

ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г.ШЕВЧЕНКО

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа и приложений

Интегралы, зависящие от параметра

Учебно-методическое пособие

г. Тирасполь – 2016

УДК 517.3(075.8)
ББК В161.22я73
И73

Составитель:

С.А. Алещенко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и приложений ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Рецензенты:

Г.И. Ворническу, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и приложений ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Г.Н. Ермакова, кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Интегралы, зависящие от параметра: Учебно-методическое пособие / Составитель: С.А. Алещенко – Тирасполь, 2016. – 94 с. – Электронный вариант.

Пособие предназначено для студентов II-V курсов физико-математического факультета ПГУ им. Т.Г. Шевченко и содержит полное изложение основных теорем для собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра, вывод классических несобственных интегралов, эйлеровы интегралы и их свойства. Будет полезно студентам при подготовке к экзаменационной сессии.

Учебно-методическое пособие будет полезно преподавателям и студентам всех специальностей физико-математического факультета.

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко.

© С.А. Алещенко, составление 2016

Литература

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1999. – 695 с.
2. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Ч. II. – М.: Высшая школа, 2000. – 712 с.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
4. Дороговцев А.Я. Математический анализ. – Киев: Вища школа, 1985. – 528 с.
5. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. II. – М.: Наука, 1984. – 640 с.
6. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Ч. II. – М.: изд. МГУ, 1987. – 358 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т. II. – М.: Высшая школа, 1973. – 470 с.
8. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Т. 3. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 472 с.
9. Ляшко И.И. и др. Математический анализ в примерах и задачах, ч.2. – Киев: Вища школа, 1977. – 672 с.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. – М.: Наука, 1962. – 807 с.

Оглавление

Введение.....	4
§1. Собственные интегралы, зависящие от параметра.....	5
§2. Предельный переход под знаком собственного интеграла.....	13
§3. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.....	21
§4. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра.....	30
§5. Интегралы Фруллани	43
§6. Интеграл Дирихле	47
§7. Интеграл Эйлера-Пуассона.....	52
§8. Интеграл Лапласа	56
§9. Интегралы Френеля.....	61
§10. Эйлеровы интегралы	72
Литература	94

Введение

Интегралы, зависящие от параметра, – одна из глав математического анализа, изучению которой в основном курсе математического анализа уделяется мало внимания. Это связано с уменьшением общего числа часов для математического анализа и недостаточной подготовкой студентов к полноценному восприятию данного раздела на первом и втором году обучения.

Вместе с тем глава «Интегралы, зависящие от параметра» является неотъемлемой частью математического образования, целью которого является не только изучение математических дисциплин и формирование способности к интенсивной научно-исследовательской работе, но и воспитание научной ответственности за свои личные научные рассуждения и исследования. Только в разделе «Интегралы, зависящие от параметра» можно изучить возможность предельного перехода под знаком собственного и несобственного интеграла, дифференцирования и интегрирования по параметру собственного и несобственного интеграла, т.е. определить достаточные условия, при которых справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{\omega} f(x, y) dx &= \int_a^{\omega} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx, \\ \frac{d}{dy} \left(\int_a^{\omega} f(x, y) dx \right) &= \int_a^{\omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx, \\ \int_c^{\omega_2} \left[\int_a^{\omega_1} f(x, y) dx \right] dy &= \int_a^{\omega_1} \left[\int_c^{\omega_2} f(x, y) dy \right] dx.\end{aligned}$$

В главе «Интегралы, зависящие от параметра» можно изучить строгий вывод значений классических несобственных интегралов, зависящих от параметра, – интегралов Дирихле, Эйлера-Пуассона, Лапласа, Френеля, Фруллани. Также математический аппарат главы «Интегралы, зависящие от параметра» позволяет провести строгое исследование свойств гамма-функции и бета-функции Эйлера в области действительных значений параметров.

Учебное пособие «Интегралы, зависящие от параметра» предназначено для студентов математических специальностей бакалавриата и магистратуры в рамках изучения дисциплин «Математический анализ» и «Дополнительные главы математического анализа». Пособие может быть полезно для студентов других специальностей, а также преподавателей, которые желают углубить свои знания в области математического анализа.

$$M_2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega x}{2}} dx$$

сходится;

3) существует повторный несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} dy \right] dx = \Gamma(\alpha + \beta) \cdot B(\alpha, \beta).$$

Значит, по теореме 4.8 имеет место равенство

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha + \beta) \cdot B(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} dy \right] dx = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} dx \right] dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-y} \left[\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-xy} dx \right] dy = \int_0^{+\infty} y^{\beta-1} e^{-y} \left[y^{\alpha} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-xy} dx \right] dy.\end{aligned}$$

Заметим, что функция

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

после замены в интеграле может быть представлена в виде

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \left| \begin{matrix} t = xy \\ dt = y dx \end{matrix} \right| = \int_0^{+\infty} (xy)^{\alpha-1} e^{-xy} y dx = y^{\alpha} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-xy} dx,$$

откуда следует

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha + \beta) \cdot B(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} y^{\beta-1} e^{-y} \cdot \left[y^{\alpha} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-xy} dx \right] dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{\beta-1} e^{-y} \cdot \Gamma(\alpha) dy = \Gamma(\alpha) \cdot \int_0^{+\infty} y^{\beta-1} e^{-y} dy = \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta),\end{aligned}$$

т.е. справедливо равенство

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \blacksquare$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+\beta) \cdot B(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} \left[(1+x)^{\alpha+\beta} \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} dy \right] \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx = \\ &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \left[\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} dy \right] dx = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} dy \right] dx.\end{aligned}$$

Заметим, что полученный повторный интеграл удовлетворяет следующим условиям:

1) для любых $0 < \varepsilon < E < +\infty$ несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} dy$$

сходится равномерно по параметру x на отрезке $[\varepsilon, E]$ по признаку Вейерштрасса, поскольку существует такое число $M_1 > 0$, что для всех $x \in [\varepsilon, E]$ и $y > 0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}x^{\alpha-1} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} &\leq \max\{\varepsilon^{\alpha-1}, E^{\alpha-1}\} y^{\alpha+\beta-1} e^{-y} = \\ &= \max\{\varepsilon^{\alpha-1}, E^{\alpha-1}\} \left(y^{\alpha+\beta-1} e^{-\frac{y}{2}} \right) e^{-\frac{y}{2}} \leq M_1 \cdot e^{-\frac{y}{2}},\end{aligned}$$

а несобственный интеграл

$$M_1 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}} dy$$

сходится;

2) для любых $0 < \omega < \Omega < +\infty$ несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} dx$$

сходится равномерно по параметру y на отрезке $[\omega, \Omega]$ по признаку Вейерштрасса, поскольку существует такое число $M_2 > 0$, что для всех $y \in [\omega, \Omega]$ и $x > 0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}x^{\alpha-1} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} &\leq \max\{\omega^{\alpha+\beta-1}, \Omega^{\alpha+\beta-1}\} x^{\alpha-1} e^{-xy} \leq \max\{\omega^{\alpha+\beta-1}, \Omega^{\alpha+\beta-1}\} x^{\alpha-1} e^{-\omega x} = \\ &= \max\{\omega^{\alpha+\beta-1}, \Omega^{\alpha+\beta-1}\} \left(x^{\alpha-1} e^{-\frac{\omega x}{2}} \right) e^{-\frac{\omega x}{2}} \leq M_2 \cdot e^{-\frac{\omega x}{2}},\end{aligned}$$

и несобственный интеграл

§1. Собственные интегралы, зависящие от параметра.

Пусть Y – некоторое множество действительных чисел, $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ – две функции, определённые на множестве Y , при чём $\varphi(y) \leq \psi(y)$ для каждого $y \in Y$.

Определение 1.1. Если функция $f(x, y)$ определена на множестве $\{(x, y) | y \in Y, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$ и интегрируема по Риману по переменной x на отрезке $[\varphi(y), \psi(y)]$ для каждого $y \in Y$, то интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

называют собственными интегралами, зависящими от параметра, а переменная y называется параметром.

Чаще встречается частный случай такого типа интегралов, когда функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ постоянны, т.е. интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

где параметр y пробегает множество $Y = [c, d]$.

Установим некоторые свойства собственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 1.2 (о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике P , где

$P = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in [c, d]\}$. Тогда функция $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ непрерывна на отрезке $[c, d]$.

□ Возьмем произвольное значение $y_0 \in [c, d]$ и докажем, что функция $\Phi(y)$ непрерывна в точке y_0 . Для этого оценим $|\Phi(y) - \Phi(y_0)|$ для любого $y \in [c, d]$.

$$\begin{aligned}
|\Phi(y) - \Phi(y_0)| &= \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx \right| = \left| \int_a^b (f(x, y) - f(x, y_0)) dx \right| \leq \\
&\leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \leq \int_a^b \sup_{x \in [a, b]} |f(x, y) - f(x, y_0)| dx = \\
&= \sup_{x \in [a, b]} |f(x, y) - f(x, y_0)| \cdot \int_a^b dx = \sup_{x \in [a, b]} |f(x, y) - f(x, y_0)| \cdot (b - a).
\end{aligned}$$

При каждом фиксированном значении $y \in [c, d]$ функция $|f(x, y) - f(x, y_0)|$ непрерывна на отрезке $[c, d]$. По второй теореме Вейерштасса существует такая точка $x^* \in [a, b]$, что

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x, y) - f(x, y_0)| = |f(x^*, y) - f(x^*, y_0)|.$$

Так как функция f непрерывна в прямоугольнике P , а прямоугольник P – замкнутое и ограниченное множество в $\mathbb{R}^2$, то функция f равномерно непрерывна в прямоугольнике P , т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P$, удовлетворяющих условию $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$, выполнено неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Положим $x_1 = x_2 = x^*$, $y_1 = y$, $y_2 = y_0$. Пусть точка $y \in [c, d]$ такая, что $|y - y_0| < \delta$. Тогда

$$\begin{aligned}
|\Phi(y) - \Phi(y_0)| &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x, y) - f(x, y_0)| \cdot (b - a) = \\
&= |f(x^*, y) - f(x^*, y_0)| \cdot (b - a) < \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (b - a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для каждого $y \in [c, d]$, удовлетворяющего условию $|y - y_0| < \delta$, выполнено неравенство

$$|\Phi(y) - \Phi(y_0)| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\alpha(n - \alpha)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (n - 1)^2}{(1 - \alpha^2)(4 - \alpha^2)(9 - \alpha^2) \dots ((n - 1)^2 - \alpha^2)} = \\
&= \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \alpha^2) \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha^2}{(n - 1)^2}\right)} = \frac{1}{\alpha} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}}.
\end{aligned}$$

Из классического разложения синуса в бесконечное произведение

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

мы получим

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}} = \frac{1}{\alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)} = \frac{\pi}{\pi \alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}. \blacksquare$$

10.5. Связь между Γ и B функциями.

Теорема 10.5. Для любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ справедливо равенство

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

□ Воспользуемся вторым представлением бета-функции

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx$$

и рассмотрим произведение

$$\Gamma(\alpha + \beta) \cdot B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha + \beta) \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx = \int_0^{+\infty} \Gamma(\alpha + \beta) \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx.$$

Функцию $\Gamma(\alpha + \beta)$ представим в виде

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha + \beta) &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1} e^{-t} dt = \left| \begin{array}{l} t = (1+x)y \\ x > 0 \\ dt = (1+x)dy \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} ((1+x)y)^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} (1+x) dy = \\
&= (1+x)^{\alpha+\beta} \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} dy.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{\alpha-1} du = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(n(1-\sqrt[n]{u}) \right)^{\alpha-1} du = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-1} \int_0^1 \left(1-\sqrt[n]{u} \right)^{\alpha-1} du.$$

Сделаем замену переменной в последнем интеграле:

$$\int_0^1 \left(1-\sqrt[n]{u} \right)^{\alpha-1} du = \left| \begin{array}{l} \sqrt[n]{u} = v \\ u = v^n \\ du = nv^{n-1} dv \end{array} \right| = \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} \cdot nv^{n-1} dv = n \int_0^1 v^{n-1} (1-v)^{\alpha-1} dv.$$

Тогда

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-1} \int_0^1 \left(1-\sqrt[n]{u} \right)^{\alpha-1} du = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \int_0^1 v^{n-1} (1-v)^{\alpha-1} dv,$$

и по свойствам бета-функции мы получим

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \int_0^1 v^{n-1} (1-v)^{\alpha-1} dv = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} B(n, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}. \blacksquare$$

10.4. Формула дополнения.

Теорема 10.4. Для любого $\alpha \in (0,1)$ справедлива формула дополнения

$$\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}.$$

□ По формуле Эйлера-Гаусса для любого $\alpha \in (0,1)$ мы имеем

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)},$$

$$\Gamma(1-\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\alpha} \frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)\dots(n-\alpha)},$$

откуда

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{\alpha} \cdot (n-1)!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)} \cdot \frac{n^{1-\alpha} \cdot (n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)\dots(n-\alpha)} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot ((n-1)!)^2}{(\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1))((1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)\dots(n-\alpha))} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\alpha(n-\alpha)} \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(1+\alpha)(1-\alpha)(2+\alpha)(2-\alpha)(3+\alpha)(3-\alpha)\dots(n-1+\alpha)(n-1-\alpha)} = \end{aligned}$$

Следовательно, функция $\Phi(y)$ непрерывна в точке y_0 . И так как точка y_0 была выбрана произвольно на отрезке $[c, d]$, то функция $\Phi(y)$ непрерывна на всём отрезке $[c, d]$. ■

Замечание 1.3. Непрерывность функции $f(x, y)$ означает, что под знаком собственного интеграла можно переходить к пределу:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

Теорема 1.4 (о дифференцировании собственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике

$$P = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in [c, d]\};$$

2) в каждой точке $(x, y) \in P$ существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$;

3) функция $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике P .

Тогда функция $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ непрерывно дифференцируема на от-

резке $[c, d]$, и ее производная равна $\Phi'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$.

□ Возьмём произвольную точку $y_0 \in [c, d]$, и пусть Δy – такое приращение, что $(y_0 + \Delta y) \in [c, d]$. Рассмотрим приращение функции $\Phi(y)$ на отрезке $[y_0, y_0 + \Delta y]$:

$$\begin{aligned} \Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0) &= \int_a^b f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx = \\ &= \int_a^b (f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)) dx. \end{aligned}$$

В каждой точке $x \in [a, b]$ рассмотрим функцию $f(x, y)$, которая будет зависеть только от переменной y . Применим к функции $f(x, y)$ на отрезке $[y_0, y_0 + \Delta y]$ теорему Лагранжа о среднем значении, согласно которой существует такое число $\theta_x \in (0, 1)$, что

$$f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta_x \cdot \Delta y) \cdot \Delta y.$$

Следовательно,

$$\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta_x \Delta y) dx \cdot \Delta y.$$

Разделив на Δy , получим

$$\frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta_x \Delta y) dx.$$

Так как функция $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в прямоугольнике P , то

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta_x \Delta y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \text{ при } \Delta y \rightarrow 0.$$

Кроме того, выполнены условия теоремы 1.2 для интеграла $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$. Значит, данный интеграл является непрерывной функцией по переменной y на отрезке $[c, d]$, и под знаком этого интеграла можно переходить к пределу.

Переходя к пределу при $\Delta y \rightarrow 0$ в равенстве

$$\frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta_x \Delta y) dx,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dy}(y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta_x \Delta y) dx = \\ &= \int_a^b \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta_x \Delta y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{m-1}{2}} (1-y)^{\frac{n-1}{2}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{m+1}{2}-1} (1-y)^{\frac{n+1}{2}-1} dy = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right). \blacksquare$$

10.3. Формула Эйлера-Гаусса.

