ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г. ШЕВЧЕНКО

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа

Контрольные работы по дифференциальным уравнениям

(направление «Прикладная математика и информатика»)

Методические указания

Тирасполь – 2015

УДК 517.91
ББК 22.161.6

Составители:
Ю.А. Баренгольц, к. ф.-м. н., доцент, зав. кафедрой математического анализа ПГУ им. Т.Г. Шевченко
О.Ю. Баренгольц, гл. спец. каф. математики и методики преподавания математики ПГУ им. Т.Г. Шевченко
Р.Л. Косиева, ст. преп. каф. математического анализа ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Рецензенты:
Л.Н. Сафонова, зам. директора ТОТЛ №1 по научно-методической работе, учитель высшей категории
Л.В. Чуйко, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и экономико-математических методов ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Контрольные работы по дифференциальным уравнениям (направление «Прикладная математика и информатика»): методические указания / Сост.: Ю.А. Баренгольц, О.Ю. Баренгольц, Р.Л. Косиева. – Тирасполь, 2015. – 68 с. – Электронный вариант.

Пособие имеет своей целью помочь студентам физико-математического факультета при подготовке к выполнению ими предусмотренных рабочей программой контрольных работ и сдаче экзамена по дисциплине «Дифференциальные уравнения». Приводится подробное решение задач, аналогичных тем, которые предлагаются в вариантах контрольных работ и на экзамене, а также список базовых вопросов экзаменационных билетов и перечень дополнительных вопросов на экзамене.

Пособие будет полезно для студентов инженерно-технического института, экономического и других факультетов, где тема «Дифференциальные уравнения» является частью более общих математических курсов.

Утверждено Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал предлагаемой методической разработки составлен в соответствии с новым Федеральным Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки 010400 «Прикладная математика и информатика», утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ № 538 от 20.05.2010.

В соответствии с базовым учебным планом, утвержденным в 2013 году Ученым Советом Приднестровского государственного университета на освоение дисциплины «Дифференциальные уравнения» отводится 252 часа. Данный объем нагрузки необходимо освоить в течение двух семестров второго курса. Каждый семестр заканчивается экзаменом, а кроме того в весеннем семестре студентам предлагается выполнить курсовую работу. Это свидетельствует не только о важности данной дисциплины в качестве предмета общей математической культуры, но и о широком применении её методов как в «чистой» математике, так и в других отраслях человеческих знаний, начиная с экономики и заканчивая самыми современными методами социологических, биологических или физико-технических исследований. Данный факт требует от студентов для подготовки к занятиям и экзамену не только особой ответственности, но и умения использовать имеющиеся в библиотеке нашего университета учебники, задачники, методические указания, а также ресурсы интернета. Предлагаемая методическая разработка призвана облегчить этот нелегкий труд.

Главной целью авторов данного пособия является пробуждение у студентов стремления к самостоятельной работе, в чем, безусловно, полезными оказываются кроме всего прочего конспекты лекций Вашего преподавателя, а также активное участие в практических занятиях и систематическое выполнение домашних заданий.

Желаем успехов во время предстоящих экзаменационных сессий!

СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Распределение трудоемкости в зачетных единицах трудоемкости/часах *по видам аудиторной и самостоятельной работы студентов в семестре*

Семестр	Количество часов						Форма итогового контроля
	Трудоемкость, ЗЕТ/часы	В том числе					
		Аудиторных			Самост. работы		
		Всего	Лекций	Практич.			
3	3/108	54	18	36	18		экзамен/36
4	4/144	72	32	40	36		экзамен/36, курсовая работа
Итого	7/252	126	50	76	54		72

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная работа		Самост. работа
			Лекции	Практич.	
1	Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка	64	18	28	18
2	Дифференциальные уравнения высших порядков	24	6	10	8
3	Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка	40	12	12	16
4	Системы дифференциальных уравнений	26	10	8	8
5	Дифференциальные уравнения в частных производных 1-го порядка	12	4	4	4
6	Контрольные работы	14		14	
Всего:		180	50	76	54

ОСЕННИЙ СЕМЕСТР

ПРИМЕРЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Попробуйте самостоятельно выполнить задания приводимых примеров. К предлагаемым нами решениям следует обращаться только в случае возникновения у Вас каких-либо затруднений. Вполне вероятно, что Вы найдете свой оригинальный способ решения. В идеальном случае достаточно просто свериться с ответом.

Контрольная работа № 1

Задание 1. Найти общее решение уравнения с разделяющимися переменными.

а) $xy^2\,dx - 2\sqrt{1+x^2}dy = 2yxdx$, *б)* $y'\left(1+x^2\right) - 2xy = 6x$.

Задание 2. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

а) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2-x}y = 1,$ $y(2) = 2\ln 2$,

б) $y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}$, $y(0) = 0$.

Задание 3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

а) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$, *б)* $2x^2dy = \left(x^2+y^2\right)dx$.

Контрольная работа № 2

Задание 1. Найти частное решение уравнения Бернулли, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

а) $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$, $y\left(0\right) = 1$,

б) $xy' + y = xy^2$, $y(1) = 1$,

в) $y' + xy = xy^2$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$.

Задание 2. Найти общее решение (или общий интеграл) уравнения в полных дифференциалах.

а) $(3x^2y + y^2)\,dx + (x^3 + 2xy + 10y)\,dy = 0$, *б)* $e^{-y}dx + \left(1 - xe^{-y}\right)dy = 0.$

в) $(x + y + 1)\,dx + (x - y^2 + 3)\,dy = 0$

Задание 3. Найти общее решение уравнения Риккати, если задан вид его частного решения.

а) $xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$, $y_1 = ax + b$,

б) $x^2 y' + \left(xy - 2\right)^2 = 0$, $y_1 = \dfrac{a}{x}$,

в) $xy' = x^2 y^2 - (2x+1)y + 1$.

Контрольная работа № 3

Задание 1. Найти общее решение неполного уравнения первого порядка вида $x = f(y')$*, не разрешенного относительно производной.*

а) $y' = x\sqrt{1 + y'^2}$, *б)* $xy'^3 = 1 + y'$.

Задание 2. Найти общее решение неполного уравнения первого порядка вида $y = f(y')$*, не разрешенного относительно производной.*

а) $y = y'^2 e^{y'}$, *б)* $y = \ln(1 + y'^2)$.

Задание 3. Найти общее решение уравнения Лагранжа.

а) $y = x + y'^3$, *б)* $2yy' = x(y'^2 + 4)$.

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРОВ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа № 1

Задание 1. *Найти общее решение уравнения с разделяющимися переменными.*

Данное задание призвано восстановить в памяти студентов навыки вычисления неопределенных интегралов.

а) $xy^2\,dx - 2\sqrt{1+x^2}\,dy = 2yxdx$.

Решение. Данное уравнение мы можем преобразовать к виду

$$2\sqrt{1+x^2}\,dy = x(y^2-2y)dx\,.$$

Разделив обе части на $\sqrt{1+x^2}\,(y^2-2y)$, получаем:

$$\frac{2}{y^2-2y}dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx\,.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{2dy}{y(y-2)} = \frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Интеграл в левой части находится методом неопределенных коэффициентов, в правой части – введением неизвестного под знак дифференциала:

$$\int\left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y}\right)dy = \frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d(1+x^2)\,,$$

$$\ln(y-2)-\ln y = \sqrt{1+x^2}+\ln C \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{y-2}{y} = \sqrt{1+x^2}+\ln C\,,$$

$$\frac{y-2}{y} = Ce^{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Тогда окончательно $$y = \frac{2}{1-Ce^{\sqrt{1+x^2}}}\,.$$

– – – – – – – –

б) $y'\left(1+x^2\right)-2xy = 6x$.

Решение. Разделяем переменные:

$$y'\left(1+x^2\right) = 6x+2xy \qquad \Rightarrow \qquad y'\left(1+x^2\right) = 2x\left(3+y\right),$$

$$\frac{dy}{dx}\left(1+x^2\right) = 2x\left(3+y\right),$$

$$\frac{dy}{y+3}=\frac{2xdx}{x^2+1}.$$

Интегрируя обе части данного уравнения, получим:

$$\int\frac{dy}{y+3}=\int\frac{2xdx}{x^2+1}\qquad\Rightarrow\qquad\int\frac{d\left(y+3\right)}{y+3}=\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1},$$

$$\ln\left|y+3\right|=\ln\left|x^2+1\right|+\ln C.$$

Тогда окончательно

$$y=C\left(x^2+1\right)-3.$$

$$-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-$$

Задание 2. *Найти частное решение линейного дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.*

Как известно, линейные дифференциальные уравнения первого порядка решаются двумя способами: методом подстановки (метод Бернулли) и методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Ниже рассматриваются оба эти способа.

а) $\quad y'+\dfrac{1-2x}{x^2-x}y=1, \qquad y(2)=2\ln 2$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $y=u\upsilon$ (метод Бернулли).

Тогда $$y'=u'\upsilon+u\upsilon'.$$

Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим:

$$u'\upsilon+u\upsilon'+\frac{1-2x}{x^2-x}u\upsilon=1$$

или

$$u'\upsilon+u\left(\upsilon'+\frac{1-2x}{x^2-x}\upsilon\right)=1. \qquad (*)$$

Выберем υ так, чтобы коэффициент при u (т.е. выражение, стоящее в скобках) был равен нулю:

$$\upsilon'+\frac{1-2x}{x^2-x}\upsilon=0.$$

Полученное уравнение позволяет разделить переменные:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon}+\frac{1-2x}{x^2-x}dx=0,$$

или $$\frac{d\upsilon}{\upsilon}-\frac{2x-1}{x^2-x}dx=0.$$

Интегрируя, находим

$$\ln\left|\upsilon\right|-\ln\left|x^2-x\right|=C.$$

Поскольку в качестве υ можно взять любое из частных решений, выберем такое, для которого $C=0$, что приведет к уравнению

$$\ln|\upsilon| = \ln|x^2 - x|,$$

откуда $$\upsilon = x^2 - x. \qquad (**)$$

Подставляя найденное значение υ в уравнение ($*$) и учитывая, что в этом уравнении выражение в скобках равно нулю, приходим к уравнению для u:

$$u'(x^2 - x) = 1.$$

Тогда $$u' = \frac{1}{x^2 - x}$$

и $$u = \int \frac{dx}{x^2 - x}.$$

Найдем интеграл выделением в знаменателе полного квадрата:

$$u = \int \frac{dx}{x^2 - x} = \int \frac{dx}{\left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

или $$u = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C.$$

(Использовался табличный интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$).

Таким образом, общим решением является функция

$$y = u\upsilon = (x^2 - x)\left(\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C\right).$$

Для нахождения частного решения необходимо определить значение константы C. Используя заданное начальное условие ($y = -2\ln 2$ при $x = 2$), получаем:

$$-2\ln 2 = (2^2 - 2)\left(\ln\left|\frac{2-1}{2}\right| + C\right),$$

$$-2\ln 2 = -2\ln 2 + 2C,$$

откуда $C = 0$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$y = (x^2 - x)\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|.$$

– – – – – – – –

б) $\quad y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}, \qquad y(0) = 0.$

Решение. Воспользуемся методом Лагранжа, согласно которому первоначально решается однородное уравнение:

$$y' + 2xy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -2xy,$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = -2\int x\,dx,$$

$$\ln|\,y\,| = -x^2 + \ln C(x)\,,$$

$$y = C(x)\,e^{-x^2}\,. \qquad (*)$$

Вычислим производную $\quad y' = C'(x)\,e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}C(x)\,,$

и подставим совместно с $\qquad y = C(x)\,e^{-x^2}$

в исходное уравнение:

$$C'(x)\,e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}C(x) + 2xC(x)\,e^{-x^2} = 2x^2e^{-x^2}\,,$$

$$C'(x) = 2x^2,$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = 2x^2.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int dC(x) = 2\int x^2 dx\,,$$

$$C(x) = \frac{2x^3}{3} + C\,.$$

Тогда из (*) получаем общее решение:

$$y = \left(\frac{2}{3}x^3 + C\right)e^{-x^2}\,.$$

Для нахождения частного решения подставим начальные условия:

$$0 = Ce^0 \qquad \Rightarrow \qquad C = 0\,.$$

Тогда частное решение может быть записано в виде:

$$y = \frac{2}{3}x^3e^{-x^2}\,.$$

— — — — — — —

Задание 3. *Найти общее решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.*

а) $\qquad y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}\,.$

Решение. Введем новую переменную:

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{или} \quad y = ux.$$

Тогда $\qquad y' = u + xu'\,,$

и из исходного уравнения следует:

$$u + xu' = e^u + u \qquad \text{или} \qquad e^{-u}du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим:

$$-e^u = \ln|x| + \ln C \qquad \Rightarrow \qquad e^u = -\ln|Cx|,$$

$$e^u = \ln\frac{1}{|xC|}.$$

Тогда
$$u = \ln\left|\ln\frac{1}{|Cx|}\right|,$$

а так как
$$u = \frac{y}{x},$$

то
$$\frac{y}{x} = \ln\left|\ln\frac{1}{|Cx|}\right|,$$

и окончательно

$$y = x\ln\left|\ln\frac{1}{|Cx|}\right|.$$

– – – – – – – –

б) $\quad 2x^2dy = \left(x^2 + y^2\right)dx$.

