** и **пространственноподобными**.

Если $\Delta s^2 > 0$, то интервал является **вещественным**. Все вещественные интервалы называют **времениподобными**. Они являются причинно связанными друг с другом. К ним относятся, например, события, происходящие с одной и той же частицей (объектом).

Если $\Delta s^2 < 0$, то интервал является **мнимым**. События, совмещенные по времени в предельном случае разделены пространственноподобным интервалом. Поэтому, все мнимые события называют **пространственноподобными**. К ним можно отнести события, которые не оказывают влияние друг на друга, то есть не являются причинно связанными.

Преобразования координат в релятивистской механике в предельном случае (v<<c) должны сводиться к преобразованиям Галилея. Для того, чтобы получить искомые преобразования нужно исходить из свойств однородности физического пространства и времени. Это означает, что **искомые уравнения должны являться линейными по этим величинам**.

На основании этого вывода Лоренцем были получены следующие прямые и обратные **преобразования для координат и времени в релятивистской механике**.

Очень важную роль при описании движения тел со скоростями соизмеримыми со скоростью света играют **следствия** из преобразований Лоренца:

1. **Одновременность событий в разных системах отсчета** – в случае, если два одновременных события в неподвижной ИСО пространственно разобщены, то в движущейся ИСО они не будут одновременными. Сказанное относиться только к событиям, между которыми отсутствует причинная связь. Причинно связанные события ни в одной системе отсчета не будут одновременными, и во всех системах причина будет предшествовать следствию!!
2. **Лоренцево сокращение длины** – у движущихся тел их размеры в направлении движения сокращаются тем больше, чем больше скорость их движения.
3. **Релятивистское увеличение промежутков времени** – собственное время всегда меньше, чем время, отсчитанное по часам движущейся относительно него системы отсчета. **Собственное время** – это время, которое показывают часы в системе отсчета, связанной с самим телом (т.е. собственной системе отсчета). **Собственное время**, как и интервал, **является релятивистским инвариантом**.

В релятивистской механике, в связи с действующими постулатами, видоизменяются практически все соотношения, имеющие место в классической механике, таким образом, чтобы сохранялась их инвариантность относительно преобразований Лоренца. Это в частности касается соотношений для импульса и энергии релятивистских объектов.

В релятивистской механике считается, что каждая частица (объект) помимо кинетической энергии, связанной с перемещением ее в пространстве, обладает **энергией покоя** E_0. Эта энергия есть внутренняя энергия частицы (объекта). Энергия покоя объекта определяется тем же выражением, что и энергия покоя частицы, но включает в себя не только энергию покоя каждой частицы, но также и их кинетическую и потенциальную энергии.

Полная энергия частицы в отсутствии поля внешних потенциальных сил есть сумма ее кинетической энергии и энергии покоя.

Из выражений для полной энергии и импульса можно образовать инвариант относительно преобразований Лоренца. Инвариантность этой величины подтверждена экспериментально при проведении опытов над быстрыми частицами.

Основные соотношения:

Релятивистский интервал $\Delta s^2 = c^2 t^2 - r^2$ (1)

где $r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ - расстояние между двумя точками в евклидовом пространстве.

Прямое преобразование Лоренца для координат:

(Система K неподвижна, а K' движется вдоль оси OX с постоянной скоростью v_0)

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \mathrm{v}_0 t}{\sqrt{1 - (\mathrm{v}_0/c)^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \left(\mathrm{v}_0/c^2\right)\cdot x}{\sqrt{1 - (\mathrm{v}_0/c)^2}} \end{cases} \qquad (2)$$

Обратное преобразование Лоренца для координат:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + \mathrm{v}_0 t'}{\sqrt{1 - (\mathrm{v}_0/c)^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \left(\mathrm{v}_0/c^2\right)\cdot x'}{\sqrt{1 - (\mathrm{v}_0/c)^2}} \end{cases} \qquad (3)$$

Преобразование для скорости релятивистского объекта:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_x = \dfrac{\mathrm{v}'_x + \mathrm{v}_0}{1 + \mathrm{v}_0 \mathrm{v}'_x / c^2} \\ \mathrm{v}_{y,z} = \dfrac{\mathrm{v}'_{y,z}\sqrt{1 - (\mathrm{v}_0/c)^2}}{1 + \mathrm{v}_0 \mathrm{v}'_x / c^2} \end{cases} \qquad (4)$$

для получения обратных преобразований необходимо в (4) заменить знак у v_0 нужно заменить на противоположный.

Следствия из преобразований Лоренца:

1. **Одновременность событий** в разных системах отсчета

(в системе K в различных точках пространства по оси OX происходят одновременно ($t_1 = t_2 = t$) два события):

$$t_1' = \frac{t - \left(\mathrm{v}_0 / c^2\right) \cdot x_1}{\sqrt{1 - \left(\mathrm{v}_0 / c\right)^2}} \text{ и } t_2' = \frac{t - \left(\mathrm{v}_0 / c^2\right) \cdot x_2}{\sqrt{1 - \left(\mathrm{v}_0 / c\right)^2}} \qquad (5)$$

2. Лоренцево **сокращение длины**

(стержень расположен вдоль оси OX и в некоторый момент времени ($t_1 = t_2 = t$) в системе K было зафиксировано положение его концов (x_1, x_2))

$$x_1' = \frac{x_1 - \mathrm{v}_0 t}{\sqrt{1 - \left(\mathrm{v}_0 / c\right)^2}} \text{ и } x_2' = \frac{x_2 - \mathrm{v}_0 t}{\sqrt{1 - \left(\mathrm{v}_0 / c\right)^2}} \qquad (6)$$

вычтя из координат точки 2, координаты точки 1, приведенные в (6), получим:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\mathrm{v}_0 / c\right)^2} \qquad (7)$$

где (7) – формула Лоренцева **сокращения длины** объекта, l_0 - собственная длина объекта, l - длина в движущейся относительно тела системе отсчета K.

