

ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г. ШЕВЧЕНКО
Кафедра квантовой радиофизики и систем связи

**Контрольные работы по
теории функций комплексного переменного**

Методические указания

г. Тирасполь, 2015 г.

УДК 517.53/.55(072.8)
ББК В161.5р30
Т 33

Составители:

К.Д. Ляхомская, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. квантовой радиофизики и систем связи

П.И. Хаджи, доктор физ.-мат. наук, проф. каф. квантовой радиофизики и систем связи

Теория функций комплексного переменного. Методические указания к контрольным работам / Сост. К.Д. Ляхомская, П.И. Хаджи. – Тирасполь, ПГУ им. Т.Г. Шевченко, 2015. – 57 с. (электронный вариант)

В пособии представлены варианты контрольных заданий по ряду основных тем курса «Теория функций комплексной переменной» (ТФКП) для студентов дневного обучения физико-математического факультета, направления 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи.

Приведены основные положения, определения и формулы по каждой теме курса ТФКП, даны образцы решения практических заданий. В конце пособия приведен тест итогового контроля по основным темам курса.

Данное пособие должно помочь студентам в подготовке к соответствующим формам контроля и является тем минимумом в рамках курса «ТФКП», который необходим для сдачи зачета.

Данное пособие рекомендуется студентам инженерных направлений физико-математического факультета.

УДК 517.53/.55(072.8)
ББК В161.5р30
Т 33

Утверждено Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

© К.Д. Ляхомская, П.И. Хаджи, составление, 2015

Предисловие

Данное пособие содержит варианты контрольных заданий по ряду основных тем курса «Теория функций комплексной переменной» (ТФКП) для студентов дневного обучения физико-математического факультета, направления 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи.

Каждая тема представлена основными определениями и формулами, примерами решений заданий и десятью контрольными вариантами задач, подбор которых обусловлен количеством часов, отведенных на изучение этих тем согласно программе курса ТФКП.

Список литературы, приведенный в конце пособия, может быть использован в качестве справочного материала для самостоятельной работы студентов.

Содержание.

<i>Предисловие</i>	3
I. Комплексные числа и действия над ними.	
Основные понятия и определения.....	5
Контрольная работа № 1	10
II. Функции комплексного переменного	
Основные понятия и определения.....	17
Контрольная работа № 2.....	26
Основные понятия и определения.....	32
Контрольная работа № 3.....	39
Основные понятия и определения.....	44
Контрольная работа № 4.....	48
III. Вариант теста итогового	
контроля.....	53
IV. Литература.....	57

I. Комплексные числа и действия над ними.

Основные понятия и определения

Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел $z = (x, y)$. Действительное число x называется действительной частью комплексного числа z ($x = \operatorname{Re} z$), число y называется мнимой частью комплексного числа z ($y = \operatorname{Im} z$).

Существуют следующие формы записи комплексных чисел:

а) алгебраическая $z = x + iy$,

б) тригонометрическая $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,

в) показательная $z = |z|e^{i\varphi}$, где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Значение φ , заключенное в промежутке $-\pi < \varphi \leq \pi$, называется главным значением аргумента ($\arg z$), то есть: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, ($n = 0; \pm 1, \pm 2, \dots$).

Главное значение аргумента комплексного числа z можно определить по

формуле:
$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, y > 0; \\ \pi - \operatorname{arctg} \frac{y}{|x|}, & \text{если } x < 0, y > 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \left| \frac{y}{x} \right|, & \text{если } x < 0, y < 0, \\ -\operatorname{arctg} \frac{|y|}{x}, & \text{если } x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны друг другу ($z_1 = z_2$), если равны соответственно их действительные и мнимые части:

$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$. Для тригонометрической формы записи равенство комплексных чисел формулируется следующим образом: $z_1 = z_2$, если модули их равны: $|z_1| = |z_2|$, а аргументы связаны соотношением

$$\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi n, \quad n = 0; \pm 1, \pm 2, \dots$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $z^* = x - iy$ называются комплексно-сопряженными числами.

Действия над комплексными числами

а) сложение: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;

б) вычитание: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$;

в) умножение: $z = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$ (эта операция раскрывает смысл «мнимой единицы i » $i^2 = -1$);

г) частное: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$;

д) возведение в степень n : $z^n = |z|^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ – формула Муавра;

е) нахождение логарифма: $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

ж) извлечение корня n -ой степени из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Примечание: точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Пример 1.1. Представить комплексное число $z = -3 + 3i$ в тригонометрической и в показательной формах записи.

Решение.

Из алгебраической формы записи заданного комплексного числа

$z = x + iy$, следует что $x = -3$, $y = 3$.

Поэтому, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$;

$$\varphi = \arg z = \pi - \operatorname{arctg} \frac{y}{|x|} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{|-3|} = \pi - \operatorname{arctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма записи данного комплексного числа:

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 3\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -3 + 3i;$$

показательная: $z = |z|e^{i\varphi} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Пример 1.2. Найти результат сложения и разности двух комплексных чисел: $z_1 = -1 - 4i$ и $z_2 = 2 - i$.

Решение.

По формуле сложения двух комплексных чисел

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (-1 + 2) + i(-4 - 1) = 1 - 5i;$$

по формуле вычитания:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = (-1 - 2) + i(-4 - (-1)) = -3 - 3i.$$

Пример 1.3. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = z_1 z_2$, если

$$z_1 = 3 - 4i \text{ и } z_2 = -2 + 7i.$$

Решение.

$$z = z_1 z_2 = (3 - 4i)(-2 + 7i) = -6 + 21i + 8i - 28i^2 = -6 + 21i + 8i + 28 = (-6 + 28) + i(21 + 8) = 22 + i29.$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{22^2 + 29^2} = \sqrt{484 + 841} = \sqrt{1325} = 5\sqrt{23},$$

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{29}{22}.$$

Пример 1.4. Найти комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$, если: $z_1 = 10 - 4i$,

$$z_2 = -2 + 4i.$$

Решение.

$$\begin{aligned} z = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{10 - 4i}{-2 + 4i} \cdot \frac{-2 - 4i}{-2 - 4i} = \frac{(10 - 4i)(-2 - 4i)}{(-2)^2 + (4)^2} = \frac{-20 - 40i + 8i + 16i^2}{4 + 16} = \\ &= \frac{-36 - 32i}{20} = -\frac{36}{20} - i\frac{32}{20} = -\frac{9}{5} - i\frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Пример 1.5. Возвести в степень $n = 6$ комплексное число $z = -3 - 3\sqrt{3}i$.

Решение.

Для возведения в степень комплексного числа удобно воспользоваться

формулой Муавра $z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, для этого найдем модуль $|z|$

и аргумент φ . Так, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$, а

$$\varphi = \arg z = -\operatorname{arctg} \frac{|y|}{|x|} = -\operatorname{arctg} \frac{|-3\sqrt{3}|}{|-3|} = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Подставляя найденные

значения в формулу Муавра, получим:

$$\begin{aligned} z^n &= |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = 6^6 \left(\cos 6 \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin 6 \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 6^6 (\cos(-2\pi) + \\ &+ i \sin(-2\pi)) = 46656. \end{aligned}$$

Пример 1.6. Извлечь корень n -ой степени из комплексного числа z , если: $n = 4$, $z = -\sqrt{3} + i$.