Решение. Разделив обе части равенства на x^2dx , получим уравнение, правая часть которого есть функция отношения $\frac{y}{x}$:

$$2\frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Положив в нем $y = ux$ и $y' = xu' + u,$ получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$2xu' + 2u = 1 + u^2,$$

$$2x\frac{du}{dx} = u^2 - 2u + 1,$$

$$\frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя и подставляя $\frac{y}{x}$ вместо u, получим общий интеграл исходного уравнения:

$$2\int\frac{du}{(u-1)^2} = \int\frac{dx}{x},$$

$$2\int (u-1)^{-2}\, d(u-1) = \ln|x| + \ln C,$$

$$-\frac{2}{u-1} = \ln C|x| \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2}{1-\dfrac{y}{x}} = \ln C|x|.$$

Выражая отсюда $y,$ можно получить и общее решение:

$$\frac{2x}{x-y} = \ln C|x|,$$

$$\frac{2x}{\ln C|x|} = x-y \qquad \Rightarrow \qquad y = x - \frac{2x}{\ln C|x|}$$

или окончательно

$$y = x\left(1 - \frac{2}{\ln C|x|}\right).$$

– – – – – – – –

Контрольная работа № 2

Задание 1. *Найти частное решение уравнения Бернулли, удовлетворяющего заданным начальным условиям.*

Уравнения Бернулли можно решить тремя способами: рассмотренными при решении линейных уравнений методами Бернулли и Лагранжа, а также особым методом замены переменной. Поэтому ниже рассматриваются решения трех примеров.

а) $\quad y' - xy = -y^3 e^{-x^2}, \qquad y(0) = 1.$

Решение методом Бернулли. Полагая

$$y = u\upsilon, \quad y' = u'\upsilon + u\upsilon',$$

будем иметь:

$$u'\upsilon + u\upsilon' - xu\upsilon = -u^3\upsilon^3 e^{-x^2},$$

или

$$u'\upsilon + u\left(\frac{d\upsilon}{dx} - x\upsilon\right) = -u^3\upsilon^3 e^{-x^2}.$$

Как и при решении линейного уравнения, выберем функцию υ так, чтобы выполнялось условие равенства нулю выражения в скобках:

$$\frac{d\upsilon}{dx} - x\upsilon = 0.$$

Интегрирование приводит к выражению для функции υ (как и ранее константу интегрирования полагаем здесь равной нулю):

$$\ln|\upsilon| = \frac{x^2}{2}, \qquad \text{т.е.} \qquad \upsilon = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Подставляя найденное значение υ в исходное уравнение, получим:

$$e^{\frac{x^2}{2}} \frac{du}{dx} = -u^3 e^{\frac{3x^2}{2}} e^{-x^2},$$

или, после сокращения на экспоненту,

$$\frac{du}{dx} = -u^3.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим u:

$$-\frac{du}{u^3} = dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2u^2} = x + C,$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2(x+C)}}.$$

Следовательно, $$y = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2(x+C)}}$$ – общее решение.

Используя начальное условие ($y = 1$ при $x = 0$), найдем $C = \frac{1}{2}$. Таким образом, искомое частное решение есть

$$y = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2x+1}}.$$

– – – – – – – –

б) $\qquad xy' + y = xy^2, \qquad y(1) = 1.$

Решение методом Лагранжа. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$xy' + y = 0.$$

Разделяем переменные:

$$x\frac{dy}{dx} = -y \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{ó} = -\int \frac{d\tilde{o}}{x},$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C(x),$$

$$y = \frac{C(x)}{x}. \qquad (*)$$

Согласно методу Лагранжа константу интегрирования мы считаем зависящей от аргумента. Для ее определения вычислим производную:

$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}.$$

Подставим значения y и y' в исходное уравнение и найдем значение $C(x)$:

$$x\,\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = x\,\frac{C^2(x)}{x^2},$$

$$C'(x) - \frac{C(x)}{x} + \frac{C(x)}{x} = \frac{C^2(x)}{x},$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{C^2(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dC(x)}{C^2(x)} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{C(x)} = \ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{1}{\ln C|x|}.$$

Подставляя полученное выражение в (*), приходим к общему решению:

$$y = \frac{1}{x \ln C|x|}.$$

Используя начальное условие ($y(1)=1$), найдем значение произвольной постоянной:

$$1 = \frac{1}{\ln C} \quad \Rightarrow \quad \ln C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = e.$$

В результате, частное решение может быть записано в виде

$$y = \frac{1}{x\left(1+\ln|x|\right)}.$$

– – – – – – – –

в) $y' + xy = xy^2$, $\quad y(0) = \frac{1}{2}$

Решение методом замены переменной. Разделим на y^2 обе части уравнения:

$$y^{-2}y' + xy^{-1} = x.$$

Далее производим замену:

$$y^{-1} = z \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y' = -\dfrac{1}{z^2}z', \\ y^{-2} = z^2. \end{cases}.$$

Подставим полученные выражения в заданное уравнение:

$$-\frac{1}{z^2}z'z^2 + xz = x,$$

$$z' - xz = -x.$$

Полученное линейное уравнение решаем методом Бернулли:

$$z = uv \quad \Rightarrow \quad z' = u'v + v'u,$$

$$u'v + v'u - xuv = -x,$$
$$u(v' - xv) + u'v = -x,$$
$$\frac{dv}{v} = xdx,$$
$$\ln v = \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = e^{\frac{x^2}{2}},$$
$$\frac{du}{dx} e^{\frac{x^2}{2}} = -x \quad \Rightarrow \quad \int du = -\int e^{-\frac{x^2}{2}} xdx,$$
$$z = uv = e^{\frac{x^2}{2}}(e^{-\frac{x^2}{2}} + C) = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1,$$
$$y = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1}.$$

Мы нашли общее решение. Воспользуемся начальным условием $y(0) = \frac{1}{2}$. Получаем уравнение

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{Ce^0 + 1},$$

откуда $C = 1$, а значит частное решение принимает вид:

$$y = \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}} + 1}.$$

Задание 2. *Найти общее решение (или общий интеграл) уравнения в полных дифференциалах.*

Как известно, уравнения данного типа решаются одним из двух способов – вариацией произвольной постоянной, либо непосредственно с помощью интегралов с переменным верхним пределом. Следующий ниже пример *(а)* решается первым способом, примеры *(б)* и *(в)* – вторым.

а) $(3x^2y + y^2)\, dx + (x^3 + 2xy + 10y)\, dy = 0$.

Решение. Предварительно выясним, является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах. Должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В нашем случае $P = 3x^2y + y^2, \quad Q = x^2 + 2xy + 10y$.

Значит, $$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 2y = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

и левая часть заданного уравнения есть полный дифференциал. Первообразная имеет вид:

$$F(x,y)=\int(3x^2y+y^2)\,dx=x^3y+xy^2+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ находится из условия $F_y'=Q$, т.е.

$$x^3+2xy+\varphi'(y)=x^3+2xy+10y.$$

Отсюда

$$\varphi'(y)=10y \quad \text{и} \quad \varphi(y)=5y^2+C.$$

Так как нас интересует любая из первообразных, можно положить, например, $C=0$, что дает:

$$F(x,y)=x^3y+xy^2+5y^2.$$

Поэтому общий интеграл исходного дифференциального уравнения есть

$$x^3y+xy^2+5y^2=C.$$

– – – – – – –

б) $e^{-y}dx+\left(1-xe^{-y}\right)dy=0.$

Решение. В данном случае $P=e^{-y}$ и $Q=1-xe^{-y}$,

и так как
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-e^{-y},$$

то левая часть уравнения есть полный дифференциал. На этот раз для нахождения общего интеграла воспользуемся формулой

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_o,y)\,dy=C.$$

Полагаем: $x_o=y_o=0$.

Тогда
$$\int_o^x e^{-y}\,dx+\int_o^y dy=C.$$

Следовательно, общим интегралом исходного уравнения является функция

$$xe^{-y}+y=C.$$

– – – – – – –

в) $(x+y+1)\,dx+(x-y^2+3)\,dy=0$

Решение. В данном случае $P=x+y+1$ и $Q=x-y^2+3$.

Тогда $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1,$$

т.е. мы имеем дело с уравнением в полных дифференциалах.

Воспользуемся формулой $\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_o)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy=C$,

которая для нашего случая примет вид:

$$\int\limits_{x_0}^{x}(x+y_o+1)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}(x-y^2+3)\,dy=C$$

Полагаем: $x_o=y_o=0$.

Тогда

$$\int\limits_{o}^{x}(x+1)\,dx+\int\limits_{o}^{y}(x-y^2+3)\,dy=C_1,$$

$$\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y=C.$$

– – – – – – – –

Задание 3. *Найти общее решение уравнения Риккати, если задан вид его частного решения.*

Уравнения Риккати не всегда интегрируются в квадратурах. Общее решение может быть найдено (если известно какое-либо частное решение y_1) согласно двум теоремам:

подстановкой $y=y_1+z$, (+)

подстановкой $y=y_1+\dfrac{1}{z}$. (++)

Кроме того уравнения Риккати интегрируются (не всегда) и с помощью подстановки

$$y=\frac{z}{x}\quad\Rightarrow\quad z=yx. \qquad (+++)$$

Рассматриваемые ниже примеры демонстрируют все три способа решения. В контрольной работе можно использовать любой из них.

а) $xy'=y^2-(2x+1)y+x^2+2x$, $y_1=ax+b$

Решение по теореме (+). Найдем константы a и b частного решения. Дифференцируя частное решение, находим: $y_1'=a$. Подставим y_1 и y_1' в заданное уравнение:

$$ax=(ax+b)^2-(2x+1)(ax+b)+x^2+2x\,,$$

$$ax=a^2x^2+2abx+b^2-2ax^2-2bx-ax-b+x^2+2x\,,$$

$$x^2(a^2-2a+1)+x(2ab-2a+2-2b)+b^2-b=0\,,$$

$$(a-1)^2x^2+2(a-1)(b-1)x+b(b-1)=0\,.$$

Для коэффициентов при степенях x с учетом равенства нулю левой части уравнения при любом значении аргумента имеем:

$$\begin{cases}(a-1)^2=0,\\ 2(a-1)(b-1)=0,\\ b(b-1)=0.\end{cases}$$

Наиболее простое решение данной переполненной системы имеет вид:

$$a=1\quad,\quad b=0\,,$$

а значит, $$y_1=x\,.$$

В соответствии с (+) полагаем $y=y_1+z$, а значит,

$$y=x+z\,. \tag{*}$$

Тогда

$$y'=1+z' \quad \text{и} \quad y^2=x^2+2z+z^2\,.$$

Подставляя y, y', y^2 в исходное уравнение, получим:

$$xz'+x=x^2+2zx+z^2-2x^2-x-z-2xz+x^2+2x$$

или (после приведения подобных)

$$xz'=z^2-z.$$

Разделяя переменные, интегрируем:

$$\int\frac{dz}{z(z-1)}=\int\frac{dx}{x}\,. \qquad (**).$$

Для подынтегральной функции в левой части используем метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}\,.$$

Приводим к общему знаменателю:

$$1=Az-A+Bz$$

и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях z. Из полученной системы

$$\begin{cases}1=-A\\ 0=A+B\end{cases}$$

следует: $A=-1,\quad B=1$. Тогда, возвращаясь к уравнению (**), имеем:

$$\int\frac{dz}{z-1}-\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|z-1|-\ln|z|=\ln|x|+\ln|C|,$$

$$\ln|z-1|=\ln|Cxz| \quad\Rightarrow\quad z-1=Cxz,$$

$$z=\frac{1}{1-Cx}.$$

Поскольку в соответствии с (*) $y=x+z$, можно записать общее решение:

$$y=x+\frac{1}{1-Cx}.$$

– – – – – – – –

б) $x^2y'+(xy-2)^2=0,\qquad y_1=\dfrac{a}{x}.$

Решение. Для нахождения общего решения используем формулу (++):

$$y=y_1+\frac{1}{z}.$$

Если частное решение имеет вид $y_1=\dfrac{a}{x}$, то $y_1'=-\dfrac{a}{x^2}$. Для нахождения a подставим y_1 и y_1' в исходное уравнение:

$$-\frac{x^2a}{x^2}+\left(x\frac{a}{x}-2\right)^2=0,$$

$$-a+a^2-4a+4=0 \quad\Rightarrow\quad a^2-5a+4=0,$$

откуда $a_1=1$ и $a_2=4$. Пусть $a=1$ (в принципе, можно выбрать любое из полученных значений). Тогда $y_1=\dfrac{1}{x}$ и из (++)

$$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}. \tag{*}$$

Дифференцируя это выражение, находим:

$$y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{z'}{z^2}.$$

Подставляем y и y' в исходное уравнение:

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{z'}{z^2}\right)+\left(x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)-2\right)^2=0,$$

$$-1-\frac{z'x^2}{z^2}+\left(1+\frac{x}{z}-2\right)^2=0,$$

$$-1-\frac{z'x^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}-\frac{2x}{z}+1=0 \quad \Rightarrow \quad -z'x^2+x^2-2zx=0\,,$$

$$z'+\frac{2}{x}z=1\,. \qquad (**)$$

Получено линейное уравнение, которое мы решим методом Лагранжа. Вначале интегрируем однородное уравнение:

$$z'+\frac{2}{x}z=0\,,$$

$$\int\frac{dz}{z}=-2\int\frac{dx}{x}\,,$$

$$z=\frac{C(x)}{x^2}\,. \qquad (***)$$

Определим вид функции $C(x)$. Для этого находим производную z':

$$z'=\frac{C'(x)x^2-2xC(x)}{x^4}$$

и вместе с (***) подставляем в (**):

$$\frac{C'(x)}{x^2}-\frac{2C(x)}{x^3}+\frac{2}{x}\frac{C(x)}{x^2}=1\,,$$

$$\int dC(x)=\int x^2dx\,, \quad \Rightarrow \quad C(x)=\frac{x^3}{3}+C\,.$$

Тогда из (***) следует:

$$z=\frac{x^3+3C}{3x^2}\,.$$

Вводя новое значение произвольной постоянной ($3C\to C$), в соответствии с (*) можем записать общее решение:

$$y=\frac{1}{x}+\frac{3x^2}{x^3+C}$$

или

$$y=\frac{4x^3+C}{x\left(x^3+C\right)}\,.$$

– – – – – – – –

в) $xy'=x^2y^2-(2x+1)y+1\,.$

Решение. Используем подстановку (+++)

$$z=xy \text{ или } y=\frac{z}{x}\,.$$

Тогда
$$y' = \frac{z'x - z}{x^2}.$$

Подставляем y и y' в заданное уравнение:
$$x\frac{z'}{x} - x\frac{z}{x^2} = z^2 - (2x+1)\frac{z}{x} + 1,$$
$$z' - \frac{z}{x} = z^2 - 2z - \frac{z}{x} + 1,$$
$$z' = (z-1)^2 \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dz}{(z-1)^2} = \int dx,$$
$$-\frac{1}{z-1} = x + C \quad \Rightarrow \quad 1 - yx = \frac{1}{x+C}.$$

Отсюда
$$y = \left(1 - \frac{1}{x+C}\right)\frac{1}{x}$$

или
$$y = \frac{x+C-1}{x(x+C)}.$$

– – – – – – –

Контрольная работа № 3

Задание 1. *Найти общее решение неполного уравнения первого порядка вида* $x = f(y')$*, не разрешенного относительно производной.*

Предлагаемые уравнения решаются введением параметра
$$y' = p. \qquad (+)$$
с получением общего решения в виде системы
$$\begin{cases} y = y(p, C), \\ x = f(p). \end{cases} \qquad (++)$$

Второе уравнение системы (++) вытекает непосредственно из исходного уравнения, а для получения зависимости $y = y(p, C)$ используют формулу дифференциала $dy = y'dx$. При этом $dx = f'(p)dp$. Тогда с учетом (+) можно записать:
$$dy = pf'(p)dp,$$
откуда непосредственно следует первое соотношение системы (++):
$$y = \int pf'(p)dp + C$$

В некоторых случаях от параметра p можно избавиться и получить общее решение или общий интеграл в обычной форме:
$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

а) $y' = x\sqrt{1+y'^2}$

Решение. Уравнение разрешимо относительно аргумента. Положим $y' = p$. Тогда

$$x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}. \qquad (*)$$

Полученное выражение может являться частью искомого общего параметрического решения. Решение $y = y(p)$ находим с помощью формулы дифференциала

$$dy = y'dx .$$

Тогда
$$dy = p\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)' dp ,$$

а значит,
$$y = \int p\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)' dp.$$

Для нахождения интеграла используется тригонометрическая подстановка:

$$p = tg\,t .$$

Приходится использовать новый параметр *t*. Тогда

$$x = \frac{tg\,t}{\sqrt{1+tg^2 t}} = \pm\sin t ,$$

$$y = \int tg\,t\,d\left(\pm\sin t\right) = \pm\int \sin t dt ,$$

$$\begin{cases} x = \pm\sin t, \\ y = \mp\cos t + C. \end{cases}$$

При этом можно избавиться от параметрической форы и получить общий интеграл в виде:

$$x^2 + \left(y - C\right)^2 = 1.$$

– – – – – – – –

б) $xy'^3 = 1 + y'$

Решение. Положим $y' = p$. Тогда

$$x = \frac{1+p}{p^3} . \qquad (*)$$

Находим дифференциал аргумента:

$$dx = -\left(\frac{3+2p}{p^4}\right)dp .$$

Тогда из формулы дифференциала функции $dy = y'dx = pdx$ следует:

$$y=-\int p\left(\frac{3+2p}{p^4}\right)dp=-3\int\frac{dp}{p^3}-2\int\frac{dp}{p^2}\,.$$

После интегрирования с учетом (*) записывается общее решение:

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{2p^2}+\dfrac{2}{p}+C, \\ x=\dfrac{1}{p^3}+\dfrac{1}{p^2}. \end{cases}$$

– – – – – – – –

Задание 2. *Найти общее решение неполного уравнения первого порядка вида* $y=f(y')$*, не разрешенного относительно производной.*

И вновь решение находится в параметрической форме. При этом $y'=p$, и в результате, общее решение имеет вид системы равенств

$$\begin{cases} y=f(p), \\ x=x(p,C). \end{cases} \qquad (+)$$

На этот раз первое уравнение системы (+) вытекает из исходного уравнения, а для получения зависимости $x=x(p,C)$ из формулы дифференциала $dy=y'dx$ записывают:

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{dy}{p}=\frac{f'(p)}{p}dp\,,$$

откуда следует второе соотношение системы (+):

$$x=\int\frac{f'(p)}{p}dp+C$$

Если возможно освобождение от параметра p, решение может быть записано в обычной форме:

$$\Phi(x,y,C)=0\,.$$

а) $y=y'^2e^{y'}$

Решение. Полагаем $y'=p$. Тогда из заданного уравнения следует:

$$y=p^2e^p\,. \qquad (*)$$

Таким образом, нами найдена часть параметрического решения. Находим дифференциал:

$$dy=\left(2p+p^2\right)e^p dp \qquad (**)$$

Так как $dy=y'dx$, а значит, $dx=\dfrac{dy}{y'}$. Тогда с учетом (**) можем записать:

$$dx=\frac{(2p+p^2)e^p dp}{p}=(2+p)e^p dp\,.$$

Интегрируем по частям:

$$x=\int(2+p)e^{p}dp=2e^{p}+\int pe^{p}dp=$$

$$=\left(u=p \;\Rightarrow\; du=dp;\quad dv=e^{p}dp \;\Rightarrow\; v=e^{p} \right)=$$

$$=2e^{p}+pe^{p}-e^{p}+C=e^{p}\left(p+1\right)+C.$$

Записываем общее решение с учетом (*):

$$\begin{cases} x=e^{p}\left(p+1\right)+C, \\ y=p^{2}e^{p}. \end{cases}$$

Особое решение также очевидно: $y=0$.

– – – – – – – –

б) $y=\ln(1+y'^{2})$

Решение. Полагаем $y'=p$. Тогда из заданного уравнения следует:

$$y=\ln(1+p^{2}). \qquad (*)$$

Тогда $$dy=\frac{2pdp}{1+p^{2}}.$$

Поскольку $dy=y'dx$, а значит, $dx=\dfrac{dy}{y'}$ из (*) можно записать:

$$dx=\frac{2dp}{1+p^{2}} \qquad \Rightarrow \qquad x=2\int\frac{dp}{1+p^{2}}.$$

Полученный интеграл является табличным. После его нахождения записывается общее решение в параметрической форме:

$$\begin{cases} y=\ln\left|1+p^{2}\right|, \\ x=2\,arctg\,p+C. \end{cases}$$

Если из 2-го уравнения выразить p и подставить в 1-е, решение может быть записано в обычной форме:

$$y=\ln\left|1+tg^{2}\frac{x-C}{2}\right|.$$

Уравнение имеет и особое решение: $y=0$.

– – – – – – – –

Задание 3. *Найти общее решение уравнения Лагранжа.*

Уравнения Лагранжа относятся к уравнениям первого порядка, не разрешенным относительно производной, но линейно связывающим аргумент и функцию:

$$y=x\varphi(y')+\psi(y') \quad , \qquad (+)$$

где $\varphi(y')\neq y'$.

Решаются данные уравнения в неявной или явной параметрической форме. В качестве параметра выбирается значение производной:

$$y' = p\,. \qquad (++)$$

В результате, из исходного уравнения сразу можно записать первую часть неявного параметрического решения:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p)\,. \qquad (+++)$$

Для нахождения второй его части, т.е. зависимости $x(p)$ производится дифференцирование (+++) по аргументу x с последующим решением полученного линейного уравнения, в котором x является функцией, а p – аргументом:

$$p = \varphi(p) + x\frac{d\varphi(p)}{dp}\frac{dp}{dx} + \frac{d\psi(p)}{dp}\frac{dp}{dx}\,, \qquad (++++)$$

$$\left[p - \varphi(p)\right]\frac{dx}{dp} = x\frac{d\varphi(p)}{dp} + \frac{d\psi(p)}{dp}\,.$$

Если решением последнего уравнения является функция $x = \chi(p, C)$, то общее решение в неявной параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p), \\ x = \chi(p, C). \end{cases} \qquad (+++++)$$

Замечание 1. Иногда из системы (3) удается исключить параметр p и получить решение в виде общего интеграла

$$F(x, y, C) = 0\,.$$

Замечание 2. Решение уравнения Лагранжа может быть записано в явной параметрической форме в результате подстановки $x = \chi(p, C)$ в уравнение $y = x\varphi(p) + \psi(p)$. Однако полученное выражение зачастую является очень громоздким. Поэтому часто ограничиваются решением в виде (+++++).

Замечание 3. Рассматриваемые уравнения могут иметь особые решения при значениях p_i, являющихся решениями равенства

$$p - \varphi(p) = 0\,.$$

При этом особые решения будут иметь вид:

$$y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)\,.$$

а) $y = x + y'^{\,3}$

Решение. Дифференцируем уравнение по аргументу x:

$$y' = 1 + 3y'^2\,\frac{d\left(y'\right)}{dx}\,.$$

производим замену: $y' = p$. Тогда

$$p = 1 + 3p^2\frac{dp}{dx}\,,$$

$$p - 1 = 3p^2\frac{dp}{dx} \qquad (*)$$

Полученное уравнение не содержит x и интегрируется разделением переменных:

$$(p-1)dx = 3p^2 dp,$$

$$\int dx = \int \frac{3p^2}{p-1} dp,$$

$$x = 3\int \frac{p^2 - p + p - 1 + 1}{p-1} dp = 3\left[\int \frac{p^2 - p}{p-1} dp + \int \frac{p-1}{p-1} dp + \int \frac{dp}{p-1} \right],$$

$$x = 3\left(\frac{p^2}{2} + p + \ln|p-1| \right) + C$$

Подставляем полученное уравнение в исходное (где тоже произведём замену $y' = p$) и совместно с ним получаем общее решение в параметрической форме:

$$\begin{cases} y = 3\left(\frac{p^2}{2} + p + \ln|p-1| \right) + p^3 + C, \\ x = 3\left(\frac{p^2}{2} + p + \ln|p-1| \right) + C. \end{cases}$$

Замечание. С помощью уравнения (*) можно найти и *особое* решение. Действительно, если $\frac{dp}{dx} = 0$, то

$$p-1=0 \quad \Rightarrow \quad p=1.$$

При этом из исходного уравнения следует особое решение:

$$y = x+1.$$

При выполнении контрольной работы нахождение особого решения не обязательно.

– – – – – – – –

б) $2yy' = x(y'^2 + 4)$.

Решение. Вначале придадим уравнению канонический вид:

$$y = x\left(\frac{y'}{2} + \frac{2}{y'} \right).$$

Таким образом, мы действительно получили уравнение Лагранжа, поскольку функция прямо пропорциональна аргументу, и коэффициент пропорциональности является функцией от y'. Производим замену:

$$y' = p.$$

Тогда $$y = x\left(\frac{p}{2} + \frac{2}{p} \right) \qquad (*)$$

или $$y = \frac{x}{2}\left(\frac{p^2 + 4}{p} \right).$$

Дифференцируем уравнение по x. При этом следует учесть, что в правой части мы имеем дело с производной от произведения:

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2+4}{p}\right) + \frac{1}{2}x\left(\frac{p^2+4}{p}\right)' .$$

Учтем, что $y' = p$, а p является функцией от x, поэтому $\left(p^2\right)' = 2pp'$. Тогда

$$p = \frac{p^2+4}{2p} + \frac{1}{2}x\frac{\left(p^2+4\right)' p - p'\left(p^2+4\right)}{p^2},$$

$$p - \frac{p^2+4}{2p} = x\frac{2p'p^2 - p'p^2 - 4p'}{2p^2},$$

$$\frac{p^2-4}{2p} = \frac{xp'}{p}\left(\frac{p^2-4}{2p}\right).$$

Сокращая на множитель $\frac{p^2-4}{2p}$ (с помощью которого мы чуть ниже получим особое решение), приходим к простому уравнению:

$$1 = \frac{xp'}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрирование дает:

$$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln p = \ln x + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln p = \ln Cx ,$$

откуда $$p = Cx.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (*), приходим к общему решению:

$$y = x\left(\frac{Cx}{2} + \frac{2}{Cx}\right)$$

или $$y = C_1x^2 + \frac{1}{C_1}.$$

(Здесь использована новая константа $C_1 = \frac{C}{2}$).