3. Релятивистское **увеличение промежутков времени**

(в одной и той же точке системы K' происходят два события ($x_1' = x_2' = x'$) в различные моменты времени)

$$t_1 = \frac{t_1' + \left(\mathrm{v}_0 / c^2\right) \cdot x'}{\sqrt{1 - \left(\mathrm{v}_0 / c\right)^2}} \text{ и } t_2 = \frac{t_2' + \left(\mathrm{v}_0 / c^2\right) \cdot x'}{\sqrt{1 - \left(\mathrm{v}_0 / c\right)^2}} \qquad (8)$$

обозначив промежутки времени в обеих системах как: $t_2 - t_1 = \Delta t$ и $t_2' - t_1' = \Delta\tau$, получим:

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \left(\mathrm{v}_0 / c\right)^2}} \qquad (9)$$

где $\Delta\tau$ - собственное время в системе K', а Δt - время в движущейся относительно объекта системе K.

Релятивистский импульс частицы $$\vec{p} = \frac{m\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1 - \left(\mathrm{v}_0 / c\right)^2}} \qquad (10)$$

Релятивистская масса частицы $$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\mathrm{v}_0 / c\right)^2}} \qquad (11)$$

Энергия покоя частицы (объекта) $$E_0 = mc^2 \qquad (12)$$

Полная энергия частицы (объекта) $$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\mathrm{v}_0 / c\right)^2}} \qquad (13)$$

Кинетическая энергия релятивистского объекта $$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\mathrm{v}_0 / c\right)^2}} - mc^2 \qquad (14)$$

Релятивистский инвариант

энергии – импульса $$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 = inv \quad (15)$$

Примечание: *иногда отношение скорости системы отсчета и скорости света для более простого написания формул релятивистской механики, обозначают константой:* $\beta = \mathrm{v}_0 / c^2$.

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. Какой объект называется релятивистским?
2. Что соответствует событию в четырехмерном пространстве в релятивистской механике?
3. Сформулируйте принцип постоянства скорости света.
4. Расстояние Δs между двумя событиями в релятивистской механике называют ________.
5. Как называют вещественные интервалы? Почему?
6. Формула для Лоренцева сокращения длины имеет вид ______.
7. Как, зная компоненты скорости релятивистского объекта в неподвижной системе, найти их в движущейся системе отсчета?
8. Чему равна кинетическая энергия релятивистского объекта?
9. Приведите релятивистский инвариант энергии – импульса.
10. Какое время всегда больше: собственное или отсчитанное по часам движущейся относительно него системы отсчета?

ТЕСТ№2

1. Сформулируйте принцип относительности Эйнштейна.
2. Что изображается мировой линией в пространстве Минковского?
3. Какие интервалы называются пространственноподобными? Почему?
4. Релятивистский интервал определяется соотношением ______.
5. Какие релятивистские инварианты вы знаете?
6. Приведите обратное преобразование Лоренца для координат.
7. Каков физический смысл энергии покоя.
8. Из чего энергия покоя складывается для релятивистского объекта, состоящего из большого числа частиц.
9. Приведите формулу для релятивистского импульса частицы.
10. Могут ли быть одновременными причинно связанные события? Почему?

ТЕСТ№3

1. Связаны ли физические пространство и время в релятивистской механике? Почему?
2. Что изображается мировой точкой в четырехмерном пространстве?
3. Утверждение о том, что скорость света в вакууме одинакова во всех ИСО и не зависит от движения источников и приемников света называют _______.
4. Как называются мнимые интервалы? Почему?
5. Приведите прямое преобразование Лоренца для координат.
6. Как найти релятивистскую массу?
7. Чему равна энергия покоя частицы?

8. Каким соотношением связаны собственной время и время в движущейся относительно объекта системе отсчета?
9. Приведите формулу для релятивистского инварианта энергии и импульса.
10. При каких условиях объект можно считать нерелятивистским?

ТЕСТ№4

1. В виде чего изображается покоящийся объект в релятивистской механике?
2. Связаны ли физические пространство и время в нерелятивистской механике?
3. Утверждение о том, что все законы природы одинаковы во всех ИСО, а уравнения, выражающие эти законы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени при переходе от одной ИСО к другой называют ______.
4. Какие интервалы называются времениподобными? Почему?
5. Как, зная компоненты скорости релятивистского объекта в движущейся системе, найти их в неподвижной системе отсчета?
6. Какое время называют собственным?
7. Как изменяются преобразования Лоренца в предельном случае $(v << c)$?
8. Чему равна полная энергия релятивистского объекта
9. Что меньше: масса покоящегося или движущегося тела в релятивистской механике?
10. Какие энергии включает в себя полная энергия релятивистского объекта?

