ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г. ШЕВЧЕНКО

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа и приложений

Индивидуальная работа по дифференциальным уравнениям

Методические указания

Тирасполь - 2016

УДК 519.9 (072.8)
ББК В161.6р30
И60

Составители:
Л.В. Чуйко, канд. пед. наук, доцент кафедры математического анализа и приложений ПГУ им. Т.Г. Шевченко
Ю.А. Баренгольц, канд. ф-м. наук, доцент, зав. кафедрой математического анализа и приложений ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Рецензенты:
Г.И. Ворническу, канд. ф-м. наук, доцент кафедры математического анализа и приложений ПГУ им. Т.Г. Шевченко
В.М. Погорлецкий, канд. ф-м. наук, доцент, зав. кафедрой электроэнергетики и электротехники ПГУ им. Т.Г. Шевченко

И60 **Индивидуальная работа по дифференциальным уравнениям.** Методические указания / Сост.: Л.В. Чуйко, Ю.А. Баренгольц. – Тирасполь, 2016.– 44с.

В пособии рассматриваются основные типы дифференциальных уравнений и способы их решения. Приводится подробное решение задач примерного варианта и 20 вариантов индивидуальной самостоятельной работы. Целью методических указаний является помочь студентам в выполнении индивидуальной самостоятельной работы по дифференциальным уравнениям.

При составлении пособия учтены требования Федерального Государственного образовательного стандарта ВО третьего поколения по направлениям 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 09.03.02 Информационные системы и технологии, 09.03.04 Программная инженерия.

Адресуется студентам инженерных специальностей

УДК 519.9 (072.8)
ББК В161.6р30

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших условий успешной реализации политехнического принципа и усиления практической направленности обучения математике является повышение алгоритмической культуры студентов. Вузовский курс высшей математики представляет широкие возможности для формирования у студентов важнейших элементов алгоритмической культуры: понимание сущности алгоритма и его свойств, владение приемами и средствами для записи алгоритмов, понимание алгоритмического характера методов математики, владение важнейшими алгоритмами вузовского курса математики.

Задача преподавателя – организовать выполнение практических работ таким образом, чтобы каждое усилие по выполнению этих работ протекало в условиях развития познавательных способностей студентов, формированию у них основных приемов умственной деятельности. Критерием деятельности преподавателя является конечный результат: дать студенту не только набор знаний по предмету, а сформировать личность готовую к творческой деятельности. Творческая деятельность студента не должна ограничиваться лишь приобретением новых знаний. Работа будет творческой, когда в ней проявляется собственный замысел студента, ставятся новые задачи и самостоятельно решаются при помощи приобретенных знаний. Именно поэтому, главной целью составителей данного пособия является пробуждение у студентов желания самостоятельно решить предлагаемую индивидуальную работу.

В пособии рассматриваются основные типы дифференциальных уравнений и способы их решения. Приводится подробное решение задач примерного варианта с краткими теоретическими сведениями и 20 вариантов индивидуальной самостоятельной работы.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется равенство, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и её производные различных порядков $y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}$. Символически обыкновенное дифференциальное уравнение можно записать в виде:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1)$$

Наивысший из указанных порядков производных называется *порядком дифференциального уравнения*. Например, уравнения

$$2xy' - 3y^2 = 0, \qquad 5y'' + 2x^2 y = 0, \qquad y^{(\mathrm{V})} = 3x^2$$

– есть дифференциальные уравнения соответственно 1-го, 2-го и 5-го порядков.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F\left(x, y, y'\right) = 0. \qquad (2)$$

В частном случае уравнение (2) может не содержать x или y (или обе эти переменные).

Если уравнение (2) разрешено относительно производной, его называют *уравнением в нормальной форме*:

$$y' = f\left(x, y\right). \qquad (3)$$

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение его в тождество. Например, непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что функция x^2 является решением уравнения

$$xy' - 2y = 0. \qquad (4)$$

Однако, решением дифференциального уравнения (4) является не только x^2, но и любая функция вида Cx^2, где C – произвольная постоянная.

Общим решением дифференциального уравнений (2) или (3) называется такая функция $\varphi\left(x, C\right)$, которая при любом постоянном C является решением уравнений (2) или (3).

Решения $\varphi\left(x, C_0\right)$, которые получаются из общего решения $\varphi\left(x, C\right)$ при конкретном численном значении $C = C_0$, называются *частными решениями* дифференциального уравнения. Таким образом, общее решение содержит в себе бесчисленное множество частных решений.

Общим интегралом дифференциальных уравнений (2) и (3) называется его решение, полученное в неявной форме

$$\Phi\left(x, y, C\right) = 0. \qquad (5)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (4). Мы уже видели, что функция $y = Cx^2$ является общим решением этого уравнения. Поставим задачу найти такое частное решение дифференциального уравнения (4), которое удовлетворяет равенству

$$y\big|_{x=2} = 12 \qquad \text{или} \qquad y(2) = 12\,.$$

Если в равенство $y = C\,x^2$ подставить $x = 2$, $y = 12$, то получится $12 = 4C$, откуда $C = 3$. Стало быть, соотношение (5) привело к выделению из общего решения $y = C\,x^2$ (т. е. из целого семейства решений) индивидуального частного решения $y = 3x^2$. На основании некоторых механических аналогий соотношение (5) называется *начальным условием*. В общем случае начальное условие записывается в виде

$$y(x_0) = y_0\,. \tag{6}$$

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка заключается в нахождении частного решения уравнений (2) или (3) при заданном начальном условии (6).

Зная общее решение, всегда можно найти частное, удовлетворяющее условию (6). Именно, если $y = \varphi\,(x, C)$ – есть общее решение, то подстановка в него значений $x = x_0$ и $y = y_0$ даёт уравнение с одним неизвестным $y_0 = \varphi(x_0, C)$, из которого и находится C.

Так бывает, однако, не всегда. Встречаются дифференциальные уравнения, имеющие такие решения, которые не следует из общего решения ни при каком значении постоянной C. Такие решения называются *особыми.* Например, простой проверкой убеждаемся, что функция $y = (C \pm x)^2$ является общим решением дифференциального уравнения

$$(y')^2 = 4y\,. \tag{7}$$

Однако дифференциальное уравнение (7) имеет ещё и особое решение $y = 0$, которое не получается из общего ни при каком значении постоянной C. Вопрос о нахождении особых решений достаточно сложен, и в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением уравнений, имеющих только общие и частные решения.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ К ЗАДАНИЯМ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными (теоретические сведения к заданию 1)

Дифференциальное уравнение в нормальной форме вида

$$y' = f(x)g(y). \tag{1.1}$$

называется уравнением с *разделёнными переменными*.

Такие уравнения могут быть заданы и через дифференциалы:

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0, \tag{1.2}$$

где $M(x)$ и $N(y)$ – функции одной переменной. Теперь понятно, почему рассматриваемое дифференциальное уравнение носит вышеуказанное название – в нём одно слагаемое зависит только от x, а другое – только от y, т.е. переменные разделены. Для решения уравнения (1.2) или его аналога – уравнения (1.1) – достаточно проинтегрировать обе части (1.2), что даёт

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C, \tag{1.3}$$

откуда

$$F(x) + G(y) = C, \tag{1.4}$$

где $F(x)$ и $G(y)$ – первообразные функций $M(x)$ и $N(y)$.