Решение.

Представим число $z = -\sqrt{3} + i$ в тригонометрической форме, для этого найдем

модуль $|z|$ и аргумент φ . Так, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$, а

$$\varphi = \arg z = \pi - \operatorname{arctg} \frac{y}{|x|} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{|-\sqrt{3}|} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Тогда: $z = -\sqrt{3} + i = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$. По формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} (\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}) \text{ для } k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \text{ получаем:}$$

$$z_{k+1} = \sqrt[4]{2} (\cos \frac{5\pi/6 + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{5\pi/6 + 2\pi k}{4}), \quad k = 0, 1, 2, 3. \text{ Полагая}$$

последовательно k равным 0, 1, 2 и 3, находим корни:

$$z_1 = \sqrt[4]{2} (\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24}); \quad z_2 = \sqrt[4]{2} (\cos \frac{17\pi}{24} + i \sin \frac{17\pi}{24});$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2} (\cos \frac{29\pi}{24} + i \sin \frac{29\pi}{24}); \quad z_4 = \sqrt[4]{2} (\cos \frac{41\pi}{24} + i \sin \frac{41\pi}{24}).$$

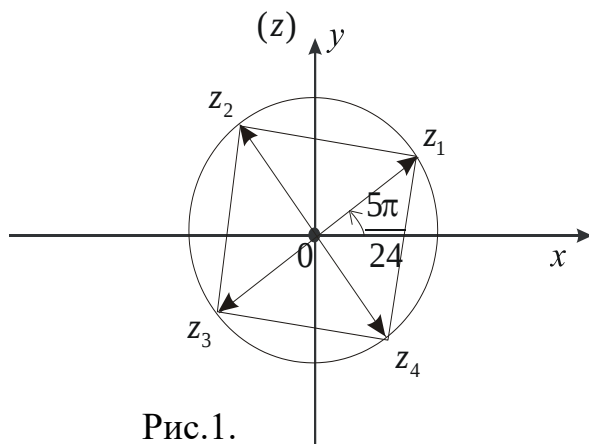


Рис.1.

Для построения этих чисел на

комплексной плоскости (z) проведем

окружность радиуса $R = \sqrt[4]{2}$.

На окружности отметим точку

$$z_1 = \sqrt[4]{2} (\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24}). \text{ Разбивая,}$$

далее, окружность на четыре равные части, изобразим остальные точки (рис.1);

заметим, что $\frac{5\pi}{24}$ рад соответствует $37^\circ 30'$.

Пример 1.7. Выполните указанные действия: $|z|^2 + z^* \operatorname{Re}(z) - 2z$.

Решение.

$$|z|^2 + z^* \operatorname{Re}(z) - 2z = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + (x - iy)x - 2(x + iy) = x^2 + y^2 - x^2 - ixy - 2x - 2iy = y^2 - 3ixy - 2x.$$

Контрольная работа № 1

Вариант I.

- 1.1 Представить комплексное число $z = 2 + \sqrt{2}i$ в тригонометрической и в показательной формах записи.
- 1.2 Найти результат сложения и разности двух комплексных чисел $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$.
- 1.3 Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = z_1 z_2$, если:
 $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$.
- 1.4 Найти комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$, если: $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 2 + \sqrt{3}i$.
- 1.5 Возвести в степень $n = 3$ комплексное число $z = 10 - 3\sqrt{3}i$.
- 1.6 Извлечь корень n -ой степени из комплексного числа z , если:
 $n = 3$, $z = i$.
- 1.7 Доказать: $(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)^* = z_1 + z_2$.

Вариант II.

- 2.1 Представить комплексное число $z = 1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической и в показательной формах записи.
- 2.2 Найти результат сложения и разности двух комплексных чисел $z_1 = \sqrt{3} - i$ и $z_2 = 1 - i$.
- 2.3 Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = z_1 \cdot z_2$, если: $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -\sqrt{3}i$.
- 2.4 Найти комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$, если: $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 3 - i$.
- 2.5 Возвести в степень $n = 8$ комплексное число $z = 1 + 3\sqrt{3}i$.
- 2.6 Извлечь корень n -ой степени из комплексного числа z , если: $n = 4$, $z = -i$.
- 2.7 Найти какой кривой определяется выражение: $|z - 2| = |1 - 2\bar{z}|$.

Вариант III.

- 3.1 Представить комплексное число $z = 3e^{-\frac{\pi}{2}i}$ в алгебраической и в тригонометрической формах записи.
- 3.2 Найти результат сложения и разности двух комплексных чисел $z_1 = 2\sqrt{5} + 2i$ и $z_2 = 3 - \sqrt{3}i$.
- 3.3 Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = z_1 \cdot z_2$, если: $z_1 = 14i$, $z_2 = 2 - \sqrt{3}i$.
- 3.4 Найти комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$, если: $z_1 = 5\sqrt{2} + i$, $z_2 = 2 - i$.
- 3.5 Возвести в степень $n = 6$ комплексное число $z = 24 - 7\sqrt{3}i$.
- 3.6 Извлечь корень n -ой степени из комплексного числа z , если: $n = 3$, $z = -1 - i$.
- 3.7 Найти какой кривой определяется выражение: $3|z| - \operatorname{Re} z = 12$.

Вариант IV.

- 4.1 Представить комплексное число $z = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$ в алгебраической и в тригонометрической формах записи.
- 4.2 Найти результат сложения и разности двух комплексных чисел $z_1 = 7 - i$ и $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$.
- 4.3 Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = z_1 \cdot z_2$, если:
 $z_1 = 2\sqrt{5}i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.
- 4.4 Найти комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$, если: $z_1 = \sqrt{2} + i$, $z_2 = 11 - 3i$.
- 4.5 Возвести в степень $n = 12$ комплексное число $z = 2 - \sqrt{3}i$.
- 4.6 Извлечь корень n -ой степени из комплексного числа z , если:
 $n = 3$, $z = 1 - i$.
- 4.7 Выполните указанные действия: $|z|^2 - z \operatorname{Re}(z) + 4z$.

Вариант V.

- 5.1 Представить комплексное число $z = 5\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ в алгебраической и в показательной формах записи.
- 5.2 Найти результат сложения и разности двух комплексных чисел $z_1 = 4 + 3i$ и $z_2 = -1 - i$.
- 5.3 Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = z_1 \cdot z_2$, если:
 $z_1 = -2 + \sqrt{5}i$, $z_2 = -1 + 3i$.
- 5.4 Найти комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$, если: $z_1 = 7\sqrt{2} + 3i$, $z_2 = 4 - i$.
- 5.5 Возвести в степень $n = 7$ комплексное число $z = 3 - \sqrt{3}i$.
- 5.6 Извлечь корень n -ой степени из комплексного числа z , если:
 $n = 3$, $z = 1 - \sqrt{3}i$.

- 5.7 Найти множество точек на плоскости комплексного переменного, которые задаются: $|z - 1| < |z - i|$.

Вариант VI.