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1 Найти собственную длину стержня, если в К-системе отсчёта его скорость $v = c/2$, длина l = 1,00 м и угол между ним и направлением движения $\vartheta = 45°$.

Решение:

Релятивистское сокращение длины движущегося тела – предсказываемый релятивистской кинематикой эффект, заключающийся в том, что с точки зрения наблюдателя движущиеся относительно него предметы имеют меньшую длину (линейные размеры в направлении движения), чем их собственная длина.

$$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad (1)$$

Так как стержень расположен под углом к направлению движения, то его проекция на направление движения будет сокращаться с точки зрения неподвижного наблюдателя

$$l_{\parallel} = l_0 \cos\vartheta\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}, \qquad (2)$$

а проекция на направление, перпендикулярное движению, не будет испытывать изменений при движении

$l_{\perp} = l_0 \sin\vartheta$.

Длину стержня при его движении можно найти по теореме Пифагора по длине его проекций.

$$l=\sqrt{l_{\parallel}^2+l_{\perp}^2}=\sqrt{l_0^2\cos^2\vartheta\cdot\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)+l_0^2\sin^2\vartheta}=l_0\sqrt{\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta-\cos^2\vartheta\cdot\left(\frac{v}{c}\right)^2};$$

$$l=l_0\sqrt{1-\cos^2\vartheta\cdot\left(\frac{v}{c}\right)^2}. \qquad (3)$$

Выразим отсюда собственную длину стержня.

$$l_0=\frac{l}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta\cdot\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

$$l=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}}=\sqrt{\frac{8}{7}}\approx 1{,}07 \text{ (м).}$$

Ответ: 1,07 м.

Задание №2 Найти зависимость импульса частицы с массой m от её кинетической энергии. Вычислить импульс протона с кинетической энергией 500 МэВ.

Решение:

При рассмотрении частиц с большой кинетической энергией удобно использовать релятивистский инвариант:

$$E^2-p^2c^2=m_0^2c^4, \qquad (1)$$

где E и p – полная энергия и импульс частицы, m – масса частицы.

Полная энергия протона равна сумме его энергии покоя и кинетической энергии.

$$E=m_0c^2+T \qquad (2)$$

Подставив выражение для полной энергии, из релятивистского инварианта выразим импульс протона.

$$\left(m_0c^2+T\right)^2-p^2c^2=m_0^2c^4;$$

$$p^2c^2=\left(m_0c^2+T\right)^2-m_0^2c^4;$$

$$p^2c^2=m_0^2c^4+2m_0c^2T+T^2-m_0^2c^4;$$

$$p^2=2m_0T+\frac{1}{c^2}T^2;$$

$$p=\sqrt{2m_0T+\left(\frac{T}{c}\right)^2}. \qquad (3)$$

Масса покоя протона m_0 = 1,672621777 · 10^{-27} кг ≈ 1,67 · 10^{-27} кг, скорость света в вакууме c = 299792458 м/с ≈ 3 · 10^8 м/с.

$$p=\sqrt{2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 8\cdot 10^{-17}+\left(\frac{8\cdot 10^{-17}}{3\cdot 10^8}\right)^2}\approx 5{,}2\cdot 10^{-22} \text{ (кг·м/с).}$$

Ответ: 5,2 · 10^{-22} кг·м/с.

Гидродинамика
Справочный материал к тестированию по теме

Гидродинамика – это раздел механики (механика сплошных сред), изучающий законы протекания жидкостей, а также движение твердых тел в жидкостях. Существует два способа задания сплошных сред (жидкостей и газов): Лагранжа и Эйлера

Способ Лагранжа состоит в том, что **координаты** всех молекул, образующих данную трубку жидкости задаются как функции от времени. Для этого через определенные промежутки времени фиксируется расположение всех молекул в продольном сечении. Затем, зная координаты как функции времени, можно определить направления скоростей и их значение в любой момент времени

Способ Эйлера состоит в том, что **скорости** всех молекул данной трубки жидкости, проходящих через поперечное сечение, задаются как функции от времени и координат. Для этого через определенные промежутки времени фиксируется значение и направление скоростей молекул в заданной точке поперечного сечения трубки.

Все жидкости делятся на **сжимаемые** и **несжимаемые**, **идеальные** и **вязкие**, а струя жидкости может быть как **непрерывной**, так и **прерывистой**. Течения бывают **стационарными** (установившимися) и **нестационарными**.

Сжимаемой называют такую жидкость, элементарный объем которой резко изменяется при малом внешнем сжатии (давлении). Если объем в создавшихся условиях практически не изменяется, то жидкость можно назвать **несжимаемой**.

Всякую трубку жидкости можно представить в виде отдельных ее слоев, соприкасающихся своими поверхностями. Эти слои могут взаимодействовать за счет сил молекулярного сцепления. Если эти силы велики, то слои и их движение сильно связаны друг с другом. В этом случае жидкость является **вязкой**. Если этими силами можно пренебречь, то связь между слоями отсутствует, и они движутся независимо и жидкость называется **идеальной**. Результирующей сил молекулярного сцепления является **сила вязкого трения**. Вязкие жидкости в зависимости от силы связи между молекулами внутри слоя делятся на **ньютоновские** и **неньютоновские**. В первых жидкостях эти силы малы по сравнению с силами сцепления, возникающими между слоями или соизмеримы с ними. В жидкостях второго типа – они достаточно велики.