Из условия $p^2 - 4 = 0$, которое следует учитывать после сокращения на множитель $\frac{p^2-4}{2p}$, из уравнения (*) находим особые решения:

$$p = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2x$$

– – – – – – – –

Вопросы экзаменационных билетов осеннего семестра

1. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Пример.
2. Дифференциальные уравнения, приводимые к однородным. Пример.
3. Обобщенные однородные уравнения. Пример.
4. Линейные дифференциальные уравнения: метод Бернулли. Пример.
5. Линейные дифференциальные уравнения: метод Лагранжа. Пример.
6. Уравнение Бернулли: решение подстановкой. Пример.
7. Уравнения Риккати вида $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$: подстановка $y = y_1 + \frac{1}{z}$. Пример.
8. Уравнения Риккати вида $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$: подстановка $y = y_1 + z$. Пример.
9. Уравнения Риккати вида $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$: подстановка $z = \frac{y}{x}$. Пример.
10. Специальное уравнение Риккати. Пример.
11. Уравнения в полных дифференциалах. Пример.
12. Интегрирующий множитель. Использование интегрирующего множителя для преобразования заданного уравнения в уравнение в полных дифференциалах. Случай $\mu = \mu(x)$. Пример.
13. Интегрирующий множитель. Использование интегрирующего множителя для преобразования заданного уравнения в уравнение в полных дифференциалах. Случай $\mu = \mu(y)$. Пример.
14. Уравнение 1-го порядка, не разрешенные относительно производной и не содержащее искомой функции и аргумента. Пример.
15. Уравнение 1-го порядка, не разрешенные относительно производной и не содержащее искомой функции. Пример.
16. Уравнение 1-го порядка, не разрешенные относительно производной и не содержащее аргумента. Пример.
17. Уравнения Лагранжа и Клеро. Примеры.

Дополнительные вопросы к билетам осеннего семестра

1. Задача Коши
2. Что называют общим решением дифференциального уравнения
3. Что называют частным решением дифференциального уравнения
4. Что называют особым решением дифференциального уравнения
5. Уравнение в полных дифференциалах (вид и необходимое условие)
6. Понятие интегрирующего множителя
7. Отгадать, к какому виду относится заданное преподавателем уравнение, и указать способ нахождения его общего решения:
    - с разделенными переменными,
    - с разделяющимися переменными,
    - линейного,
    - однородного,
    - приводимого к однородному,
    - Бернулли,
    - Риккати, если задано одно частное решение,
    - уравнения вида $y = F(x, y')$ и $x = F(y, y')$,
    - уравнение Лагранжа,
    - уравнение Клеро.

ВЕСЕННИЙ СЕМЕСТР

ПРИМЕРЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа № 1

Задание 1. Найти общее решение уравнения первого порядка вида $F(x, y, y') = 0$*, разрешимого относительно производной.*

$$a)\ \ xy'^2 + 2xy' - y = 0, \qquad б)\ \ y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy = 0\,.$$

Задание 2. Найти общее решение уравнения первого порядка вида $F(x, y, y') = 0$*, разрешимого относительно функции или аргумента.*

$$a)\ \ y' = e^{\frac{xy'}{y}}, \qquad б)\ \ y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}\,.$$

Задание 3. Непосредственным интегрированием найти частное решение уравнения высших порядков, допускающего понижение порядка.

$$а)\ \ y''' = \frac{24}{(x+2)^5}\,,\ \text{если}\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2,\ \ y''(0) = -1\,,$$

$$б)\ \ y''' = \sin^2 2x\,,\ \text{если}\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = \frac{1}{32},\ \ y''(0) = 0$$

Контрольная работа № 2

Задание 1. Найти частное (пример а) или общее (пример б) решение уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка и не содержащего аргумента.

$$а)\ \ 1 + y'^2 = 2yy'', \qquad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1\,,$$

$$б)\ \ yy'' = y^2y' + y'^2$$

Задание 2. Найти частное (пример а) или общее (пример б) решение уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка и не содержащего искомой функции.

$$a)\ \ xy'' + y' + x = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

$$б)\ \ x = y'' + e^{y''}.$$

Задание 3. Найти общее решение однородного уравнения второго порядка.

$$а)\ \ yy'' = y'^2 + 6xy^2\,, \qquad б)\ \ 2yy'' - 3y'^2 = 4y^2\,.$$

Контрольная работа № 3

Задание 1. Найти общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.

$$а)\ \ y''' - 3y' - 2y = 0\,, \qquad б)\ \ y^{(5)} + 9y''' = 0\,,$$

в) $y^{(4)} - 6y'' + 9y = 0$.

Задание 2. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

а) $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$,

б) $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8\cos 2x$.

Задание 3. Методом Лагранжа найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

а) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$, *б)* $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Контрольная работа № 4

Задание 1. Найти общее решение неоднородного уравнения Эйлера.

а) $x^2 y'' - xy' + y = x^3 \ln x$, *б)* $x^2 y'' + xy' - \dfrac{1}{4} y = \sin \ln x$,

Задание 2. Методом последовательных приближений найти общее решение дифференциального уравнения.

а) Найти второе приближение частного решения уравнения $y' = 1 + x\sin y$, *если* $y(\pi) = 2\pi$,

б) Найти третье приближение частного решения уравнения $y' = x - y^2$, *если* $y(0) = 0$.

Задание 3. Решить нормальную систему уравнений.

а) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} x' = 3x + y + e^t, \\ y' = x + 3y - 2e^t. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРОВ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа № 1

Задание 1. *Найти общее решение (или общий интеграл) уравнения первого порядка вида* $F(x, y, y') = 0$*, не разрешенного относительно производной.*

В различных вариантах контрольной работы в данном задании встречается 2 типа уравнений, не разрешенных, но разрешимых относительно производной. В первом случае эти уравнения являются квадратичными относительно производной, а значит, имеют 2 решения, которые находятся с помощью дискриминанта. Во втором случае для нахождения производной необходима группировка слагаемых, входящих в уравнение, с последующим вынесением общего множителя. При этом можно получить совокупность простых уравнений, разрешенных относительно производной (их тоже не может быть менее двух), интегрирование которых дает совокупность общих решений.

а) $\quad xy'^2 + 2xy' - y = 0.$

Решение. Данное уравнение рассматриваем, как квадратное относительно y'. Корнями этого уравнения, которые можно найти с помощью дискриминанта D, являются две функции:

$$D = 4x^2 + 4xy,$$

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + xy}}{x} = -1 + \sqrt{1 + \frac{y}{x}}, \tag{*}$$

и

$$y' = \frac{-x - \sqrt{x^2 + xy}}{x} = -1 - \sqrt{1 + \frac{y}{x}}. \tag{**}$$

Таким образом, имеем два однородных уравнения, определённых в области $x(x + y) > 0.$ Решим первое из них.

Пусть
$$u = \frac{y}{x}, \quad y = ux, \quad y' = u'x + u.$$

Тогда
$$u'x + u = -1 + \sqrt{1 + u},$$

$$\frac{du}{(u+1) - \sqrt{u+1}} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{u+1}(\sqrt{u+1} - 1)} = -\frac{dx}{x},$$

$$\frac{2d(\sqrt{u+1})}{\sqrt{u+1} - 1} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, имеем:
$$2\ln\left|\sqrt{u+1} - 1\right| = -\ln|x| + \ln C$$

или
$$\left(\sqrt{u+1} - 1\right)^2 = \frac{C}{x}.$$

Следовательно,

$$\left(\sqrt{\frac{y}{x}+1}-1\right)^2=\frac{C}{x}$$

– общий интеграл однородного дифференциального уравнения (*).

Аналогично, $$\left(\sqrt{\frac{y}{x}+1}+1\right)^2=\frac{C}{x}$$

– общий интеграл однородного дифференциального уравнения (**).
Полученные интегралы перепишем в виде

$$2x+y+C-2\sqrt{x^2+xy}=0,$$

и $$2x+y+C+2\sqrt{x^2+xy}=0.$$

Перемножая, приходим к общему интегралу исходного уравнения:

$$(2x+y-C)^2-4(x^2+xy)=0$$

или $$(y-C)^2=4Cx \quad \text{(семейство парабол).}$$

– – – – – – – –

б) $y'^3-xy'^2-4yy'+4xy=0$

Решение. Группируем первое слагаемое со вторым, третье – с четвертым:

$$y'^2(y'-x)-4y(y'-x)=0\,,$$

$$(y'-x)(y'^2-4y)=0\,.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} y'=x, \\ y'=2\sqrt{y}, \\ y'=-\,2\sqrt{y}, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \int dy=\int xdx, \\ \int \dfrac{dy}{2\sqrt{y}}=\int dx, \\ \int \dfrac{dy}{2\sqrt{y}}=-\int dx, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2}{2}+C, \\ \sqrt{y}=x+C, \\ \sqrt{y}=-x+C, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2}{2}+C, \\ y=(x+C)^2, \\ y=(-x+C)^2. \end{array}\right.$$

Второе и третье решения полученной совокупности равносильны. Действительно, если заменить C на $-C$, из третьего выражения непосредственно следует второе. Таким образом, окончательно следует записать:

$$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2}{2}+C, \\ y=(x+C)^2. \end{array}\right.$$

– – – – – – – –

Задание 2. Уравнения, *разрешимые* (или *разрешенные*) относительно функции или аргумента, как правило, интегрируются в параметрической форме. В обоих случаях в качестве параметра выбирают значение производной ($y' = p$).

Рассмотрим уравнение

$$y = F(x, y').$$

Считаем $p = p(x)$. Тогда полученное уравнение

$$y = F(x, p) \qquad (+)$$

будет являться частью искомого решения в неявной параметрической форме. Дифференцируем (+) по *x*. В результате, получаем уравнение $p = F(x, p')$, которое является разрешимым относительно производной $\dfrac{dp}{dx}$ (или $\dfrac{dx}{dp}$). Его интегрирование с учетом (+) позволяет записать общее решение в неявной параметрической форме:

$$\begin{cases} y = F(x, p), \\ \Phi(x, p, C) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = F(x, p), \\ p = \varphi(x, C). \end{cases}$$

Подстановка второго уравнения последней системы в первое позволяет общее решение в обычной форме.

Сходная последовательность математических преобразований используется и для решения уравнений, разрешимых относительно аргумента:

$$x = F(y, y'),$$

$$x = F(y, p). \qquad (++)$$

Однако на этот раз параметр p считается зависящим от функции *y*: $p = p(y)$.

Далее следует дифференцирование уравнения (++) по y :

$$\frac{1}{p} = F(y, p').$$

Это уравнение разрешимо относительно производной $\dfrac{dp}{dy}$ (или $\dfrac{dy}{dp}$). Его интегрирование с учетом (++) дает общее решение в неявной параметрической форме:

$$\begin{cases} x = F(y, p), \\ \Phi(y, p, C) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = F(y, p), \\ p = \varphi(y, C). \end{cases}$$

Из второй системы можно исключить параметр и получить общее решение в обычной форме.

Уравнения вида $F(x, y, y') = 0$ могут сопровождаться *особыми* решениями. Как правило, они появляются при наличии сократимых множителей, содержащих параметр *p*. Приравнивая такие множители нулю, находят значения параметра. Особые решения получаются после подстановки этих значений в уравнения (+) или (++).

а) $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$.

Решение. Данное уравнение разрешимо относительно аргумента:

$$x = \frac{y \ln y'}{y'} . \qquad (*)$$

Введем параметр $y' = p = p(y)$. Тогда из (*) следует:

$$x = \frac{y \ln p}{p} . \qquad (**)$$

Дифференцируем (**) по y (производная частного):

$$\frac{1}{p} = \frac{p \ln p + p'y - p'y \ln p}{p^2} ,$$

откуда $$p(1 - \ln p) = p'y(1 - \ln p) .$$

Сокращая на множитель $(1 - \ln p)$, (***)

приходим к простому уравнению

$$p = \frac{dp}{dy} y \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} .$$

После интегрирования получаем: $p = Cy$. Подстановка данного выражения в (**) дает общее решение в обычной форме:

$$x = \frac{\ln Cy}{C} \quad \text{или} \quad y = \frac{e^{Cx}}{C} .$$

Приравнивая нулю сокращенный множитель (***), находим частное значение параметра: $p = e$. Его подстановка в (**) дает особое решение:

$$y = ex .$$

б) $y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$

Решение. Данное уравнение разрешено относительно искомой функции. Делая подстановку $y' = p,$ перепишем исходное уравнение в виде:

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}. \qquad (*)$$

Дифференцируя по x и считая p функцией от x , имеем:

$$p = 2p\frac{dp}{dx} - p - x\frac{dp}{dx} + x ,$$

$$\frac{dp}{dx}(2p - x) = (2p - x) . \qquad (**)$$

После сокращения на $(2p - x)$ приходим к простому уравнению:

$$\frac{dp}{dx}=1\,.$$

Интегрируя, получим: $p=x+C\,.$

Подставляя p в уравнение ($*$), приходим к общему решению:

$$y=(x+C)^2-x(x+C)+\frac{x^2}{2}$$

или

$$y=\frac{x^2}{2}+Cx+C^2.$$

Однако, сокращая на $(2p-x)$, мы тем самым теряем еще одно решение, если оно не следует из общего ни при каких значениях C.