Если уравнение (1.4) разрешимо относительно y, из него следует общее решение:

$$y = \varphi(x, C). \tag{1.5}$$

Равенство (1.5) является *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Задачу решения дифференциального уравнения считают выполненной уже тогда, когда найден его общий интеграл. Более того, если общий интеграл (или решение) уравнения не удается выразить через «берущиеся» интегралы, то и тогда оно считается решенным.

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\, g_2(y)dx + f_2(x)\, g_1(y)\, dy = 0 \tag{1.6}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Оно легко приводится к виду (1.3). Действительно, достаточно разделить (1.6) на произведение $f_2(x)g_2(y)$, чтобы прийти к уравнению

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = 0, \tag{1.7}$$

в котором, переменные уже разделены.

2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка (теоретические сведения к заданию 2)

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется такое

уравнение, в которое неизвестные элементы y и y' входят в первых или нулевых степенях, не перемножаясь между собой.
Символически линейное уравнение записывают в виде

$$y' + p(x)y = f(x). \qquad (2.1)$$

Существует 2 способа решения уравнения (2.1). Изложим приём Иоганна Бернулли (математик конца XVII – начала XVIII веков). Метод основан на простом замечании, что любую величину h (переменную или постоянную) можно представить в виде произведения двух сомножителей $h = uv$, причём один из них (например, υ) можно выбрать по своему желанию (лишь бы он был отличен от нуля). Например, в равенстве $tg\, x = u\upsilon$ можем взять $\upsilon = e^x$, или $\upsilon = \ln x$, или $\upsilon = \arcsin x$ и т. д. Соответственно этому придётся взять $u = e^{-x} tg\, x$, или $u = \dfrac{tg\, x}{\ln x}$, или $u = \dfrac{tg\, x}{\arcsin x}$.

Изложенный прием с успехом применяется и к так называемому уравнению Бернулли

$$y' + p(x)\, y = f(x)\, y^{\alpha}, \qquad (2.2)$$

представляющему собой обобщение линейного уравнения. Последнее получатся из (2.2) при $\alpha = 0$.

3. Однородные функции и однородные дифференциальные уравнения (теоретические сведения к заданию 3)

Функция нескольких переменных называется *однородной* степени n, если умножение всех ее аргументов на одну и ту же переменную t равносильно умножению функции на t^n.

В частности, для функции двух аргументов $F(x, y)$ это означает, что

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y) \qquad (3.1)$$

Например, функции $x^3 + 2x^2y - 5y^3$, $3x + 2y$, $\dfrac{x-y}{2x+3y}$, $x^2 \sin\dfrac{y}{x}$, $\sqrt[3]{x^2 + y^2}$, $\dfrac{1}{x+y}$ все однородны, а степени их однородности соответственно равны 3, 1, 0, 2, $2/3$, –1.

Всякая однородная функция $F(x, y)$ степени n представима в виде:

$$F(x, y) = x^n f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (3.2)$$

где $f\left(\frac{y}{x}\right)$ – функция одного аргумента $\frac{y}{x}$. Например,

$$x^3+2x^2y-5y^3=x^3\left(1+2\frac{y}{x}-5\left(\frac{y}{x}\right)^3\right),$$

$$\sqrt[3]{x^2+y^2}=x^{\frac{2}{3}}\ \sqrt[3]{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\ .$$

Перейдем теперь к однородным дифференциальным уравнениям. Существуют два определения таких уравнений.

Если в дифференциальном уравнении

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \qquad (3.3)$$

коэффициенты $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – функции одной и той же степени однородности, то такое уравнение называется *однородным.*

Или иначе.

Однородным называется дифференциальное уравнение вида

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (3.4)$$

Легко видеть, что уравнение (3.3) приводится к виду (3.4). Действительно, если степени однородности функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ одинаковы и равны n, то

$$P\,(x,y)=x^n\,p\left(\frac{y}{x}\right),\qquad Q\,(x,y)=x^n q\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (3.5)$$

и после сокращения на x^n из (3.3) следует

$$p\left(\frac{y}{x}\right)dx+q\left(\frac{y}{x}\right)dy=0\,, \qquad (3.6)$$

т.е.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{p\left(\frac{y}{x}\right)}{q\left(\frac{y}{x}\right)}, \qquad (3.7)$$

а это – уравнение вида (3.4).

Однородное уравнение решается введением новой функции

$$z=\frac{y}{x}\,. \qquad (3.8)$$

В самом деле, из (3.8) следует, что $y=zx$, откуда $y'=z'x+z$. Подставляя эти выражения в (3.4), получим $z'x+z=f(z)$ или $x\frac{dz}{dx}=f(z)-z$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому $\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}$. Интегрируя и обозначая $\int\frac{dz}{f(z)-z}$ через $F(z)$, находим:

$$F(z)=\ln x+C \tag{3.9}$$

или, возвращаясь к функции y,

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=\ln x+\ln C\ . \tag{3.10}$$

Получен общий интеграл дифференциального уравнения (3.4).

4. Уравнения в полных дифференциалах (теоретические сведения к заданию 4)

Уравнением в полных дифференциалах называется дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0\ , \tag{4.1}$$

левая часть которого есть полный дифференциал некоторой функции *F*.

Можно показать, что равенство

$$dF=P\,dx+Qdy\ , \tag{4.2}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\ . \tag{4.3}$$

Для решения данного дифференциального уравнения (4.1) при условии (4.3) достаточно найти первообразную $F(x,y)$ левой части уравнения (4.1). Тогда выражение

$$F(x,y)=C \tag{4.4}$$

будет общим интегралом дифференциального уравнения(4.1).

Одним из методов решения уравнений в полных дифференциалах является нахождение интеграла (4.1) для фиксированной точки $A(x_0,y_0)$, принадлежащей области определения функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$:

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_o,y)\,dy=C \tag{4.5}$$

или

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y_o)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,dy=C\ . \tag{4.6}$$

Однако прежде чем использовать эти формулы, необходимо убедиться в справедливости для данного условия (4.3)

5. Дифференциального уравнения допускающие понижение порядка) (теоретические сведения к заданию 5)

Предлагаемое индивидуальное задание может содержать один из 4-х типов уравнений, допускающих понижение порядка.

а) Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$. Общее решение такого дифференциального уравнения может быть получено путём n последовательных интегрирований, а именно:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int \left[f(x)dx + C_1 \right] dx + C_2$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \;,$$

$$y = \underbrace{\int dx \int dx .... \int}_{n-\text{кратная квадратура}} f\left(x\right) dx + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1} x + C_n \,. \tag{5.1}$$

Следующие три типа уравнений являются уравнениями 2-го порядка:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \,. \tag{5.2}$$

Отметим 3 частных случая, когда решение (5.1) сводится к последовательному решению двух дифференциальных уравнений 1-го порядка.