Стационарным называют такое течение жидкости, картина скоростей молекул которой не изменяется с течением времени в любой точке пространства. Если это условие не выполняется, то течение жидкости является **нестационарным**.

Непрерывной называется такая струя жидкости, плотность которой есть непрерывная функция пространственных координат. Если плотность изменяется скачком, то струя жидкости **прерывистая**. **Трубкой тока жидкости** называют поверхность, ограничивающую силовые линии тока жидкости. **Силовыми линиями тока** жидкости, называют линии, касательными к которым являются вектора скоростей молекул в каждом отдельном слое.

Основными уравнениями гидродинамики являются **уравнения Бернулли** и **неразрывности струи**. Они получены для идеальной несжимаемой стационарной жидкости.

Уравнение неразрывности показывает, что чем больше площадь поперечного сечения трубки, тем меньше скорость молекул в нем. Причем величина произведения этой скорости на соответствующее сечение трубки является постоянной.

Уравнение Бернулли показывает, что для любой линии тока сумма статического, гидравлического и динамического давления постоянна.

Частным случаем уравнения Бернулли является **формула Торричелли** для жидкости, истекающей из отверстия.

Силы внутреннего (вязкого) **трения**, возникающие в **ньютоновских жидкостях,** зависят от площади соприкасающихся поверхносей и градиента скорости молекул, находящихся в различных слоях этой жидкости.

Выделяют два характера течения жидкостей: **ламинарное** и **турбулентное**. Течение называется **ламинарным**, если слои жидкости перемещаются вдоль друг друга, не перемешиваясь. Ламинарное течение всегда стационарно. При увеличении скорости и или поперечных размеров потока возникает энергичное перемешивание слоев жидкости и течение становиться **турбулентным**.

Безразмерная величина, определяющая характер течения, называется **числом Рейнольдса** Re. Это число зависит от плотности жидкости - ρ, средней скорости потока - v, коэффициента динамической вязкости жидкости - η и характерного для поперечного размера - r (например радиуса). **При ламинарном течении скорость** изменяется с расстоянием от оси трубы **по параболическому закону**. При турбулентном течении вблизи стенок трубы скорость изменяется сильнее, чем при ламинарном, а в остальной части сечения скорость изменяется значительно меньше. Динамическая вязкость у газов с ростом температуры растет, а у жидкостей уменьшается.

Для ламинарной жидкости можно найти **распределение скоростей частиц** жидкости относительно оси круглой трубки и величину **потока жидкости** Q**,** то есть объем жидкости, протекающий через поперечное сечение трубы за единицу времени. **Поток жидкости** пропорционален перепаду давления на единице длины трубки, четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален динамической вязкости. **Распределение по скоростям** является параболическим с вершиной параболы на оси трубы, которая также является осью ее симметрии.

На тело, движущееся в жидкости или газе, действует результирующая сила $\vec{R}$, которую можно представить в виде двух составляющих: лобового сопротивления и подъемной силы. **Подъемная сила** $\vec{P}$– эта та часть результирующей силы, которая, которая перпендикулярна направлению движения тела, а **лобовое сопротивление** $\vec{Q}$ направлено против этого движения. Если тело симметрично относительно направления движения, то подъемная сила равна нулю и на него действует только лобовое сопротивление. Оно в свою очередь является суммой двух сил – **сопротивления трения** (силы вязкого трения) и **сопротивления давления** (формы). **Наименьшим сопротивлением давления** обладают тела, имеющие хорошо обтекаемую каплевидную форму. В случае ламинарного течения с малым числом Рейнольдса сопротивление среды связано только с силами трения и описывается **формулой Стокса** для шарообразного тела.

Основные соотношения:

Уравнение непрерывности струи
$$S_1 \cdot \mathrm{v}_1 = S_2 \cdot \mathrm{v}_2 = const \quad (1)$$

Уравнение Бернулли
$$P + \rho g h + \frac{\rho \mathrm{v}^2}{2} = const \quad (2)$$

Формула Торричелли $\mathrm{v} = \sqrt{2qh}$ (3)

Силы вязкого трения $F_{тр} = \eta \left| \frac{d\mathrm{v}}{dz} \right| S$ (4)

где градиент скорости $\left| \frac{d\mathrm{v}}{dz} \right|$ взят в направлении оси перпендикулярной слоям жидкости.

Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{\rho \mathrm{v} r}{\eta}$ (5)

Связь между кинематической и динамической вязкостью $\nu = \eta / \rho$ (6)

Распределение скоростей чатиц в круглой трубке при ламинарном течении $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 \left(1 - r^2 / R^2\right)$ (7)

где v_0 - скорость молекул жидкости в центральном слое трубки, r расстояние от оси трубки до любой его точки, R - радиус трубки.

Формула Пуазейля $Q = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8\eta r}$ (8)

где p_1, p_2 - давления на концах трубки.

Формула Стокса $F = 6\pi\eta r_0 \mathrm{v}$ (9)

где r_0 - радиус шарообразного тела в ламинарной жидкости.