Теорема 10.3. Для любого $\alpha > 0$ справедлива формула Эйлера-Гаусса

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}.$$

□ Сделаем замену переменной в интеграле, задающем функцию $\Gamma(\alpha)$:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \left| \begin{array}{ll} x = \ln \frac{1}{u} & du = -e^{-x} dx \\ e^x = \frac{1}{u} & u \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 1 \\ u = e^{-x} & u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{array} \right| = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{\alpha-1} du.$$

Рассмотрим вспомогательную функциональную последовательность

$$\left\{ n(1 - \sqrt[n]{u}) \mid n \in N \right\}.$$

Поскольку эта функциональная последовательность возрастает, то последовательность $\left\{ \left(n(1 - \sqrt[n]{u}) \right)^{\alpha-1} \mid n \in N \right\}$ также монотонна, и монотонной является числовая последовательность $\left\{ \int_0^1 \left(n(1 - \sqrt[n]{u}) \right)^{\alpha-1} du \mid n \in N \right\}$. А так как последовательность $\left\{ n(1 - \sqrt[n]{u}) \mid n \in N \right\}$ имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt[n]{u}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \left| \frac{\frac{1}{n} = \xi}{\xi \rightarrow 0} \right| = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1 - u^\xi}{\xi} = - \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{u^\xi - 1}{\xi} = - \ln u = \ln \frac{1}{u},$$

то существует и предел последовательности интегралов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(n(1 - \sqrt[n]{u}) \right)^{\alpha-1} du = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt[n]{u}) \right)^{\alpha-1} du = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{\alpha-1} du.$$

Отсюда следует, что

$$B(m+1, n+1) = \frac{m! \cdot n!}{(m+n+1)!}$$

для любых $m, n \in \mathbb{Z}_0^+$.

□ Непосредственно находим значение $B(\alpha, 1)$:

$$B(\alpha, 1) = \int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{x^\alpha}{\alpha} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Остальные значения $B(\alpha, n+1)$ находим по формуле понижения:

$$B(\alpha, 2) = \frac{1}{\alpha+1} \cdot B(\alpha, 1) = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)};$$

$$B(\alpha, 3) = \frac{2}{\alpha+2} \cdot B(\alpha, 2) = \frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)};$$

$$B(\alpha, 4) = \frac{3}{\alpha+3} \cdot B(\alpha, 3) = \frac{6}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}; \dots;$$

$$B(\alpha, n+1) = \frac{n}{\alpha+n} \cdot B(\alpha, n) = \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}. \blacksquare$$

8°. Применение бета-функции к интегрированию тригонометрических функций.

Для любых $m > -1$ и $n > -1$ справедлива формула

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

□ Сделаем замену переменной в интеграле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \left| \begin{array}{ll} \sin x = t & x = \arcsin t \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} & dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right| = \int_0^1 t^m (1-t^2)^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \int_0^1 t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = \left| \begin{array}{l} t^2 = y \\ t = \sqrt{y} \\ dt = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \end{array} \right| = \int_0^1 y^{\frac{m}{2}} (1-y)^{\frac{n-1}{2}} \frac{dy}{2\sqrt{y}} =$$

Таким образом, функция Φ имеет производную в точке $y_0 \in [c, d]$, и при этом

$$\Phi'(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx.$$

Поскольку точка y_0 была выбрана произвольно на отрезке $[c, d]$, то функция $\Phi(y)$ дифференцируема на всём отрезке $[c, d]$. И так как $\Phi'(y)$ – непрерывная на отрезке $[c, d]$ функция, то функция $\Phi(y)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[c, d]$. ■

Замечание 1.5. Утверждение теоремы 1.4 можно записать в виде

$$\frac{d}{dy} \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Теорема 1.6 (о дифференцировании интеграла с переменными пределами). Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $P = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in [c, d]\}$;
- 2) в каждой точке $(x, y) \in P$ существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$;
- 3) функция $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике P ;
- 4) функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[c, d]$;
- 5) для любого $y \in [c, d]$ функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ удовлетворяют неравенству $a \leq \alpha(y) \leq \beta(y) \leq b$.

Тогда функция $\Phi(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[c, d]$, и справедлива формула

$$\Phi'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(\beta(y), y) \cdot \frac{d\beta}{dy} - f(\alpha(y), y) \cdot \frac{d\alpha}{dy}.$$

□ Рассмотрим интеграл

$$F(\alpha, \beta, y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx, \text{ где } \alpha, \beta \in [a, b], y \in [c, d],$$

как функцию трёх переменных. По переменной β функция F представляет собой интеграл с переменным верхним пределом, а по переменной α – интеграл с переменным нижним пределом, поэтому частные производные функции F по переменным α и β равны

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = f(\beta, y) \text{ и } \frac{\partial F}{\partial \alpha} = -f(\alpha, y).$$

Так как выполнены все условия теоремы 1.4, то существует частная производная функции F по переменной y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Все частные производные $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial F}{\partial \beta}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывны в области определения функции F . Следовательно, функция F является непрерывно дифференцируемой на своей области определения.

По условию теоремы $\alpha = \alpha(y)$ и $\beta = \beta(y)$. Поэтому для нахождения производной функции $\Phi(y)$ воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dy} &= \frac{d}{dy}(F(\alpha(y), \beta(y), y)) = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dy} = \\ &= -f(\alpha(y), y) \cdot \frac{d\alpha}{dy} + f(\beta(y), y) \cdot \frac{d\beta}{dy} + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx. \blacksquare \end{aligned}$$

Замечание 1.7. Формула, полученная в теореме 1.6, обобщает формулу из теоремы 1.4, и имеет вид

$$\frac{d}{dy} \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(\beta(y), y) \cdot \frac{d\beta}{dy} - f(\alpha(y), y) \cdot \frac{d\alpha}{dy}.$$

Эту формулу называют правилом Лейбница дифференцирования собственных интегралов, зависящих от параметра.

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \cdot (1-x) dx = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx - \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} dx = \\ &= \frac{\alpha}{\beta} B(\alpha, \beta) - \frac{\alpha}{\beta} B(\alpha+1, \beta). \end{aligned}$$

Решая уравнение

$$B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\beta} B(\alpha, \beta) - \frac{\alpha}{\beta} B(\alpha+1, \beta),$$

мы получим

$$\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\beta} B(\alpha, \beta),$$

$$B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta). \blacksquare$$

6°. Второе представление бета-функции.

Для любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ имеет место равенство

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy.$$

□ Сделаем замену переменной в интеграле, задающем функцию $B(\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \left| \begin{array}{ll} y = \frac{x}{1-x} & x = \frac{y}{y+1} \\ y \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 0+ & 1-x = \frac{1}{y+1} \\ y \xrightarrow{x \rightarrow 1-} +\infty & dx = \frac{dy}{(y+1)^2} \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{y+1} \right)^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{1}{y+1} \right)^{\beta-1} \cdot \frac{dy}{(y+1)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(y+1)^{\alpha+\beta}} dy. \blacksquare \end{aligned}$$

7°. Бета-функция с целым аргументом.

Для любых $\alpha > 0$ и $\beta = n \in \mathbb{Z}_0^+$ справедлива формула

$$B(\alpha, n+1) = \frac{n!}{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha+2) \cdot \dots \cdot (\alpha+n)}.$$

В частности,

2) несобственный интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ сходится для всех $\alpha > 0$ и

$\beta > 0$;

3) при любых $n, m \in \mathbb{Z}_0^+$ несобственный интеграл

$\int_0^1 x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m dx$ сходится равномерно по параметрам α и

β на квадрате $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$.

Значит, по теореме 4.4 о дифференцировании несобственного интеграла, зависящего от параметра, интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ является бесконечно

дифференцируемой функцией в квадрате $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$, и при этом

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+m} \mathbf{B}}{\partial \alpha^n \partial \beta^m}(\alpha, \beta) &= \frac{\partial^{n+m}}{\partial \alpha^n \partial \beta^m} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \int_0^1 \frac{\partial^{n+m}}{\partial \alpha^n \partial \beta^m} (x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}) dx = \\ &= \int_0^1 x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m dx. \end{aligned}$$

Так как квадрат $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2] \subset (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ был выбран произвольным образом, то бета-функция Эйлера бесконечно дифференцируема на всем множестве $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. ■

5°. Формула понижения для бета-функции.

Для любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ справедлива формула понижения

$$\mathbf{B}(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \mathbf{B}(\alpha, \beta).$$

□ Действительно, интегрируя по частям, для любых $\alpha, \beta > 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\alpha+1, \beta) &= \int_0^1 x^\alpha (1-x)^{\beta-1} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^\alpha & du = \alpha x^{\alpha-1} dx \\ dv = (1-x)^{\beta-1} dx & v = -\frac{(1-x)^\beta}{\beta} \end{array} \right| = \\ &= -x^\alpha \cdot \frac{(1-x)^\beta}{\beta} \Big|_0^1 + \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^\beta dx = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^\beta dx = \end{aligned}$$

Теорема 1.8 (об интегрировании собственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике

$P = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in [c, d]\}$. Тогда функция $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ интегри-

руема на отрезке $[c, d]$, и имеет место формула

$$\int_c^d \Phi(y) dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

□ Для каждого $z \in [c, d]$ обозначим

$$h(z) = \int_c^z \Phi(y) dy \quad \text{и} \quad g(z) = \int_a^b \left[\int_c^z f(x, y) dy \right] dx.$$

Заметим, что $h(c) = g(c) = 0$. Нам нужно доказать, что $h(d) = g(d)$. На самом деле мы покажем, что

$$h(z) = g(z)$$

для каждого $z \in [c, d]$.

Так как по теореме 1.2 функция $\Phi(y)$ непрерывна на отрезке $[c, d]$, то функция $h(z)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[c, d]$ как интеграл с переменным верхним пределом, и при этом

$$h'(z) = \frac{d}{dz} \left(\int_c^z \Phi(y) dy \right) = \Phi(z) = \int_a^b f(x, z) dx$$

для каждого $z \in [c, d]$.

Обозначим

$$F(x, z) = \int_c^z f(x, y) dy.$$

Тогда

$$g(z) = \int_a^b F(x, z) dx.$$

Функция $F(x, z)$ – интеграл, зависящий от параметра x . Так как функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике P , то по теореме 1.2 функция $F(x, z)$

непрерывна на отрезке $[a, b]$ по переменной x для каждого $z \in [c, d]$. С другой стороны, $F(x, z)$ – интеграл с переменным верхним пределом z . И так как $f(x, y)$ – непрерывная функция, то

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{d}{dz} \left(\int_c^z f(x, y) dy \right) = f(x, z)$$

также является непрерывной функцией в прямоугольнике P .

Функция $g(z)$ – интеграл, зависящий от параметра z . Так как $g(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.4, поэтому

$$g'(z) = \frac{d}{dz} \left(\int_a^b F(x, z) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial z}(x, z) dx = \int_a^b f(x, z) dx.$$

Таким образом, для каждого $z \in [c, d]$ выполнено равенство

$$h'(z) = g'(z) = \int_a^b f(x, z) dx.$$

Следовательно, существует такое число L , что

$$h(z) - g(z) = L$$

в каждой точке $z \in [c, d]$. А так как $h(c) = g(c) = 0$, то $L = 0$, и

$$h(z) = g(z)$$

для каждого $z \in [c, d]$. ■

Замечание 1.9. Утверждение теоремы 1.8 можно записать в виде

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

$$= (\ln 2)^n \max \left\{ 1, \frac{2}{2^{\alpha_1}} \right\} \left((1-x)^{\frac{\beta_1}{2}} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)^m \right) (1-x)^{\frac{\beta_1-1}{2}}.$$

Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (1-x)^{\frac{\beta_1}{2}} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)^m = 0,$$

то существует такое число $M_{2n} > 0$, что для всех $x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$ справедливо неравенство

$$(\ln 2)^n \max \left\{ 1, \frac{2}{2^{\alpha_1}} \right\} \left((1-x)^{\frac{\beta_1}{2}} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)^m \right) \leq M_{2n},$$

откуда следует, что для всех $x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$ и $(\alpha, \beta) \in [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ выполнено неравенство

$$\left| x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m \right| \leq M_{2n} \cdot (1-x)^{\frac{\beta_1-1}{2}}.$$

И так как несобственный интеграл $M_{2n} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{\frac{\beta_1-1}{2}} dx$ сходится, то по признаку

Вейерштрасса интеграл $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m dx$ сходится равномерно по параметрам α и β на квадрате $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$.

Из равномерной сходимости рассмотренных выше несобственных интегралов следует равномерная сходимость по параметрам α и β на квадрате

$[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ интеграла $\int_0^1 x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m dx$.

Для бета-функции $B(\alpha, \beta)$ выполнены следующие условия:

1) при любых $n, m \in \mathbb{Z}_0^+$ функция $x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m$ непрерывна на множестве $(0, 1) \times (0, +\infty) \times (0, +\infty)$;

$$\leq (\ln 2)^m \max \left\{ 1, \frac{2}{2^{\beta_1}} \right\} x^{\alpha_1-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n = (\ln 2)^m \max \left\{ 1, \frac{2}{2^{\beta_1}} \right\} \left(x^{\frac{\alpha_1}{2}} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n \right) x^{\frac{\alpha_1}{2}-1}.$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\frac{\alpha_1}{2}} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n = 0,$$

то существует такое число $M_{1n} > 0$, что для всех $x \in \left(0, \frac{1}{2} \right]$ справедливо неравенство

$$(\ln 2)^m \max \left\{ 1, \frac{2}{2^{\beta_1}} \right\} \left(x^{\frac{\alpha_1}{2}} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n \right) \leq M_{1n}.$$

Следовательно, для всех $x \in \left(0, \frac{1}{2} \right]$ и $(\alpha, \beta) \in [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ выполнено неравенство

$$\left| x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m \right| \leq M_{1n} \cdot x^{\frac{\alpha_1}{2}-1}.$$

Кроме того, несобственный интеграл $M_{1n} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\frac{\alpha_1}{2}-1} dx$ сходится. Значит, по при-

знаку Вейерштрасса интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m dx$ сходится равномерно по параметрам α и β на квадрате $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$.

Если $x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$, то для всех $(\alpha, \beta) \in [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left| x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m \right| &= x^{\alpha-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n (1-x)^{\beta-1} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)^m \leq \\ &\leq (\ln 2)^n x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)^m \leq (\ln 2)^n \max \left\{ 1, \frac{2}{2^{\alpha_1}} \right\} (1-x)^{\beta-1} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)^m \leq \\ &\leq (\ln 2)^n \max \left\{ 1, \frac{2}{2^{\alpha_1}} \right\} (1-x)^{\beta_1-1} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)^m = \end{aligned}$$

§2. Предельный переход под знаком собственного интеграла.

Рассмотрим на множестве X семейство функций $f(x, y)$, зависящих от параметра $y \in Y$. Пусть y_0 – предельная точка множества Y . Если $y_0 \in \mathbb{R}$, то под окрестностью точки y_0 мы как обычно понимаем множество $B(y_0, \delta) = (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$. Если $y_0 = +\infty$ ($y_0 = -\infty$ или $y_0 = \infty$), то полагаем $B(+\infty, \delta) = (\delta, +\infty)$ ($B(-\infty, \delta) = (-\infty, -\delta)$ или $B(\infty, \delta) = (-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty)$).

Определение 2.1. Говорят, что семейство функций $\{f(x, y) | y \in Y\}$ сходится равномерно на X к функции $g(x)$ при $y \rightarrow y_0$, если

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x, y) - g(x)| \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow y_0,$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $y \in Y$ таких, что $y \in B(y_0, \delta)$, и для всех $x \in X$ одновременно выполнены неравенства

$$|f(x, y) - g(x)| < \varepsilon.$$

Обозначают: $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{} g(x)$ на X .

Теорема 2.2 (о связи между равномерно сходящимся семейством функций и равномерно сходящимися функциональными последовательностями). Семейство функций $\{f(x, y) | y \in Y\}$ сходится равномерно на множестве X к функции $g(x)$ при $y \rightarrow y_0$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности параметров $\{y_n | n \in \mathbb{N}\} \subset Y$, сходящейся к y_0 , функциональная последовательность $\{f(x, y_n) | n \in \mathbb{N}\}$ сходится равномерно на множестве X к функции $g(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

□ Необходимость. Пусть $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{} g(x)$ на X . Тогда по определению

2.1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $y \in Y$ таких, что $y \in B(y_0, \delta)$, и для всех $x \in X$ одновременно выполнены неравенства

$$|f(x, y) - g(x)| < \varepsilon.$$

Возьмём произвольную последовательность $\{y_n | n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ такую, что $y_n \rightarrow y_0$ при $n \rightarrow \infty$. По определению предела числовой последовательности для заданного $\delta > 0$ найдется такой номер $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$, что все члены последовательности $\{y_n | n \in \mathbb{N}\}$ с номерами $n \geq N$ попадают в δ -окрестность точки y_0 . И так как $y_n \in Y$ и $y_n \in B(y_0, \delta)$, то $|f(x, y_n) - g(x)| < \varepsilon$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in X$ одновременно выполнены неравенства

$$|f(x, y_n) - g(x)| < \varepsilon.$$

Следовательно, $f(x, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x)$ на X .