Итак, если $2p-x=0\,,$

то уравнение (**) обращается в тождество, т.е. функция

$$p=\frac{x}{2}$$

является его решением. При этом из уравнения ($*$) следует:

$$y=\frac{x^2}{4}\,.$$

Данное решение является *особым*.

Задание 3. *Непосредственным интегрированием найти частное решение уравнения высших порядков, допускающего понижение порядка*

В данном задании студенту предлагается подтвердить его знания элементарных правил интегрирования и прочувствовать возможность путем снижения порядка уравнения привести его к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. Такие уравнения решаются только последовательным интегрированием. Целесообразно производить вычисление констант интегрирования после каждого шага понижения порядка уравнения. для этого используется соответствующее начальное условие.

а) $y'''=\dfrac{24}{(x+2)^5}$, если $y(0)=1,\ \ y'(0)=2,\ \ y''(0)=-1\,.$

Решение. Понижаем порядок уравнения:

$$\frac{d}{dx}(y'')=\frac{24}{(x+2)^5}\quad\Rightarrow\quad\int d\,(y'')=24\int\frac{dx}{(x+2)^5}\,,$$

$$y''=-\frac{6}{(x+2)^4}+C_1\,.$$

С помощью 3-го начального условия определяем константу C_1:

$$-1=-\frac{6}{16}+C_1\quad\Rightarrow\quad C_1=-\frac{5}{8}.$$

Тогда $$y'' = -\frac{6}{(x+2)^4} - \frac{5}{8}.$$

Понижая порядок данного уравнения, получим:

$$y' = -6\int \frac{dx}{(x+2)^4} - \frac{5}{8}\int dx\,,$$

$$y' = \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{5}{8}x + C_2\,.$$

Используя второе начальное условие, находим C_2:

$$2 = \frac{1}{4} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{7}{4}.$$

Следовательно,

$$y' = -\frac{2}{(x+2)^3} - \frac{5}{8}x + \frac{7}{4}\,.$$

Интегрируем данное уравнение:

$$y = 2\int \frac{dx}{(x+2)^3} - \frac{5}{8}\int x dx + \frac{7}{4}\int dx\,,$$

$$y = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{5}{16}x^2 + \frac{7}{4}x + C_3.$$

Из первого начального условия находим C_3:

$$1 = -\frac{1}{4} + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{5}{4}.$$

Тогда окончательно

$$y = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{5}{16}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{5}{4}\,.$$

– – – – – – – –

б) $y''' = \sin^2 2x$, если $y(0) = 0,\ \ y'(0) = \dfrac{1}{32},\ \ y''(0) = 0$.

Решение. Понижаем порядок уравнения:

$$\frac{d}{dx}(y'') = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad \int d(y'') = \int \sin 2x dx\,,$$

$$y'' = \int \frac{1-cos4x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int cos4x d(4x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x + C_1\,.$$

С помощью 3-го начального условия определяем константу C_1:

$$0 = 0 - 0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

Тогда $$y'' = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x.$$

Понижая порядок данного уравнения, получим:

$$y' = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\int \sin 4x d(4x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{32}cos4x + C_2\,.$$

Используя второе начальное условие, находим C_2:

$$\frac{1}{32}=0+\frac{1}{32}+C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2=0.$$

Следовательно, $$y'=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{32}cos4x .$$

Интегрируем данное уравнение:

$$y=\frac{1}{4}\int x^2dx-\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{4}\int\cos 4xd(4x)=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{128}\sin 4x+C_3 .$$

Из первого начального условия находим C_3 :

$$0=0+0+C_3 \quad\Rightarrow\quad C_3=0.$$

Тогда окончательно

$$y=\frac{x^3}{12}+\frac{\sin 4x}{128} .$$

– – – – – – – –

Контрольная работа № 2

Задание 1. *Найти частное (пример а) или общее (пример б) решение уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка и не содержащего аргумента.*

Данные уравнения приводятся к уравнениям первого порядка подстановкой $y'=p=p(y)$. Тогда

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}=pp' .$$

Получившееся в результате уравнение первого порядка решается известными способами. При этом общее решение может иметь и параметрическую форму.

а) $1+y'^2=2yy''$, $\qquad y(1)=1, \qquad y'(1)=1$

Решение. Данное уравнение не содержит x. Полагаем $y'=p$, считая функцию p *зависящей от* y , т.е. $p=p(y)$. Тогда

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}=pp'$$

и после подстановки y и y' в исходное уравнение получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными для функции p , аргументом которой является y :

$$1+p^2=2ypp',$$

$$\frac{1+p^2}{p}=2y\frac{dp}{dy} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{y}=\frac{2pdp}{1+p^2}.$$

Интегрируя, приходим к уравнению

$$\ln|y| + \ln C_1 = \ln(1+p^2)\,,$$

откуда $$C_1 y = 1 + p^2.$$

Из второго начального условия ($y' = p = 1$ при $x = 1$) определяем первую константу:

$$C_1 = 2.$$

Тогда

$$2y = 1 + p^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2y - 1 \quad \Rightarrow \quad p = \pm\sqrt{2y-1},$$

а так как $y' = p,$ то

$$y' = \pm\sqrt{2y-1} \qquad \text{или} \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{2y-1}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\pm\frac{1}{2}\int\frac{2dy}{\sqrt{2y-1}} = \int dx,$$

$$\pm\frac{1}{2}\int\left(2y-1\right)^{-1/2} d\left(2y-1\right) = x + C_2,$$

$$\pm\sqrt{2y-1} = x + C_2\,.$$

После возведения уравнения в квадрат можно получить общее решение:

$$y = \frac{1}{2}\left((x+C_2)^2 + 1\right)$$

Используя первое начальное условие ($y = 1$ при $x = 1$), определим константу C_2 :

$$1 = \frac{1}{2}\left((1+C_2)^2 + 1\right), \qquad \text{а значит,} \qquad C_2 = 0.$$

В результате, можно определить частное решение исходного уравнения:

$$y = \frac{1}{2}(x^2 + 1).$$

– – – – – – – –

б) $yy'' = y^2 y' + y'^2$

Решение. Как и в предыдущем примере, уравнение не содержит x. Вновь полагаем $y' = p$, считая функцию p зависящей от y , т.е. $p = p(y)$. Тогда $y'' = pp'$. После подстановки y'' и y' в исходное уравнение получим первого порядка с аргументом y:

$$yp'p = y^2 p + p^2\,.$$

Сокращая на $p,$ получаем линейное уравнение:

$$yp' = y^2 + p\,.$$

В каноническом виде оно будет выглядеть следующим образом:

$$p' - \frac{p}{y} = y\,. \qquad (*)$$

Для решения воспользуемся методом Бернулли:

$$p = u\upsilon\,, \qquad p' = u'\upsilon + u\upsilon'\,. \qquad (**)$$

Подставляя p и p' в исходное уравнение, получим:

$$u'\upsilon + u\upsilon' - \frac{u\upsilon}{y} = 1\,,$$

$$u'\upsilon + u\left(\upsilon' - \frac{\upsilon}{y}\right) = 1\,. \qquad (***)$$

Выбираем v так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю:

$$\upsilon' - \frac{\upsilon}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon}{dy} = \frac{\upsilon}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \frac{dy}{y}\,.$$

Поскольку в качестве υ можно взять любое из частных решений, после интегрирования выберем такое, для которого константа интегрирования равна нулю, что приведет к соотношению

$$\upsilon = y\,. \qquad (****)$$

Подставляя найденное значение υ в уравнение (***) и учитывая, что в этом уравнении выражение в скобках равно нулю, приходим к уравнению для u:

$$u'y = 1\,.$$

Тогда

$$\frac{du}{dy}y = 1 \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad u = \int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad u = \ln|y| + \ln C_1\,.$$

В результате, из (**) и (****) для положительных значений y следует:

$$p = y \ln C_1 y\,.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = y \ln C_1 y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y \ln C_1 y \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{y \ln C_1 y}\,.$$

Интегрирование производим введением неизвестного под знак дифференциала:

$$x = \int \frac{dy}{y \ln C_1 y} = \int \frac{d(\ln y)}{\ln C_1 y} = \frac{1}{C_1} \int \frac{d(\ln C_1 y)}{\ln C_1 y} = \frac{1}{C_1} \ln|\ln C_1 y| + C\,.$$

Решение можно записать в более компактной форме, если константу C представить в виде

$$C = \frac{1}{C_1} \ln C_2\,.$$

Тогда

$$x = \frac{1}{C_1} \ln|\ln C_1 y| + \frac{1}{C_1} \ln C_2$$

и окончательно

$$x = \frac{1}{C_1} \ln C_2 |\ln C_1 y|\,.$$

Задание 2. *Найти частное (пример а) или общее (пример б) решение уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка и не содержащего искомой функции.*

Данные уравнения, как и в предыдущем случае, также приводятся к уравнениям первого порядка подстановкой $y' = p$. Однако на этот раз функция p считается зависящей от аргумента: $p = p(x)$. Тогда

$$y'' = \frac{dp}{dx} = p'$$

и мы получаем уравнение первого порядка. Если же уравнение не содержит еще и производную y' и разрешимо относительно аргумента (пример *б*), то наиболее простым подходом является использование параметрической формы.

а) $xy'' + y' + x = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

Решение. Данное уравнение не содержит явно y. Полагая $y' = p$ и считая функцию p зависящей от x, имеем:

$$y'' = p'.$$

В результате, исходное уравнение приобретает вид:

$$xp' + p + x = 0.$$

Решим это уравнение как *линейное* относительно функции p. Согласно методу Бернулли

$$p = uv, \tag{*}$$

а значит, $p' = u'v + uv'$. Тогда

$$x(u'v + uv') + uv + x = 0,$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} + 1 = 0$$

или

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) + 1 = 0. \tag{**}$$

Выбираем функцию v так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю, и находим v:

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -\ln|x|,$$

$$v = \frac{1}{x}. \tag{***}$$

Вернёмся к уравнению (**), учитывая найденное выражение для v и равенство нулю выражения в скобках

$$u'v + 1 = 0,$$

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx} = -1 \quad \Rightarrow \quad du = -xdx,$$

$$u=-\frac{x^2}{2}+C_1.$$

Тогда из (*) и (***) $\qquad p=\frac{1}{x}\left(C_1-\frac{x^2}{2}\right)$

или $\qquad px=C_1-\frac{x^2}{2}.$

Из второго начального условия ($y'=p=0$ при $x=0$) имеем: $C_1=0.$ Следовательно,

$$p=-\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad dy=-\frac{x}{2}dx,$$

откуда, интегрируя, получаем:

$$y=-\frac{x^2}{4}+C_2.$$

Полагая (в соответствии с первым начальным условием) $y=0$ при $x=0,$ находим: $C_2=0.$ Следовательно, искомое частное решение есть

$$y=-\frac{1}{4}x^2.$$

– – – – – – – –

б) Найти общее решение уравнения

$$x=y''+e^{y''}.$$

Решение. Уравнение не содержит y и y'. будем искать решение в параметрической форме. Полагая $y''=p$, из исходного уравнения можно получить:

$$x=p+e^p. \tag{*}$$

Тогда

$$dx=\left(1+e^p\right)dp. \tag{**}$$

Из соотношения $y''=\frac{dy'}{dx}$ следует $dy'=y''dx$, а значит с учетом (**)

$$y'=\int y''dx=\int p\left(e^p+1\right)dp.$$

полученный интеграл берется по частям:

$$u=p, \quad dv=1+e^p, \quad du=dp, \quad v=p+e^p.$$

Тогда

$$y'=\int p\left(e^p+1\right)dp=p(p+e^p)-\int(p+e^p)dp=p^2+pe^p-\frac{p^2}{2}-e^p$$

$$=(p-1)e^p+\frac{p^2}{2}+C_1.$$

Находим y: $\qquad y=\int y'dx=$

$$y=\int y'dx=\int\left[(p-1)e^{p}+\frac{p^{2}}{2}+C_1\right]\left(e^{p}+1\right)dp=$$

$$=\int\left[(p-1)e^{2p}+\left(\frac{p^{2}}{2}+p-1+C_1\right)e^{p}+\frac{p^{2}}{2}+C_1\right]dp+C_2\ ,$$

Опуская громоздкие вычисления (первый из четырех полученных интегралов берется по частям, второй – дважды по частям), с учетом (*) запишем окончательный результат:

$$\begin{cases} y=\left(\dfrac{p}{2}-\dfrac{3}{4}\right)e^{2p}+\left(\dfrac{p^{2}}{2}-1+C_1\right)e^{t}+\dfrac{p^{3}}{6}+C_1p+C_2, \\ x=p+e^{p}. \end{cases}$$

– – – – – – – –

Задание 3. *Найти общее решение однородного уравнения второго порядка.*

Выполнение данного задания начинается с проверки, является ли данное уравнение однородным. Для этого используется замена

$$y\ \Rightarrow\ ty,\qquad y'\ \Rightarrow\ ty',\qquad y''\ \Rightarrow\ ty''.$$

Полученное уравнение после сокращения на t должно совпадать с исходным. После этого используется подстановка

$$z=\frac{y'}{y}\qquad\Rightarrow\qquad y'=zy\ .$$

а) $yy''=y'^{2}+6xy^{2}$.