Варианты тестов промежуточного контроля по теме

ТЕСТ№1

1. Что изучает гидродинамика?
2. Какая жидкость называется вязкой?
3. Как называется течение, в котором слои жидкости перемещаются вдоль друг друга, не перемешиваясь?
4. Жидкость, элементарный объем которой резко изменяется при малом внешнем сжатии (давлении) называют _______.
5. Какие существуют способы задания сплошных сред? (назвать два основных)
6. Привести уравнение непрерывности струи? Для каких жидкостей оно является верным?
7. В силу уравнения Бернулли, сумма каких давлений является в общем случае постоянной?
8. Как упрощается уравнение Бернулли, в случае когда трубка жидкости находится на одной высоте.
9. Чему равно число Рейнольдса?
10. Приведите формулу Стокса.

ТЕСТ№2

1. В чем состоит суть способа задания сплошных сред согласно Лагранжу?
2. Какая жидкость называется идеальной?
3. Какая струя является непрерывной?

4. По какому закону распределена скорость при ламинарном течении в круглой трубке?
5. Какая формула задает силы вязкого трения?
6. Запишите уравнение Бернулли.
7. В более узком сечении трубки жидкости, скорость ее молекул _______.
8. Связь между кинематической и динамической вязкостью выражается соотношением ________.
9. Приведите формулу Пуазейля.
10. Как зависит от вязкости число Рейнольдса?

ТЕСТ№3

1. В чем состоит суть способа задания сплошных сред по Эйлеру?
2. Какая жидкость называется несжимаемой?
3. Какое течение является турбулентным?
4. Что называют силовыми линиями тока жидкости?
5. Зависят ли силы вязкого трения от площади соприкасающихся поверхностей?
6. На какие компоненты можно разбить результирующую силу, действующую на тело в жидкости? Как они направлены.
7. Каковы эти компоненты для тела симметричной формы по отношению к направлению течения.
8. Запишите формулу Торричелли.
9. Распределение скоростей частиц в круглой трубке при ламинарном течении задается формулой _______.
10. С какими параметрами трубки и жидкости в ней связано число Рейнольдса? Привести формулу.

ТЕСТ№4

1. Что называют трубкой тока жидкости?
2. Струю жидкости называют прерывистой, если ________.
3. Течение жидкости, картина скоростей молекул которой изменяется с течением времени в любой точке пространства, называется _________
4. Каково распределение скоростей молекул жидкости в продольном сечении трубки?
5. Динамическая вязкость жидкостей растет, при ________ температуры.
6. Как зависит от температуры динамическая вязкость газов.
7. Приведите уравнение Бернулли.
8. Запишите в общем виде уравнение непрерывности струи.
9. От чего зависит поток жидкости в круглой трубке.
10. В виде суммы каких компонент можно представить лобовое сопротивление? С чем каждая из них связана?

Примеры заданий с решениями по теме

Задание №1 Широкий сосуд с небольшим отверстием в дне наполнен водой и керосином. Пренебрегая вязкостью, найти скорость вытекающей воды, если толщина слоя воды h_1 = 30 см, а слоя керосина h_2 = 20 см.

Решение:

Так как вязкостью воды можно пренебречь, для описания движения жидкости в сосуде можем воспользоваться уравнением Бернулли:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const} \qquad (1)$$

На слой керосина сверху и на вытекающую из отверстия воду снизу давит практически одинаковое (не учитываем изменение с высотой) атмосферное давление p, поэтому им в уравнении Бернулли можно пренебречь. Кроме того, так как отверстие небольшое, то скорость вытекания воды из отверстия будет гораздо больше скорости опускания уровня жидкости в сосуде, так что скоростью верхнего слоя керосина так же можно пренебречь. Столб жидкости складывается из слоя керосина высотой h_1 и слоя воды высотой h_2, потому уравнение Бернулли примет вид

$$\frac{\rho_1 v^2}{2} = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 . \qquad (2)$$

Выразим отсюда скорость истечения воды из отверстия в дне сосуда.

$$v^2 = \frac{2}{\rho_1}(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) g$$

$$v = \sqrt{2\left(h_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2\right) g} \qquad (3)$$

Плотности керосина ρ_2 = 800 кг/м^3 и воды ρ_1 = 1000 кг/м^3.

$$v = \sqrt{2 \cdot \left(0{,}3 + \frac{800}{1000} \cdot 0{,}2\right) \cdot 9{,}8} = 3 \text{ (м/с)}$$

Ответ: 3 м/с.

Задание №2. Какую работу необходимо совершить, чтобы, действуя постоянной силой на поршень, выдавить из горизонтально расположенного цилиндра всю воду за время *t*? Объём воды равен *V*, площадь сечения отверстия *S*, причём *S* значительно меньше площади поршня. Трение и вязкость пренебрежимо малы.

Решение:

Так как трение и вязкость воды пренебрежимо малы, то для описания движения жидкости в поршне можем воспользоваться уравнением Бернулли

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const} \qquad (1)$$

Атмосферное давление с обеих сторон поршня одинаковое, поэтому его не учитываем. Так как сила, с которой действуют на поршень, постоянная и передаётся без изменения водой вплоть до отверстия, то давление на воду у отверстия в цилиндре со стороны поршня постоянное и равно

$$p = \frac{F}{S}, \qquad (2)$$

где S – площадь сечения отверстия.