Достаточность. Докажем от противного. Предположим, что для любой последовательности параметров $\{y_n | n \in \mathbb{N}\} \subset Y$, сходящейся к y_0 , функциональная последовательность $\{f(x, y_n) | n \in \mathbb{N}\}$ сходится равномерно на множестве X к функции $g(x)$ при $n \rightarrow \infty$, но вместе с тем, нет равномерной сходимости семейства функций $\{f(x, y) | y \in Y\}$ к функции $g(x)$ при $y \rightarrow y_0$ на множестве X . Это означает, что существует такое число $\varepsilon^* > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ найдется точка $y \in Y \cap B(y_0, \delta)$, удовлетворяющая неравенству

$$\sup_{x \in X} |f(x, y) - g(x)| \geq \varepsilon^*.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $y_0 \in \mathbb{R}$ (доказательство для бесконечных значений y_0 проходит аналогично).

Пусть $\delta = 1$. Тогда существует такая точка $y_1 \in Y$, удовлетворяющая условию $|y_1 - y_0| < 1$, для которой выполнено неравенство

$$\sup_{x \in X} |f(x, y_1) - g(x)| \geq \varepsilon^*.$$

Таким образом, бета-функция $B(\alpha, \beta)$ является непрерывной на квадрате $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ как сумма непрерывных функций.

Так как $(\alpha_0, \beta_0) \in [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$, то бета-функция непрерывна в точке (α_0, β_0) . И поскольку точка (α_0, β_0) была выбрана произвольным образом, то бета-функция Эйлера непрерывна на всей области определения, т.е. на множестве $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. ■

4°. Гладкость бета-функции.

Бета-функция $B(\alpha, \beta)$ бесконечно дифференцируема на множестве $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$, и при этом

$$\frac{\partial^{n+m} B}{\partial \alpha^n \partial \beta^m}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m dx$$

для любых $n, m \in \mathbb{Z}_0^+$.

□ Возьмем произвольный квадрат $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2] \subset (0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Рассмотрим на квадрате $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ несобственный интеграл, зависящий от параметров α и β

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m dx = \\ & = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m dx. \end{aligned}$$

Исследуем каждый из интегралов на равномерную сходимость.

Заметим, что для всех $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ и $(\alpha, \beta) \in [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ имеет место

неравенство

$$\begin{aligned} & \left| x^{\alpha-1} (\ln x)^n (1-x)^{\beta-1} (\ln(1-x))^m \right| = x^{\alpha-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n (1-x)^{\beta-1} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)^m \leq \\ & \leq (\ln 2)^m x^{\alpha-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n (1-x)^{\beta-1} \leq (\ln 2)^m \max \left\{ 1, \frac{2}{2^{\beta_1}} \right\} x^{\alpha-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n \leq \end{aligned}$$

знаку Вейерштрасса, так как существует такое число $M_1 = \max \left\{ 1, \frac{2}{2^{\beta_1}} \right\} > 0$, что

для всех $x \in \left(0, \frac{1}{2} \right]$ и $(\alpha, \beta) \in [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ выполнено неравенство

$$x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \leq M_1 x^{\alpha-1} \leq M_1 x^{\alpha_1-1},$$

а интеграл $M_1 \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha_1-1} dx$ является сходящимся.

Значит, по теореме 4.2 о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра, интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ является непрерывной функцией переменных α и β на квадрате $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$.

Для второго интеграла выполнены следующие условия: а) функция $f(x, \alpha, \beta) = x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$ непрерывна на множестве $\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \times [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$;

б) несобственный интеграл $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ сходится равномерно на квадрате

$[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ по признаку Вейерштрасса, поскольку существует такое число $M_2 = \max \left\{ 1, \frac{2}{2^{\alpha_1}} \right\} > 0$, что для всех $x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ и $(\alpha, \beta) \in [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ выполнено неравенство

$$x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \leq M_2 (1-x)^{\beta-1} \leq M_2 (1-x)^{\beta_1-1},$$

и интеграл $M_2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{\beta_1-1} dx$ является сходящимся.

Значит, по теореме 4.2 интеграл $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ является непрерывной функцией переменных α и β на квадрате $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$.

Для $\delta = \frac{1}{2}$ существует такая точка $y_2 \in Y$, удовлетворяющая условию

$|y_2 - y_0| < \frac{1}{2}$, для которой выполнено неравенство

$$\sup_{x \in X} |f(x, y_2) - g(x)| \geq \varepsilon^*;$$

для $\delta = \frac{1}{3}$ существует такая точка $y_3 \in Y$, удовлетворяющая условию

$|y_3 - y_0| < \frac{1}{3}$, для которой выполнено неравенство

$$\sup_{x \in X} |f(x, y_3) - g(x)| \geq \varepsilon^*,$$

и так далее. Таким образом, для $\delta = \frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, существует такая точка

$y_n \in Y$, удовлетворяющая условию $|y_n - y_0| < \frac{1}{n}$, для которой выполнено неравенство

$$\sup_{x \in X} |f(x, y_n) - g(x)| \geq \varepsilon^*.$$

Мы построили последовательность $\{y_n | n \in \mathbb{N}\} \subset Y$, сходящуюся к y_0 , такую, что

$$\sup_{x \in X} |f(x, y_n) - g(x)| \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Значит, функциональная последовательность $\{f(x, y_n) | n \in \mathbb{N}\}$ равномерно к функции $g(x)$ не сходится. Получили противоречие. Следовательно, наше предположение об отсутствии равномерной сходимости семейства функций $\{f(x, y) | y \in Y\}$ неверно. ■

Теорема 2.3 (о предельном переходе под знаком интеграла Римана для функциональных последовательностей). Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) функции $f_n(x)$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$ для каждого $n \in \mathbb{N}$;

2) функциональная последовательность $\{f_n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Тогда предельная функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, и имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

□ I. Покажем, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Для этого проверим выполнение критерия интегрируемости. Так как $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$ на $[a, b]$, то по определению равномерно сходящейся функциональной последовательности для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех номеров $n \geq N$ и для всех $x \in [a, b]$ одновременно выполнены неравенства

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

т.е.

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Пусть $n = N(\varepsilon)$. Так как функция $f_n(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то по критерию интегрируемости это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $\lambda([a, b]) = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_p = b\}$, что

$$U(f_n, \lambda) - L(f_n, \lambda) < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $U(f_n, \lambda)$ и $L(f_n, \lambda)$ – верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции $f_n(x)$ и разбиения $\lambda([a, b])$, соответственно;

$$U(f_n, \lambda) = \sum_{k=1}^p M_{nk} \Delta x_k \text{ и } L(f_n, \lambda) = \sum_{k=1}^p m_{nk} \Delta x_k,$$

где $M_{nk} = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_n(x)$, $m_{nk} = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_n(x)$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Таким образом, бета-функция $B(\alpha, \beta)$ определена для любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. ■

2°. Симметричность бета-функции.

$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$ для любых $\alpha, \beta > 0$.

□ Сделаем замену переменной в интеграле, задающем функцию $B(\alpha, \beta)$:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \left| \begin{array}{l} 1-x=t \\ x=1-t \\ dx=-dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^0 (1-t)^{\alpha-1} \cdot t^{\beta-1} \cdot (-1) dt = \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt = B(\beta, \alpha). \quad \blacksquare$$

3°. Непрерывность бета-функции.

Бета-функция $B(\alpha, \beta)$ непрерывна на множестве $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$.

□ Возьмем произвольным образом $\alpha_0, \beta_0 \in (0, +\infty)$. Докажем непрерывность функции $B(\alpha, \beta)$ в точке (α_0, β_0) .

Положим $\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_0$, $\alpha_2 = 2\alpha_0$, $\beta_1 = \frac{1}{2}\beta_0$, $\beta_2 = 2\beta_0$, и рассмотрим функцию $B(\alpha, \beta)$ на квадрате $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$.

Представим функцию $B(\alpha, \beta)$ в виде

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Проверим выполнение условий теоремы 4.2 для каждого из интегралов.

Для первого интеграла мы имеем: а) функция $f(x, \alpha, \beta) = x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$ непрерывна на множестве $\left(0, \frac{1}{2}\right] \times [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$; б) несобственный интеграл

$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ сходится равномерно на квадрате $[\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ по при-

10.2. Бета-функция Эйлера и её основные свойства.

Определение 10.2. Бета-функцией Эйлера или эйлеровым интегралом первого рода называют функцию, заданную интегралом, зависящим от двух параметров

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Рассмотрим основные свойства бета-функции.

1°. Область существования бета-функции.

Бета-функция $B(\alpha, \beta)$ определена для любых $\alpha, \beta > 0$.

□ Представим функцию $B(\alpha, \beta)$ в виде

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Первое слагаемое является либо собственным интегралом, если $\alpha \geq 1$, либо несобственным интегралом второго рода с особой точкой $x=0$, если $0 < \alpha < 1$. Так как

$$x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \sim x^{\alpha-1} \text{ при } x \rightarrow 0+,$$

и при $\alpha > 0$ сходится несобственный интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} dx$, то по признаку срав-

нения интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ сходится для любых $\alpha > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$.

Второе слагаемое также является либо собственным интегралом, если $\beta \geq 1$, либо несобственным интегралом второго рода с особой точкой $x=1$, если $0 < \beta < 1$. Поскольку

$$x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \sim (1-x)^{\beta-1} \text{ при } x \rightarrow 1-,$$

и при $\beta > 0$ сходится несобственный интеграл $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{\beta-1} dx$, то по признаку

сравнения интеграл $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ сходится для любых $\beta > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим отрезок $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения $\lambda([a, b])$. В каждой точке этого отрезка для функции $f_n(x)$ справедливы неравенства

$$m_{nk} = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_n(x) \leq f_n(x) \leq \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_n(x) = M_{nk}.$$

Тогда для функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ будут выполнены неравенства

$$m_{nk} - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq M_{nk} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Обозначим

$$m_k(f) = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \text{ и } M_k(f) = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Тогда из неравенств

$$f(x) < M_{nk} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \text{ и } f(x) > m_{nk} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

следуют неравенства

$$M_k(f) = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \leq M_{nk} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

и

$$m_k(f) = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \geq m_{nk} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Умножая каждое из неравенств на Δx_k и суммируя по k от $k=1$ до $k=p$, мы получим

$$U(f, \lambda) = \sum_{k=1}^p M_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^p M_{nk} \Delta x_k + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{k=1}^p \Delta x_k = U(f_n, \lambda) + \frac{\varepsilon}{4},$$

$$L(f, \lambda) = \sum_{k=1}^p m_k(f) \Delta x_k \geq \sum_{k=1}^p m_{nk} \Delta x_k + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{k=1}^p \Delta x_k = L(f_n, \lambda) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Вычитая из первого неравенства второе, мы получим

$$U(f, \lambda) - L(f, \lambda) \leq U(f_n, \lambda) - L(f_n, \lambda) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $\lambda([a, b]) = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_p = b\}$, что

$$U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \varepsilon.$$

По критерию интегрируемости это означает, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$.

II. Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Для этого оценим разность

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \\ &\leq \int_a^b \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| dx = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Так как функциональная последовательность $\{f_n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда из неравенства

$$0 \leq \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot (b - a)$$

следует, что

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

т.е.

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ при } n \rightarrow \infty. \blacksquare$$

Замечание 2.4. Возможность предельного перехода под знаком интеграла Римана для равномерно сходящихся функциональных последовательностей означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}; \dots; \Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!} \sqrt{\pi}.$$

Определим поведение гамма-функции в окрестности целых отрицательных чисел:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \Gamma(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{1}{\alpha} = +\infty;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0-} \Gamma(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0-} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0-} \frac{1}{\alpha} = -\infty;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1+0} \Gamma(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -1+0} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = -\lim_{\alpha \rightarrow -1+0} \Gamma(\alpha+1) = -\infty;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1-0} \Gamma(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -1-0} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = -\lim_{\alpha \rightarrow -1-0} \Gamma(\alpha+1) = +\infty; \dots;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -n+0} \Gamma(\alpha) = (-1)^n \infty; \quad \lim_{\alpha \rightarrow -n-0} \Gamma(\alpha) = (-1)^{n+1} \infty.$$

Таким образом, определяя гамма-функцию как интеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \text{ при } \alpha > 0 \text{ и}$$

продолжая ее по формуле

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} \text{ при } \alpha < 0, \text{ мы}$$

получим функцию, имеющие разрывы второго рода в точках $\alpha \in \mathbb{Z}_0^-$ и являющуюся бесконечно дифференцируемой на множестве $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ (см. рис.1).

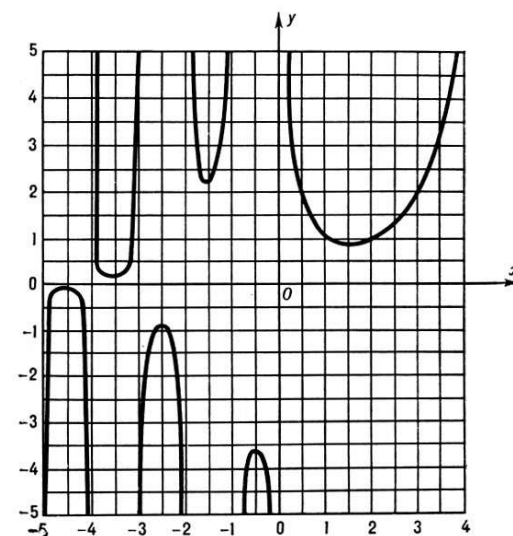


рис. 1

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n! . \blacksquare$$

6°. Гамма-функция с полуцелым аргументом.

Для любого $n \in \mathbb{Z}_0^+$ справедлива формула

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} .$$

□ Найдем значение $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left| \frac{\sqrt{x} = y}{\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dy} \right| = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} .$$

Остальные значения $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ находим по формуле понижения:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} ;$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \sqrt{\pi} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} ;$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \sqrt{\pi} = \frac{15}{8} \sqrt{\pi} ; \dots ;$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^{n-1}} \sqrt{\pi} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} . \blacksquare \end{aligned}$$

7°. Продолжение гамма-функции на все поле $\mathbb{R}$.

На основе формулы понижения определим значения гамма-функции для любого $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ следующим образом

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} .$$

Так, например,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi} ; \quad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi} ;$$

Теорема 2.5 (о предельном переходе под знаком интеграла Римана для семейства функций).

Пусть семейство функций $\{f(x, y) | y \in Y\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) для каждого значения параметра $y \in Y$ функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману по переменной x на отрезке $[a, b]$;

2) семейство функций $\{f(x, y) | y \in Y\}$ сходится равномерно к функции $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ при $y \rightarrow y_0$, где y_0 – предельная точка множества Y .

Тогда функция $g(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, и имеет место равенство

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b g(x) dx .$$

□ Возьмём произвольную последовательность $\{y_n | n \in \mathbb{N}\} \subset Y$, сходящуюся к y_0 . Тогда по теореме 2.2 функциональная последовательность $\{f(x, y_n) | n \in \mathbb{N}\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к функции $g(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Функциональная последовательность $\{f(x, y_n) | n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет следующим условиям: 1) функции $f(x, y_n)$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$ для каждого $n \in \mathbb{N}$; 2) на отрезке $[a, b]$ функциональная последовательность $\{f(x, y_n) | n \in \mathbb{N}\}$ сходится равномерно к функции $g(x)$. Тогда по теореме 2.3 предельная функция $g(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, и имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x, y_n) dx = \int_a^b g(x) dx .$$

Обозначим

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx \text{ и } p = \int_a^b g(x) dx .$$

Тогда для функции $\Phi(y)$ мы имеем следующее: для любой последовательности $\{y_n | n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ такой, что $y_n \rightarrow y_0$ при $n \rightarrow \infty$, выполнено

$$\Phi(y_n) \rightarrow p \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

По определению предела функции в точке по Гейне это означает, что функция $\Phi(y)$ имеет предел при $y \rightarrow y_0$:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \Phi(y) = p,$$

или, возвращаясь к старым обозначениям,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b g(x) dx. \blacksquare$$

Замечание 2.6. Утверждение теоремы 2.5 можно записать так:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

3) при любом $n \in \mathbb{N}$ несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (\ln x)^n e^{-x} dx$ сходится

равномерно по параметру α на отрезке $[\gamma, \sigma]$.