- 6.1 Представить комплексное число $z = 25 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right)$ в алгебраической и в показательной формах записи.
- 6.2 Найти результат сложения и разности двух комплексных чисел $z_1 = -3 + 4i$ и $z_2 = -1 + i$.
- 6.3 Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = z_1 \cdot z_2$, если: $z_1 = -2 + i$, $z_2 = -1 + 3i$.
- 6.4 Найти комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$, если: $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 2 - i$.
- 6.5 Возвести в степень $n = 12$ комплексное число $z = 1 - \sqrt{3}i$.
- 6.6 Извлечь корень n -ой степени из комплексного числа z , если: $n = 3$, $z = 1 + \sqrt{3}i$.
- 6.7 Упростите выражение: $\frac{ia + \sqrt{1+a^2}}{a - i\sqrt{1+a^2}}$, где a – действительное.

Вариант VII.

- 7.1 Представить комплексное число $z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$ в алгебраической и в показательной формах записи.
- 7.2 Найти результат сложения и разности двух комплексных чисел $z_1 = -3 - 4i$ и $z_2 = 2 + i$.
- 7.3 Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = z_1 \cdot z_2$, если: $z_1 = 2 - 2\sqrt{2}i$, $z_2 = 1 + 3i$.

- 7.4 Найти комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$, если: $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 3e^{-\frac{\pi}{2}i}$.
- 7.5 Возвести в степень $n = 4$ комплексное число
- $$z = 5 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{2} \right) - i \sin \left(\frac{5\pi}{2} \right) \right).$$
- 7.6 Извлечь корень n -ой степени из комплексного числа z , если:
- $$n = 3, z = -1 - \sqrt{3}i.$$
- 7.7 Найти множество точек на плоскости комплексного переменного, которые задаются: $|z - 1| \leq |z + i|$.

Вариант VIII.

- 8.1 Представить комплексное число $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ в тригонометрической и в показательной формах записи.
- 8.2 Найти результат сложения и разности двух комплексных чисел $z_1 = 3 - 4i$ и $z_2 = 2 + 2\sqrt{2}i$.
- 8.3 Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = z_1 \cdot z_2$, если:
- $$z_1 = 1 - 2\sqrt{3}i, z_2 = 3 - i.$$
- 8.4 Найти комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$, если: $z_1 = -2 - 3i$, $z_2 = 1 + i$.
- 8.5 Возвести в степень $n = 5$ комплексное число
- $$z = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{5} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) \right).$$
- 8.6 Извлечь корень n -ой степени из комплексного числа z , если:
- $$n = 4, z = 1 + \sqrt{3}i.$$
- 8.7 Найти кривую, которая задается уравнением: $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) = 0.25$.

Вариант IX.

- 9.1 Представить комплексное число $z = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}$ в алгебраической и в тригонометрической формах записи.
- 9.2 Найти результат сложения и разности двух комплексных чисел $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $z_2 = 2 - 2\sqrt{2}i$.
- 9.3 Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = z_1 \cdot z_2$, если:
 $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 7 + i$.
- 9.4 Найти комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$, если: $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -1 + i$.
- 9.5 Возвести в степень $n = 8$ комплексное число
 $z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)$.
- 9.6 Извлечь корень n -ой степени из комплексного числа z , если:
 $n = 3$, $z = 1 + i$.
- 9.7 Найти множество точек на плоскости комплексного переменного, которые задаются: $1 < \operatorname{Re} z < 3$.

Вариант X.

- 10.1 Представить комплексное число $z = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right)$ в алгебраической и в показательной формах записи.
- 10.2 Найти результат сложения и разности двух комплексных чисел $z_1 = -3 + 4i$ и $z_2 = 3 - 4i$.
- 10.3 Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = z_1 \cdot z_2$, если:
 $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + i$.
- 10.4 Найти комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$, если: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$.

10.5 Возвести в степень $n = 12$ комплексное число

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right).$$

10.6 Извлечь корень n – ой степени из комплексного числа z , если:

$$n = 3, z = -1 - i.$$

10.7 Найти множество точек на плоскости комплексного переменного, которые задаются: $1 < \operatorname{Im} z \leq 4$.

II. Функции комплексного переменного.

Основные понятия и определения

Открытым называется множество, состоящее лишь из внутренних точек.

Множество называется **связным**, если любые две его точки z_1 и z_2 можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Областью в комплексной плоскости (z) называется открытое связное множество.

Точка z называется внутренней точкой множества, если она принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью.

ε - **окрестностью** точки a называется множество точек, удовлетворяющих неравенству: $|z - a| < \varepsilon$.

Границей Γ области D называется совокупность точек, не принадлежащих области D , но любая окрестность которых содержит точки, принадлежащие области D .

Область D вместе с границей Γ называется замкнутой областью:
 $\bar{D} = D + \Gamma$.

Связной называется такая линия, из любой точки которой можно перейти в любую другую ее точку.

Ограниченная область называется **односвязной** областью, если ее граница состоит из одной связной линии; **многосвязной** областью, если ее граница состоит из нескольких связных линий.

Функцией комплексного переменного $w = f(z)$, определенной в некоторой области D называется правило или закон, по которому каждому $z \in D$ поставлено в соответствие одно (для однозначной функции) или несколько (для многозначной функции) значений w .

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Примеры наиболее используемых функций в ТФКП:

– показательная функция: $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad |z| < \infty;$

– тригонометрические функции:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, |z| < \infty \text{ и}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, |z| < \infty;$$

– гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad \text{и} \quad \operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Примечание: между тригонометрическими и гиперболическими функциями устанавливается связь:

$$\begin{aligned} \cos iz &= \operatorname{ch} z; & \sin iz &= i \operatorname{sh} z; \\ \operatorname{ch} iz &= \cos z; & \operatorname{sh} iz &= i \sin z. \end{aligned}$$

– логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

– обратные тригонометрические функции:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \quad \text{и} \quad \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz} \quad \text{и} \quad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i};$$

– обратные гиперболические функции:

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}) \quad \text{и} \quad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z} \quad \text{и} \quad \operatorname{Arcrc} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{z-1};$$

Число $A \neq \infty$ называется **пределом функции** $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ (обозначается

$$A = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)), \quad \text{если} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{такое, что} \quad \forall z \neq z_0: \quad |z - z_0| < \delta$$

выполняется неравенство: $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Функция $f(z)$ называется **непрерывной в точке** z_0 , если она определена в этой точке и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D , называется **непрерывной** в этой области.

Функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в точке** $z \in D$, если существует предел $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$. Этот предел называется

производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$ или $\frac{df(z)}{dz}$.

Теорема. Для того, чтобы функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируемой в точке z , необходимо и достаточно, чтобы функции

$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ были дифференцируемы в этой точке и выполнялись

условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$

Функция $w = f(z)$ **называется аналитической (регулярной)** в данной точке $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z , так и в некоторой ее окрестности.

Функция $f(z)$ называется **аналитической в области D** , если она аналитична в каждой точке этой области.

Функция $u = u(x, y)$ называется **гармонической** в области D , если она имеет в этой области непрерывные частные производные первого и второго

порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного

Если функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то $k = |f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ плоскости (z) на плоскость (w) . Аргумент производной $f'(z_0)$ равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости (z) , проходящей через точку z_0 , чтобы получить направление касательной в точке $w_0 = f(z_0)$.