Вода с обеих сторон поршня находится практически на одном уровне, потому гидростатическим давлением ρgh можно пренебречь. Так как площадь сечения S отверстия значительно меньше площади поршня, то скоростью движения поршня, а соответственно и слоёв воды перед ним до отверстия можно пренебречь.

Итак, уравнение Бернулли для отверстия в цилиндре примет вид

$$\frac{F}{S} = \frac{\rho v^2}{2} \qquad (3)$$

Отсюда можно выразить скорость истечения воды из отверстия в цилиндре.

$$v=\sqrt{\frac{2F}{\rho S}} \qquad (4)$$

Зная скорость струи воды из отверстия и площадь сечения отверстия, можем найти расход воды за некоторое время *t*.

$$V=S\cdot vt=St\sqrt{\frac{2F}{\rho S}}=t\sqrt{\frac{2SF}{\rho}} \qquad (5)$$

Время истечения воды объёмом *V* равно

$$t=V\sqrt{\frac{\rho}{2SF}}$$

Ответ: $t=V\sqrt{\frac{\rho}{2SF}}$.

Задание №3. 1.357. По трубке длины *l* и радиуса *R* течёт стационарный поток жидкости, плотность которой ρ и вязкость η. Скорость течения жидкости зависит от расстояния *r* до оси трубки по закону $v=v_0\left(1-r^2/R^2\right)$. Найти:

а) объём жидкости, протекающей через сечение трубки в единицу времени;
б) кинетическую энергию жидкости в объёме трубки;
в) силу трения, которую испытывает трубка со стороны жидкости;
г) разность давлений на концах трубки.

Решение

а) Так как поток жидкости стационарный, то при движении жидкости её слои не перемешиваются. При этом весь поток жидкости можно рассматривать как потоки тонких (толщиной *dr*) цилиндрических слоёв жидкости радиусом *r* (меняется от 0 до радиуса трубки *R*), площадью поперечного сечения *dS* = 2*πrdr*, а скорость течения жидкости в любом месте сечения такого тонкого цилиндра на любом расстоянии от начала трубки одинаковая и равна

$$v=v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (1)$$

Следовательно, за время *t* объём жидкости, протекающий по такому мысленно выделенному тонкому цилиндру равен

$$dV=dS\cdot vt=2\pi r dr v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)t \qquad (2)$$

За единицу времени объём жидкости, протекающий через сечение этого цилиндра

$$dV_t=\frac{dV}{t}=dS\cdot vt=2\pi v_0\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)dr \qquad (3)$$

Просуммируем по всем таким цилиндрам, чтобы получить полный объём жидкости, протекающий по трубке за единицу времени

$$V_t=\int dV_t=2\pi v_0\int_0^R\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)dr=2\pi v_0\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right)\Bigg|_0^R=\pi v_0\left(R^2-\frac{R^2}{2}\right)=\frac{\pi v_0 R^2}{2} \qquad (4)$$

б) Кинетическую энергию жидкости в объёме трубки найдём как сумму кинетической энергии жидкости в каждом мысленно выделенном тонком цилиндре толщины *dr* радиусом *r* от 0 до радиуса трубки *R*, в котором находится жидкость массой *dm*, которая течёт со скоростью *v*, одинаковой по все длине трубки и любом месте сечения этого тонкого цилиндра.

$$T = \int dT = \int \frac{dm \cdot v^2}{2} \qquad (5)$$

Масса жидкости плотностью ρ в цилиндре длины l и поперечным сечением dS = $2\pi rdr$, равна

$$dm = \rho \cdot dS \cdot l = 2\pi\rho l \cdot rdr \qquad (6)$$

Таким образом, кинетическая энергия жидкости в объёме трубки

$$T = \int_0^R \pi\rho l \cdot rdr \cdot v_0^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 = \pi\rho l v_0^2 \int_0^R \left(r - 2\frac{r^3}{R^2} + \frac{r^5}{R^4}\right) dr = \pi\rho l v_0^2 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2R^2} + \frac{r^6}{6R^4}\right)\Bigg|_0^R =$$

$$= \pi\rho l v_0^2 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2R^2} + \frac{R^6}{6R^4}\right) = \frac{\pi\rho l v_0^2 R^2}{6} \qquad (7)$$

в) Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости

$$F = \eta \left|\frac{dv}{dr}\right| S \qquad (8)$$

Здесь dv/dr – градиент скорости, S – площадь соприкасающихся слоёв.
Чтобы определить силу трения, которую испытывает трубка со стороны жидкости, нужно вычислить силу трения между слоями жидкости у самой трубки.

$$F = F\big|_{r=R} = \eta \left|\frac{dv}{dr}\right|_{r=R} S \qquad (9)$$

Площадь слоя жидкости будет равна боковой поверхности трубки.

$$S = 2\pi Rl \qquad (10)$$

Градиент скорости жидкости у самой трубки

$$\left|\frac{dv}{dx}\right|_{r=R} = \left|\left(v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right)'\right|_{r=R} = \left|v_0\left(-\frac{2r}{R^2}\right)\right|_{r=R} = \frac{2v_0 r}{R^2}\bigg|_{r=R} = \frac{2v_0}{R} \qquad (11)$$