Решение. Сделаем в исходном уравнении следующие замены:

$$y\ \Rightarrow\ ty,\qquad y'\ \Rightarrow\ ty',\qquad y''\ \Rightarrow\ ty''.$$

Получим:
$$ty\cdot ty''=(ty')^{2}+6x(ty)^{2},$$
$$t^{2}yy''=t^{2}\left(y'^{2}+6xy^{2}\right).$$

Таким образом, уравнение является однородным, и степень однородности равна двум. Вводим новую переменную:

$$z=\frac{y'}{y}\qquad\Rightarrow\qquad y'=zy\ .$$

Тогда
$$y''=z'y+zy'=z'y+z^{2}y=y(z'+z^{2})\ .$$

Подставляем y' и y'' в заданное уравнение и находим z :

$$y\cdot y(z'+z^{2})=z^{2}y^{2}+6xy^{2},$$
$$z'+z^{2}=z^{2}+6x,$$
$$z'=6x.$$

Отсюда
$$z=3x^{2}+C_1\,.$$

Возвращаемся к исходной функции:

$$\frac{y'}{y}=3x^2+C_1 \qquad \Rightarrow \qquad \int\frac{dy}{y}=\int\left(3x^2+C_1\right)dx .$$

Интегрирование дает:

$$\ln y = x^3+C_1x+\ln C_2$$

или
$$y=C_2\,e^{x^3+C_1x} .$$

Исходя из вида заданного уравнения, можно утверждать, что решение $y=0$ является особым, т.к. оно не следует из общего ни при каких допустимых значениях C_1 и C_2 (при интегрировании подразумевалось, что $C_2\neq 0$).

– – – – – – – –

б) $2yy''-3y'^2=4y^2$.

Решение. Совершенно очевидно, что степень однородности равна двум, поэтому сразу приступаем к решению по изложенной выше схеме. Вводим новую переменную посредством замены:

$$z=\frac{y'}{y} \qquad \Rightarrow \qquad y'=zy \qquad \Rightarrow \qquad y''=y(z'+z^2) .$$

Тогда заданное уравнение приобретает вид:

$$2y\cdot y(z'+z^2)-3z^2y^2=4y^2 .$$

После сокращения на y^2 приходим к уравнению с разделяющимися переменными:

$$2z'+2z^2-3z^2=4,$$

$$2\frac{dz}{dx}=z^2+4,$$

$$2\frac{dz}{z^2+4}=dx.$$

Интегрируем:
$$2\int\frac{dz}{z^2+4}=\int dx,$$

$$arctg\,\frac{z}{2}=x+C_1,$$

$$z=2tg\left(x+C_1\right).$$

Вернемся к исходной функции y :

$$\frac{y'}{y}=2tg\left(x+C_1\right).$$

Следовательно, мы имеем дело с уравнением:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2tg\left(x+C_1\right).$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dy}{y}=2\int tg\left(x+C_1\right)d\left(x+C_1\right),$$

$$\ln\left|\,y\,\right|=-2\ln\left|\cos\left(x+C_1\right)\right|+\ln C_2.$$

Тогда $$\ln|y| = \ln\frac{C_2}{\cos^2(x+C_1)},$$

откуда следует окончательное решение:

$$y = \frac{C_2}{\cos^2(x+C_1)}.$$

Как и в предыдущем примере, заданное уравнение имеет особое решение $y=0$, т.к. $C_2 \neq 0$.

– – – – – – – –

Контрольная работа № 3

Задание 1. *Найти общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.*

Все уравнения указанного типа решаются с помощью характеристических уравнений. Вид общего решения зависит от вида его корней:

а) каждому действительному однократному корню k соответствует частное решение e^{kx};

б) каждому действительному корню k кратности r соответствует r линейно независимых частных решений

$$e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2e^{kx},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{kx};$$

в) каждой паре комплексных сопряженных однократных корней

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

соответствуют два частных решения

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

г) каждой паре комплексных сопряженных корней

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

кратности r соответствует $2r$ частных решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots,\quad x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\text{и} \qquad e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \ldots,\quad x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

В каждом случае число частных решений будет равно степени характеристического уравнения (т.е. порядку n линейного дифференциального уравнения).

д) Найдя n линейно независимых частных решений $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$, строим общее решение данного линейного уравнения:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ – произвольные постоянные.

а) $y''' - 3y' - 2y = 0$.

Решение. Записываем характеристическое уравнение:

$$k^3 - 3k - 2 = 0\,.$$

Корни данного кубического уравнения можно найти по схеме Горнера или (проще) подбором одного корня с последующим делением полиномов. Нетрудно убедиться, что одним из корней является:

$$k_1 = 2.$$

разделим левую часть характеристического уравнения на множитель $(k-2)$:

$$\begin{array}{r|l} k^3 - 3k - 2 & \underline{k-2} \\ -\underline{k^3 - 2k^2} & k^2 + 2k + 1 \\ -\,2k^2 - 3k & \\ \underline{2k^2 - 4k} & \\ -\,k - 2 & \\ \underline{k - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Приравнивая нулю полученное частное находим оставшийся корень, который оказывается кратным:

$$k_2 = k_3 = 2.$$

В результате, общее решение записывается в виде:

$$y = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)e^{-x}$$

– общее решение исходного дифференциального уравнения.

– – – – – – – –

б) $y^{(4)} - 6y'' + 9y = 0\,.$

Решение. Записываем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$k^4 - 6k^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k^2 - 3)^2 = 0;$$

$k_1 = \sqrt{3}$ – действительный корень кратности 2,

$k_2 = -\sqrt{3}$ – действительный корень кратности 2.

Записываем общее решение:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\sqrt{3}x} + (C_3 + C_4 x)e^{-\sqrt{3}x}\,.$$

– – – – – – – –

в) $y^{(5)} + 9y''' = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^5 + 9k^3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k^3(k^2 + 9) = 0\,.$$

Тогда $k_1 = 0$ – действительный корень кратности $r = 3$; $k_{2,3} = \pm 3i$ – комплексно сопряженные корни. Записываем общее решение:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x \,.$$

– – – – – – – –

Задание 2. *Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.*

В данном задании предлагается решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (уравнение с правой частью) с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (+)$$

или

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)\,, \qquad (++)$$

где p и q – постоянные действительные числа, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$ – функции различного вида:

– полином n - ой степени $P_n(x)$,

– экспонента $e^{\alpha x}$,

– тригонометрический полином $A\cos\omega x + B\sin\omega x$.

Рассмотрим уравнение (+).

Если y^* – есть какое-либо *частно*е решение этого уравнения, а

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

– общее решение сопровождающего его однородного уравнения, то их сумма

$$y = \bar{y} + y^*$$

или

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$$

– есть *общее* решение неоднородного дифференциального уравнения (+).

Напомним правила, в соответствии с которыми определяется вид частного решения y^* в зависимости от вида функции в правой части.

<u>*Правило 1.*</u> Для уравнения

$$y'' + py' + qy = P_n(x),$$

справедливо: $$y^* = \begin{cases} Q_n(x), & \textit{если} \quad q \neq 0, \\ xQ_n(x), & \textit{если} \quad q = 0, \quad p \neq 0, \\ x^2 Q_n(x), & \textit{если} \quad q = p = 0. \end{cases}$$

В качестве полинома $Q_n(x)$ необходимо использовать многочлен с неопределенными коэффициентами, которые находятся после подстановки y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в заданное уравнение.

<u>*Правило 2.*</u> Для уравнения

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}$$

справедливо:

$$y^* = \begin{cases} e^{\alpha x} Q_n(x), & \text{если } \alpha \text{ − не корень характеристического уравнения,} \\ e^{\alpha x} x Q_n(x), & \text{если } \alpha \text{ − простой корень характеристического уравнения,} \\ e^{\alpha x} x^2 Q_n(x), & \text{если } \alpha \text{ − двойной корень характеристического уравнения.} \end{cases}$$

Конкретный вид полинома $Q_n(x)$ определяется способом, аналогичным *Правилу 1.*

<u>*Правило 3.*</u> Для уравнения

$$y'' + py' + qy = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

справедливо:

$$y^* = \begin{cases} a\cos\omega x + b\sin\omega x, & \text{если } \omega i \text{ − не корень характеристического уравнения,} \\ x(a\cos\omega x + b\sin\omega x), & \text{если } \omega i \text{ − корень характеристического уравнения.} \end{cases}$$

Числа a и b определяются после подстановки y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в заданное уравнение.

Рассмотрим уравнение (++).

Согласно принципу наложения общим решением уравнения (++) является функция

$$y = \bar{y} + y_1^* + y_2^*,$$

где $\bar{y}$ – общее решение сопровождающего однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0,$$

y_1^* – частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x),$$

y_2^* – частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_2(x).$$

Таким образом, необходимо решить 3 уравнения. Первое (однородное) решается с помощью характеристических чисел (см. задание 1), а для решения второго и третьего следует действовать по приводимой ниже стандартной схеме.

а) $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

Решение. Общее решение данного уравнения

$$y = \bar{y} + y_1^* + y_2^*,$$

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (без правой части), а y_1^* и y_2^* – частные решения уравнений

$$y'' - 5y' = 3x^2 \qquad (*)$$

и

$$y'' - 5y' = \sin 5x, \qquad (**)$$

имеющих одно и тоже характеристическое уравнение $k^2 - 5k = 0$. Его корни –

$k_1 = 0$ и $k_2 = 5$, а значит,

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{5x}.$$

Найдем частное решение y_1^* уравнения ($*$). Т.к. в правой части мы имеем полином второго порядка и при этом 0 (т.е. степень экспоненты правой части) является корнем характеристического уравнения, то решение будем искать в виде $y_1^* = x(Ax^2 + Bx + C)$. Находим производные:

$$y_1^{*\prime} = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y_1^{*\prime\prime} = 6Ax + 2B.$$

Подставим $y_1^{*\prime}$ и $y_1^{*\prime\prime}$ в уравнение ($*$),:

$$6Ax + 2B - 15Ax^2 - 10Bx - 5C = 3x^2,$$

$$-15Ax^2 + x(6A - 10B) + 2B - 5C = 3x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x правой и левой части последнего уравнения, получим систему:

$$\begin{aligned} x^2 &: -15A = 3, \\ x &: 6A - 10B = 0, \\ x &: 2B - 5C = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $A = -\dfrac{1}{5}$, $B = -\dfrac{3}{25}$, $C = -\dfrac{6}{25}$, а значит,

$$y_1^* = -0,2x^3 - 0,12x^2 - 0,048x.$$

Теперь найдем частное решение y_2^* уравнения ($**$). Т.к. $i\beta = 5i$ не является корнем характеристического уравнения (β – коэффициент аргумента синуса или косинуса правой части), то решение y_2^* будем искать в виде

$$y_2^* = A\cos 5x + B\sin 5x.$$

Тогда $$y_2^{*\prime} = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$$

и $$y_2^{*\prime\prime} = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x.$$

Подставляя $y_2^{*\prime}$ и $y_2^{*\prime\prime}$ в ($**$), получим

$$-25A\cos 5x - 25B\sin 5x + 25A\sin 5x - 25B\cos 5x = \sin 5x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 5x$ и $\cos 5x$ в левой и правой частях равенства, получим систему

$$\begin{cases} -25B + 25A = 1, \\ -25A - 25B = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0,02, \\ B = -0,02. \end{cases}$$

$$y_2 = 0,02(\cos 5x - \sin 5x).$$

Таким образом, общее решение $y = \bar{y} + y_1^* + y_2^*$ исходного уравнения есть

$$y = C_1 + C_2 e^{5x} - 0,2x^3 - 0,12x^2 - 0,048x + 0,02(\cos 5x - \sin 5x).$$

– – – – – – – –

б) $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8\cos 2x$.

Решение. Продемонстрируем решение, слегка отличающееся по структуре от только что приведенного.

Правая часть заданного уравнения равна сумме двух функций:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = e^x, \qquad f_2(x) = -8\cos 2x.$$

Тогда согласно принципу наложения общее решение имеет вид:

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^*,$$

где $\overline{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а y_1^* и y_2^* – частные решения, отвечающие функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ правой части.

1) Характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k - 8 = 0$$

имеет своими корнями $k_1 = 4$ и $k_2 = -2$.

Это означает, что $\overline{y} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$.

2) Рассматриваем уравнение

$$y'' - 2y' - 8y = e^x. \qquad (*)$$

3) Частное решение y_1^* будем искать в виде

$$y_1^* = Ae^x.$$

При этом $y_1^{*\prime} = y_1^{*\prime\prime} = Ae^x$.