Интеграл от функции комплексного переменного по кривой

Если однозначная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена и непрерывна в области D и L – кусочно – гладкая замкнутая или незамкнутая кривая, лежащая в D , то тогда:
$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i \int_L vdx + udy.$$

Если кривая L задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ (в комплексной форме $z(t) = x(t) + iy(t)$) и начальная и конечная точки кривой L соответствуют значениям параметра $t = \alpha$, $t = \beta$, то тогда:

$$\int_L f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt.$$

Если $f(z)$ аналитична в односвязной области D , точки $z_0, z_1 \in D$, $\Phi(z)$ – одна из первообразных для $f(z)$ ($\Phi'(z) = f(z)$), то имеет место формула Ньютона-Лейбница:
$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z) \Big|_{z_0}^{z_1} = \Phi(z_1) - \Phi(z_0).$$

Справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)dz = [f(z) \cdot g(z)]_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z)dz,$$

где $f(z)$, $g(z)$ - аналитические функции в односвязной области D , z_0, z_1 - произвольные точки этой области.

Теорема Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области, ограниченной контуром Γ и γ – замкнутый контур в D , то
$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области D , ограниченной внешним контуром Γ и внутренними $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, и контур $\Gamma + \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ обходится в положительном направлении, то есть так, чтобы область всегда оставалась слева, то: $\oint_{\Gamma + \sum_{m=1}^k \gamma_m} f(z) dz = 0$ – теорема Коши

для многосвязной области.

Эту теорему удобно сформулировать как: $\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{m=1}^k \oint_{\gamma_m} f(z) dz$ – интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам (все контуры обходятся в одном и том же направлении).

Если $f(z)$ аналитична в области D , $z \in D$ и γ – контур, охватывающий точку z , то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad \zeta \in \gamma.$$

При этом функция $f(z)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для

которых справедливо:
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Пример 2.1. Выделить действительную и мнимую части функции

$$f(z) = z^2 + 4iz + \operatorname{Re}(z).$$

Решение.

$$\begin{aligned} f(z) = z^2 + 4iz + \operatorname{Re}(z) &= (x + iy)^2 + 4i(x + iy) + \operatorname{Re}(x + iy) = x^2 + 2ixy - y^2 + \\ &+ 4ix + 4i^2y + x = (x^2 - y^2 + x - 4y) + i(2xy + 4x). \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + x - 4y, \quad \operatorname{Im} f(z) = 2xy + 4x.$$

Пример 2.2. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α при заданном отображении функции $f(z) = z^2$ в точке $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Решение. Производная функции $f(z)$ равна $f'(z) = 2z$. Тогда $f'(z_0) = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$. Запишем полученный результат в тригонометрической форме: $2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, то есть $k = 4$, а угол поворота $\varphi = \pi/4$.

Пример 2.3. Выяснить, является ли функция $f(z) = e^{2z}$ аналитической.

Решение. Как известно, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$ – действительная часть $f(z)$, а $v(x, y)$ – ее мнимая часть. Распишем

$$f(z) = e^{2z} = e^{2(x+iy)} = e^{2x}e^{i2y}, \text{ используя формулу Эйлера } e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

$$\text{получим } f(z) = e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y), \text{ то есть } u(x, y) = e^{2x} \cos 2y,$$

$$v(x, y) = e^{2x} \sin 2y. \text{ Для того, чтобы функция являлась аналитической, должны}$$

выполняться условия Коши–Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Для их проверки

найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x} \cos 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x} \sin 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x} \sin 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x} \cos 2y \quad \text{и,}$$

следовательно, условия Коши–Римана выполняются на всей плоскости, то есть

$$f(z) = e^{2z} \text{ является аналитической.}$$

Пример 2.4. Составить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее действительной части $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$ и начальному условию $f(0) = 0$.

Решение. Так как искомая функция является аналитической, то выполняются условия Коши – Римана, поэтому найдем частные производные:

$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -4y$, тогда из условий Коши Римана находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4y \quad (1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1 \quad (2).$$

Из (1) находим: $u(x, y) = -\int 4y dx = -4xy + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция переменной y . Для определения $\varphi(y)$ дифференцируем $u(x, y)$ по y и подставляем в (2): $-4x + \varphi'(y) = -4x - 1$, откуда $\varphi'(y) = -1$ и $\varphi(y) = -y + C$.

Следовательно, $u(x, y) = -4xy - y + C$ и окончательно получим:

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = -4xy - y + C + i(2x^2 - 2y^2 + x) = \\ &= 2i(x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x + iy) + C = 2iz^2 + iz + C. \end{aligned}$$

Определим C , используя начальное условие: $f(0) = 2i \cdot 0 + i \cdot 0 + C$, и тогда $C = 0$.

Таким образом, нашли $f(z) = 2iz^2 + iz$.

Пример 2.5. Доказать, что функция $f(z) = 2e^x \cos y$ является гармонической.

Решение. Гармоническая функция удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \text{ Поэтому, найдем соответствующие производные.}$$

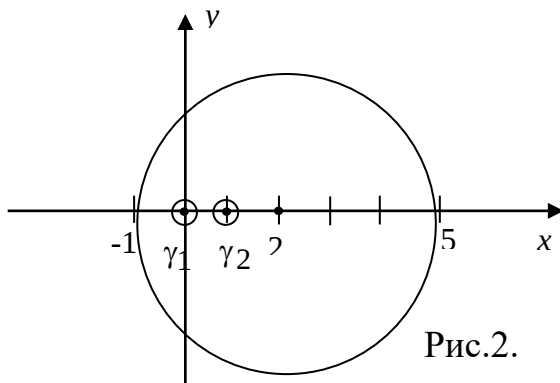
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^x \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2e^x \cos y.$$

Таким образом, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, а это значит, что функция $f(z) = 2e^x \cos y$

является гармонической.

Пример 2.6. Используя интегральную формулу Коши для производных, вычислить: $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz$ по контуру Γ : а) $|z-2|=0.5$; б) $|z-2|=3$.

Решение. а) в круге $|z-2| \leq 0.5$ функция $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$ аналитична, так как



точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$, которые являются нулями знаменателя, не принадлежат данной области. Следовательно, по теореме Коши

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz = 0.$$

б) Так как точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ принадлежат кругу $|z-2| \leq 3$, то для нахождения значения интеграла рассмотрим трехсвязную область D (рис.2), ограниченную окружностью $\Gamma = \{z : |z-2|=3\}$ и внутренними контурами $\gamma_1 = \{z : |z|= \rho\}$ и $\gamma_2 = \{z : |z-1|= \rho, 0 < \rho < 1/2\}$. Тогда в области D функция

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$$
 является аналитической, и: $\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\gamma_2} f(z) dz$.

Для вычисления интегралов по контурам γ_1 и γ_2 применим интегральную формулу Коши и интегральную формулу Коши для производных соответственно:

$$\oint_{\gamma_2} \frac{e^z dz}{z^3(z-1)} = \oint_{\gamma_2} \frac{\frac{e^z}{z^3}}{z-1} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^z}{z^3} \Big|_{z=1} = 2\pi i;$$

$$\oint_{\gamma_1} \frac{e^z dz}{z^3(z-1)} = \oint_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{z^3}}{z-1} dz = \frac{2\pi i}{2!} \cdot \left[\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{e^z}{z-1} \right) \right]_{z=0} = \pi i \frac{e^z(z^2 - 4z + 5)}{(z-1)^3} \Big|_{z=0} = -5\pi i$$

и, таким образом, $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz = \pi i(2e - 5).$

Контрольная работа № 2

Вариант I.