Таким образом, сила трения, которую испытывает трубка со стороны жидкости

$$F = \eta \frac{2v_0}{R} 2\pi Rl = 4\pi\eta v_0 l \qquad (12)$$

г) На массу жидкости в трубке действует разность давлений Δp на концах трубки, зставляющая жидкость двигаться. Против силы $\Delta p \cdot \pi r^2$, которая действует на массу жидкости в трубке, направлена сила трения жидкости о стенки сосуда и, так как жидкость движется стационарно, т.е. её ускорение равно нулю, то эти силы компенсируют друг друга.

$$\Delta p \pi R^2 = 4\pi\eta v_0 l \qquad (13)$$

Выразим отсюда разность давлений на концах трубки

$$\Delta p = \frac{4\eta v_0 l}{R^2} \qquad (14)$$

Ответ: $V_t = \int dV_t = \frac{\pi v_0 R^2}{2}$, $T = \frac{\pi\rho l v_0^2 R^2}{6}$, $F = 4\pi\eta v_0 l$, $\Delta p = \frac{4\eta v_0 l}{R^2}$.

Варианты тестов итогового контроля по разделу механика

ТЕСТ №1

1. Раздел, который изучает движение тел, без учета причин его вызывающих, называют ___________.
2. Мгновенная скорость определяется соотношением _______.

3. Тангенциальная компонента полного ускорения отвечает только за изменение ______.
4. Второй закон динамики в дифференциальной форме имеет вид __________.
5. Механическим напряжением называют ________.
6. Сила трения скольжения явно зависит только от _______.
7. Силы, вектора которых во всех точках пространства равные в любой момент времени называются _______.
8. Механическая работа, каких сил по замкнутой траектории равна нулю?
9. Потенциальная энергия в поле силы тяжести равна ______.
10. Теорема Штейнера записывается в виде соотношения _______.
11. Моментом инерции твердого тела называют _________.
12. Момент импульса относительно оси определяется соотношением ________
13. При каких условиях возможно проявление силы Кориолиса ?
14. С ростом сечения трубки, по которой течет жидкость, скорость течения ______, а давление ________.
15. При каком течении слои жидкости не перемешиваются друг с другом?
16. Число колебаний совершаемых системой за единицу времени называют ________.
17. При каких условиях в колебательной системе наступает резонанс?
18. Что называют начальной фазой колебания?
19. Чему равна энергия покоя?
20. По какой формуле можно рассчитать Лоренцево сокращение длины релятивистского объекта.

ТЕСТ№2

1. Изменение положения тела в пространстве с течением времени называют ________.
2. Среднее значение линейной скорости определяется соотношением ________.
3. Связь между нормальной компонентой полного ускорения и угловой скорости имеет вид _______. (привести общий вид в векторной форме).
4. Согласно закону инерции тела двигаются __________, если на них не действуют другие тела или действие сил скомпенсировано.
5. Закон Гука для линейных упругих деформаций имеет вид:
6. Чему равен вес тела при перегрузке (движущегося ускорено вверх)?
7. Какова зависимость веса тела от широты земного шара.
8. Закон сохранения импульса определяется соотношением ________.
9. Чему равен момент вращающей силы относительно оси?
10. Чему равен момент импульса замкнутой системы тел относительно центра вращения?
11. Выполняется ли закон сохранения энергии, если механическую замкнутую систему поместить в поле консервативных сл? (Пояснить выбор ответа).
12. При вылете снаряда в направлении с запада на восток, действие силы Кориолиса приводит к ________.
13. Запишите второй закон Ньютона в НИСО.
14. Запишите основной закон динамики вращательного движения.
15. Как связан момент импульса твердого тела, вращающегося относительно фиксированной оси, проходящей через центр масс с угловой скоростью

16. Чему равна кинетическая энергия твердого тела, которое совершает комбинационное движение (поступательное и вращательное с фиксированной осью вращения)?
17. Запишите уравнение Бернулли в общем случае.
18. Какое течение является турбулентным?
19. При каком условии релятивистский интервал является времениподобным?
20. Как связаны импульс и кинетическая энергия в релятивистской механике?

Примеры контрольных работ по разделу механика

I Вариант

1. Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. При каком предельном коэффициенте трения тело начнет скользить по наклонной плоскости?
2. Нейтрон массой m_0 ударяется о неподвижное ядро атома углерода $m = 12m_0$. Считая удар центральным и упругим, найти, во сколько раз уменьшится кинетическая энергия нейтрона при ударе.
3. К пружине подвешен груз. Зная, что максимальная кинетическая энергия колебаний груза равна 1 Дж, найти коэффициент упругости пружины. Амплитуда колебаний 5 см.

II Вариант

1. Трамвай, трогаясь с места, движется с постоянным ускорением $a = 0.5 м/с^2$. Через $t = 12\,с$ мотор трамвая выключается. На всем пути трамвая коэффициент трения равен $k = 0.01$. Найти общую продолжительность движения.
2. Два шара подвешены на параллельных нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Масса первого – 200 г , масса второго – 100 г. Первый шар отклоняют так, что его центр тяжести поднимается на высоту 4,5 см и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после соударения, если удар неупругий.
3. Найти во сколько раз нормальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса больше ее тангенциального ускорения для того момента, когда вектор полного ускорения составляет угол 30^0 с вектором ее линейной скорости.