Значит, по теореме 4.4 о дифференцировании несобственного интеграла, зависящего от параметра, интеграл $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ является бесконечно дифференцируемой функцией переменной α на отрезке $[\gamma, \sigma]$, и при этом

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \frac{d^n}{d\alpha^n} \left(\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \right) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} (x^{\alpha-1} e^{-x}) dx = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (\ln x)^n e^{-x} dx.$$

Так как отрезок $[\gamma, \sigma] \subset (0, +\infty)$ был выбран произвольным образом, то гамма-функция Эйлера бесконечно дифференцируема на всем интервале $(0, +\infty)$. $\blacksquare$

4°. Формула понижения для гамма-функции.

Для любого $\alpha > 0$ справедлива формула понижения

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha).$$

□ Действительно, интегрируя по частям, при каждом $\alpha > 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^\alpha & du = \alpha x^{\alpha-1} dx \\ dv = e^{-x} dx & v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= -x^\alpha e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \Gamma(\alpha). \blacksquare \end{aligned}$$

5°. Гамма-функция с целым аргументом.

Для любого $n \in \mathbb{Z}_0^+$ справедлива формула

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

□ Непосредственно находим значение $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Остальные значения $\Gamma(n+1)$ находим по формуле понижения:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!; \quad \Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 = 2!;$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 6 = 3!; \quad \Gamma(5) = 4 \cdot \Gamma(4) = 24 = 4!; \dots;$$

$$x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x} \leq x^{\sigma-1}(\ln x)^n e^{-x} = \left(x^{\sigma-1}(\ln x)^n e^{-\frac{x}{2}} \right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}.$$

Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\sigma-1}(\ln x)^n e^{-\frac{x}{2}} = 0,$$

то существует такое число $M_{2n} > 0$, что для всех $x \in [1, +\infty)$ справедливо неравенство

$$x^{\sigma-1}(\ln x)^n e^{-\frac{x}{2}} \leq M_{2n},$$

откуда следует, что для всех $x \in [1, +\infty)$ и $\alpha \in [\gamma, \sigma]$ выполнено неравенство

$$x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x} \leq M_{2n} \cdot e^{-\frac{x}{2}}.$$

И так как несобственный интеграл $M_{2n} \int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$ сходится, то по признаку Вей-

ерштрасса интеграл $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x} dx$ сходится равномерно по параметру α на отрезке $[\gamma, \sigma]$.

Из равномерной сходимости несобственных интегралов $\int_0^1 x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x} dx$ и $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x} dx$ следует равномерная сходимость по параметру α на отрезке $[\gamma, \sigma]$ интеграла $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x} dx$.

Для гамма-функции $\Gamma(\alpha)$ выполнены следующие условия:

1) при любом $n \in \mathbb{N}$ функция $x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x}$ непрерывна на множестве $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$;

2) несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ сходится для каждого $\alpha \in (0, +\infty)$;

§3. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, заданную на множестве $[a, +\infty) \times Y$.

Определение 3.1. Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) при каждом значении параметра $y \in Y$ и для любого $b > a$ функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$; 2) при каждом значении

параметра $y \in Y$ сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$. Тогда интеграл

$$\Phi(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

называют несобственным интегралом, зависящим от параметра y .

Множество Y называют областью сходимости или областью определения функции $\Phi(y)$.

Определение 3.2. Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на множестве $E \subset Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $A = A(\varepsilon) > a$, что для всех $B > A$ и для всех $y \in E$ одновременно выполнены неравенства

$$\left| \int_B^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon,$$

т.е.

$$\sup_{y \in E} \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| \rightarrow 0 \text{ при } A \rightarrow +\infty.$$

Обозначим $r(A) = \sup_{y \in E} \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right|$. Заметим, что если $r(A) \rightarrow 0$ при

$A \rightarrow +\infty$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на множестве E , а

если $r(A) \rightarrow 0$ при $A \rightarrow +\infty$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится на множестве

E неравномерно.

Если мы обозначим

$$\Phi_b(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \text{ где } b \in (a, +\infty),$$

то определение 3.2 можно переформулировать следующим образом.

Определение 3.3. Будем говорить, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на множестве $E \subset Y$, если

$$\Phi_b(y) \rightrightarrows \Phi(y) \text{ на множестве } E \text{ при } b \rightarrow +\infty.$$

Замечание 3.4. Кроме интегралов, зависящих от параметра $y \in Y$, вида

$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ есть и другие несобственные интегралы, зависящие от параметра:

$$\int_{-\infty}^a f(x, y) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx, \int_a^\omega f(x, y) dx, \int_\omega^b f(x, y) dx, \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x, y) dx, \text{ где } \omega, \omega_1, \omega_2$$

ω_2 — особые точки функций $\{f(x, y) | y \in Y\}$. Определение равномерной сходимости и теоремы, изложенные ниже, можно переформулировать и на случай несобственных интегралов с параметром других видов.

Теорема 3.5 (критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра). Пусть при каждом значении параметра $y \in Y$ и для любого $b > a$ функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману на

отрезке $[a, b]$. Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходил

равномерно на множестве $E \subset Y$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такое число $A = A(\varepsilon) > a$, что для всех $B_1, B_2 > A$ и для всех $y \in E$ одновременно были выполнены неравенства

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

$(0, +\infty)$, и при этом

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (\ln x)^n e^{-x} dx$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$.

□ Возьмем произвольный отрезок $[\gamma, \sigma] \subset (0, +\infty)$. Рассмотрим на отрезке $[\gamma, \sigma]$ несобственный интеграл, зависящий от параметра

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (\ln x)^n e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} (\ln x)^n e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} (\ln x)^n e^{-x} dx.$$

Исследуем каждый из интегралов на равномерную сходимость.

Заметим, что для всех $x \in (0, 1]$ и $\alpha \in [\gamma, \sigma]$ имеет место неравенство

$$\left| x^{\alpha-1} (\ln x)^n e^{-x} \right| = x^{\alpha-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n e^{-x} \leq x^{\alpha-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n \leq x^{\gamma-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n = \left(x^{\frac{\gamma}{2}} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n \right) x^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\frac{\gamma}{2}} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n = 0,$$

то существует такое число $M_{1n} > 0$, что для всех $x \in (0, 1]$ справедливо неравенство

$$x^{\frac{\gamma}{2}} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^n \leq M_{1n}.$$

Следовательно, для всех $x \in (0, 1]$ и $\alpha \in [\gamma, \sigma]$ выполнено неравенство

$$\left| x^{\alpha-1} (\ln x)^n e^{-x} \right| \leq M_{1n} \cdot x^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

Кроме того, несобственный интеграл $M_{1n} \int_0^1 x^{\frac{\gamma-1}{2}} dx$ сходится. Значит, по призна-

ку Вейерштрасса интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1} (\ln x)^n e^{-x} dx$ сходится равномерно по параметру α на отрезке $[\gamma, \sigma]$.

Если $x \in [1, +\infty)$, то для всех $\alpha \in [\gamma, \sigma]$ имеет место неравенство

отрезке $[\gamma, \sigma]$ по признаку Вейерштрасса, поскольку имеет место неравенство $x^{\alpha-1}e^{-x} \leq x^{\alpha-1} \leq x^{\gamma-1}$ для любых $x \in (0, 1]$ и $\alpha \in [\gamma, \sigma]$, а интеграл $\int_0^1 x^{\gamma-1} dx$ является сходящимся.

Значит, по теореме 4.2 о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра, интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ является непрерывной функцией переменной α на отрезке $[\gamma, \sigma]$.

Для второго интеграла выполнены следующие условия: а) функция $f(x, \alpha) = x^{\alpha-1} e^{-x}$ непрерывна на множестве $[1, +\infty) \times [\gamma, \sigma]$; б) несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ сходится равномерно на отрезке $[\gamma, \sigma]$ по признаку Вейерштрасса, поскольку существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in [1, +\infty)$ и $\alpha \in [\gamma, \sigma]$ выполнено неравенство $x^{\alpha-1} e^{-x} \leq x^{\sigma-1} e^{-x} = x^{\sigma-1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \leq M e^{-\frac{x}{2}}$, и интеграл $\int_1^{+\infty} M e^{-\frac{x}{2}} dx$ является сходящимся.

Значит, по теореме 4.2 интеграл $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ является непрерывной функцией переменной α на отрезке $[\gamma, \sigma]$.

Таким образом, гамма-функция

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

является непрерывной на отрезке $[\gamma, \sigma]$ как сумма непрерывных функций.

Так как $\alpha_0 \in [\gamma, \sigma]$, то гамма-функция непрерывна в точке α_0 . И поскольку точка $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ была выбрана произвольным образом, то гамма-функция Эйлера непрерывна на всей области определения, т.е. на интервале $(0, +\infty)$. ■

3°. Гладкость гамма-функции.

Гамма-функция $\Gamma(\alpha)$ бесконечно дифференцируема на интервале

□ Необходимость. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на

множестве $E \subset Y$. Тогда по определению для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $A = A(\varepsilon) > a$, что для всех $B > A$ и для всех $y \in E$ одновременно выполнены неравенства

$$\left| \int_B^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть B_1, B_2 – произвольные числа такие, что $B_1 > A$ и $B_2 > A$. Тогда

$$\left| \int_{B_1}^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \left| \int_{B_2}^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx \right| &= \left| \int_{B_1}^{+\infty} f(x, y) dx - \int_{B_2}^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{B_1}^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \left| \int_{B_2}^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $A = A(\varepsilon) > a$, что для всех $B_1, B_2 > A$ и для всех $y \in E$ одновременно выполнены неравенства

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что при каждом значении параметра $y \in E$ выполнен критерий Коши сходимости обычных несобственных интегралов. Следовательно, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится для любого $y \in E$.

Перейдём в неравенстве

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

к пределу при $B_2 \rightarrow +\infty$, получим

$$\left| \int_{B_1}^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

А по определению 3.2 это означает, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на множестве E . ■

Следствие 3.6. Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $[a, +\infty) \times Y$;

2) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится на множестве $E \subset Y$;

3) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ расходится в точке $y_0 \in Y$, где y_0 – предельная точка множества E .

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится неравномерно на множестве E .

□ Так как интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ расходится в точке y_0 , то на основании критерия Коши для обычных несобственных интегралов существует такое число $\varepsilon^* > 0$, что для любого $A > a$ найдутся такие $B_1, B_2 > A$, что

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y_0) dx \right| \geq \varepsilon^*.$$

Собственный интеграл $\int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx$ является непрерывной функцией параметра y на множестве Y по теореме 1.2. По теореме об устойчивости значений непрерывной функции существует такое число $\delta > 0$, что для всех $y \in Y$, удовлетворяющих условию $|y - y_0| < \delta$ выполнено неравенство

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx \right| \geq \varepsilon^*.$$

И так как несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} Me^{-\frac{x}{2}} dx$ сходится, то по признаку сравнения интеграл $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ также является сходящимся.

Таким образом, из сходимости интеграла $\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ при $\alpha > 0$ и интеграла $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ вытекает сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

для всех $\alpha > 0$. Значит, гамма-функция Эйлера, определенная как несобственный интеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

существует для любого $\alpha > 0$. ■

2°. Непрерывность гамма-функции.

Гамма-функция $\Gamma(\alpha)$ непрерывна на интервале $(0, +\infty)$.

□ Возьмем произвольным образом точку $\alpha_0 \in (0, +\infty)$. Докажем непрерывность функции $\Gamma(\alpha)$ в точке α_0 .

Положим $\gamma = \frac{1}{2}\alpha_0$ и $\sigma = 2\alpha_0$, и рассмотрим функцию $\Gamma(\alpha)$ на отрезке $[\gamma, \sigma]$, где $\alpha_0 \in [\gamma, \sigma] \subset (0, +\infty)$.

Представим функцию $\Gamma(\alpha)$ в виде

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Проверим выполнение условий теоремы 4.2 для каждого из интегралов.

Для первого интеграла мы имеем: а) функция $f(x, \alpha) = x^{\alpha-1} e^{-x}$ непрерывна на множестве $(0, 1] \times [\gamma, \sigma]$; б) интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ сходится равномерно на

§10. Эйлеровы интегралы.

10.1. Гамма-функция Эйлера и её основные свойства.

Определение 10.1. Гамма-функцией Эйлера или эйлеровым интегралом второго рода называют функцию, заданную интегралом, зависящим от параметра

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Рассмотрим основные свойства гамма-функции.

1°. Область существования гамма-функции.

Гамма-функция $\Gamma(\alpha)$ определена для любого $\alpha > 0$.

□ Представим функцию $\Gamma(\alpha)$ в виде

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Первое слагаемое является либо собственным интегралом, если $\alpha \geq 1$, либо несобственным интегралом второго рода с особой точкой $x=0$, если $0 < \alpha < 1$. Так как

$$x^{\alpha-1} e^{-x} \sim x^{\alpha-1} \text{ при } x \rightarrow 0+,$$

и при $\alpha > 0$ сходится несобственный интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx$, то по признаку срав-

нения интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ также является сходящимся.

Второе слагаемое является несобственным интегралом первого рода. Поскольку для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x^{\alpha-1}}{e^{\frac{x}{2}}} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

то существует такое число $M > 0$, что для всех $x \geq 1$ выполнено неравенство

$$x^{\alpha-1} e^{-x} = x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \leq M e^{-\frac{x}{2}}.$$

Так как y_0 – предельная точка множества E , то существуют точки $y \in E$ такие, что $y \neq y_0$ и $|y - y_0| < \delta$. Тогда для любого $y \in E$, удовлетворяющего ус-

ловию $0 < |y - y_0| < \delta$ имеет место неравенство $\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx \right| \geq \varepsilon^*$.

Таким образом, существует такое число $\varepsilon^* > 0$, что для любого $A > a$ найдутся такие $B_1, B_2 > A$ и такой $y \in E$, что

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx \right| \geq \varepsilon^*.$$

Критерий Коши для интеграла $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ не выполнен. Следовательно, по

теореме 3.5 интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится неравномерно на множестве E . ■

Теорема 3.7 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра). Пусть при любом значении параметра $y \in Y$ функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы по переменной x на каждом отрезке $[a, b]$, где $b > a$, и удовлетворяют следующим условиям:

1) $|f(x, y)| \leq g(x, y)$ для любых $y \in Y$ и $x \in [a, +\infty)$;

2) интеграл $\int_a^{+\infty} g(x, y) dx$ сходится равномерно на множестве Y .

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно и абсолютно на множестве Y .

□ Так как интеграл $\int_a^{+\infty} g(x, y) dx$ сходится равномерно на множестве Y , то

по критерию Коши это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $A = A(\varepsilon) > a$, что для всех $B_1, B_2 > A$ и для всех $y \in Y$ одновременно выполнены неравенства

$$\int_{B_1}^{B_2} g(x, y) dx < \varepsilon.$$

Но тогда

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx \right| \leq \int_{B_1}^{B_2} |f(x, y)| dx \leq \int_{B_1}^{B_2} g(x, y) dx < \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию Коши (теорема 3.5) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно и абсолютно на множестве Y . ■

Чаше рассматривают тот случай теоремы 3.7, когда функция g не зависит от параметра y . В этом случае функцию g называют мажорантой, а признак Вейерштрасса называют мажорантным признаком равномерной сходимости.

Следствие 3.8 (мажорантный признак равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть функции $f(x, y)$ и $g(x)$ интегрируемы по x на каждом отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$ при любом $y \in Y$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$1) |f(x, y)| \leq g(x) \text{ для любых } y \in Y \text{ и } x \in [a, +\infty);$$

$$2) \text{ интеграл } \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ сходится.}$$

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно и абсолютно на множестве Y .