б) Уравнение не содержит искомой функции y , т.е. имеет вид

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{5.3}$$

В этом случае вводят новую неизвестную функцию z , положив $y' = z$. Тогда $y'' = z'$ и (5.3) принимает вид

$$F(x, z, z') = 0 \,, \tag{5.4}$$

т.е. становится уравнением первого порядка относительно z . Решив его, находим

$$z = \varphi(x,\, C_1), \quad \text{а значит,} \quad y' = \varphi(x,\, C_1)\,, \tag{5.5}$$

и тогда

$$y = \int \varphi\,(x,\, C_1)\; dx + C_2 \,. \tag{5.6}$$

в) Уравнение не содержит независимой переменной x , т.е. имеет вид

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{5.7}$$

В этом случае за новую неизвестную функцию также принимают $y' = z$, однако на этот раз независимой переменной является y . Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z' \cdot z \,. \tag{5.8}$$

Таким образом, уравнение (5.7) преобразуется в уравнение 1-го порядка:

$$F\;(\,y,\; z,\; z \cdot z'\,) = 0. \tag{5.9}$$

Решив его, мы получим

$$z=\varphi\ (y,\,C_1),\quad \text{т.е.}\quad y'=\varphi\ (y,\,C_1)\quad \text{или}\quad \frac{dy}{dx}=\varphi\ (y,\,C_1)\,. \qquad (5.10)$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y,\,C_1)}=dx\,. \qquad (5.11)$$

Интегрирование последнего уравнения приводит к общему интегралу уравнения (5.7):

$$\int\frac{dy}{\varphi\ (y,\,C_1)}=x+C_2\,. \qquad (5.12)$$

г) Уравнение вида

$$y''=f(y)\,. \qquad (5.13)$$

Это частной случай уравнения (5.7), и потому оно решается заменой $y'=z$, а следовательно, $y''=z\frac{dz}{dy}$. В результате, уравнение (5.13) приобретает вид

$$z\frac{dz}{dy}=f(y)\,. \qquad (5.14)$$

Разделение переменных и интегрирование дает:

$$\frac{z^2}{2}=\int f(y)\,dy+C_1\,. \qquad (5.15)$$

Отсюда $z=\pm\sqrt{2(C_1+\int f(y)dy)}$ или

$$\frac{dy}{\sqrt{2(C_1+\int f(y)\,dy)}}=\pm dx\,. \qquad (5.16)$$

Интегрирование (5.16) приводит к общему интегралу уравнения (5.13).

6. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами (теоретические сведения к заданию 6)

Уравнение вида

$$y''+p\,y'+g\,y=0\,, \qquad (6.1)$$

где p и g – постоянные, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Согласно теореме об общем решении линейного уравнения, если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – частные линейно независимые решения (6.1), т.е. $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq const$, то общее решение (6.1) есть их линейная комбинация:

$$y=C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x)\,. \qquad (6.2)$$

Для определения частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ следует предварительно решить характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + g = 0 \quad , \tag{6.3}$$

которое получается из (6.1) заменой $y'' = k^2$, $y' = k$, $y = k^0$.
При решении квадратного уравнения (6.3) возможны три случая:

Корни уравнения (6.3)	Частные решения (6.2)	Общее решение (6.2)
1. Действительные разные: $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2. Действительные равные: $k_1 = k_2 = k$	$y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$	$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$
3.Комплексно сопряжённые: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$

Уравнение вида

$$y'' + py' + gy = f(x), \tag{6.4}$$

где p и g – постоянные, а $f(x)$ – непрерывная функция, называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Однородное уравнение

$$y'' + py' + gy = 0, \tag{6.5}$$

соответствующее неоднородному уравнению (4) называется *сопровождающим.*

Теорема 1. Если $\bar{y}$ есть какое-нибудь частное решение дифференциального уравнения (6.4), а Y – общее решение сопровождающего его уравнения (6.5), то их сумма

$$y = \bar{y} + Y \tag{6.6}$$

будет общим решением дифференциального уравнения (6.4).

Рассмотрим несколько правил для нахождения $\bar{y}$ при различных видах функции $f(x)$ в правой части уравнения (6.4).

В дальнейшем будем употреблять символы $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ для обозначения многочленов степени n:

$$P_n(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + K,$$

$$Q_n(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + k.$$

Здесь $A, B, \ldots, K, a, b, \ldots, k$ – действительные числа.

Правило 1. Частное решение $\bar{y}$ уравнения

$$y'' + py' + gy = P_n(x) \tag{6.7}$$

следует искать в виде:

$$\bar{y} = \begin{cases} Q_n(x), если\ g \neq 0 \\ xQ_n(x), если\ g = 0,\ p \neq 0 \\ x^2 Q_n(x), если\ g = p = 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Во всех случаях в качестве $Q_n(x)$ надо взять многочлен с неопределенными коэффициентами, которые находятся после подстановки $\bar{y}$ в заданное уравнение.

Правило 2. Частное решение $\bar{y}$ уравнения

$$y'' + py' + gy = e^{\alpha x} P_n(x) \tag{6.9}$$

следует искать в виде:

$$\bar{y} = \begin{cases} e^{\alpha x} Q_n(x), & (i) \\ e^{\alpha x} x Q_n(x), & (j) \\ e^{\alpha x} x^2 Q_n(x), & (k) \end{cases} \tag{6.10}$$

(i) – если α не корень характеристического уравнения,

(j) – если α простой корень характеристического уравнения,

(k) – если α кратный корень характеристического уравнения.

И в этом случае в качестве $Q_n(x)$ выбирают многочлен с неопределенными коэффициентами, которые находятся после подстановки $\bar{y}$ в заданное уравнение.

Правило 3. Частное решение $\bar{y}$ уравнения

$$y'' + py' + gy = A\cos wx + B\sin wx \tag{6.11}$$

следует искать в виде:

$$y = \begin{cases} a\cos wx + b\sin wx & (l) \\ x(a\cos wx + b\sin wx) & (m) \end{cases} \tag{6.12}$$

(l) – если wi не является корнем характеристического уравнения,

(m) – если wi – комплексный корень характеристического уравнения.

Числа a и b определяются после подстановки $\bar{y}$ в заданное уравнение.

Теорема 2. Если y_1 есть решение дифференциального уравнения

$$y'' + py' + g\,y = f_1(x), \tag{6.13}$$

а y_2 есть решение дифференциального уравнения

$$y'' + py' + gy = f_2(x), \tag{6.14}$$

имеющего ту же левую часть, что и (37), то сумма $y_1 + y_2$ является решением дифференциального уравнения

$$y'' + py' + gy = f_1(x) + f_2(x), \tag{6.15}$$

Эта теорема называется «принципом наложения».

7. Нормальные системы дифференциальных уравнений (теоретические сведения к заданию 7)

На практике приходится разыскивать несколько функций, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений. Ограничимся рассмотрением систем дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными. Аргумент будем обозначать буквой t, а искомые функции от t – буквами x, y.

В нормальной форме система двух дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_1(t, \mathrm{x}, \mathrm{y}), \\ \dfrac{dy}{dt} = F_2(t, \mathrm{x}, \mathrm{y}). \end{cases} \tag{7.1}$$

Решением системы (7.1) называется всякий набор двух функции

$$x = x(t),\ y = y(t),$$

обращающих оба уравнения системы в тождества.

Если правые части системы (7.1) линейно зависят от x, y (но не обязательно от t), то система называется *линейной.*

Для решения систем дифференциальных уравнений может быть использован обычный метод исключения неизвестных (метод подстановки), сводящий систему (7.1) к одному дифференциальному уравнению второго порядка с одной неизвестной функцией. Для этого необходимо дифференцирование одного из уравнений и две подстановки. Если метод исключения применяется к линейной системе, то получается также линейное дифференциальное уравнение, к решению которого можно применять методы изложенные выше.

УРАВНЕНИЯ ПРИМЕРНОГО ВАРИАНТА И ИХ РЕШЕНИЕ

ЗАДАНИЕ 1. Найти общее решение (общий интеграл) уравнения с разделяющимися переменными:

a) $\quad xy^2\,dx - 2\sqrt{1+x^2}\,dy = 2yxdx$.