- 1.1 Выделить действительную и мнимую части функции

$$f(z) = z^2 - 4iz + 16.$$

- 1.2 Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α при заданном отображении функции $f(z) = \cos z$ в точке $z_0 = 1 + i$.

- 1.3 Выяснить, является ли функция $f(z) = ze^z$ аналитической.

- 1.4 Составить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее действительной части $u(x, y) = 2e^x \cos y$ и начальному условию $f(0) = 2$.

- 1.5 Доказать, что функция $f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ является гармонической.

- 1.6 Используя интегральную формулу Коши, вычислить: $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 3}.$

Вариант II.

- 2.1 Выделить действительную и мнимую части функции
$$f(z) = 4z^2 + iz - 4i.$$
- 2.2 Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α при заданном отображении функции $f(z) = \sin(2z)$ в точке $z_0 = 1 - i$.
- 2.3 Выяснить, является ли функция $f(z) = ze^z$ аналитической.
- 2.4 Составить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее действительной части $u(x, y) = x^2 + y^2$ и начальному условию $f(0) = 0$.
- 2.5 Доказать, что функция $f(z) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ является гармонической.
- 2.6 Используя интегральную формулу Коши, вычислить: $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z(z + \pi)}$.

Вариант III.

- 3.1 Выделить действительную и мнимую части функции
$$f(z) = (z - i)^2 + 4iz.$$
- 3.2 Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α при заданном отображении функции $f(z) = z^3$ в точке $z_0 = 0$.
- 3.3 Выяснить, является ли функция $f(z) = \cos z$ аналитической.
- 3.4 Составить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее действительной части $u(x, y) = x^2 + y^2$ и начальному условию $f(1) = i$.
- 3.5 Доказать, что функция $f(z) = 2e^x \cos y$ является гармонической.

- 3.6 Используя интегральную формулу Коши, вычислить: $\int_{|z|=\pi} \frac{e^z}{z(z-5)} dz$.

Вариант IV.

- 4.1 Выделить действительную и мнимую части функции $f(z) = \cos(z-i)$.
- 4.2 Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α при заданном отображении функции $f(z) = e^z$ в точке $z_0 = -1 - i\frac{\pi}{2}$.
- 4.3 Выяснить, является ли функция $f(z) = z^2$ аналитической.
- 4.4 Составить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее мнимой части $v(x, y) = 2 \cos x \cosh y - x^2 + y^2$ и начальному условию $f(0) = 2$.
- 4.5 Доказать, что функция $\omega = x^2 + 2x - y^2$ является гармонической.
- 4.6 Используя интегральную формулу Коши, вычислить: $\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2 - 4}$.

Вариант V.

- 5.1 Выделить действительную и мнимую части функции $f(z) = \sin(z + 4i)$.
- 5.2 Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α при заданном отображении функции $f(z) = e^z$ в точке $z_0 = -1 + i\frac{\pi}{2}$.
- 5.3 Выяснить, является ли функция $f(z) = ze^z$ аналитической.
- 5.4 Составить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее мнимой части $v(x, y) = -2 \sin 2x \sinh 2y + y$ и начальному условию $f(0) = 2$.
- 5.5 Доказать, что функция $\omega = e^x \cos y + 1$ является гармонической.
- 5.6 Используя интегральную формулу Коши для производных, вычислить:

$$\int_{|z|=3} \frac{ze^z dz}{(z-i)^2}.$$

Вариант VI.

- 6.1 Выделить действительную и мнимую части функции
 $f(z) = \operatorname{ch}(z + 2i)$.
- 6.2 Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α при заданном отображении функции $f(z) = z^2$ в точке $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
- 6.3 Выяснить, является ли функция $f(z) = \sin 3z - i$ аналитической.
- 6.4 Составить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее действительной части $u(x, y) = 2 \sin 2x \operatorname{ch} y - x$ и начальному условию $f(0) = 0$.
- 6.5 Доказать, что функция $\omega = 3x^2 y - y^2$ является гармонической.
- 6.6 Используя интегральную формулу Коши для производных, вычислить:

$$\int_{|z|=4} \frac{\cos z dz}{(z-2i)^2}.$$

Вариант VII.

- 7.1 Выделить действительную и мнимую части функции $f(z) = ze^z$.
- 7.2 Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α при заданном отображении функции $f(z) = \frac{1}{z}$ в точке $z_0 = -i$.
- 7.3 Выяснить, является ли функция $f(z) = \cos 3z + i$ аналитической.

- 7.4 Составить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее действительной части $u(x, y) = x \cos xchy + y \sin xshy$ и начальному условию $f(0) = 0$.
- 7.5 Доказать, что функция $\omega = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ является гармонической.
- 7.6 Используя интегральную формулу Коши, вычислить: $\int_{|z|=\pi} \frac{chzdz}{z(z+5i)}$.

Вариант VIII.

- 8.1 Выделить действительную и мнимую части функции $f(z) = (z + i)^2$.
- 8.2 Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α при заданном отображении функции $f(z) = z^2 - i$ в точке $z_0 = 2i$.
- 8.3 Выяснить, является ли функция $f(z) = z \cos z$ аналитической.
- 8.4 Составить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее мнимой части $u(x, y) = y \cos yshx + x \sin yshx$ и начальному условию $f(0) = 0$.
- 8.5 Доказать, что функция $\omega = e^x(x^2 + y^2)$ является гармонической.
- 8.6 Используя интегральную формулу Коши для производных, вычислить: $\int_{|z|=1} \frac{chzdz}{z^3}$.

Вариант IX.

- 9.1 Выделить действительную и мнимую части функции $f(z) = 3iz^3$.
- 9.2 Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α при заданном отображении функции $f(z) = e^z$ в точке $z_0 = i$.

- 9.3 Выяснить, является ли функция $f(z) = zchz$ аналитической.
- 9.4 Составить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее действительной части $u(x, y) = e^x \cos y + x^2 - y^2 + 3x$ и начальному условию $f(0) = 1$.
- 9.5 Доказать, что функция $\omega = x^2 - y - x^2$ является гармонической.
- 9.6 Используя интегральную формулу Коши для производных, вычислить:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} dz.$$

Вариант X.

- 10.1 Выделить действительную и мнимую части функции $f(z) = |z|z^*$.
- 10.2 Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α при заданном отображении функции $f(z) = z^3$ в точке $z_0 = 1 + i\frac{\pi}{2}$.
- 10.3 Выяснить, является ли функция $f(z) = e^{z^2}$ аналитической.
- 10.4 Составить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее действительной части $u(x, y) = e^x \sin y + 2xy + 5y$ и начальному условию $f(0) = 10$.
- 10.5 Доказать, что функция $\omega = 3x^2y - y^3$ является гармонической.
- 10.6 Используя интегральную формулу Коши для производных, вычислить:

$$\int_{|z-1|=0.5} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz.$$

Функциональные ряды. Сходимость.

Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда

Теорема. Для сходимости ряда $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ необходимо и

достаточно, чтобы сходились оба ряда: $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Ряд $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если

сходится ряд $|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Ряд вида $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$,

где $c_0, c_1, c_2, \dots$ — комплексные постоянные, а z — комплексная переменная, называется **степенным рядом** в комплексной области.

Ряд вида $c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$

называется **степенным рядом общего вида**.