Теорема 3.9 (признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть при любом значении параметра $y \in Y$ функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы по переменной x на каждом отрезке $[a, b]$, где $b > a$, и удовлетворяют следующим условиям:

$$1) \text{ семейство функций } \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \mid b \in (a, +\infty) \right\} \text{ равномерно ограничено,}$$

т.е. существует такое число $M > 0$, что для всех $b > a$ и $y \in Y$ одновременно выполнены неравенства

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctg(t\sqrt{2}+1) \Big|_0^A + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctg(t\sqrt{2}-1) \Big|_0^A = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \pi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Применим леммы 9.1 – 9.4 ко второму интегралу Френеля.

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dt \right) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} G(y, 0) dy =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} G(y, \delta) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{t^2 dt}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \left(-\frac{t}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \frac{t}{t^2-t\sqrt{2}+1} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\int_0^A \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} dt + \int_0^A \frac{\sqrt{2}}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} dt + \int_0^A \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1} dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^A \frac{\sqrt{2}}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} dt \right) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{t^2-t\sqrt{2}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1} \Big|_0^A +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctg(t\sqrt{2}+1) \Big|_0^A + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctg(t\sqrt{2}-1) \Big|_0^A =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \pi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 9.5. Интегралы Френеля сходятся, и при этом

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

прерывности для всех $\delta \in [0, 1]$ и $y \in [1, +\infty)$ функций $F(y, \delta)$ и $G(y, \delta)$ по теореме 4.3 мы имеем право перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0+$, т.е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_1^{+\infty} F(y, \delta) dy = \int_1^{+\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0+} F(y, \delta) dy = \int_1^{+\infty} F(y, 0) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_1^{+\infty} G(y, \delta) dy = \int_1^{+\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0+} G(y, \delta) dy = \int_1^{+\infty} G(y, 0) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} F(y, \delta) dy &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^1 F(y, \delta) dy + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_1^{+\infty} F(y, \delta) dy = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} G(y, \delta) dy &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^1 G(y, \delta) dy + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_1^{+\infty} G(y, \delta) dy = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy. \blacksquare \end{aligned}$$

Применим леммы 9.1 – 9.4 к первому интегралу Френеля.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dt \right) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} F(y, 0) dy = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} F(y, \delta) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \left(\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} - \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_0^A \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} dt + \int_0^A \frac{\sqrt{2}}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} dt - \int_0^A \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^A \frac{\sqrt{2}}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} dt \right) = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} \Big|_0^A + \end{aligned}$$

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx \right| \leq M;$$

2) при любом значении параметра $y \in Y$ функция $g(x, y)$ монотонна по переменной x на промежутке $[a, +\infty)$;

3) семейство функций $\{g(x, y) | y \in Y\}$ равномерно сходится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ на множестве Y .

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx$ сходится равномерно на Y .

□ Рассмотрим интеграл

$$\int_{B_1}^{B_2} f(x, y) g(x, y) dx.$$

Так как функция f интегрируема, а g монотонна, то по второй теореме о среднем существует такое число $\xi \in [B_1, B_2]$, что

$$\int_{B_1}^{B_2} f(x, y) g(x, y) dx = g(B_1, y) \cdot \int_{B_1}^{\xi} f(x, y) dx + g(B_2, y) \cdot \int_{\xi}^{B_2} f(x, y) dx.$$

Из первого условия теоремы мы получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_1}^{\xi} f(x, y) dx \right| &= \left| \int_a^{\xi} f(x, y) dx - \int_a^{B_1} f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^{\xi} f(x, y) dx \right| + \left| \int_a^{B_1} f(x, y) dx \right| \leq M + M = 2M; \\ \left| \int_{\xi}^{B_2} f(x, y) dx \right| &= \left| \int_a^{B_2} f(x, y) dx - \int_a^{\xi} f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^{B_2} f(x, y) dx \right| + \left| \int_a^{\xi} f(x, y) dx \right| \leq M + M = 2M. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Так как семейство функций $\{g(x, y) | y \in Y\}$ равномерно сходится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ на множестве Y , то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $A = A(\varepsilon) > a$, что для всех $x > A$ выполняется неравенство

$$\sup_{y \in Y} |g(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Пусть числа B_1 и B_2 такие, что $B_2 > B_1 > A$. Оценим следующий интеграл.

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| &\leq |g(B_1, y)| \cdot \left| \int_{B_1}^{\xi} f(x, y) dx \right| + |g(B_2, y)| \cdot \left| \int_{\xi}^{B_2} f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq |g(B_1, y)| \cdot 2M + |g(B_2, y)| \cdot 2M \leq 2M \cdot \sup_{y \in Y} |g(B_1, y)| + 2M \cdot \sup_{y \in Y} |g(B_2, y)| < \\ &< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $A = A(\varepsilon) > a$, что для всех $B_2 > B_1 > A$ и для всех $y \in Y$ одновременно выполнены неравенства

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию Коши (теорема 3.5) несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx \text{ сходится равномерно на множестве } Y. \blacksquare$$

Теорема 3.10 (признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть при любом значении параметра $y \in Y$ функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы по переменной x на каждом отрезке $[a, b]$, где $b > a$, и удовлетворяют следующим условиям:

1) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на множестве Y ;

2) при любом значении параметра $y \in Y$ функция $g(x, y)$ монотонна по переменной x на промежутке $[a, +\infty)$;

3) семейство функций $\{g(x, y) | y \in Y\}$ равномерно ограничено, т.е. существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in [a, +\infty)$ и $y \in Y$ одновременно выполнены неравенства

$$|g(x, y)| \leq M.$$

ности для всех $\delta \in [0, 1]$ и $y \in (0, 1]$ функций $F(y, \delta)$ и $G(y, \delta)$ по теореме 4.3 мы имеем право перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0+$, а именно:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^1 F(y, \delta) dy &= \int_0^1 \lim_{\delta \rightarrow 0+} F(y, \delta) dy = \int_0^1 F(y, 0) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^1 G(y, \delta) dy &= \int_0^1 \lim_{\delta \rightarrow 0+} G(y, \delta) dy = \int_0^1 G(y, 0) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy. \end{aligned}$$

Интегралы $\int_1^{+\infty} F(y, \delta) dy$ и $\int_1^{+\infty} G(y, \delta) dy$ запишем в виде:

$$\int_1^{+\infty} F(y, \delta) dy = \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \omega(y, \delta) dy, \quad \int_1^{+\infty} G(y, \delta) dy = \int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} \omega(y, \delta) dy,$$

где

$$\omega(y, \delta) = \int_{\delta}^{+\infty} \sqrt{y} e^{-yt^2} dt = \left| \frac{yt^2 = z^2}{dt = \frac{dz}{\sqrt{y}}} \right| = \int_{\delta\sqrt{y}}^{+\infty} e^{-z^2} dz.$$

Тогда будут выполнены следующие условия:

1) несобственные интегралы $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$ и $\int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy$, не зависящие от параметра δ , сходятся равномерно по параметру δ на отрезке $[0, 1]$;

2) при каждом фиксированном значении параметра $\delta \in [0, 1]$ функция $\omega(y, \delta)$ убывает по переменной y на промежутке $[1, +\infty)$;

3) существует такое число $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2} > 0$, что для всех $\delta \in [0, 1]$ и $y \in [1, +\infty)$ выполнено неравенство

$$0 < \omega(y, \delta) = \int_{\delta\sqrt{y}}^{+\infty} e^{-z^2} dz \leq \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Значит, по признаку Абеля (теорема 3.10) несобственные интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \omega(y, \delta) dy \text{ и } \int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} \omega(y, \delta) dy \text{ сходятся равномерно по параметру } \delta$$

на отрезке $[0, 1]$. Из равномерной сходимости несобственных интегралов и не-

Лемма 9.4. Функции $F(y, \delta)$ и $G(y, \delta)$ непрерывны на множестве $(0, +\infty) \times [0, 1]$, интегрируемы в несобственном смысле на интервале $(0, +\infty)$ при каждом $\delta \in [0, 1]$, и при этом имеют место равенства

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} F(y, \delta) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$$

и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} G(y, \delta) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy.$$

□ Рассмотрим следующие интегралы

$$\int_0^{+\infty} F(y, \delta) dy = \int_0^1 F(y, \delta) dy + \int_1^{+\infty} F(y, \delta) dy$$

и

$$\int_0^{+\infty} G(y, \delta) dy = \int_0^1 G(y, \delta) dy + \int_1^{+\infty} G(y, \delta) dy.$$

Покажем, что под знаком каждого из этих интегралов можно перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0+$.

Так как функция e^{-yt^2} неотрицательна, то для всех $\delta \in [0, 1]$ и $y \in (0, 1]$ справедливы неравенства

$$|F(y, \delta)| \leq \int_{\delta}^{+\infty} |\sin y| e^{-yt^2} dt \leq \int_{\delta}^{+\infty} e^{-yt^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-yt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}$$

и

$$|G(y, \delta)| \leq \int_{\delta}^{+\infty} |\cos y| e^{-yt^2} dt \leq \int_{\delta}^{+\infty} e^{-yt^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-yt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}.$$

И поскольку несобственный интеграл $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}}$ сходится, то интегралы

$\int_0^1 F(y, \delta) dy$ и $\int_0^1 G(y, \delta) dy$, зависящие от параметра, сходятся равномерно и

абсолютно по параметру δ на отрезке $[0, 1]$ по признаку Вейерштрасса (теорема 3.7). Из равномерной сходимости несобственных интегралов и непрерыв-

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx$ сходится равномерно на Y .

□ Рассмотрим интеграл

$$\int_{B_1}^{B_2} f(x, y) g(x, y) dx.$$

Так как функция f интегрируема, а g монотонна, то по второй теореме о среднем существует такое число $\xi \in [B_1, B_2]$, что

$$\int_{B_1}^{B_2} f(x, y) g(x, y) dx = g(B_1, y) \cdot \int_{B_1}^{\xi} f(x, y) dx + g(B_2, y) \cdot \int_{\xi}^{B_2} f(x, y) dx.$$

Поскольку интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на множестве Y ,

то по критерию Коши это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $A = A(\varepsilon) > a$, что для всех $B_1, B_2 > A$ и для всех $y \in E$ одновременно выполнены неравенства

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Оценим следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| &\leq |g(B_1, y)| \cdot \left| \int_{B_1}^{\xi} f(x, y) dx \right| + |g(B_2, y)| \cdot \left| \int_{\xi}^{B_2} f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq M \cdot \left| \int_{B_1}^{\xi} f(x, y) dx \right| + M \cdot \left| \int_{\xi}^{B_2} f(x, y) dx \right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $A = A(\varepsilon) > a$, что для всех $B_1, B_2 > A$ и для всех $y \in E$ одновременно выполнены неравенства

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Значит, по критерию Коши (теорема 3.5) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx$ сходится равномерно на множестве Y . ■

§4. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 4.1 (предельный переход под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть y_0 – предельная точка множества Y , функция $f(x, y)$ интегрируема по переменной x на каждом отрезке $[a, b]$ при любом значении параметра $y \in Y$ и удовлетворяет следующим условиям:

- 1) для каждого $b > a$ семейство функций $\{f(x, y) | y \in Y\}$ сходится равномерно к функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ при $y \rightarrow y_0$;
- 2) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на множестве Y .

Тогда предельная функция $\varphi(x)$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[a, +\infty)$, и справедливо равенство

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

□ I. Докажем интегрируемость на промежутке $[a, +\infty)$ функции $\varphi(x)$. Так как интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на множестве Y , то по критерию Коши равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $A = A(\varepsilon) > a$, что для всех $B_1, B_2 > A$ и для всех $y \in Y$ одновременно выполнены неравенства

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

По теореме 2.5 о предельном переходе под знаком собственного интеграла, зависящего от параметра, имеет место равенство

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx = \int_{B_1}^{B_2} \varphi(x) dx.$$

Значит, по теореме 4.3 функции $\int_{\delta}^{+\infty} \Phi(\varepsilon, t) dt$ и $\int_{\delta}^{+\infty} \Psi(\varepsilon, t) dt$ непрерывны по параметру ε на отрезке $[0, 1]$, и мы имеем право перейти к пределу под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра, при $\varepsilon \rightarrow 0+$, т.е. для любого $\delta > 0$ имеют место равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{+\infty} \Phi(\varepsilon, t) dt = \int_{\delta}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \Phi(\varepsilon, t) dt = \int_{\delta}^{+\infty} \Phi(0, t) dt = \int_{\delta}^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{+\infty} \Psi(\varepsilon, t) dt = \int_{\delta}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \Psi(\varepsilon, t) dt = \int_{\delta}^{+\infty} \Psi(0, t) dt = \int_{\delta}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt. \blacksquare$$

Обозначим

$$F(y, \delta) = \int_{\delta}^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dt$$

и

$$G(y, \delta) = \int_{\delta}^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dt.$$

Положим для любого $y > 0$

$$F(y, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} F(y, \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dt = \int_0^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}} \sin y;$$

$$G(y, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} G(y, \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dt = \int_0^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}} \cos y.$$

Из леммы 9.2 следует, что

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} F(y, \delta) dy = \int_{\delta}^{+\infty} \Phi(\varepsilon, t) dt, \quad \int_{\varepsilon}^{+\infty} G(y, \delta) dy = \int_{\delta}^{+\infty} \Psi(\varepsilon, t) dt,$$

и с учетом леммы 9.3 мы получим

$$\int_0^{+\infty} F(y, \delta) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} F(y, \delta) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{+\infty} \Phi(\varepsilon, t) dt = \int_{\delta}^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt$$

и

$$\int_0^{+\infty} G(y, \delta) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} G(y, \delta) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{+\infty} \Psi(\varepsilon, t) dt = \int_{\delta}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt.$$

$$= \left(\frac{t^2}{1+t^4} \cos \varepsilon - \frac{1}{1+t^4} \sin \varepsilon \right) e^{-\varepsilon t^2}.$$

Положим

$$\Phi(0, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \Phi(\varepsilon, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{t^2}{1+t^4} \sin \varepsilon + \frac{1}{1+t^4} \cos \varepsilon \right) e^{-\varepsilon t^2} = \frac{1}{1+t^4};$$

$$\Psi(0, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \Psi(\varepsilon, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{t^2}{1+t^4} \cos \varepsilon - \frac{1}{1+t^4} \sin \varepsilon \right) e^{-\varepsilon t^2} = \frac{t^2}{1+t^4}.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 9.3. Функции $\Phi(\varepsilon, t)$ и $\Psi(\varepsilon, t)$ непрерывны на множестве $[0, 1] \times [0, +\infty)$, и при этом для любого $\delta > 0$ имеют место равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{+\infty} \Phi(\varepsilon, t) dt = \int_{\delta}^{+\infty} \Phi(0, t) dt$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{+\infty} \Psi(\varepsilon, t) dt = \int_{\delta}^{+\infty} \Psi(0, t) dt.$$

□ Непрерывность функций $\Phi(\varepsilon, t)$ и $\Psi(\varepsilon, t)$ очевидна. Исследуем несобственные интегралы $\int_{\delta}^{+\infty} \Phi(\varepsilon, t) dt$ и $\int_{\delta}^{+\infty} \Psi(\varepsilon, t) dt$ на равномерную сходимость по параметру ε на отрезке $[0, 1]$. Действительно, из неравенств

$$|\Phi(\varepsilon, t)| = \left| \frac{t^2}{1+t^4} \sin \varepsilon + \frac{1}{1+t^4} \cos \varepsilon \right| e^{-\varepsilon t^2} \leq \frac{t^2}{1+t^4} |\sin \varepsilon| + \frac{1}{1+t^4} |\cos \varepsilon| \leq \frac{t^2+1}{1+t^4}$$

и

$$|\Psi(\varepsilon, t)| = \left| \frac{t^2}{1+t^4} \cos \varepsilon - \frac{1}{1+t^4} \sin \varepsilon \right| e^{-\varepsilon t^2} \leq \frac{t^2}{1+t^4} |\cos \varepsilon| + \frac{1}{1+t^4} |\sin \varepsilon| \leq \frac{t^2+1}{1+t^4},$$

выполненных для всех $\varepsilon \in [0, 1]$ и $t \in [0, +\infty)$, а также из сходимости несоб-

ственного интеграла $\int_{\delta}^{+\infty} \frac{t^2+1}{1+t^4} dt$ следует равномерная сходимость интегралов

$\int_{\delta}^{+\infty} \Phi(\varepsilon, t) dt$ и $\int_{\delta}^{+\infty} \Psi(\varepsilon, t) dt$ по параметру ε на отрезке $[0, 1]$ для любого $\delta > 0$.