Решение. Данное уравнение мы можем преобразовать к виду

$$2\sqrt{1+x^2}\,dy = x(y^2-2y)dx$$

Разделив обе части на $\sqrt{1+x^2}\,(y^2-2y)$, получаем:

$$\frac{2}{y^2-2y}dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx .$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{2dy}{y(y-2)} = \frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int\left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y}\right)dy = \frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d(1+x^2)\,,$$

$$\ln(y-2)-\ln y = \sqrt{1+x^2}+\ln C\,,$$

$$\ln\frac{y-2}{y} = \sqrt{1+x^2}+\ln C\,,$$

$$\frac{y-2}{y} = Ce^{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Тогда окончательно

$$y = \frac{2}{1-Ce^{\sqrt{1+x^2}}}\,.$$

— — — — — — — —

б) $\quad y'\left(1+x^2\right)-2xy = 6x$.

Решение. Разделим переменные в данном уравнении:

$$y'\left(1+x^2\right) = 6x+2xy,$$

$$y'\left(1+x^2\right) = 2x\left(3+y\right),$$

$$\frac{dy}{dx}\left(1+x^2\right) = 2x\left(3+y\right),$$

$$\frac{dy}{y+3}=\frac{2xdx}{x^2+1}.$$

Интегрируя обе части данного уравнения, получим:

$$\int\frac{dy}{y+3}=\int\frac{2xdx}{x^2+1},$$

$$\int\frac{d\left(y+3\right)}{y+3}=\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1},$$

$$\ln\left|y+3\right|=\ln\left|x^2+1\right|+\ln C,$$

$$y+3=C\left(x^2+1\right).$$

Тогда окончательно

$$y=C\left(x^2+1\right)-3.$$

$$--------$$

в) $\cos^2 y\, ctgx\, dx+\sin^2 x\, tgy\, dy=0$.

Решение. Разделим переменные в данном уравнении, поделив обе его части на выражение $\cos^2 y\sin^2 x$:

$$\frac{ctgx}{\sin^2 x}dx+\frac{tgy}{\cos^2 y}dy=0.$$

Интегрируя обе части полученного уравнения, получим:

$$\int\frac{ctgx}{\sin^2 x}dx+\int\frac{tgy}{\cos^2 y}dy=C,$$

откуда

$$-\frac{ctg^2 x}{2}+\frac{tg^2 y}{2}=C.$$

Воспользуемся тем, что C – произвольная постоянная и заменим C на $\frac{C}{2}$.

Тогда

$$tg^2 y-ctg^2 x=C.$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения.

ЗАДАНИЕ 2. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

а) $y' + \frac{1-2x}{x^2-x}y = 1, \qquad y(2) = 2\ln 2$.

Решение. Используем подстановку $y = u\upsilon$ (метод Бернулли).

Пусть $$y = u\upsilon,$$

тогда $$y' = u'\upsilon + u\upsilon'.$$

Подставляя y и y' в исходное уравнение, получим:

$$u'\upsilon + u\upsilon' + \frac{1-2x}{x^2-x}u\upsilon = 1$$

или

$$u'\upsilon + u\left(\upsilon' + \frac{1-2x}{x^2-x}\upsilon\right) = 1. \qquad (*)$$

Выберем υ так, чтобы коэффициент при u (т.е. выражение, стоящее в скобках) был равен нулю:

$$\upsilon' + \frac{1-2x}{x^2-x}\upsilon = 0.$$

Полученное уравнение позволяет разделить переменные относительно υ:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} + \frac{1-2x}{x^2-x}dx = 0,$$

или $$\frac{d\upsilon}{\upsilon} - \frac{2x-1}{x^2-x}dx = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\ln|\upsilon| - \ln|x^2-x| = C.$$

Поскольку в качестве υ можно взять любое из частных решений, выберем такое, для которого $C = 0$, что приведет к уравнению

$$\ln|\upsilon| = \ln|x^2-x|,$$

откуда $$\upsilon = x^2 - x.$$

Подставляя найденное значение υ в уравнение $(*)$ и учитывая, что в этом уравнении выражение в скобках равно нулю, приходим к уравнению для u:

$$u'(x^2-x) = 1.$$

Тогда $$u' = \frac{1}{x^2-x}$$

и $$u = \int \frac{dx}{x^2-x}.$$

Найдем интеграл выделением в знаменателе полного квадрата:

$$u=\int\frac{dx}{x^2-x}=\int\frac{dx}{\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}}=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C.$$

(Использовался табличный интеграл $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$).

Таким образом, общим решением является функция

$$y=u\upsilon=(x^2-x)\left(\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C\right).$$

Для нахождения частного решения необходимо определить значение константы C. Используя заданное начальное условие ($y=-2\ln 2$ при $x=2$), получаем:

$$-2\ln 2=(2^2-2)\left(\ln\left|\frac{2-1}{2}\right|+C\right),$$

$$-2\ln 2=-2\ln 2+2C,$$

откуда $C=0$.

Следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$y=(x^2-x)\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|.$$

— — — — — — — —

б) $y'+2xy=2x^2e^{-x^2}$ $y(0)=0.$

Решение. Используем подстановку $y=uv,\quad y'=u'v+uv'.$ Тогда заданное уравнение примет вид

$$u'v+uv'+2xuv=2x^2e^{-x^2},\ \text{ или}$$

$$v(u'+2xu)+uv'=2x^2e^{-x^2}. \qquad (*)$$

Выписываем выражение в скобках и приравниваем его к нулю:

$$u'+2xu=0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Отделяем переменные.

$\frac{du}{dx}=-2xu$ или $\frac{du}{u}=-2xdx.$ переменные разделены, поэтому уравнение можно проинтегрировать: $\int\frac{du}{u}=-2\int xdx.$ Тогда имеем $\ln u=-x^2.$ Полученный результат представим в виде $u = e^{-x^2}$. Подставляя найденное значение u в уравнение ($*$) и учитывая, что в этом уравнении выражение в скобках равно нулю, приходим к уравнению: $e^{-x^2}\dfrac{dv}{dx} = 2x^2 e^{-x^2}$. Преобразовав полученное уравнение, приходим к результату $dv = 2x^2 dx.$ Интегрируя получаем функцию $v = \dfrac{2}{3}x^3 + C.$

Тогда из (*) получим общее решение:

$$y = \left(\frac{2}{3}x^3 + C\right)e^{-x^2}.$$

Для нахождения частного решения подставим начальные условия:

$$0 = Ce^0 \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Тогда частное решение может быть записано в виде:

$$y = \frac{2}{3}x^3 e^{-x^2}$$

———————

ЗАДАНИЕ 3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$a)$ $\quad y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}.$

Решение. Введем новую переменную:

$$u = \frac{y}{x} \text{ или } y = ux.$$

Тогда $\quad y' = u + xu',$

и из исходного уравнения следует:

$$u + xu' = e^u + u \qquad \text{или} \qquad e^{-u}du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим:

$$-e^u = \ln|x| + \ln C,$$

$$e^u = -\ln|Cx|,$$

$$e^u = \ln\frac{1}{|xC|}.$$

Тогда $\quad u = \ln\left|\ln\dfrac{1}{|Cx|}\right|,$

а так как $\quad u = \dfrac{y}{x},$

то
$$\frac{y}{x}=\ln\left|\ln\frac{1}{|Cx|}\right|,$$
и окончательно
$$y=x\ln\left|\ln\frac{1}{|Cx|}\right|.$$

— — — — — — — —

б) $2x^2dy=\left(x^2+y^2\right)dx$.