III Вариант

1. Трамвай, трогаясь с места, движется с постоянным ускорением $a = 0.5 м/с^2$. Через $t = 12\,с$ мотор трамвая выключается. На всем пути трамвая коэффициент трения равен $k = 0.01$. Найти общее расстояние, пройденное трамваем.
2. Два шара подвешены на параллельных нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Масса первого – 200 г , масса второго – 100 г. Первый шар отклоняют так, что его центр тяжести поднимается на высоту 4,5 см и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после соударения, если удар упругий.
3. Вагон движется равнозамедленно, с ускорением 0,5 м/с^2 . Начальная скорость вагона 54 км/ч. Через сколько времени и на каком расстоянии от начальной точки вагон остановится.

IV Вариант

1. Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. Коэффициент трения $k = 0.03$. Сколько времени потребуется для прохождения при этих условиях 100м пути.
2. Нейтрон массой m_0 ударяется о неподвижное ядро атома урана $m = 235m_0$. Считая удар центральным и упругим, найти, какую часть своей скорости потеряет нейтрон при ударе.
3. Тело падает вертикально с высоты h = 19,6 м с нулевой начальной скоростью. Какой путь пройдет тело за последнюю 0,1 с своего движения.

Приложение 1

Некоторые сведения о векторах.

1. Скалярное произведение двух векторов:

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$;

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha$, где α угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Векторное произведение двух векторов:

$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\alpha$, где α угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(a_y b_z - b_y a_z\right)+\vec{j}\left(a_z b_x - a_x b_z\right)+\vec{k}\left(a_x b_y - b_x a_y\right).$$

3. Двойное векторное произведение:

$\left[\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

4. Смешанное произведение (циклические перестановки):

$\left(\vec{a}\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\left(\vec{b}\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right)=\left(\vec{c}\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)$

5. Некоторые производные от произведений векторов:

$$\frac{d\left(\alpha\vec{a}\right)}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}\vec{a}+\alpha\frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$\frac{d\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{dt}=\frac{d\vec{a}}{dt}+\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{dt}=\left(\frac{d\vec{a}}{dt},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\frac{d\vec{b}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\left[\vec{a},\vec{b}\right]}{dt}=\left[\frac{d\vec{a}}{dt},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\frac{d\vec{b}}{dt}\right]$$

$$\frac{d\vec{a}^{\,2}}{dt}=2\vec{a}\frac{d\vec{a}}{dt}$$

6. $\vec{a}=\vec{e}_a\cdot a$, где $\vec{e}_a$ - орт вектор в направлении вектора $\vec{a}$.

7. Представление вектора в пространственной декартовой системе координат: $\vec{a}=\vec{i}\,a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z$, где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ - орт векторы в направлении координатных осей X,Y,Z соответственно.

8. Представление вектора в пространственной декартовой системе координат: $\vec{a}=\vec{e}_r a_r+\vec{e}_\varphi a_\varphi$, где $\vec{e}_r,\vec{e}_\varphi$ - орт векторы в направлении соответствующих полярных осей.

9. Связь между орт векторами полярной системы координат:

$$\vec{e}_r{}'=\frac{d\vec{e}_r}{dt}=\varphi'\vec{e}_\varphi=\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

Приложение 2

Единицы физических величин раздела механика в СИ и СГС.

Наименование величины	Единица величины		Отношение ед. СИ/ед. СГС
	СИ	**СГС**	
Длина l,s	м	см	10^2
Время t	с	с	1
Скорость $\vec{v}$	м/с	см/с	10^2
Ускорение $\vec{a}$	м/с^2	см/с^2	10^2
Частота колебаний ν	Гц	Гц	1
Круговая частота ω	с$^{-1}$	с$^{-1}$	1
Угловая скорость $\vec{\omega}$	рад/с	рад/с	1
Угловое ускорение $\vec{\beta}$	рад/с^2	рад/с^2	1
Масса m	кг	г	10^3
Плотность ρ	кг/м^3	г/см^3	10^{-3}
Сила $\vec{F}$	Н	дин	10^5
Давление, механическое напряжение P,σ,τ	Па	дин/см^2	10
Импульс $\vec{p}$	кг·м/с	г·см/с	10^5
Момент силы $\vec{M}$	Н·м	дин·см	10^7
Энергия, работа T,U,E,A	Дж	эрг	10^7
Мощность P	Вт	эрг/с	10^7
Плотность потока энергии u	Вт/м^2	эрг/(с·см^2)	10^3
Момент импульса $\vec{L}$	кг·м^2/с	г·см^2/с	10^7
Момент инерции I	кг·м^2	г·см^2	10^7
Вязкость η	Па·с	П	10

Литература

1. И.В. Савельев. Курс общей физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. М., Наука, 1987.ролорлорл
2. А.Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М., Высшая школа, 1984.
3. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Т. 1. Механика. М., Наука, 1974.
4. А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. Курс физики. М., Высшая школа, 2002.
5. И.Е. Иродов. Задачи по общей физике. С.-Пб., Лань, 2001.
6. Д.И. Сахаров. Сборник задач по физике. М., Просвещение, 1973.
7. В.С. Волькенштейн. Сборник задач по физике. М., Просвещение, 1984.