Подставляя y_1^*, $y_1^{*\prime}$, $y_1^{*\prime\prime}$ в левую часть уравнения (*)

$$y'' - 2y' - 8y = e^x,$$

получим $Ae^x - 2Ae^x - 8Ae^x = e^x$,

откуда $A = -\dfrac{1}{9}$ и $y_1^* = -\dfrac{1}{9}e^x. \qquad (**)$

4) Частное решение y_2^* будем искать в виде

$$y_2^* = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

Тогда

$$y_2^{*\prime} = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x,$$

$$y_2^{*\prime\prime} = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x.$$

На этот раз, подставляя y_2^*, $y_2^{*\prime}$, $y_2^{*\prime\prime}$ в левую часть заданного уравнения

$$y'' - 2y' - 8y = -8\cos 2x,$$

получим:

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 4A\cos 2x + 4B\sin 2x - 8A\sin 2x - 8B\cos 2x = -8\cos 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях равенства, имеем:

$$\begin{cases} -12A+4B=0, \\ -4A-12B=-8. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $A=\dfrac{1}{5}$, $B=\dfrac{3}{5}$,

и значит, $$y_2^*=\frac{1}{5}\sin 2x+\frac{3}{5}\cos 2x . \qquad (***)$$

Общее решение исходного уравнения с учетом (*), (**) и (***) запишется в виде суммы найденных решений:

$$y=C_1e^{4x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{9}e^x+\frac{1}{5}(\sin 2x+3\cos 2x).$$

– – – – – – –

Задание 3. *Методом Лагранжа найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Метод Лагранжа используется для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad (+)$$

с любой функцией в правой части. Общее решение (+) можно записать в виде суммы

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2 ,$$

где y_1 и y_2 – частные решения однородного уравнения

$$y''+py'+qy=0 . \qquad (++)$$

$C_1(x)$ и $C_2(x)$ – варьируемые постоянные, значения которых находятся из системы уравнений для производных:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0, \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x). \end{cases} \qquad (+++)$$

В данном З*адании 3* приведены уравнения с простой правой частью, которые для проверки предлагается решить обычным способом, который применялся в *Задании 2*.

а) $y''-3y'+2y=e^{3x}$

Решение. Решаем однородное уравнение

$$y''-3y'+2y=0 .$$

Из характеристического уравнения

$$k^2-3k+2=0$$

находим: $k_1 = 1, \quad k_2 = 2$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Тогда общее решение заданного уравнения можно найти из соотношения

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}. \qquad (*)$$

Это означает: $y_1 = e^x, \;\; y_2 = e^{2x}$.

Для составления системы (+++) находим: $y_1' = e^x, \;\; y_2' = 2e^{2x}$.

В результате, система (+++) приобретает вид:

$$\begin{cases} C_1{}'(x)e^x + C_2{}'(x)e^{2x} = 0, \\ C_1{}'(x)e^x + 2C_2{}'(x)e^{2x} = e^{3x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1{}'(x) = -C_2{}'(x)e^x, \\ C_2{}'(x) = e^x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1{}'(x) = -e^{2x}, \\ C_2{}'(x) = e^x. \end{cases}$$

Интегрируя, находим значения варьируемых постоянных:

$$\begin{cases} C_1(x) = -\int e^{2x}dx + C_1, \\ C_2(x) = \int e^x dx + C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + C_1, \\ C_2(x) = e^x + C_2. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения в соотношение (*), получаем общее решение

$$y = \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)e^x + (e^x + C_2)e^{2x},$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}.$$

– – – – – – – –

б) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решение. Из характеристического уравнения

$$k^2 + 1 = 0$$

находим: $k_{1,2} = \pm i$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\bar{y} = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Тогда общее решение заданного уравнения можно найти из соотношения

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x. \qquad (*)$$

Это означает: $y_1 = \cos x, \;\; y_2 = \sin x$.

Для составления системы (+++) находим: $y_1' = -\sin x, \;\; y_2' = \cos x$.

В результате, система (+++) приобретает вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)e^x, \\ C_2'(x) = e^x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -tgx, \\ C_2'(x) = 1. \end{cases}$$

Интегрируя, находим значения варьируемых постоянных:

$$\begin{cases} C_1(x) = -\int tgx dx + C_1, \\ C_2(x) = \int dx + C_2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1(x) = \ln|\cos x| + C_1, \\ C_2(x) = x + C_2. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения в соотношение (*), получаем общее решение

$$y = \left(\ln|\cos x| + C_1\right)\cos x + (x + C_2)\sin x,$$

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + cosx\ln|\cos x| + x\sin x\ .$$

– – – – – – – –

Контрольная работа № 4

Задание 1. *Найти общее решение неоднородного уравнения Эйлера.*

Уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + p_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = f(x)\ , \qquad (+)$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – постоянные числа, называется неоднородным уравнением Эйлера.

Для данного вида уравнений в соответствии с теоремой об общем решении общее решение следует искать в виде

$$y = \bar{y} + y^*\ ,$$

где $\bar{y}$ – общее решение сопровождающего однородного уравнения

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + p_2 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0, \qquad (++)$$

а вид частного решения y^* зависит от вида функции $f(x)$.

Заменой аргумента

$$x = e^t \quad \Leftrightarrow \quad t = \ln x \qquad (+++)$$

данные уравнения приводятся к обычным линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. При этом производные по аргументу *x* преобразуются в производные по *t:*

$$xy'_x = y'_t\ , \quad x^2 y''_x = y''_t - y'_t\ , \quad x^3 y'''_x = y'''_t - 3y''_t + 2y'_t, \ \ldots$$

После такой замены функция $\bar{y} = \bar{y}(t)$ находится по методике, рассмотренной при анализе *Задания 1 Контрольной работы №3*. Замена (+++) преобразует уравнение (+) к виду, описанному в преамбуле к *Заданию 2* той же контрольной работы. При этом частные решения могут быть найдены для следующих видов функции $f(x)$:

1. $f(x)=x^{\alpha}$ – после замены получим $f(t)=e^{\alpha t}$,

2. $f(x)=P_n(\ln x)$ – после замены получим $f(t)=P_n(t)$,

3. $f(x)=x^{\alpha}P_n(\ln x)$ – после замены получим $f(t)=e^{\alpha t}P_n(t)$,

4. $f(x)=T(\beta\ln x)=A\cos(\beta\ln x)+B\sin(\beta\ln x)$ – после замены получим $f(t)=A\cos\beta t+B\sin\beta t$.

При нахождении y^* следует учитывать все рассмотренные варианты совпадения корней характеристического уравнения, полученного после рекомендованной замены аргумента.

а) $x^2y''-xy'+y=x^3\ln x$.

Решение. Производим необходимые подстановки:

$$x=e^t \quad \Leftrightarrow \quad t=\ln x, \qquad (*)$$

$$x^2y''_x=y''_t-y'_t\,, \qquad xy'_x=y'_t.$$

Тогда исходное уравнение приобретает вид:

$$y''-2y'+y=te^{3t}.$$

В соответствии с теорией $\quad y=\bar{y}+y^*. \qquad (**)$

Корень характеристического уравнения

$$k^2-2k+1=0$$

кратный: $k_1=k_2=1$. Записываем общее решение сопровождающего однородного уравнения:

$$\bar{y}=(C_1+C_2t)e^t. \qquad (***)$$

Так как коэффициент показателя экспоненты $\alpha=3$ не является корнем характеристического уравнения, то

$$y^*=(at+b)e^{3t}.$$

Отсюда $\quad (y^*)'=3(at+b)e^{3t}+ae^{3t},$

$$(y^*)''=9(at+b)e^{3t}+6ae^{3t}.$$

Подстановка выражений в уравнение после сокращения на e^{3t} дает:

$$9(at+b)+6a-2\left[3(at+b)+a\right]+at+b=t,$$

т.е. $\quad 4(at+b)+4a=t.$

Приравнивая численные коэффициенты левой и правой части, находим:

$$a=\frac{1}{4},\quad b=-\frac{1}{4}.$$

Тогда $\quad y^*=\frac{e^{3t}}{4}(t-1).$

С учетом (**) и (***) записываем общее решение для функции с аргументом t:

$$y = e^t (C_1 + C_2 t) + \frac{e^{3t}}{4}(t-1).$$

После возвращения с помощью (*) к аргументу x окончательно получаем:

$$y = x(C_1 + C_2 \ln x) + \frac{x^3}{4}(\ln x - 1).$$

– – – – – – – –

б) $x^2 y'' + xy' - \frac{1}{4} y = \sin \ln x$

Решение. После замены:

$$x = e^t \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \ln x, \tag{*}$$

$$x^2 y''_x = y''_t - y'_t\ , \qquad xy'_x = y'_t$$

исходное уравнение приобретает вид:

$$y''_t - y'_t + y'_t - \frac{1}{4} y = \sin t,$$

$$y''_t - \frac{1}{4} y = \sin t. \qquad \textbf{(**)}$$

Общее решение находим по формуле

$$y = \bar{y} + y^*. \qquad (***)$$

Решение характеристического уравнения

$$k^2 - \frac{1}{4} = 0$$

дает два корня: $k_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. Записываем общее решение $\bar{y}$:

$$\bar{y} = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{-t/2}. \qquad (****)$$

Частное решение y^* записываем в виде тригонометрического полинома:

$$y^* = A\cos t + B\sin t.$$

Тогда $$y^{*\prime} = -A\sin t + B\cos t$$

и $$y^{*\prime\prime} = -A\cos t - B\sin t.$$

Подставляя y^* и $y^{*\prime\prime}$ в $(**)$, получим

$$-A\cos t - B\sin t - \frac{1}{4}A\cos t - \frac{1}{4}B\sin t = \sin t,$$

$$-\frac{5}{4}A\cos t - \frac{5}{4}B\sin t = \sin t$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin t$ и $\cos t$ в левой и правой частях равенства, получим: $A = 0$; $B = -0{,}8$.

$$y^* = -0{,}8\sin t.$$

В соответствии с (***) и (****) записываем общее решение (**):

$$y = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{-t/2} - 0,8\sin t \ .$$

С помощью (*) возвращаемся к аргументу x :

$$y = C_1\sqrt{x} + \frac{C_2}{\sqrt{x}} - 0,8\sin\ln x \, .$$

– – – – – – – –

Задание 2. *Методом последовательных приближений найти общее решение дифференциального уравнения.*

С помощью данного метода находится приближенное частное решение уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

при заданном начальном условии $y(x_0) = y_0$. Суть метода состоит в построении некоторой последовательности функций $y_n(x)$, которая сходится к искомому частному решению $y = y(x)$ указанного уравнения. За нулевое приближение принимается значение y_0. Для нахождения *n*-го приближения используется рекуррентная формула:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_{n-1}(x)\right)dx \ . \qquad (+)$$

При выполнении данного задания можно ограничиться нахождением второго или третьего приближения.

а) Найти второе приближение частного решения уравнения $y' = 1 + x\sin y$, если $y(\pi) = 2\pi$.

Решение. По условию $y_0 = 2\pi$. В соответствии с формулой (+)

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_0(x)\right)dx \ .$$

С учетом начального условия

$$y_1(x) = 2\pi + \int_{\pi}^{x}(1 + x\sin 2\pi)dx = 2\pi + \int_{\pi}^{x} dx = 2\pi + x - \pi = \pi + x \ .$$

В соответствии с (+) $\qquad y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_1(x)\right)dx \ .$

С помощью начального условия и найденного значения $y_1(x)$ находим:

$$y_2(x) = 2\pi + \int_{\pi}^{x} (1 + x\sin y_1(x))dx = 2\pi + \int_{\pi}^{x} (1 + x\sin(x+\pi))dx =$$

$$= 2\pi + \int_{\pi}^{x} (1 - x\sin x)dx = 2\pi + x\Big|_{\pi}^{x} - \int_{\pi}^{x} x\sin x dx .$$

Оставшийся интеграл берется по частям

$$(u = x,\ dv = \sin x dx \quad \Rightarrow \quad du = dx,\ v = -\cos x) .$$

Тогда

$$y_2(x) = 2\pi + x - \pi + x\cos x\Big|_{\pi}^{x} + \int_{\pi}^{x} \cos x dx = \pi + x + x\cos x - \pi\cos\pi - \sin x\Big|_{\pi}^{x}$$

$$= 2\pi + x + x\cos x - \sin x + \sin\pi$$

И окончательно $\qquad y_2(x) = 2\pi + x + x\cos x - \sin x .$

б) Найти третье приближение частного решения уравнения $y' = x - y^2$, если $y(0) = 0$.

Решение. По условию $y_0 = 0$. В соответствии с формулой (+)

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))dx .$$

Тогда для первого приближения справедливо

$$y_1(x) = \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2} .$$

Второе приближение:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx ,$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(x - \frac{x^4}{4} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} .$$

Наконец, третье приближение:

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2(x))dx ,$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left[x - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} \right)^2 \right] dx = \int_0^x \left(x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{20} - \frac{x^{10}}{400} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400} .$$

– – – – – – –

Задание 3. *Решить нормальную систему уравнений.*

В различных вариантах контрольной работы могут содержаться однородные или неоднородные системы. Наиболее просто такие системы решаются методом подстановки. При этом необходимо дифференцирование одного из уравнений и две подстановки. В результате задача сводится к решению линейного однородного или неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

а) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$

Решение. Аргументом функций x и y считаем переменную t. Первое уравнение системы продифференцируем по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}. \qquad (*)$$

Подставим в (*) из второго уравнения системы значение производной

$$\frac{dy}{dt} = x + 2y.$$

Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + x + 2y. \qquad (**)$$

Из первого уравнения системы выражаем y:

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x, \qquad (***)$$

– и подставляем в (**):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + x + 2\left(\frac{dx}{dt} - 2x\right)$$

или

$$x'' - 4x' + 3x = 0.$$

Получили линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 3 = 0,$$

корнями которого являются $k_1 = 3, \quad k_2 = 1,$

а значит, общее решение –

$$x = C_1e^{3t} + C_2e^t. \qquad (****)$$

Данное соотношение является частью искомого итогового решения.