Совершая предельный переход при $y \rightarrow y_0$ в неравенстве $\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$,

получим

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} \varphi(x) dx \right| = \lim_{y \rightarrow y_0} \left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $A = A(\varepsilon) > a$, что для всех $B_1, B_2 > A$ выполнено неравенство

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} \varphi(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Значит, по критерию Коши несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходится.

II. Докажем, что

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Так как интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на множестве Y , то по определению равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M_1 = M_1(\varepsilon) > a$, что для всех $M \geq M_1$ выполнено неравенство

$$\sup_{y \in Y} \left| \int_M^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из определения сходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ следует, что для заданного $\varepsilon > 0$ существует такое число $M_2 = M_2(\varepsilon) > a$, что для всех $M \geq M_2$ выполнено неравенство

$$\left| \int_M^{+\infty} \varphi(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $M_0 = \max\{M_1, M_2\}$. Тогда семейство функций $\{f(x, y) | y \in Y\}$ будет сходиться равномерно к функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a, M_0]$, а это означает, что

для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $y \in Y$, удовлетворяющих условию $y \in B(y_0, \delta) \setminus \{y_0\}$, выполнено неравенство

$$\sup_{x \in [a, M_0]} |f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_0 - a)}.$$

Оценим разность

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \right| &= \left| \int_a^{+\infty} (f(x, y) - \varphi(x)) dx \right| = \left| \int_a^{M_0} (f(x, y) - \varphi(x)) dx + \right. \\ &+ \int_{M_0}^{+\infty} f(x, y) dx - \int_{M_0}^{+\infty} \varphi(x) dx \left| \leq \left| \int_a^{M_0} (f(x, y) - \varphi(x)) dx \right| + \left| \int_{M_0}^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \right. \\ &+ \left| - \int_{M_0}^{+\infty} \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^{M_0} |f(x, y) - \varphi(x)| dx + \left| \int_{M_0}^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \left| \int_{M_0}^{+\infty} \varphi(x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^{M_0} \sup_{x \in [a, M_0]} |f(x, y) - \varphi(x)| dx + \left| \int_{M_0}^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \left| \int_{M_0}^{+\infty} \varphi(x) dx \right| < \\ &< \sup_{x \in [a, M_0]} |f(x, y) - \varphi(x)| \cdot \int_a^{M_0} dx + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3(M_0 - a)} \cdot (M_0 - a) + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $y \in Y$, удовлетворяющих условию $y \in B(y_0, \delta) \setminus \{y_0\}$, выполнено неравенство

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, по определению предела $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$. ■

Замечание 4.2. Утверждение теоремы 4.1 можно записать в виде

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

Теорема 4.3 (непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть $\{f(x, y) | y \in [c, d]\}$ – семейство функций, зависящих от па-

$$0 \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} |\varphi(y, t)| dy \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-yt^2} dy, \quad 0 \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} |\psi(y, t)| dy \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-yt^2} dy,$$

и

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-yt^2} dy = -\frac{1}{t^2} e^{-yt^2} \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} = \frac{1}{t^2} e^{-\varepsilon t^2} \leq \frac{1}{t^2},$$

где интеграл $\int_{\delta}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ сходится.

Выполнены все условия теоремы 4.8 о несобственном интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра. Значит, сходятся повторные несобственные интегралы $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\delta}^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dt \right) dy$ и $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\delta}^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dt \right) dy$ для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, и при этом

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\delta}^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dt \right) dy = \int_{\delta}^{+\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dy \right) dt$$

и

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\delta}^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dt \right) dy = \int_{\delta}^{+\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dy \right) dt. \blacksquare$$

Обозначим

$$\Phi(\varepsilon, t) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dy$$

и

$$\Psi(\varepsilon, t) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dy.$$

Вычисляя значения функций Φ и Ψ , мы получим

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon, t) &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dy = -\left(\frac{t^2}{1+t^4} \sin y + \frac{1}{1+t^4} \cos y \right) e^{-yt^2} \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} = \\ &= \left(\frac{t^2}{1+t^4} \sin \varepsilon + \frac{1}{1+t^4} \cos \varepsilon \right) e^{-\varepsilon t^2}; \\ \Psi(\varepsilon, t) &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dy = -\left(\frac{t^2}{1+t^4} \cos y - \frac{1}{1+t^4} \sin y \right) e^{-yt^2} \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} = \end{aligned}$$

Лемма 9.2. Интегралы $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\delta}^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dt \right) dy$ и $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\delta}^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dt \right) dy$ сходятся

абсолютно для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, и при этом имеют место равенства

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\delta}^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dt \right) dy = \int_{\delta}^{+\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dy \right) dt$$

и

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\delta}^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dt \right) dy = \int_{\delta}^{+\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dy \right) dt.$$

□ Действительно, выполнены следующие условия:

1) функции $\varphi(y, t) = \sin ye^{-yt^2}$ и $\psi(y, t) = \cos ye^{-yt^2}$ непрерывны на множестве $[\varepsilon, +\infty) \times [\delta, +\infty)$;

2) несобственные интегралы $\int_{\delta}^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dt$ и $\int_{\delta}^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dt$ сходятся равномерно и абсолютно по параметру y на промежутке $[\varepsilon, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса, так как для всех $t \geq \delta$ и $y \geq \varepsilon$ справедливы неравенства

$$|\varphi(y, t)| = |\sin ye^{-yt^2}| \leq e^{-yt^2} \leq e^{-\varepsilon t^2}, \quad |\psi(y, t)| = |\cos ye^{-yt^2}| \leq e^{-yt^2} \leq e^{-\varepsilon t^2},$$

а интеграл $\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\varepsilon t^2} dt$ сходится;

3) несобственные интегралы $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dy$ и $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dy$ сходятся равномерно и абсолютно по параметру t на промежутке $[\delta, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса, так как для всех $t \geq \delta$ и $y \geq \varepsilon$ справедливы неравенства

$$|\varphi(y, t)| = |\sin ye^{-yt^2}| \leq e^{-yt^2} \leq e^{-\delta^2 y}, \quad |\psi(y, t)| = |\cos ye^{-yt^2}| \leq e^{-yt^2} \leq e^{-\delta^2 y},$$

и интеграл $\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-\delta^2 y} dy$ сходится;

4) по признаку сравнения сходятся повторные несобственные интегралы $\int_{\delta}^{+\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} |\sin ye^{-yt^2}| dy \right) dt$ и $\int_{\delta}^{+\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} |\cos ye^{-yt^2}| dy \right) dt$, поскольку выполнены неравенства

параметра y , интегрируемых по переменной x в несобственном смысле на промежутке $[a, +\infty)$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(x, y)$ непрерывна на множестве $P = \{(x, y) \mid x \geq a, c \leq y \leq d\}$;

2) несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на отрезке $[c, d]$.

Тогда функция $\Phi(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ непрерывна на отрезке $[c, d]$.

□ Из первого условия теоремы следует, что для любого $b > a$ собственный интеграл

$$F_b(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

является непрерывной на отрезке $[c, d]$ функцией по теореме 1.2.

Из второго условия теоремы следует, что семейство функций $\{F_b(y) \mid b > a\}$ сходится равномерно к функции $\Phi(y)$ на отрезке $[c, d]$ при $b \rightarrow +\infty$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $A = A(\varepsilon) > a$, что для всех $b > A$ выполнено неравенство

$$\sup_{y \in [c; d]} |F_b(y) - \Phi(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Возьмём произвольную точку $y_0 \in [c, d]$. Тогда из непрерывности функции $F_b(y)$ в точке y_0 следует, что для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $y \in [c, d]$, удовлетворяющих условию $|y - y_0| < \delta$, выполнено неравенство

$$|F_b(y) - F_b(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть b – произвольное число такое, что $b > A$, и y – произвольная точка из отрезка $[c, d]$, удовлетворяющая условию $|y - y_0| < \delta$. Тогда

$$|\Phi(y) - \Phi(y_0)| = |\Phi(y) - F_b(y) + F_b(y) - F_b(y_0) + F_b(y_0) - \Phi(y_0)| \leq$$

$$\leq |\Phi(y) - F_b(y)| + |F_b(y) - F_b(y_0)| + |F_b(y_0) - \Phi(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $y \in [c, d]$, удовлетворяющих условию $|y - y_0| < \delta$, выполнено неравенство

$$|\Phi(y) - \Phi(y_0)| < \varepsilon.$$

Следовательно, функция $\Phi(y)$ непрерывна в точке y_0 . А так как точка y_0 была выбрана произвольно на отрезке $[c, d]$, то функция $\Phi(y)$ непрерывна на всем отрезке $[c, d]$. ■

Теорема 4.4 (собственное интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть $\{f(x, y) | y \in [c, d]\}$ – семейство функций, зависящих от параметра y , интегрируемых по переменной x в несобственном смысле на промежутке $[a, +\infty)$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(x, y)$ непрерывна на множестве $P = \{(x, y) | x \geq a, c \leq y \leq d\}$;

2) несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на отрезке $[c, d]$.

Тогда функция $\Phi(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ интегрируема на отрезке $[c, d]$, и справедливо равенство

$$\int_c^d \Phi(y) dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

□ Так как выполнены условия теоремы 4.1, то функция $\Phi(y)$ непрерывна на отрезке $[c, d]$. Следовательно, функция $\Phi(y)$ интегрируема на отрезке $[c, d]$.

Докажем, что несобственный интеграл

$$\int_c^y \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

Обозначим

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$$

и

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy.$$

Применяя следствие 7.5, мы можем равенство

$$\int_0^{+\infty} e^{-yt^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{y}}$$

записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-yt^2} dt$$

и подставить его в интегралы Френеля:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sin y \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sin y \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-yt^2} dt \right) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dt \right) dy,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \cos y \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \cos y \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-yt^2} dt \right) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dt \right) dy.$$

Заметим, что интеграл $\int_0^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dt$ расходится при $y = 0$, и интегралы

$\int_0^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dy$ и $\int_0^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dy$ расходятся при $t = 0$. Значит, по следствию из

критерия Коши (следствие 3.6) эти интегралы не имеют равномерной сходимости на интервале $(0, +\infty)$, и теорему 4.8 к повторным интегралам

$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dt \right) dy$ и $\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dt \right) dy$ применить нельзя. Поэтому рассмотрим вспомогательные повторные интегралы

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\delta}^{+\infty} \sin ye^{-yt^2} dt \right) dy \text{ и } \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\delta}^{+\infty} \cos ye^{-yt^2} dt \right) dy,$$

где $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Справедлива следующая лемма.

Поскольку существует предел $\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} = 0$, то функция $\frac{1}{2} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}$ интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$. Следовательно, $\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$ – собственный интеграл, и первый интеграл Френеля

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$$

сходится.

Представим второй интеграл Френеля в виде

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy.$$

Несобственный интеграл $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} \cos y \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} dy$ сходится по признаку Дирихле, так как выполнены условия:

- 1) существует такое число $c = 1 > 0$, что для всех $y \geq 1$ выполнено неравенство

$$\left| \int_1^A \frac{1}{2} \cos y dy \right| = \left| \left(\frac{1}{2} \sin y \right) \Big|_1^A \right| = \left| \frac{\sin A}{2} - \frac{\sin 1}{2} \right| \leq \frac{|\sin A|}{2} + \frac{|\sin 1|}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$$

- 2) функция $\frac{1}{\sqrt{y}}$ убывает на промежутке $[1, +\infty)$;

- 3) $\frac{1}{\sqrt{y}} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$.

Несобственный интеграл $\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy$ сходится по признаку сравнения, так как $\frac{1}{2} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{y}}$ для любого $y \in (0,1]$, и интеграл $\int_0^1 \frac{dy}{2\sqrt{y}}$ сходится. Таким образом, второй интеграл Френеля

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy$$

также сходится. ■

сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c, d]$, и имеет место равенство

$$\int_c^y \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^y f(x, y) dy \right] dx$$

для всех $y \in [c, d]$.

Возьмём произвольное значение $b > a$. Тогда на множестве $[a, b] \times [c, d]$ функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.8, согласно которой

$$\int_c^y \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^y f(x, y) dy \right] dx.$$

Для каждого $y \in [c, d]$ рассмотрим интеграл $\int_c^y \Phi(y) dy$:

$$\begin{aligned} \int_c^y \Phi(y) dy &= \int_c^y \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_c^y \left[\int_a^b f(x, y) dx + \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \\ &= \int_c^y \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy + \int_c^y \left[\int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^y f(x, y) dy \right] dy + r(b, y), \end{aligned}$$

где

$$r(b, y) = \int_c^y \left[\int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy.$$

Оценивая для каждого $y \in [c, d]$ величину $r(b, y)$

$$\begin{aligned} |r(b, y)| &= \left| \int_c^y \left[\int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy \right| \leq \int_c^y \left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| dy \leq \int_c^y \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| dy = \\ &= \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| \cdot \int_c^y dy \leq \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| \cdot (d - c), \end{aligned}$$

мы получим неравенство

$$\sup_{y \in [c, d]} |r(b, y)| \leq \sup_{y \in [c, d]} \left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| \cdot (d - c).$$

Так как интеграл $\Phi(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на отрезке $[c, d]$,

то

$$\sup_{y \in [c, d]} \left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| \rightarrow 0 \text{ при } b \rightarrow +\infty,$$

откуда следует, что

$$\sup_{y \in [c, d]} |r(b, y)| \rightarrow 0 \text{ при } b \rightarrow +\infty.$$

Это означает, что интеграл $\int_c^y \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy$ сходится равномерно на отрезке $[c, d]$, и в равенстве

$$\int_c^y \Phi(y) dy = \int_c^y \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy + r(b, y)$$

мы можем перейти к пределу при $b \rightarrow +\infty$. Совершая предельный переход, мы получим

$$\int_c^y \Phi(y) dy = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^y \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy + \lim_{b \rightarrow +\infty} r(b, y) = \int_c^y \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\int_c^y \Phi(y) dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^y f(x, y) dy \right] dx,$$

которое при $y = d$ превращается в равенство

$$\int_c^d \Phi(y) dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \blacksquare$$

Замечание 4.5. В теореме 4.4 мы доказали, что несобственный интеграл

$$\int_c^y \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c, d]$, и имеет место равенство

$$\int_c^y \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^y f(x, y) dy \right] dx$$

§9. Интегралы Френеля.

Несобственные интегралы

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \text{ и } \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$$

называют интегралами Френеля. Изучим свойства интегралов Френеля. Справедлива следующая лемма.

Лемма 9.1. Интегралы Френеля $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ и $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ сходятся.