Решение. Разделив обе части равенства на x^2dx, получим уравнение, правая часть которого есть функция отношения $\frac{y}{x}$:
$$2\frac{dy}{dx}=1+\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Положив в нем $y=ux$ и $y'=xu'+u$, получим уравнение с разделяющимися переменными:
$$2xu'+2u=1+u^2,$$
$$2x\frac{du}{dx}=u^2-2u+1,$$
$$\frac{2du}{\left(u-1\right)^2}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя и подставляя $\frac{y}{x}$ вместо u, получим общий интеграл исходного уравнения:
$$2\int\frac{du}{\left(u-1\right)^2}=\int\frac{dx}{x},$$
$$2\int\left(u-1\right)^{-2}d(u-1)=\ln|x|+\ln C,$$
$$-\frac{2}{u-1}=\ln C|x|,$$
$$\frac{2}{1-\frac{y}{x}}=\ln C|x|.$$

Выражая отсюда y, можно получить и общее решение:

$$\frac{2x}{x-y}=\ln C|x|,$$

$$\frac{2x}{\ln C|x|}=x-y,$$

$$y=x-\frac{2x}{\ln C|x|}$$

или окончательно

$$y=x\left(1-\frac{2}{\ln C|x|}\right).$$

— — — — — — — —

ЗАДАНИЕ 4. Найти общее решение (или общий интеграл) уравнения в полных дифференциалах:

а) $(3x^2y+y^2)\,dx+(x^3+2xy+10y)\,dy=0$.

Решение. Здесь $P=3x^2y+y^2$, $Q=x^2+2xy+10y$.

Значит,
$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+2y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

и левая часть нашего уравнения есть полный дифференциал. Первообразная имеет вид:

$$F(x,y)=\int(3x^2y+y^2)\,dx=x^3y+xy^2+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ находится из условия $F_y'=Q$, т.е.

$$x^3+2xy+\varphi'(y)=x^3+2xy+10y.$$

Отсюда

$$\varphi'(y)=10y \quad \text{и} \quad \varphi(y)=5y^2+C.$$

Так как нас интересует какая-нибудь одна первообразная, то можно положить, например, $C=0$, что дает:

$$F(x,y)=x^3y+xy^2+5y^2.$$

Поэтому общий интеграл исходного дифференциального уравнения есть

$$x^3y+xy^2+5y^2=C.$$

— — — — — — — —

б) $e^{-y}dx+\left(1-xe^{-y}\right)dy=0.$

Решение. В данном случае $P=e^{-y}$ и $Q=1-xe^{-y}$, и так как $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{-y},$$

то левая часть уравнения есть полный дифференциал. На этот раз применим формулу $$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_o, y)\,dy = C.$$

Полагаем: $$x_o = y_o = 0.$$

Тогда

$$\int_{o}^{x} e^{-y}\,dx + \int_{o}^{y} dy = C\ .$$

Следовательно, общим интегралом исходного уравнения будет функция

$$xe^{-y} + y = C.$$

— — — — — — — —

в) $(x + y + 1)\,dx + (x - y^2 + 3)\,dy = 0$

Решение. В данном случае $P = x + y + 1$ и $Q = x - y^2 + 3$.

Тогда $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

т.е. мы имеем дело с уравнением в полных дифференциалах.

Воспользуемся формулой $$\int_{x_0}^{x} P(x, y_o)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy = C,$$

которая для нашего случая примет вид:

$$\int_{x_0}^{x} (x + y_o + 1)\,dx + \int_{y_0}^{y} (x - y^2 + 3)\,dy = C$$

Полагаем: $$x_o = y_o = 0.$$

Тогда

$$\int_{o}^{x} (x+1)\,dx + \int_{o}^{y} (x - y^2 + 3)\,dy = C_1,$$

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C.$$

— — — — — — — —

ЗАДАНИЕ 5. Найти частное решение уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка:

а) $xy'' + y' + x = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

Решение. Данное уравнение не содержит явно y. Полагая $y' = p,$ имеем:

$$y'' = p',$$

и уравнение приобретает вид: $\quad xp' + p + x = 0$.

Решим это уравнение как *линейное* относительно функции p .

Пусть $\qquad p = uv$, $\quad$ а значит, $\quad p' = u'v + uv'$.

Тогда

$$x(u'v + uv') + uv + x = 0,$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} + 1 = 0$$

или

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) + 1 = 0 . \qquad (*)$$

Выбираем функцию v так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю и находим v :

$$v' + \frac{v}{x} = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x|,$$

$$v = \frac{1}{x}.$$

Вернёмся к уравнению ($*$), учитывая найденное выражение для v :

$$u'v + 1 = 0,$$

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx} = -1,$$

$$du = -xdx,$$

$$u = -\frac{x^2}{2} + C_1.$$

Тогда

$$p = \frac{1}{x}\left(C_1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

или $$px = C_1 - \frac{x^2}{2}.$$

Из начального условия $y' = p = 0$ при $x = 0$ имеем:

$$C_1 = 0.$$

Следовательно, $$p = -\frac{x}{2},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2},$$

$$dy = -\frac{x}{2}dx,$$

откуда, интегрируя ещё раз, получим:

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_2.$$

Полагая (в соответствии с первым начальным условием) $y = 0$ при $x = 0,$ находим:

$$C_2 = 0.$$

Следовательно, искомое частное решение есть

$$y = -\frac{1}{4}x^2.$$

— — — — — — — —

б) $1 + y'^2 = 2yy'',\qquad y(1) = 1,\quad y'(1) = 1.$

Решение. Данное уравнение не содержит явно x. Вновь полагаем $y' = p$, однако на этот раз считаем функцию p *зависящей от* y, т.е. $p = p(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} = pp'$$

и после подстановки y и y' в исходное уравнение получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными для функции p, аргументом в котором является y:

$$1 + p^2 = 2ypp',$$

$$\frac{1+p^2}{p} = 2y\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2pdp}{1+p^2}.$$

Интегрируя, приходим к уравнению

$$\ln C_1 + \ln|y| = \ln(1+p^2),$$

откуда $$1+p^2=C_1y.$$
Из начального условия $y'=p=1$ при $x=1$ определяем первую константу:
$$C_1=2.$$
Тогда
$$1+p^2=2y,$$
$$p^2=2y-1,$$
$$p=\sqrt{2y-1},$$
а так как $y'=p,$ то
$$y'=\sqrt{2y-1} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{2y-1}.$$
Разделяем переменные и интегрируем:
$$\frac{1}{2}\int\frac{2dy}{\sqrt{2y-1}}=\int dx,$$
$$\frac{1}{2}\int(2y-1)^{-1/2}\,d(2y-1)=x+C_2,$$
$$\sqrt{2y-1}=x+C_2.$$

Получено общее решение. Используя начальное условие $y=1$ при $x=1$, определим константу C_2:
$$\sqrt{2-1}=1+C_2, \quad \text{а значит,} \quad C_2=0.$$
В результате, можно определить частное решение исходного уравнения:
$$\sqrt{2y-1}=x \quad \text{или} \quad y=\frac{1}{2}(x^2+1).$$

– – – – – – – –

в) $$y''=\frac{24}{(x+2)^5}, \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=2.$$

Решение. Данное уравнение необходимо просто проинтегрировать последовательно два раза. Имеем:
$$y'=\int\frac{24dx}{(x+2)^5}=24\int(x+2)^{-5}\,dx=24\frac{(x+2)^{-4}}{-4}+C_1=-\frac{6}{(x+2)^4}+C_1,$$

$$y=\int\left[-\frac{6}{(x+2)^4}+C_1\right]dx=\frac{2}{(x+2)^3}+C_1x+C_2.$$

Подставив последовательно в полученные равенства начальные условия, определим C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 2=-\dfrac{6}{2^4}+C_1, \\ 1=\dfrac{2}{2^3}+C_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{19}{8}, \\ C_2=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Тогда частным решением данного уравнения будет функция

$$y=\frac{2}{(x+2)^3}+\frac{19}{8}x+\frac{3}{4}.$$

— — — — — — — —

ЗАДАНИЕ 6. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y''-2y'-8y=e^x-8\cos 2x$

Решение. Правая часть заданного уравнения равна сумме двух функций:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

где $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=-8\cos 2x$.