Для степенного ряда общего вида областью сходимости служит круг

$|z-a| < R$, где R — радиус сходимости. В некоторых случаях он может быть

определен по формулам $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ ($c_n \neq 0$) или $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

Ряд Тейлора

Функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в точке $z = a$ разлагается в

окрестности этой точки в степенной ряд Тейлора: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$,

где коэффициенты c_n вычисляются по формуле: $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

При решении многих задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями элементарных функций:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in (Z);$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in (Z);$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in (Z);$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in (Z);$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in (Z);$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1;$$

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1;$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1, \quad \alpha \in R;$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 + \dots + (-1)^n \cdot z^n + \dots, \quad |z| < 1;$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots, \quad |z| < 1.$$

Ряд Лорана

Рядом Лорана называется ряд вида:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$ называется главной частью ряда Лорана, а ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ — правильной частью. Областью сходимости ряда Лорана

является кольцо $0 \leq r < |z-a| < R$.

Теорема Лорана. Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $0 \leq r < |z-a| < R$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана, коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|<\rho} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} \quad (n < \rho < R; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Нули функции. Изолированные особые точки

Точка z_0 называется нулем аналитической функции $f(z)$ порядка (или кратности) n , если $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Если $n=1$, то точка z_0 называется простым нулем.

Теорема. Для того, чтобы точка z_0 была нулем n – го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0 , необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности этой точки имело место равенство $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Изолированные особые точки

Точка z_0 называется **особой точкой** аналитической функции $f(z)$, если в ней нарушается аналитичность функции.

Точка z_0 называется **изолированной особой точкой** функции $f(z)$, если существует проколота окрестность $0 < |z - z_0| < \delta$ этой точки, в которой $f(z)$ аналитична всюду, за исключением самой точки z_0 .

Существует три типа изолированных особых точек.

Точка z_0 называется **устранимой особой точкой** $f(z)$, если разложение ее в ряд Лорана в окрестности этой точки не содержит главной части.

Точка z_0 называется **полюсом** кратности n функции, если в разложении ее в ряд Лорана в окрестности точки z_0 главная часть содержит конечное число членов, причем младшим отличным от нуля коэффициентом является c_{-n} ($c_{-n} \neq 0$).

Точка z_0 называется **существенно особой** точкой функции $f(z)$, если главная часть ее разложения в ряд Лорана в окрестности этой точки содержит бесконечное число членов.

Приведем критерии типа изолированных особых точек.

1) для того, чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ ($A = \text{const}$).

2) для того, чтобы точка z_0 была полюсом кратности n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z - z_0)^n] = B$ ($B = \text{const}$).

3) для того, чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы не существовал $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Для того, чтобы точка z_0 была полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо, чтобы она была нулем n -го порядка функции $\frac{1}{f(z)}$.

Вычет функции комплексного переменного

Предположим, что функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки a за исключением самой точки a .

Вычетом функции $f(z)$ в точке a (обозначается $\text{res}_a f(z)$) называется

число, равное $\text{res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz$, где L - замкнутый контур, лежащий в

области аналитичности функции $f(z)$ и содержащий внутри себя (только) одну особую точку a . В качестве L удобно брать окружность $|z - a| = \rho$ малого радиуса ρ .

Из определения следует, что вычет функции $f(z)$ совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения ее в ряд Лорана по степеням $z - a$: $\operatorname{res}_a f(z) = c_{-1}$.

Отметим, что вычет в правильной и устранимой особой точках равен нулю.

Вычет $f(z)$ в простом полюсе a , если функция $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем a –

простой нуль функции $\psi(z)$, а $\varphi(a) \neq 0$, можно найти как: $\operatorname{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$.

Вычет функции $f(z)$ в полюсе a порядка m определяется по формуле

$$\operatorname{res}_a f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-a)^m].$$

Если точка a – существенно особая точка функции $f(z)$, то для определения $\operatorname{res}_a f(z)$ необходимо найти коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки a .

Пример 3.1. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z}$ в окрестности $a = 0$.

Решение. Для любого комплексного ζ имеем $\cos \zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} - \frac{\zeta^6}{6!} + \dots$

Полагая $\zeta = \frac{1}{z}$, получим: $z^2 \cos \frac{1}{z} = z^2 \left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \dots \right) =$

$= -\frac{1}{2} + z^2 + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \dots$. Это разложение справедливо для любой точки

$z \neq 0$. В данном случае “кольцо” представляет собой всю комплексную

плоскость за исключением точки $z = 0$: $0 < |z| < +\infty$ ($r = 0$, $R = +\infty$).

Пример 3.2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(z+i)^n}$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда как $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$, $c_n \neq 0$.

Имеем: $c_{-n} = \sin in = i \operatorname{sh} n$, $c_{-n-1} = i \operatorname{sh}(n+1)$, тогда $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|i \operatorname{sh}(n+1)|}{|i \operatorname{sh} n|} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}(n+1)}{\operatorname{sh} n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} - e^{-n-1}}{e^n - e^{-n}} = e.$$

Следовательно, ряд сходится в области $|z+i| > e$, то есть вне круга с центром в точке $a = -i$ радиуса $R = e$.

Пример 3.3. Найти нули функции $f(z) = (z+1)^3 \operatorname{sh} z$ и определить их порядок.

Решение. Полагая $(z+1)^3 \operatorname{sh} z = 0$, получим, что $z+1=0$ или $\operatorname{sh} z = 0$. Решая эти уравнения, находим нули функции $f(z)$: $z = -1$, $z = n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$. Пусть

$z = -1$; тогда $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = (z+1)^3 \varphi(z)$, где функция $\varphi(z) = \operatorname{sh} z$ является аналитической в точке $z = -1$, причем

$\varphi(-1) = \operatorname{sh}(-1) = -\operatorname{sh} 1 \neq 0$. Это означает, что точка $z = -1$ есть нуль третьего порядка. Исследуем нули $z = n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$. Производная

$f'(z) = 3(z+1)^2 \operatorname{sh} z + (z+1)^3 \operatorname{ch} z$ в точках $z = n\pi i$ отлична от нуля.

Следовательно, $z = n\pi i$ – простые нули функции $f(z)$.

Пример 3.4. Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{1}{\frac{1}{e^z} + 1}$ и определить

их характер.

Решение. Особыми точками данной функции являются точка $z = 0$ и точки, в которых знаменатель обращается в нуль. Найдем их, для этого решим

уравнение $e^{\frac{1}{z}} + 1 = 0$, откуда $\frac{1}{z} = \text{Ln}(-1)$. Используя формулу для логарифма

$\text{Ln } \tilde{z} = \ln|\tilde{z}| + i(\arg \tilde{z} + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, получим: $\frac{1}{z} = \ln 1 + i(-\pi + 2\pi k)$,

то есть $z_k = \frac{1}{(2k-1)\pi i}$, причем эти точки являются нулями первого порядка

для функции $e^{\frac{1}{z}} + 1$. Следовательно, в точках $z_k = \frac{1}{(2k-1)\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$ функция

$f(z)$ имеет простые полюса.

Точка $z = 0$ не является изолированной особой точкой, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$: это

означает, что любая окрестность точки $z = 0$ содержит бесконечное число особых точек $f(z)$.