□ Сделаем замену переменной $x^2 = y$ в каждом из интегралов Френеля:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \left| \begin{matrix} x = \sqrt{y} \\ dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy,$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \left| \begin{matrix} x = \sqrt{y} \\ dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy.$$

Представим первый интеграл Френеля в виде

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy.$$

Несобственный интеграл $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} \sin y \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} dy$ сходится по при-

знаку Дирихле, поскольку:

1) существует такое число $c = 1 > 0$, что для всех $y \geq 1$ выполнено неравенство

$$\left| \int_1^A \frac{1}{2} \sin y dy \right| = \left| \left(-\frac{1}{2} \cos y \right) \Big|_1^A \right| = \left| -\frac{\cos A}{2} + \frac{\cos 1}{2} \right| \leq \frac{|\cos A|}{2} + \frac{|\cos 1|}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$$

2) функция $\frac{1}{\sqrt{y}}$ убывает на промежутке $[1, +\infty)$;

3) $\frac{1}{\sqrt{y}} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$.

$$\frac{d^2 F}{d\alpha^2} - F(\alpha) = -\frac{\pi}{2}.$$

Решая уравнение, мы приходим к равенству

$$F(\alpha) = c_1 e^\alpha + c_2 e^{-\alpha} + \frac{\pi}{2},$$

где неизвестные числа c_1 и c_2 мы определим ниже. Поскольку функция $\Phi(\alpha)$ является производной функции $F(\alpha)$, то мы получим

$$\Phi(\alpha) = F'(\alpha) = c_1 e^\alpha - c_2 e^{-\alpha}.$$

По лемме 8.2 функция $\Phi(\alpha)$ ограничена. А так как

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} e^{-\alpha} = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} e^\alpha = +\infty,$$

то полагаем $c_1 = 0$. Найдем число c_2 , подставляя $\alpha = 0$ в функцию $\Phi(\alpha)$:

$$\Phi(0) = \left(\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \right) \Big|_{\alpha=0} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\Phi(0) = (-c_2 e^{-\alpha}) \Big|_{\alpha=0} = -c_2.$$

Получаем $c_2 = -\frac{\pi}{2}$, и интеграл Лапласа имеет значение

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha} \text{ при } \alpha > 0.$$

По лемме 8.2 $\Phi(\alpha)$ – четная функция. Значит, $\Phi(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 8.4. Интеграл Лапласа сходится равномерно на $\mathbb{R}$, и при этом

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}.$$

Следствие 8.5. При любом $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-|\alpha|}) \operatorname{sign} \alpha.$$

для всех $y \in [c, d]$.

Теорема 4.6 (дифференцирование несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть $\{f(x, y) | y \in [c, d]\}$ – семейство функций, зависящих от параметра y , интегрируемых по переменной x в несобственном смысле на промежутке $[a, +\infty)$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(x, y)$ непрерывна на множестве $P = \{(x, y) | x \geq a, c \leq y \leq d\}$;

2) в каждой точке $(x, y) \in P$ существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$;

3) функция $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывна на множестве P ;

4) несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ сходится равномерно на отрезке $[c, d]$;

5) несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится в некоторой точке $y_0 \in [c, d]$.

Тогда функция $\Phi(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[c, d]$, и справедливо равенство

$$\Phi'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

□ Для любого $y \in [c, d]$ рассмотрим интеграл $\int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy$:

$$\int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy = f(x, y) \Big|_{y_0}^y = f(x, y) - f(x, y_0).$$

Из условий теоремы следует, что функция $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывна на множестве P , а интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ сходится равномерно на отрезке $[c, d]$.

Поэтому мы можем применить к функции

$$F(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

теорему 4.4, согласно которой мы получим равномерно сходящийся на отрезке $[c, d]$ интеграл

$$\int_{y_0}^y \left(\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \right) dy,$$

и при этом

$$\int_{y_0}^y \left(\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = \int_a^{+\infty} (f(x, y) - f(x, y_0)) dx.$$

Представим функцию $\Phi(y)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} (f(x, y) - f(x, y_0)) dx + \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx = \\ &= \int_{y_0}^y \left(\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \right) dy + \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx = \int_{y_0}^y F(y) dy + C, \end{aligned}$$

где

$$C = \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx.$$

Таким образом, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на отрезке

$[c, d]$ как сумма равномерно сходящихся интегралов $\int_{y_0}^y \left(\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \right) dy$ и

$\int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx$, и для всех $y \in [c, d]$ имеет место равенство

4) несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} dx$ сходится при $\alpha = 0$;

5) несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$ сходится равномерно по параметру α на $\mathbb{R}$.

Значит, по теореме 4.6 несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} dx$ сходится

равномерно по параметру α на $\mathbb{R}$, функция $F(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, и для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\frac{d}{d\alpha} F(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} dx \right) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \Phi(\alpha).$$

Тот факт, что функция $F(\alpha)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале $(0, +\infty)$, следует из равенства $F'(\alpha) = \Phi(\alpha)$ и леммы 8.2. ■

Найдем значения функций $F(\alpha)$ и $\Phi(\alpha)$. Из лемм 8.2 и 8.3 следует, что для всех $\alpha > 0$ имеет место равенство

$$\frac{d^2 F}{d\alpha^2} = \frac{d\Phi}{d\alpha} = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx.$$

Преобразуем несобственный интеграл

$$\begin{aligned} - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx &= - \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sin \alpha x}{x(1+x^2)} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^2) - 1}{x(1+x^2)} \sin \alpha x dx = \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} dx. \end{aligned}$$

Учитывая значения интеграла Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

при $\alpha > 0$, мы получим равенство

$$\frac{d^2 F}{d\alpha^2} = -\frac{\pi}{2} + F(\alpha),$$

т.е. дифференциальное уравнение

Лапласа сходится при любом значении параметра α . Значит, по теореме 4.6 функция $\Phi(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $\left[\frac{\alpha_0}{2}, +\infty\right)$, и

при этом имеет место равенство

$$\frac{d}{d\alpha}\Phi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left(\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{(-x)\sin \alpha x}{1+x^2} dx.$$

Поскольку $\alpha_0 \in \left[\frac{\alpha_0}{2}, +\infty\right)$, то функция $\Phi(\alpha)$ непрерывно дифференцируема в точке α_0 . А так как точка $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ была выбрана произвольным образом, то функция $\Phi(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на всем интервале $(0, +\infty)$. ■

Обозначим функцию

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} dx,$$

и изучим ее свойства. Справедлива следующая лемма.

Лемма 8.3. Функция $F(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, дважды непрерывно дифференцируема на интервале $(0, +\infty)$, и при этом для всех $\alpha \in \mathbb{R}$

$$F'(\alpha) = \Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx.$$

□ Действительно, выполнены следующие условия:

1) функция $f(x, \alpha) = \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)}$ непрерывна на множестве $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, и

при этом

$$f(0, \alpha) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} = \alpha;$$

2) $\frac{\partial}{\partial \alpha}(f(x, \alpha)) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)}\right) = \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}$ для всех $x \in [0, +\infty)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$;

3) функция $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}$ непрерывна на множестве $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$;

$$\Phi(y) = \int_{y_0}^y F(y) dy + C.$$

Дифференцируя это равенство, для всех $y \in [c, d]$ получим

$$\Phi'(y) = \frac{d}{dy}\left(\int_{y_0}^y F(y) dy + C\right) = \frac{d}{dy}\left(\int_{y_0}^y F(y) dy\right) + C' = F(y).$$

И так как функция $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.3, то функция

$F(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ непрерывна на отрезке $[c, d]$, а функция $\Phi(y)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[c, d]$. ■

Замечание 4.7. Утверждение теоремы 4.6 можно переписать в виде

$$\frac{d}{dy}\left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx\right] = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Теорема 4.8 (несобственное интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть $\{f(x, y) | y \in [c, +\infty)\}$ – семейство функций, зависящих от параметра y , интегрируемых по переменной x в несобственном смысле на промежутке $[a, +\infty)$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(x, y)$ непрерывна на множестве $P = \{(x, y) | x \geq a, y \geq c\}$;

2) для любого $d > c$ несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c, d]$;

3) для любого $b > a$ несобственный интеграл $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ сходится равномерно по параметру x на отрезке $[a, b]$;

4) для каждого $y \geq c$ сходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$;

5) для каждого $x \geq a$ сходится несобственный интеграл $\int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$;

6) существует хотя бы один из повторных интегралов

$$\int_a^{+\infty} \left(\int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy \right) dx \text{ или } \int_c^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx \right) dy.$$

Тогда функция $\Phi(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[c, +\infty)$ и справедливо равенство

$$\int_c^{+\infty} \Phi(y) dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx.$$

□ Пусть, для определённости, сходится несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} \left(\int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy \right) dx.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

для любого $y \in [c, d]$, где $d > c$ — произвольно. Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.4 на множестве $\{(x, y) | x \geq a, c \leq y \leq d\}$, и согласно теореме 4.4 справедливо равенство

$$\int_c^d \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Докажем возможность предельного перехода в этом равенстве при $d \rightarrow +\infty$. Для этого обозначим

$$F_d(x) = \int_c^d f(x, y) dy \text{ и } F(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy,$$

и для семейства функций $\{F_d(x) | d \in [c, +\infty)\}$ проверим выполнение условий теоремы 4.1.

Во-первых, семейство функций $\{F_d(x) | d \in [c, +\infty)\}$ сходится равномерно к функции $F(x)$ при $d \rightarrow +\infty$ на любом отрезке $[a, b]$. Действительно, из рав-

Так как функция $\varphi(x, \alpha) = \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}$ непрерывна на множестве $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$,

и интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$ сходится равномерно по параметру α на $\mathbb{R}$, то по

теореме 4.3 функция $\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Ограниченность функции $\Phi(\alpha)$ вытекает из неравенства

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right| dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

которое имеет место для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Пусть $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ выбрано произвольным образом. Рассмотрим функцию

$$\psi(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\varphi(x, \alpha)) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right) = -\frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}$$

для всех $x \geq 0$ и $\alpha \geq \frac{\alpha_0}{2}$. Для несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{(-x) \sin \alpha x}{1+x^2} dx$ вы-

полнены следующие условия:

1. существует такое число $c = \frac{4}{\alpha_0} > 0$, что для всех $A \geq 0$ и $\alpha \geq \frac{\alpha_0}{2}$ имеет

место неравенство

$$\left| -\int_0^A \sin \alpha x dx \right| = \left| \frac{1}{\alpha} \cos \alpha x \Big|_0^A \right| = \left| \frac{\cos \alpha A}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right| \leq \frac{|\cos \alpha A|}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \leq \frac{2}{\alpha} \leq \frac{4}{\alpha_0};$$

2. функция $\frac{x}{1+x^2}$ убывает на промежутке $[1, +\infty)$;

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$.

Следовательно, несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{(-x) \sin \alpha x}{1+x^2} dx$ сходится равно-

мерно на промежутке $\left[\frac{\alpha_0}{2}, +\infty \right)$ по признаку Дирихле. Кроме того, функция

$\psi(x, \alpha) = -\frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}$ непрерывна на множестве $[0, +\infty) \times \left[\frac{\alpha_0}{2}, +\infty \right)$, а интеграл

§8. Интеграл Лапласа.

Несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$$

называют интегралом Лапласа. Изучим свойства интеграла Лапласа. Справедлива следующая лемма.

Лемма 8.1. Интеграл Лапласа $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$ сходится равномерно по параметру α на $\mathbb{R}$.

□ Действительно, для всех $x \in [0, +\infty)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2},$$

и при этом несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится. Значит, по признаку

Вейерштрасса интеграл Лапласа $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$ сходится равномерно по параметру α на $\mathbb{R}$. ■

Обозначим функцию

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 8.2. Функция $\Phi(\alpha)$ имеет следующие свойства:

- 1) $\Phi(\alpha)$ – четная функция на $\mathbb{R}$;
- 2) $\Phi(\alpha)$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}$;
- 3) $\Phi(\alpha)$ – ограниченная функция на $\mathbb{R}$;
- 4) $\Phi(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(0, +\infty)$.

□ Действительно, для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет равенство

$$\Phi(-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(-\alpha x)}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \Phi(\alpha),$$

откуда следует, что $\Phi(\alpha)$ – четная функция на $\mathbb{R}$.

номерной сходимости интеграла $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ по параметру x на отрезке $[a, b]$ (условие 3 теоремы) мы имеем

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |F_d(x) - F(x)| &= \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_c^d f(x, y) dy - \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right| = \\ &= \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_d^{+\infty} f(x, y) dy \right| \rightarrow 0 \text{ при } d \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

откуда и следует

$$F_d(x) \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} F(x) \text{ на } [a, b].$$

Во-вторых, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} F_d(x) dx$ сходится равномерно по параметру d на промежутке $[c, +\infty)$. Действительно, из неравенства

$$|F_d(x)| = \left| \int_c^d f(x, y) dy \right| \leq \int_c^d |f(x, y)| dy \leq \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$$

и сходимости интеграла $\int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$ (условие 5 теоремы) для каждого $x \geq a$ мы имеем неравенство

$$|F_d(x)| \leq g(x),$$

где $g(x) = \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$, и при этом несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, поскольку

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy \right) dx$$

(условие 6 теоремы). Для интеграла $\int_a^{+\infty} F_d(x) dx$ выполнены все условия при-

знака Вейерштрасса, поэтому несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} F_d(x) dx$ сходится абсолютно и равномерно по параметру d на промежутке $[c, +\infty)$.

Для семейства функций $\{F_d(x) | d \in [c, +\infty)\}$ выполнены все условия теоремы 4.1. Поэтому мы можем совершить предельный переход при $d \rightarrow +\infty$ под знаком несобственного интеграла:

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} F_d(x) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{d \rightarrow +\infty} F_d(x) dx = \int_a^{+\infty} F(x) dx ,$$

т.е.

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^{+\infty} \left[\lim_{d \rightarrow +\infty} \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx .$$

Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \int_c^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy &= \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_c^d \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_a^d \left[\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx = \\ &= \int_a^{+\infty} \left[\lim_{d \rightarrow +\infty} \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx . \blacksquare \end{aligned}$$

Замечание 4.9. Утверждение теоремы 4.8 можно переписать в виде:

$$\int_c^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx .$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt \right) d\alpha = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha \right) dt . \blacksquare$$

Применяя леммы 7.1 – 7.3, получим

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_0^{+\infty} \Phi(\alpha) d\alpha = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt \right) d\alpha = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha \right) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2(1+t^2)} e^{-\alpha^2(1+t^2)} \right) \bigg|_{\alpha=0}^{+\infty} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} , \end{aligned}$$

откуда следует

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 7.4. Интеграл Эйлера-Пуассона сходится, и при этом

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Следствие 7.5. При любом $\alpha > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} .$$

Лемма 7.3. Повторный несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha \right) dt$

сходится, и при этом

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha \right) dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt \right) d\alpha.$$

□ Проверим выполнение условий теоремы о несобственном интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра. Действительно, мы имеем:

1) функция $\alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)}$ непрерывна на множестве $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$;

2) для любого $T > 0$ интеграл $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha$ сходится равномерно по параметру t на отрезке $[0, T]$ по признаку Вейерштрасса, так как для всех $\alpha \geq 0$ и $t \in [0, T]$ выполнено неравенство $\alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} \leq \alpha e^{-\alpha^2}$, и сходится интеграл $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha$;

3) для любых $0 < \varepsilon < E < +\infty$ интеграл $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt$ сходится равномерно по параметру α на отрезке $[\varepsilon, E]$ по признаку Вейерштрасса, поскольку для всех $t \geq 0$ и $\alpha \in [\varepsilon, E]$ выполнено неравенство $\alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} \leq E e^{-\varepsilon^2(1+t^2)}$, и сходится интеграл $\int_0^{+\infty} E e^{-\varepsilon^2(1+t^2)} dt$;

4) сходится повторный несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt \right) d\alpha$ по лемме 7.2.

Выполнены все условия теоремы 4.8 о несобственном интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра. Значит, сходится повторный несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha \right) dt$, и при этом

§5. Интегралы Фруллани.

Несобственные интегралы вида

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \quad a, b > 0,$$

называют интегралами Фруллани. Изучим свойства интегралов Фруллани.