Тогда согласно принципу наложения общее решение имеет вид:

$$y=y_0+y_1+y_2,$$

где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения, а y_1 и y_2 – частные решения, отвечающие функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ правой части. Характеристическое уравнение

$$k^2-2k-8=0$$

имеет своими корнями $k_1=4$ и $k_2=-2$.

Это означает, что $$y_0 = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}\ .$$

Частное решение y_1 будем искать в виде
$$y_1 = Ae^x\ .$$

При этом $$y_1' = y_1'' = Ae^x\ .$$

Подставляя y_1, y_1', y_1'' в левую часть уравнения
$$y'' - 2y' - 8y = e^x,$$

получим $$Ae^x - 2Ae^x - 8Ae^x = e^x$$

откуда $A = -\dfrac{1}{9}$ и $y_1 = -\dfrac{1}{9}e^x$.

Частное решение y_2 будем искать в виде
$$y_2 = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

Тогда
$$y_2' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x,$$
$$y_2'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x.$$

На этот раз, подставляя y_2, y_2', y_2'' в левую часть уравнения
$$y'' - 2y' - 8y = -8\cos 2x,$$

получим:
$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 4A\cos 2x + 4B\sin 2x - 8A\sin 2x - 8B\cos 2x = -8\cos 2x$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях равенства, имеем:
$$\begin{cases} -12A + 4B = 0, \\ -4A - 12B = -8. \end{cases}.$$

Решив систему, получим: $A = \dfrac{1}{5}$, $B = \dfrac{3}{5}$,

и значит $$y_2 = \frac{1}{5}\sin 2x + \frac{3}{5}\cos 2x\ .$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения запишется в виде:
$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{9}e^x + \frac{1}{5}(\sin 2x + 3\cos 2x).$$

— — — — — — — —

б) $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

Решение. Общее решение данного уравнения будем искать в виде
$$y = y_0 + y_1 + y_2\ ,$$

где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения (без правой части), а y_1 и y_2 – частные решения уравнений

$$y'' - 5y' = 3x^2 \qquad (*)$$

и

$$y'' - 5y' = \sin 5x, \qquad (**)$$

имеющих одно и тоже характеристическое уравнение

$$k^2 - 5k = 0.$$

Его корни – $k_1 = 0$ и $k_2 = 5$,

а значит, $y_0 = C_1 + C_2 e^{5x}$.

Найдем частное решение y_1 уравнения $(*)$. Т.к. в правой части мы имеем полином второго порядка и при этом 0 (т.е. степень экспоненты правой части) является корнем характеристического уравнения, то решение будем искать в виде

$$y_1 = x(Ax^2 + Bx + C).$$

Находим производные:

$$y_1' = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y_1'' = 6Ax + 2B.$$

Подставим y_1'' и y_1' в уравнение $(*)$:

$$6Ax + 2B - 15Ax^2 - 10Bx - 5C = 3x^2,$$

$$-15Ax^2 + x(6A - 10B) + 2B - 5C = 3x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x правой и левой части последнего уравнения, получим систему:

$$\begin{array}{ll} x^2: & -15A = 3, \\ x: & 6A - 10B = 0, \\ x: & 2B - 5C = 0. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5A = -1, \\ 3A - 5B = 0, \\ 2B - 5C = 0. \end{cases}$$

Отсюда $A = -\dfrac{1}{5}, \quad B = -\dfrac{3}{25}, \quad C = -\dfrac{6}{25},$

а значит, $y_1 = -0{,}2x^3 - 0{,}12x^2 - 0{,}048x$.

Теперь найдем частное решение y_2 уравнения $(**)$. Т.к. $i\beta = 5i$ не является корнем характеристического уравнения (β – коэффициент аргумента синуса или косинуса правой части), то решение y_2 будем искать в виде:

$$y_2 = A\cos 5x + B\sin 5x.$$

Тогда $y_2' = -5A\sin 5x - 15B\cos 5x$

и $y_2'' = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x$.

Подставляя y_2' и y_2'' в $(**)$, получим:

$$-25A\cos 5x - 25B\sin 5x + 25A\sin 5x - 25B\cos 5x = \sin 5x\ .$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 5x$ и $\cos 5x$ в левой и правой частях равенства, получим систему

$$\begin{cases} -25B + 25A = 1 \\ -25A - 25B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{50}, \\ B = -\dfrac{1}{50}. \end{cases}$$

$$y_2 = 0{,}02\left(\cos 5x - \sin 5x\right).$$

Таким образом, общее решение $y = y_0 + y_1 + y_2$ исходного уравнения есть

$$y = C_1 + C_2 e^{5x} - 0{,}2x^3 - 0{,}12x^2 - -0{,}048x + 0{,}02(\cos 5x - \sin 5x).$$

— — — — — — — —

в) $y'' - 2y' + y = x^3 - 2.$

Решение. Общее решение данного уравнения $y = y_0 + y_1$, где y_0 - общее решение соответствующего однородного уравнения (без правой части), а y_1 - частное решение заданного уравнения. Рассмотрим однородное уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет равные корни $k_1 = k_2 = 1$, и поэтому

$$y_0 = e^x (C_1 + C_2 x).$$

Найдем частное решение y_1. Так как в правой части мы имеем многочлен третей степени, это решение будем искать в виде:

$$y_1 = ax^3 + bx^2 + cx + \partial.$$

Находим производные:

$$y_1' = 3ax^2 + 2bx + c,$$

$$y_1'' = 6ax + 2b.$$

Подставим в исходное уравнение выражения для y_1, y_1', y_1''. Получим:

$$6ax + 2b - 2(3ax^2 + 2bx + c) + ax^3 + bx^2 + cx + \partial = x^3 - 2,$$

$$ax^3 + (-6a + b)x^2 + (6a - 4b + c)x + 2b - 2c + \partial = x^3 - 2.$$

Чтобы это равенство выполнялось, нужно чтобы коэффициенты при всех степенях x в левой части последнего уравнения совпали с коэффициентами при тех же степенях в правой части, а именно:

$$\begin{array}{c||l} x^3 & a=1, \\ x^2 & -6a+b=0, \\ x & 6a-4b+c=0, \\ 1 & 2b-2c+\partial=-2. \end{array}$$

Из этой системы находим: $a=1,\quad b=6,\quad c=18,\quad \partial=22.$

Следовательно,

$$y_1 = x^3+6x^2+18x+22$$

– искомое частное решение. Таким образом, общее решение исходного уравнения таково:

$$y = e^x(C_1+C_2x)+x^3+6x^2+18x+22.$$

– – – – – – – –

ЗАДАНИЕ 7. Решить нормальную систему уравнений

а) $\begin{cases} x' = 2x+y, \\ y' = x+2y. \end{cases}$

Решение. Аргументом функций x и y считаем переменную t. Первое уравнение системы продифференцируем по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}. \qquad (*)$$

Подставим в (*) из второго уравнения системы значение производной

$$\frac{dy}{dt} = x+2y.$$

Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt}+x+2y. \qquad (**)$$

Из первого уравнения системы выражаем y:

$$y = \frac{dx}{dt}-2x, \qquad (***)$$

– и подставляем в (**):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt}+x+2\left(\frac{dx}{dt}-2x\right)$$

или

$$x''-4x'+3x=0.$$

Получили линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения составляем характеристическое уравнение:

$$k^2-4k+3=0,$$

корнями которого являются $\qquad k_1 = 3, \quad k_2 = 1,$

а значит, общее решение –

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^t.$$

Дифференцируя по t, получаем:

$$\frac{dx}{dt} = 3C_1 e^{3t} + C_2 e^t.$$

Тогда из (***) можно найти y:

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x = 3C_1 e^{3t} + C_2 e^t - 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^t$$

или

$$y = C_1 e^{3t} - C_2 e^t.$$

Итак, $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^t, \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^t. \end{cases}$ – общее решение системы.