Пример 3.5. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4}z^2}$ в ее особых точках.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z = 0$ и $z = \frac{\pi}{4}$.

В точке $z = 0$ имеем: $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z^2}{z^2} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z - \pi/4} = -\frac{4}{\pi}$, то есть точка

$z = 0$ – устранимая особая точка функции $f(z)$. Поэтому, $\text{res } f(0) = 0$. В точке

$z = \frac{\pi}{4}$ предел $\lim_{z \rightarrow \pi/4} f(z) = \infty$, то есть точка $z = \frac{\pi}{4}$ – простой полюс функции

$f(z)$. По формуле для простого полюса имеем

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \left[f(z) \left(z - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\sin z^2}{z^2} = \frac{16}{\pi^2} \cdot \sin \frac{\pi^2}{16}.$$

Контрольная работа № 3

Вариант I.

- 1.1 Разложить в ряд Тейлора функцию вида $f(z) = e^z$ в окрестности точки $z_0 = \frac{1}{2}$.
- 1.2 Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n}$.
- 1.3 Найти нули функции $f(z) = \cos(z^3)$ и определить их порядок.
- 1.4 Найти особые точки функции $f(z) = \frac{shz}{z - shz}$ и определить их характер.
- 1.5 Найти вычет функции $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ в ее особой точке.

Вариант II.

- 2.1 Разложить в ряд Тейлора функцию вида $f(z) = \frac{1}{2z+1}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.
- 2.2 Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\cos in}$.
- 2.3 Найти нули функции $f(z) = z^4 + 4z^2$ и определить их порядок.

- 2.4 Найти особые точки функции $f(z) = \cos \frac{1}{z}$ и определить их характер.
- 2.5 Найти вычет функции $f(z) = e^{z^2 + \frac{1}{z^2}}$ в ее особых точках.

Вариант III.

- 3.1 Разложить в ряд Тейлора функцию вида $f(z) = \sin iz$ в окрестности точки $z_0 = 0$.
- 3.2 Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(iz)^n}$.
- 3.3 Найти нули функции $f(z) = (z-1)^2 \sin z$ и определить их порядок.
- 3.4 Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1}{\sin z - z}$ и определить их характер.
- 3.5 Найти вычет функции $f(z) = \frac{e^z}{(z-2)^3}$ в ее особых точках.

Вариант IV.

- 4.1 Разложить в ряд Лорана функцию вида $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.
- 4.2 Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$.
- 4.3 Найти нули функции $f(z) = \cos(z^4)$ и определить их порядок.

4.4 Найти особые точки функции $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ и определить их характер.

4.5 Найти вычет функции $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^3 - \frac{\pi^2}{4}z}$ в ее особых точках.

Вариант V.

5.1 Разложить в ряд Тейлора функцию вида $f(z) = e^z$ в окрестности точки $z_0 = 1 + i$.

5.2 Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(in)}{(z-i)^n}$.

5.3 Найти нули функции $f(z) = zch^2 z$ и определить их порядок.

5.4 Найти особые точки функции $f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z^2}$ и определить их характер.

5.5 Найти вычет функции $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^3}$ в ее особых точках.

Вариант VI.

6.1 Разложить в ряд Лорана функцию вида $f(z) = \frac{e^z}{z^4}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.

6.2 Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in)}{(z-i)^n}$.

6.3 Найти нули функции $f(z) = 4sh^2(2z)$ и определить их порядок.

6.4 Найти особые точки функции $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^3}$ и определить их характер.

- 6.5 Найти вычет функции $f(z) = \frac{ch(2z)}{(z - \pi)^3}$ в ее особых точках.

Вариант VII.

- 7.1 Разложить в ряд Лорана функцию вида $f(z) = \frac{\sin(2z)}{z^2}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.
- 7.2 Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n}$.
- 7.3 Найти нули функции $f(z) = (z - 3i)^3$ и определить их порядок.
- 7.4 Найти особые точки функции $f(z) = e^{\frac{1}{z^3}}$ и определить их характер.
- 7.5 Найти вычет функции $f(z) = \frac{\sin(iz)}{z(z+1)^3}$ в ее особых точках.

Вариант VIII.

- 8.1 Разложить в ряд Лорана функцию вида $f(z) = z^4 \cos(2z)$ в окрестности точки $z_0 = 0$.
- 8.2 Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n$.
- 8.3 Найти нули функции $f(z) = z^6(z - \sin z)$ и определить их порядок.
- 8.4 Найти особые точки функции $f(z) = thz$ и определить их характер.
- 8.5 Найти вычет функции $f(z) = \frac{e^{3z}}{z(z-3)^2}$ в ее особых точках.

Вариант IX.

- 9.1 Разложить в ряд Лорана функцию вида $f(z) = z^3 \cos\left(\frac{z}{3}\right)$ в окрестности точки $z_0 = 0$.
- 9.2 Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(1+z)^n}$.
- 9.3 Найти нули функции $f(z) = z^2(1 - \cos z)$ и определить их порядок.
- 9.4 Найти особые точки функции $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^2 - 1}$ и определить их характер.
- 9.5 Найти вычет функции $f(z) = z^3 \cos(2z)$ в ее особых точках.

Вариант X.

- 10.1 Разложить в ряд Тейлора функцию вида $f(z) = \sin z$ в окрестности точки $z_0 = \frac{\pi}{4}$.
- 10.2 Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} ch\left(\frac{i}{n}\right)z^n$.
- 10.3 Найти нули функции $f(z) = 1 + chz$ и определить их порядок.
- 10.4 Найти особые точки функции $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2(z + 2i)}$ и определить их характер.
- 10.5 Найти вычет функции $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ в ее особых точках.

Применение теории вычетов к вычислению интегралов от функции комплексного переменного

Теорема Коши о вычетах. Если функция $f(z)$ аналитична на границе L области D и внутри области, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$, то

$$\int_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k).$$

Если подынтегральная функция представляет собой дробно-рациональное выражение, содержащее тригонометрические функции – $f(z) = R(\sin \varphi, \cos \varphi)$,

то удобно воспользоваться подстановкой $e^{i\varphi} = z$. Имеем: $\cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$,

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad dz = i e^{i\varphi} d\varphi = i z d\varphi. \quad \text{Тогда: } \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = 2\pi i \cdot \sigma,$$

где σ – сумма вычетов функции $f(z)$ относительно полюсов, заключенных внутри окружности $|z|=1$.

Для вычисления несобственных интегралов используется следующая теорема.

Теорема: Пусть функция $f(x)$, где $-\infty < x < +\infty$ удовлетворяет условиям:

- 1) функция $f(z)$, получаемая заменой действительной переменной x на комплексную переменную z имеет в комплексной плоскости только изолированные особые точки, причем не лежащие на оси OX ;
- 2) если $\gamma(R)$ – полуокружность радиуса R , с центром в начале координат, лежащая в верхней (нижней) полуплоскости и $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} f(z) dz = 0$, то

интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ равен сумме вычетов функции $f(z)$ в особых точках, лежащих в верхней (в нижней) полуплоскости, умноженной на $2\pi i$ (умноженной на $-2\pi i$).

Пример 4.1. Найти значение интеграла $\int_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz$.