Лемма 5.1. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- 1) функция f определена и непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$;
- 2) существует конечный предел $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(+\infty) - f(0)) \cdot \ln \frac{a}{b}.$$

□ Из условия 1 следует, что для любых значений $0 < \gamma < \Gamma < +\infty$ существует интеграл

$$\int_{\gamma}^{\Gamma} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{\gamma}^{\Gamma} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\gamma}^{\Gamma} \frac{f(bx)}{x} dx.$$

В каждом интеграле сделаем замену переменных:

$$\int_{\gamma}^{\Gamma} \frac{f(ax)}{x} dx = \left| \begin{array}{l} ax = y \\ dx = \frac{dy}{a} \end{array} \right| = \int_{a\gamma}^{a\Gamma} \frac{f(y)}{\frac{y}{a}} \frac{dy}{a} = \int_{a\gamma}^{a\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy,$$

$$\int_{\gamma}^{\Gamma} \frac{f(bx)}{x} dx = \left| \begin{array}{l} bx = y \\ dx = \frac{dy}{b} \end{array} \right| = \int_{b\gamma}^{b\Gamma} \frac{f(y)}{\frac{y}{b}} \frac{dy}{b} = \int_{b\gamma}^{b\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma}^{\Gamma} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{\gamma}^{\Gamma} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\gamma}^{\Gamma} \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{a\gamma}^{a\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy - \int_{b\gamma}^{b\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy = \\ &= \left(\int_{a\gamma}^{b\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy + \int_{b\Gamma}^{a\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy \right) - \left(\int_{b\gamma}^{a\gamma} \frac{f(y)}{y} dy + \int_{a\gamma}^{b\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy \right) = \int_{b\Gamma}^{a\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy - \int_{b\gamma}^{a\gamma} \frac{f(y)}{y} dy. \end{aligned}$$

Применяя к каждому из интегралов первую теорему о среднем, мы получим, что существуют такие числа $\xi, \eta \in (a, b)$, что

$$\int_{b\Gamma}^{a\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy = f(\xi\Gamma) \int_{b\Gamma}^{a\Gamma} \frac{dy}{y} = f(\xi\Gamma) \cdot (\ln(a\Gamma) - \ln(b\Gamma)) = f(\xi\Gamma) \cdot \ln \frac{a}{b}$$

и

$$\int_{b\gamma}^{a\gamma} \frac{f(y)}{y} dy = f(\eta\gamma) \int_{b\gamma}^{a\gamma} \frac{dy}{y} = f(\eta\gamma) \cdot (\ln(a\gamma) - \ln(b\gamma)) = f(\eta\gamma) \cdot \ln \frac{a}{b}.$$

Тогда

$$\int_{\gamma}^{\Gamma} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{b\Gamma}^{a\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy - \int_{b\gamma}^{a\gamma} \frac{f(y)}{y} dy = f(\xi\Gamma) \cdot \ln \frac{a}{b} - f(\eta\gamma) \cdot \ln \frac{a}{b}.$$

Так как $a < \xi < b$ и $a < \eta < b$, то $\xi\Gamma \rightarrow +\infty$ при $\Gamma \rightarrow +\infty$, $\eta\gamma \rightarrow 0+$ при $\gamma \rightarrow 0+$, и из условий 1 и 2 мы получим

$$\lim_{\Gamma \rightarrow +\infty} f(\xi\Gamma) = f(+\infty) \text{ и } \lim_{\gamma \rightarrow 0+} f(\eta\gamma) = f(0).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \lim_{\substack{\Gamma \rightarrow +\infty \\ \gamma \rightarrow 0+}} \int_{\gamma}^{\Gamma} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\Gamma \rightarrow +\infty} f(\xi\Gamma) \cdot \ln \frac{a}{b} - \\ &- \lim_{\gamma \rightarrow 0+} f(\eta\gamma) \cdot \ln \frac{a}{b} = f(+\infty) \ln \frac{a}{b} - f(0) \ln \frac{a}{b} = (f(+\infty) - f(0)) \ln \frac{a}{b}. \blacksquare \end{aligned}$$

Лемма 5.2. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1. функция f определена и непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$;
2. для любого $A > 0$ сходится несобственный интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$.

Тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

□ Из условия 2 следует, что для любых значений $0 < \gamma < +\infty$ сходится несобственный интеграл I рода

$$\int_{\gamma}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx.$$

После замены переменной в каждом интеграле

Лемма 7.2. Интеграл $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt$ сходится при любом значении $\alpha > 0$;

при этом функция $\Phi(\alpha)$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $(0, +\infty)$, и имеет место равенство

$$\int_0^{+\infty} \Phi(\alpha) d\alpha = J^2.$$

□ Для несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt$ выполнены следующие ус-

ловия:

- 1) для всех $t \geq 0$ справедливо неравенство $\alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} \leq \alpha e^{-\alpha^2 t}$;
- 2) интеграл $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 t} dt$ сходится, поскольку

$$\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \alpha e^{-\alpha^2 t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha^2 t} \Big|_0^A \right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-\alpha^2 A}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt$ сходится по при-

знаку сравнения.

Сделаем замену переменной в интеграле Эйлера-Пуассона:

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left| \begin{matrix} x = \alpha t \\ dx = \alpha dt \end{matrix} \right|_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 t^2} dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \Phi(\alpha) d\alpha &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \Phi(\alpha) d\alpha = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt \right) d\alpha = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2} e^{-\alpha^2 t^2} dt \right) d\alpha = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-\alpha^2} \left(\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2} dt \right) d\alpha = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-\alpha^2} \cdot J d\alpha = J \cdot \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-\alpha^2} d\alpha = J \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = J^2. \blacksquare \end{aligned}$$

§7. Интеграл Эйлера-Пуассона.

Несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

называют интегралом Эйлера-Пуассона. Изучим свойства интеграла Эйлера-Пуассона. Справедлива следующая лемма.

Лемма 7.1. Интеграл Эйлера-Пуассона $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ сходится.

□ Действительно, представим интеграл Эйлера-Пуассона в виде

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ сходится по признаку сравнения, по-

скольку:

1) для всех $x \geq 1$ выполнено неравенство $e^{-x^2} \leq e^{-x}$;

2) интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ сходится.

Так как функция e^{-x^2} непрерывна на $[0,1]$, то она интегрируема по Риману на $[0,1]$. Следовательно, $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ – собственный интеграл, и интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ сходится. } \blacksquare$$

Обозначим

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt,$$

и изучим его свойства. Справедливы следующие леммы.

$$\int_{\gamma}^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx = |ax=y| = \int_{a\gamma}^{+\infty} \frac{f(y)}{y} dy \text{ и } \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = |bx=y| = \int_{b\gamma}^{+\infty} \frac{f(y)}{y} dy$$

мы получим

$$\int_{\gamma}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\gamma}^{+\infty} \frac{f(y)}{y} dy - \int_{b\gamma}^{+\infty} \frac{f(y)}{y} dy = - \int_{b\gamma}^{a\gamma} \frac{f(y)}{y} dy.$$

По первой теореме о среднем найдется такая точка $\eta \in (a, b)$, что

$$\int_{b\gamma}^{a\gamma} \frac{f(y)}{y} dy = f(\eta\gamma) \int_{b\gamma}^{a\gamma} \frac{dy}{y} = f(\eta\gamma) \cdot \ln \frac{a}{b}.$$

Тогда

$$\int_{\gamma}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = - \int_{b\gamma}^{a\gamma} \frac{f(y)}{y} dy = -f(\eta\gamma) \cdot \ln \frac{a}{b} = f(\eta\gamma) \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

Так как $a < \eta < b$, то $\eta\gamma \rightarrow 0+$ при $\gamma \rightarrow 0+$, и в силу непрерывности функции f в точке $x = 0$ мы получим

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0+} f(\eta\gamma) = f(0).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \lim_{\gamma \rightarrow 0+} \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0+} f(\eta\gamma) \cdot \ln \frac{b}{a} = f(0) \cdot \ln \frac{b}{a}. \blacksquare \end{aligned}$$

Лемма 5.3. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1. функция f определена и непрерывна на интервале $(0, +\infty)$;
2. существует конечный предел $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;
3. для любого $A > 0$ сходится несобственный интеграл $\int_0^A \frac{f(x)}{x} dx$.

Тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(+\infty) \cdot \ln \frac{a}{b}.$$

□ Из условия 3 следует, что для любых значений $0 < \Gamma < +\infty$ сходится несобственный интеграл II рода

$$\int_0^{\Gamma} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_0^{\Gamma} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_0^{\Gamma} \frac{f(bx)}{x} dx.$$

После замены переменной в каждом интеграле

$$\int_0^{\Gamma} \frac{f(ax)}{x} dx = |ax = y| = \int_0^{a\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy \quad \text{и} \quad \int_0^{\Gamma} \frac{f(bx)}{x} dx = |bx = y| = \int_0^{b\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy$$

мы получим

$$\int_0^{\Gamma} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_0^{a\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy - \int_0^{b\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy = \int_{b\Gamma}^{a\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy.$$

По первой теореме о среднем найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\int_{b\Gamma}^{a\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy = f(\xi\Gamma) \int_{b\Gamma}^{a\Gamma} \frac{dy}{y} = f(\xi\Gamma) \cdot \ln \frac{a}{b}.$$

Тогда

$$\int_0^{\Gamma} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{b\Gamma}^{a\Gamma} \frac{f(y)}{y} dy = f(\xi\Gamma) \cdot \ln \frac{a}{b}.$$

Так как $a < \xi < b$, то $\xi\Gamma \rightarrow +\infty$ при $\Gamma \rightarrow +\infty$, и из условия 2 мы получим

$$\lim_{\Gamma \rightarrow +\infty} f(\xi\Gamma) = f(+\infty).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \lim_{\Gamma \rightarrow +\infty} \int_0^{\Gamma} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \\ &= \lim_{\Gamma \rightarrow +\infty} f(\xi\Gamma) \cdot \ln \frac{a}{b} = f(+\infty) \cdot \ln \frac{a}{b}. \blacksquare \end{aligned}$$

Проверим выполнение условий теоремы о предельном переходе под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра. Действительно, выполнены следующие условия:

1) для каждого $B \in (0, +\infty)$ семейство функций $\frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x}$ сходится равномерно

на отрезке $[0, B]$ к функции $\frac{\sin \alpha x}{x}$, так как из неравенств

$|\sin \alpha x| \leq \alpha x$ и $e^{-\beta B} \leq e^{-\beta x} \leq 1$ следует

$$\sup_{x \in [0, B]} \left| \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} - \frac{\sin \alpha x}{x} \right| = \sup_{x \in [0, B]} (1 - e^{-\beta x}) \frac{|\sin \alpha x|}{x} \leq \alpha (1 - e^{-\beta B}) \xrightarrow{\beta \rightarrow 0+} 0;$$

2) интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$ сходится равномерно по параметру β на интервале $(0, +\infty)$.

Значит, по теореме о предельном переходе под знаком несобственного ин-

теграла, зависящего от параметра, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$ допускает пре-

дельный переход по параметру при $\beta \rightarrow 0+$, т.е. имеет место равенство

$$\lim_{\beta \rightarrow 0+} F(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow 0+} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx \right) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{\beta \rightarrow 0+} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

С другой стороны, из леммы 6.2 следует, что

$$\lim_{\beta \rightarrow 0+} F(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow 0+} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx \right) = \lim_{\beta \rightarrow 0+} \arctg \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0+} F(\beta) = \frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

Из лемм 6.1 – 6.3 следует следующая теорема.

Теорема 6.4. Интеграл Дирихле сходится при любом $\alpha \in \mathbb{R}$, и при этом

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha.$$

$$\Psi(0) = \left(\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} + c \right) \Big|_{\alpha=0} = c ,$$

откуда следует, что $c = 0$ и

$$\Psi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} . \blacksquare$$

Пусть $\alpha > 0$ имеет фиксированное значение, и рассмотрим интеграл

$$F(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx , \quad \beta > 0 .$$

Изучим свойства функции $F(\beta)$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 6.3. Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$ сходится равномерно по параметру

β на интервале $(0, +\infty)$, допускает предельный переход по параметру при $\beta \rightarrow 0+$, и при этом

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0+} F(\beta) = \frac{\pi}{2} .$$

□ Исследуем интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$ на равномерную сходимость по

признаку Абеля. Действительно, выполнены следующие условия:

а) интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ сходится по лемме 6.1;

б) при каждом $0 < \beta < +\infty$ функция $e^{-\beta x}$ убывает на промежутке $[0, +\infty)$;

в) семейство функций $\{e^{-\beta x} | 0 < \beta < +\infty\}$ равномерно ограничено на промежутке $[0, +\infty)$, так как для любых $0 < \beta < +\infty$ и $x \in [0, +\infty)$ выполнено неравенство $0 < e^{-\beta x} \leq 1$.

Значит, по признаку Абеля интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$ сходится равномерно

по параметру β на интервале $(0, +\infty)$ при любом фиксированном $\alpha > 0$.

§6. Интеграл Дирихле.

Несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx ,$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, называют интегралом Дирихле. Обозначим

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx ,$$

и изучим свойства функции $\Phi(\alpha)$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 6.1. Интеграл Дирихле сходится при любом $\alpha \in \mathbb{R}$, и при этом:

1. $\Phi(0) = 0$;
2. $\Phi(-\alpha) = -\Phi(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\Phi(\alpha) = \Phi(1)$ для любого $\alpha > 0$.

□ Пусть $\alpha > 0$ имеет фиксированное значение. Представим интеграл Дирихле в виде

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx .$$

Исследуем несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ на сходимость по признаку Дирихле. Действительно, выполнены следующие условия:

1) существует такое число $c = \frac{2}{\alpha} > 0$, что для всех $A > 1$ выполнено нера-

венство

$$\left| \int_1^A \sin \alpha x dx \right| = \left| \left(-\frac{\cos \alpha x}{\alpha} \right) \Big|_1^A \right| = \left| \frac{\cos \alpha}{\alpha} - \frac{\cos(\alpha A)}{\alpha} \right| \leq \frac{|\cos \alpha|}{\alpha} + \frac{|\cos(\alpha A)|}{\alpha} \leq \frac{2}{\alpha} ;$$

2) функция $\frac{1}{x}$ убывает на промежутке $[1, +\infty)$;

3) функция $\frac{1}{x}$ стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Значит, по признаку Дирихле несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ сходится при любом $\alpha > 0$.

Поскольку существует предел $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$, то функция $\frac{\sin \alpha x}{x}$ интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, $\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ – собственный

интеграл, и интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ сходится при любом $\alpha > 0$.

Свойства функции $\Phi(\alpha)$ проверяются непосредственно. Действительно,

$$1. \Phi(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(0 \cdot x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0;$$

$$2. \Phi(-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-\alpha)x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(-\sin \alpha x)}{x} dx = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = -\Phi(\alpha);$$

$$3. \Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \cdot \alpha dx = \left| \begin{matrix} \alpha x = t \\ \alpha dx = dt \end{matrix} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \Phi(1) \quad \text{для}$$

любого $\alpha > 0$. ■

Продифференцируем по параметру функцию $\frac{\sin \alpha x}{x}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right) = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sin \alpha x) = \frac{1}{x} \cdot \cos \alpha x \cdot x = \cos \alpha x.$$

Так как интеграл $\int_0^{+\infty} \cos \alpha x dx$ расходится, то теорему о дифференцировании

несобственного интеграла по параметру к интегралу $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ применить

нельзя.

Введём множитель сходимости $e^{-\beta x}$, где $\beta > 0$ имеет фиксированное значение, и рассмотрим интеграл

$$\Psi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Изучим свойства функции $\Psi(\alpha)$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 6.2. Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$ допускает дифференцирование по параметру при любом $\alpha \in \mathbb{R}$, и при этом

$$\Psi(\alpha) = \arctg \frac{\alpha}{\beta}.$$

□ Продифференцируем по параметру функцию $\frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} \right) = \frac{e^{-\beta x}}{x} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sin \alpha x) = \frac{e^{-\beta x}}{x} \cdot \cos \alpha x \cdot x = e^{-\beta x} \cos \alpha x.$$

Заметим, что: 1) $|e^{-\beta x} \cos \alpha x| \leq e^{-\beta x}$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x \in [0, +\infty)$; 2) несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} dx$ сходится. Значит, по признаку Вейерштрасса не-

собственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x dx$ сходится равномерно по параметру α на $(-\infty, +\infty)$, и мы можем применить к $\Psi(\alpha)$ теорему о дифференцировании несобственного интеграла, зависящего от параметра по параметру:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx \right) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} \right) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Интегрируя $\frac{d\Psi}{d\alpha}$, мы имеем

$$\Psi(\alpha) = \int \frac{d\Psi}{d\alpha} d\alpha = \beta \int \frac{d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = \beta \cdot \frac{1}{\beta} \arctg \frac{\alpha}{\beta} + c = \arctg \frac{\alpha}{\beta} + c.$$

Подставляя $\alpha = 0$ в формулы, выражающие значения функции Ψ , мы получим

$$\Psi(0) = \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx \right) \Big|_{\alpha=0} = 0$$

и