– – – – – – – –

б) $\begin{cases} x' = 3x + y + e^t, \\ y' = x + 3y - 2e^t. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение системы продифференцируем по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + e^t. \qquad (*)$$

Подставим $\dfrac{dy}{dt} = x + 3y - 2e^t$ из второго уравнения системы в уравнение (*). Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + x + 3y - e^t. \qquad (**)$$

Из первого уравнения системы выражаем y:

$$y = \frac{dx}{dt} - 3x - e^t \qquad (***)$$

и подставляем в (**):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + x + 3\left(\frac{dx}{dt} - 3x - e^t\right) - e^t$$

или

$$x'' - 6x' + 8x = -4e^{t}. \qquad (****)$$

Получили линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$x = x_0 + x_1,$$

где x_0 - общее решение соответствующего однородного уравнения (без правой части), а x_1 - частное решение заданного уравнения. Рассмотрим однородное уравнение

$$x'' - 6x' + 8x = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 8 = 0$ имеет действительные корни: $k_1 = 4,$ $k_2 = 2$, и поэтому

$$x_0 = C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t}.$$

Найдем частное решение уравнения (****). В правой части мы имеем функцию $f(x) = -4e^{t}$, причем, совпадений с корнями характеристического уравнения нет. Поэтому частное решение x_1 будем искать в виде:

$$x_1 = Ae^t.$$

Находим производные:

$$x_1' = Ae^t, \qquad x_1'' = Ae^t.$$

Подставив в (****) выражения для x_1, x_1', x_1'', получим:

$$Ae^t - 6Ae^t + 8Ae^t = -4e^t.$$

Сократив обе части последнего равенства на e^t, находим:

$$A = -\frac{4}{3}.$$

Тогда частное решение имеет вид: $x_1 = -\dfrac{4}{3}e^t.$

Таким образом, общее решение уравнения (****) таково:

$$x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} - \frac{4}{3}e^t.$$

Для того чтобы получить выражение для второй искомой функции y, находим производную

$$\frac{dx}{dt} = 4C_1e^{4t} + 2C_2e^{2t} - \frac{4}{3}e^t.$$

Тогда из (***) следует:

$$y = C_1e^{4t} - C_2e^{2t} + \frac{5}{3}e^t.$$

Итак, $\begin{cases} x = C_1e^{4t} + C_2e^{2t} - \frac{4}{3}e^t \\ y = C_1e^{4t} - C_2e^{2t} + \frac{5}{3}e^t \end{cases}$ – общее решение системы.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1. Найти общее решение (или общий интеграл) уравнения с разделяющимися переменными:

1. $y' = 2x^2y^2 + 2x + 4x^2 + y^2x$
2. $\sin y\,dy - 2x(\sin y + 2)e^{2x}dx = 0$
3. $(y^2 + 2y)dx + \sqrt{x^2 + 2x}\,dy = 0$
4. $\dfrac{y'}{\cos y + 2} = \dfrac{(x^2 + 2x)\ln x}{\cos y}$
5. $2\sqrt{y - y^2}\,dx + (3x^2 + 2x)\,dy = 0$
6. $yy' - \sqrt{y+1}\ln^2 2x = 0$
7. $y' = 3x(tg\,y + 1)e^{3x^2+2}$
8. $(2x^2 + x) = x'\sqrt{2y^2 + y}$
9. $y' = \dfrac{2y^2 + y}{\sqrt{2x^2 + x}}$
10. $(y + 2y^2)dx + \sqrt{x^2 - 2x}\,dy = 0$
11. $x'\sqrt{x^2 + 2} = 2y^2 - 4y$
12. $y\sin^2 x\,dx - \sqrt{y+1}(\cos^2 x + 2)dy = 0$
13. $x(e^y + 1)\ln(x^2 + 2)\,dx + e^{2y}dy = 0$
14. $\sqrt{xy}\,dy - \sqrt{(x-2)(2-y)}\,dx = 0$
15. $(\sin x + 2)(y^3 + 2y)\,dy + (y^2 + 2y)\sin x\,dx = 0$
16. $(xy^2 - y^2)\,dx + (x^2y + x^2)\,dy = 0$
17. $x(y^2 + 1)\,dx - ye^{x^2}\,dy = 0$

18. $2yy'\sqrt{1-x^2} - e^{y^2} = 0$

19. $e^x dx + e^y(1-e^x)dy = 0$

20. $y'\sin^2 x \ln y + y = 0$

ЗАДАНИЕ 2. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1. $x \cdot y' + 2y = e^{-x^2}$; $y(1) = 0$
2. $y'\cos^2 x + y = tgx$; $y(0) = -1$
3. $(2x+1)y' + y = x$; $y(0) = 0$
4. $(1+x^2)y' + y = arctgx$; $y(0) = 1$
5. $xy' + y = \ln x + 1$; $y(1) = 5$
6. $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$; $y(0) = -1$
7. $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$; $y(\pi) = -2$
8. $y' + 2ytg2x = \sin 4x$; $y(0) = 0$
9. $y = x(y' - x\cos x)$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
10. $(1+x^2)y' + y = arctgx$; $y(0) = -9$
11. $xy' - y = x^2\cos x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$
12. $y'\sin x - y\cos x = 1$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
13. $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$; $y(0) = 0$
14. $y'\sin x - y\cos x = 1$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
15. $x(y' - y) = (1+x^2)e^x$; $y(1) = 0$

16. $y' + 4y = x^2 e^{-4x}$; $\quad y(0) = \dfrac{1}{3}$

17. $x^2 y' + 5xy + 4 = 0$; $\quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 62$

18. $xy' + y = \cos x$; $\quad y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$

19. $y' - \dfrac{xy}{x^2+1} = x$; $\quad y(2\sqrt{2}) = 3$

20. $y'\sin x - y = \sin x \cdot tg\,\dfrac{x}{2}$; $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

ЗАДАНИЕ 3. Найти общее решение (или общий интеграл) однородного дифференциального уравнения первого порядка:

1. $y' = \dfrac{8x+5y}{5x-2y}$
2. $y' = \dfrac{y}{x} - tg\,\dfrac{y}{x}$
3. $xy' = -y\ln\dfrac{y}{x}$
4. $xy' - y + \sqrt{x^2+y^2} = 0$
5. $4xyy' - y^2 - 3x^2 = 0$
6. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$
7. $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$
8. $2x^2 y' + x^2 + y^2 = 0$
9. $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$
10. $xyy' = 8x^2 + y^2$
11. $xy' - x\cos^2\dfrac{y}{x} = y$