Дифференцируя (****) по t, получаем:

$$\frac{dx}{dt} = 3C_1e^{3t} + C_2e^t.$$

Тогда из (***) можно найти y:

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x = 3C_1e^{3t} + C_2e^t - 2C_1e^{2t} - 2C_2e^t$$

или

$$y = C_1 e^{3t} - C_2 e^t.$$

Добавив соотношение (****), приходим к общему решению системы:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^t, \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^t. \end{cases}$$

– – – – – – – –

б) $\begin{cases} x' = 3x + y + e^t, \\ y' = x + 3y - 2e^t. \end{cases}$

Решение. Данная система содержит неоднородные уравнения. Первое уравнение продифференцируем по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + e^t. \qquad (*)$$

Подставим $\frac{dy}{dt} = x + 3y - 2e^t$ из второго уравнения системы в уравнение (*). Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + x + 3y - e^t. \qquad (**)$$

Из первого уравнения системы выражаем y:

$$y = \frac{dx}{dt} - 3x - e^t. \qquad (***)$$

Подстановка полученного соотношения в (**) дает:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + x + 3\left(\frac{dx}{dt} - 3x - e^t\right) - e^t$$

или

$$x'' - 6x' + 8x = -4e^t. \qquad (****)$$

Получено линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение последнего уравнения

$$x = \overline{x} + x^*,$$

где $\bar{x}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (без правой части), а x^* - частное решение заданного уравнения. Рассмотрим однородное уравнение

$$x'' - 6x' + 8x = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 8 = 0$ имеет действительные корни: $k_1 = 4,\quad k_2 = 2$, и поэтому

$$\bar{x} = C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t}.$$

Найдем частное решение уравнения (****). В правой части мы имеем функцию $f(x) = -4e^{t}$, причем, совпадений с корнями характеристического уравнения нет. Поэтому частное решение x^* будем искать в виде:

$$x^* = Ae^t.$$

Находим производные:

$$x^{*\prime} = Ae^t, \qquad x^{*\prime\prime} = Ae^t.$$

Подставив в (****) выражения для $x^*,\ x^{*\prime},\ x^{*\prime\prime}$, получим:

$$Ae^t - 6Ae^t + 8Ae^t = -4e^t.$$

Сократив обе части последнего равенства на e^t, находим:

$$A = -\frac{4}{3}.$$

Тогда частное решение имеет вид: $x^* = -\dfrac{4}{3}e^t.$

После этого можно записать и общее решение уравнения (****):

$$x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} - \frac{4}{3}e^t.$$

Для того чтобы получить выражение для второй искомой функции $ó$, находим производную

$$\frac{dx}{dt} = 4C_1 e^{4t} + 2C_2 e^{2t} - \frac{4}{3}e^t.$$

Тогда из (***) следует:

$$y = C_1 e^{4t} - C_2 e^{2t} + \frac{5}{3}e^t.$$

Итак, $$\begin{cases} x = C_1e^{4t} + C_2e^{2t} - \dfrac{4}{3}e^t, \\ y = C_1e^{4t} - C_2e^{2t} + \dfrac{5}{3}e^t \end{cases}$$ –

искомое общее решение заданной системы.

– – – – – – – –

Вопросы экзаменационных билетов весеннего семестра

1. Решение уравнений вида $F(x, y, y') = 0$, разрешимых относительно производной. Пример.
2. Решение уравнений вида $F(x, y, y') = 0$, разрешимых относительно аргумента. Пример.
3. Решение уравнений вида $F(x, y, y') = 0$, разрешимых относительно функции. Пример.
4. Уравнения первого порядка n-ой степени. Пример.
5. Решение уравнения $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ в случае, если функция F является точной производной. Пример
6. Решение уравнений вида $F(y, y', y'') = 0$ и $F(x, y', y'') = 0$. Примеры
7. Решение уравнений вида $y^{(n)} = f(x)$ и $F(x, y^{(n)}) = 0$. Примеры
8. Решение уравнений вида $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$ и $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$. Примеры
9. Уравнения высших порядков, однородные относительно функции и ее производных и уравнения, содержащие точную производную. Пример
10. Теоремы о решениях линейных однородных дифференциальных уравнений (теоремы о свойствах $L[Cy]$, $L[y_1 + y_2]$, $L[U(x) + iV(x)]$)
11. Теоремы о вронскиане линейно зависимых функций и вронскиане линейно независимых решений уравнения $L[y] = 0$
12. Теорема об общем решении линейных однородных дифференциальных уравнений и ее следствия
13. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами Примеры
14. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: правая часть – тригонометрический полином. Пример
15. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: правая часть – функция $P_n(x)e^{\alpha x}$. Пример
16. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: принцип наложения. Пример
17. Однородное уравнение Эйлера. Пример
18. Неоднородное уравнение Эйлера. Пример
19. Метод Лагранжа для линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами: правая часть – функция произвольного вида. Пример

20. Формула Остроградского – Лиувилля и ее применение для решения линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с произвольными коэффициентами. Пример
21. Краевые задачи. Функция Грина и ее свойства
22. Решение систем дифференциальных уравнений методом подстановки. Пример
23. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение
24. Системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
25. Системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и специальным видом правой части
26. Решение дифференциальных уравнений непосредственной подстановкой функции и ее производных в виде рядов в заданное уравнение. Пример
27. Решение дифференциальных уравнений методом нахождения значений коэффициентов ряда Маклорена. Пример
28. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка. Метод характеристик. Пример

Дополнительные вопросы к экзаменационным билетам

1. Отгадать, к какому виду относится заданное преподавателем уравнение, и указать способ нахождения его общего решения:

- Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$.
- Уравнение вида $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$.
- Уравнение вида $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$.
- Линейное однородное высшего порядка с постоянными коэффициентами.
- Линейное неоднородное высшего порядка с постоянными коэффициентами.
- Уравнение вида $F(y'', y', x) = 0$.
- Уравнение вида $F(y'', y', y) = 0$.
- Уравнение Эйлера.
- Указать вид частного решения линейное неоднородное уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами при различных видах функции в правой части

2. Суть метода вариации произвольной постоянной для решения ЛнеОДУ 2-го порядка.
3. Линейный дифференциальный оператор и его свойства.
4. Определитель Вронского (для чего?)
5. Теорема об общем решении линейных однородных дифференциальных уравнений.
6. Суть метода Лагранжа для линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

7. Формула Остроградского – Лиувилля.
8. Суть метода решения дифференциальных уравнений непосредственной подстановкой функции в виде ряда и ее производных в заданное уравнение.
9. Суть метода решения дифференциальных уравнений нахождением значений коэффициентов ряда Маклорена.
10. Суть метода подстановки для решения систем дифференциальных уравнений.
11. Решение систем линейных однородных дифференциальных уравнений с помощью характеристического уравнения.
12. Решение систем линейных неоднородных дифференциальных уравнений с помощью характеристического уравнения (метод Лагранжа).
13. Решение систем линейных неоднородных дифференциальных уравнений с помощью характеристического уравнения (метод неопределенных коэффициентов).
14. Название сдаваемого предмета, фамилия, имя, отчество преподавателя

ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ РАБОТ

1. Приложения дифференциальных уравнений в механике
2. Приложения дифференциальных уравнений в электродинамике
3. Виды нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка
4. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной
5. Интегральные кривые
6. Уравнения первого порядка n-ой степени
7. Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка с помощью рядов
8. Замена переменной при решении различных типов дифференциальных уравнений
9. Линейные однородные дифференциальные уравнения п - го порядка с постоянными коэффициентами
10. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения п - го порядка с постоянными коэффициентами
11. Линейные однородные дифференциальные уравнения п - го порядка с постоянными коэффициентами
12. Метод изоклин
13. Теорема Коши-Пикара
14. Применение линейных дифференциальных уравнений в механике
15. Уравнения Бесселя

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1963.
2. Школьник А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1963.
3. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 1965.
4. Виленкин Н.Я. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984.
5. Гутер Р.С. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1976.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1953.
7. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. ФКП. – М.: Высшая школа, 1989.
8. Богданов Ю.С. и др. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1996.
9. Пономарев К.К. Специальный курс высшей математики. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1974.
10. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980.
11. Пискунов Н.С. Дифференциальные и интегральные исчисления. Для втузов. Т. 1 (окончание). Т. 2 (начало). – М.: Просвещение, 1982.
12. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990.
13. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис, 1996.
14. Матвеев М.Н. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Л.: Высшая школа, 1960.
15. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Просвещение, 1972.
16. Задачи и упражнения по математическому анализу. Для втузов / Под ред. Б.Д. Демидовича. – М.: Просвещение, 1970.
17. Шипачев В.С. Задачи по высшей математике. – М.: Высшая школа, 1997.
18. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1964.
19. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. – М.: Высшая школа, 1989.
20. Доброхотова М.А. и др. Задачник- практикум по математическому анализу. Ряды. Дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 1967.
21. Сборник задач по курсу высшей математике / Под ред. Г.И. Кручковича. – М.: Просвещение, 1973.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И МАТЕРИАЛЫ, РАЗРАБОТАННЫЕ ПРЕПОДАВАТЕЛЯМИ ПГУ

1. Баренгольц Ю.А., Чуйко Л.В. Дифференциальные уравнения: некоторые аналитические и численные методы решения. – Бендеры, ООО РВТ, 2005, 44с.
2. Баренгольц Ю.А., Фокша Е.М., Чуйко Л.В. Варианты контрольной работы по курсу «Дифференциальные уравнения». Методическое пособие для студентов-заочников ФМФ. – Бендеры, ООО РВТ, 2005, 28с.
3. Баренгольц Ю.А., Чуйко Л.В. Дифференциальные уравнения. Методические указания о выполнении контрольной работы. – Бендеры, ООО РВТ, 2008, 46 с.
4. Баренгольц Ю.А., Панченко И.Ф. Дифференциальные уравнения. Конспект лекций для заочного отделения. Часть I: Дифференциальные уравнения первого порядка. – Тирасполь, 2008, 63 с.
5. Баренгольц Ю.А., Панченко И.Ф., Чуйко Л.В. Дифференциальные уравнения. Конспект избранных лекций для студентов заочного отделения. Часть II: Дифференциальные уравнения высших порядков. –Тирасполь, 2008, 64 с.

ЛИТЕРАТУРА ЭЛЕКТРОННОЙ БИБЛИОТЕКИ УНИВЕРСИТЕТА

1. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения (djvu, 719 p., 9251 KB, 12.9 KB/p., Russian, OCR, color)
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения (djvu, 368 p., 2559 KB, 7.0 KB/p., Russian, color)
3. Арнольд В.И., Ю.С.Ильяшенко Обыкновенные дифференциальные уравнения (djvu, 149 p., 1413 KB, 9.5 KB/p., Russian, color)
4. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений (djvu, 303 p., 3323 KB, 11.0 KB/p., Russian, OCR, color)
5. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление (djvu, 424 p., 4816 KB, 11.4 KB/p., Russian, OCR)
6. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения(600дпи) [2е изд., Наука, 1985] (djvu, 448 p., 10984 KB, 24.5 KB/p., Russian, OCR, cleaned)
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям (djvu, 176 p., 1339 KB, 7.6 KB/p., Russian, OCR, color)
8. Карташев, Рождественский Обыкновенные дифференциальные уравнения [2е изд., Наука, 1979] (djvu, 288 p., 3460 KB, 12.0 KB/p., Russian)
9. Коддингтон Э.А., Н.Левинсон Теория обыкновенных дифференциальных уравнений (djvu, 475 p., 4346 KB, 9.1 KB/p., Russian, color)
10. Куренский Дифференциальные уравнения [1934] (djvu, 334 p., 4873 KB, 14.6 KB/p., landscape, Russian)
11. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [7-е изд., МГУ, 1984] (djvu, 296 p., 2084 KB, 7.0 KB/p., Russian)
12. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения (djvu, 331 p., 4016 KB, 12.1 KB/p., Russian, color)
13. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, том 1 (djvu, 346 p., 4468 KB, 12.9 KB/p., Russian, OCR, color)

14. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, том 2 (djvu, 414 p., 4143 KB, 10.0 KB/p., Russian)
15. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений (djvu, 473 p., 7163 KB, 15.1 KB/p., Russian, OCR)
16. Тихонов А.Н., А.Б.Васильева, А.Г.Свешников Дифференциальные уравнения (djvu, 231 p., 3081 KB, 13.3 KB/p., Russian, OCR, color)
17. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения [ИЛ, 1962] (djvu, 352 p., 4827 KB, 13.7 KB/p., Russian)

Учебное издание

Контрольные работы по дифференциальным уравнениям
(направление подготовки «Прикладная математика»)
Составители:
Юрий Александрович Баренгольц
Ольга Юрьевна Баренгольц
Римма Леонидовна Косиева

Формат 60x84/16. Уч.-изд. л. 4,25
Электронное издание