12. $\dfrac{xy'}{y} = 4 + \ln x - \ln y$

13. $(x^2 - xy + y^2)\,dx - x^2 dy = 0$

14. $(x + 2y)dx - (2x + y)dy = 0$

15. $y + (2\sqrt{xy} - x)\,y' = 0$

16. $(x + 3y)\,dx - (3x - y)dy = 0$

17. $x\,dy - ydx = x\sin^2 \dfrac{y}{x} dx$

18. $(y + 2\sqrt{xy})\,dx - x\,dy = 0$

19. $xy' - x\cos^2 \dfrac{y}{x} = y$

20. $xy' - y = y(\ln y - \ln x)$

ЗАДАНИЕ 4. Найти общее решение (или общий интеграл) уравнения в полных дифференциалах:

1. $(y^2 - 2xy + x^2)dx + (2xy - y^2 - x^2)dy = 0$

2. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \dfrac{y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$

3. $\dfrac{2x\,dx}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$

4. $3x^2 e^y\ dx + \left(x^3 e^y - 1\right)dy = 0$

5. $\dfrac{\left(x + 2y\right)dx + y\,dy}{\left(x + y\right)^2} = 0$

6. $x\,dx + y\,dy + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$

7. $(y e^x - e^y)\,dx + (e^x - xe^y)dy = 0$

8. $(2xy - x^2 - y^2)\,dy + (x^2 - 2xy + y^2)\,dx = 0$

9. $\dfrac{2x}{y^3}\,dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0$

10. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0$

11. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}\,dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}\,dy = 0$

12. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$

13. $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x\; dy = 0$

14. $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy$

15. $\sin(x + y)dx + x\cos(x + y)(dx + dy) = 0$

16. $(5x^4 y^2 + e^x)dx + (2x^5 y - \sin y)dy = 0$

17. $(3x^2 e^{2y} - y\sin x)dx + (2x^3 e^{2y} + \cos x)dy = 0$

18. $\left(2xy^6 - \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(6x^2 y^5 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2}\right)dy = 0$

19. $\left(y - \dfrac{1}{1 + x^2}\right)dx + \left(x + 2e^{2y}\right)dy = 0$

20. $\left(3x^2 y^4 - 1\right)dx + \left(4x^3 y^3 + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$

ЗАДАНИЕ 5. Найти частное решение уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка:

1. $xy'' - y' - x^2 = 0$; $y(1) = \dfrac{4}{3}$, $y'(1) = 3$

2. $y'' - e^y \cdot y' = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

3. $y'' - y' \cdot ctgx = \sin x$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

4. $3y'\,y'' = 2y$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

5. $y \cdot y'' = (y')^2$;	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 3$
6. $xy'' - 2y' = 2x^4$;	$y(1) = \frac{1}{5}$,	$y'(1) = 4$
7. $y^3 \cdot y'' = 3$;	$y(1) = 1$,	$y'(1) = 1$
8. $y'' - 12y^2 = 0$;	$y(0) = \frac{1}{2}$,	$y'(0) = 1$
9. $y'' + y' tgx = \cos x$;	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 0$
10. $2y'' = e^{4y}$;	$y(0) = 0$,	$y'(0) = \frac{1}{2}$
11. $(y-2)y'' = 2(y')^2$;	$y(0) = 3$,	$y'(0) = 1$
12. $xy'' + y' = 4x^3$;	$y(1) = \frac{1}{4}$,	$y'(1) = 2$
13. $2y \cdot y'' = 3 + (y')^2$;	$y(1) = 1$,	$y'(1) = 1$
14. $xy'' - y' = x^2 \cos x$;	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,	$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$
15. $x^3 y'' = 4 \ln x$;	$y(1) = 4$,	$y'(1) = 0$
16. $x^2 y'' - xy' = 3x^3$;	$y(1) = 0$,	$y'(1) = 4$
17. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$;	$y(1) = 1$,	$y'(1) = -1$
18. $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0$;	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 1$
19. $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$;	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 1$
20. $y'' x \ln x = y'$;	$y(e) = 0$,	$y'(e) = 1$

ЗАДАНИЕ 6. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

1. $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2 + \sin x$
2. $y'' + 4y = 3\cos x - e^{2x}$

3. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x} + 2x$

4. $y'' - 2y' = 2x + 1 + 2\sin x$

5. $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x} + \sin x$

6. $y'' - 4y = 4\sin 2x - 2e^{4x}$

7. $y'' + y' = 3\cos x - \sin x + 2x$

8. $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x - 3 + e^{-x}$

9. $y'' - 3y' = 3e^{3x} + 2x^2$

10. $y'' - 4y' + 5y = 5x - 4 + \cos 2x$

11. $y'' + y' = e^x + x\sin x$

12. $y'' + 9y = 4\sin 3x + x$

13. $y'' + 2y' + y = 2\sin x + x + 2$

14. $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x} + 2x - 4$

15. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x + 4x$

16. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$

17. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$

18. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$

19. $y'' + 9y = e^x \cos 3x$

20. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x + 2x$

ЗАДАНИЕ 7. Решить нормальную систему уравнений:

1. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - 4x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' + x - 8y = 0, \\ y' - x - y = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 3y - 2x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' + x + 5y = 0, \\ y' - x - y = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4y - x. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 2y - 3x, \\ y' = y - 2x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' - 5x - 3y = 0, \\ y' + 3x + y = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x - y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' - 7x - 2y = 0, \\ y' - 3x - 2y = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = x - 4y, \\ y' = x - 3y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -x + 5y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 2x - 5y, \\ y' = 5x - 6y. \end{cases}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. – М., 1963.
2. Школьник А.Г. Дифференциальные уравнения. – М., 1963.
3. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – М., 1965.
4. Виленкин Н.Я. Дифференциальные уравнения. – М., 1984.
5. Гутер Р.С. Дифференциальные уравнения. – М., 1976.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М., 1953.
7. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. ФКП. – М., 1989.
8. Богданов Ю.С. и др. Курс дифференциальных уравнений. – М., 1996.
9. Пономарев К.К. Специальный курс высшей математики. Дифференциальные уравнения. – М., 1974.
10. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 1980.
11. Пискунов Н.С. Дифференциальные и интегральные исчисления. Для втузов. Т. 1 (окончание), т. 2 (начало). – М., 1982.
12. Шипачев В.С. Высшая математика. – М., 1990.
13. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике. – М., 1996.
14. Матвеев М.Н. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Ленинград, 1960.
15. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М., 1972.
16. Задачи и упражнения по математическому анализу. Для втузов. Под редакцией Б.Д. Демидовича. – М., 1970.
17. Шипачев В.С. Задачи по высшей математике. – М., 1997.
18. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М., 1964.
19. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. – М., 1989.
20. Доброхотова М.А. и др. Задачник- практикум по математическому анализу. Ряды. Дифференциальные уравнения. – М.,1967.
21. Сборник задач по курсу высшей математике. Под редакцией Г.И. Кручковича. – М., 1973 г.
22. Баренгольц Ю.А., Чуйко Л.В. Дифференциальные уравнения: некоторые аналитические и численные методы решения. – Бендеры, ООО РВТ, 2005.

Учебное издание
Индивидуальная работа по дифференциальным уравнениям
(направления подготовки «Электроэнергетика и электротехника»,
«Информатика и вычислительная техника»,
«Информационные системы и технологии»,
«Программная инженерия»)
Составители:
Чуйко Людмила Владимировна
Баренгольц Юрий Александрович

Электронное издание