Решение. Рассмотрим подынтегральную функцию $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}$. Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ используя разложение функции

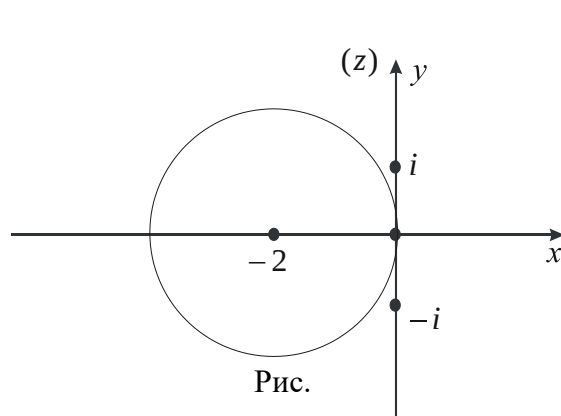
$$\sin \tilde{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\tilde{z}^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ где } \tilde{z} = \frac{1}{z}. \text{ Получим: } f(z) = z^3 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} - \dots \right) =$$

$$= z^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5z^2} - \dots \text{ Из разложения видно, что отсутствует слагаемое } \frac{c_{-1}}{z}, \text{ т.е.}$$

$$c_{-1} = 0. \text{ Тогда } \int_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k) = 2\pi i \operatorname{res} f(0) = 2\pi i c_{-1} = 0.$$

Пример 4.2. Вычислить интеграл $\int_L \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$, где $L: |z+2|=2$.

Решение. Особыми точками подынтегральной функции



$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2(z^2+1)} \text{ являются } z = -2 -$$

полнос второго порядка, $z = \pm i$ - полюса первого порядка. Внутри окружности $|z+2|=2$ (рис.) лежит лишь точка $z = -2$.

Поэтому:

$$\int_L \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = 2\pi i \operatorname{res}_{-2} f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -2} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^2+1} \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -2} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{8\pi i}{25}.$$

Пример 4.3. Вычислить интеграл $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$ ($a > b > 0$).

Решение. Применяя подстановку $e^{i\varphi} = z$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$,

$dz = ie^{i\varphi}d\varphi = izd\varphi$, получим после преобразований

$$I = \frac{4}{i} \int_{|z|=1} \frac{zdz}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \frac{4}{i} 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z).$$

Внутри круга $|z| < 1$ при условии ($a > b > 0$) находится только один полюс

(двукратный) $z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$. Вычет функции $f(z) = \frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2}$

относительно этого полюса

$$\operatorname{res}_{z_1} f = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[\frac{z(z-z_1)^2}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2} \right] = \frac{a}{4}(a^2 - b^2)^{-3/2}.$$

Окончательно получим: $I = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}$.

Пример 4.4. Вычислить интеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(z) = \frac{z^2}{(x^2 + 9)^2}$ – четная, поэтому

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)^2}. \quad \text{Для функции } R(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 9)^2}: \quad P(z) = z^2,$$

$Q(z) = (z^2 + 9)^2$ – многочлены второй и четвертой степени ($m = 2, k = 4$) и

$k - m = 2$. Нули функции $Q(z)$: $z = 3i$ и $z = -3i$ лежат вне вещественной оси,

причем в верхней полуплоскости лежит лишь нуль $z = 3i$. Условия теоремы, в

частности $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} f(z) dz = 0$, выполнены для данной функции, и,

$$\text{следовательно, } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)^2} = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{3i} \frac{z^2}{(z^2 + 9)^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z + 3i)^2} \right) =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{6iz}{(z + 3i)^3} = \frac{\pi}{6} \quad \text{и} \quad I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

Контрольная работа № 4.

Вариант I.

Найти значения следующих интегралов:

$$1.1 \quad \int_{|z|=1} z^4 \sin \frac{1}{z} dz.$$

$$1.2 \quad \int_{|z-1|=0.5} \frac{e^{iz}}{(z^2 - 1)^2} dz.$$

$$1.3 \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\varphi)}{1 - 2a \cos \varphi + a^2} d\varphi, \quad a > 1.$$

$$1.4 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{(1+x)(x^2 + 4)} dx.$$

Вариант II.

Найти значения следующих интегралов:

$$2.1 \quad \int_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{2z} dz.$$

$$2.2 \quad \int_{|z|=\pi} \frac{e^{iz}}{z(z-3)^2} dz.$$

$$2.3 \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{1 - 2a \sin \varphi + a^2} d\varphi, \quad 0 < a < 1.$$

$$2.4 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Вариант III.

Найти значения следующих интегралов:

$$3.1 \quad \int_{|z|=1} z \cos \frac{1}{z} dz.$$

$$3.2 \quad \int_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ch}(2z)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-2)} dz.$$

$$3.3 \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos \varphi} d\varphi, \quad a > 1.$$

$$3.4 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)(x+2)} dx.$$

Вариант IV.

Найти значения следующих интегралов:

$$4.1 \quad \int_{|z|=1} z^3 \cos z dz.$$

$$4.2 \quad \int_{|z|=1} \frac{\cos(iz)}{(z^2+4)(z-2)} dz.$$

$$4.3 \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a \cos \varphi} d\varphi, \quad 0 < a < 1.$$

$$4.4 \quad \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.$$

Вариант V.

Найти значения следующих интегралов:

$$5.1 \quad \int_{|z|=1} z^{-2} \cos 2z dz.$$

$$5.2 \quad \int_{|z+i|=1} \frac{chz}{(z^2+2)(z-3)} dz.$$

$$5.3 \quad \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi d\varphi$$

$$5.4 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4} dx.$$

Вариант VI.

Найти значения следующих интегралов:

$$6.1 \quad \int_{|z|=1} z^2 e^{\frac{z}{2}} dz.$$

$$6.2 \quad \int_{|z-i|=\pi} \frac{shz}{(z^2+4)(z+5)} dz.$$

$$6.3 \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a \sin \varphi} d\varphi, \quad 0 < a < 1.$$

$$6.4 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx.$$

Вариант VII.

Найти значения следующих интегралов:

$$7.1 \quad \int_{|z|=1} z^{-1} e^{3z} dz.$$

$$7.2 \quad \int_{|z|=1} \frac{shz}{z^3(z+2)} dz.$$

$$7.3 \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{6 + \sin \varphi} d\varphi.$$

$$7.4 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx.$$

Вариант VIII.

Найти значения следующих интегралов:

$$8.1 \quad \int_{|z|=1} i z e^{2iz} dz.$$

$$8.2 \quad \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{ch2z}{z^4} dz.$$

$$8.3 \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{2 - \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

$$8.4 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2ix - 1} dx.$$

Вариант IX.

Найти значения следующих интегралов:

$$9.1 \quad \int_{|z|=1} z^{-1} e^z dz.$$

$$9.2 \quad \int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - z - 6} dz.$$

$$9.3 \quad \int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos \varphi}{2 - \sin \varphi} d\varphi.$$

$$9.4 \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4} dx.$$

Вариант X.

Найти значения следующих интегралов:

$$10.1 \quad \int_{|z|=1} z^{-1} \cos 3z dz.$$

$$10.2 \quad \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^3} dz.$$

$$10.3 \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos \varphi} d\varphi, \quad a > 1.$$

$$10.4 \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \cos 2x}{x^2 + 9} dx.$$

Вариант теста итогового контроля

1. Комплексным числом z называется:

а) пара чисел a и b , *б) упорядоченная пара действительных чисел (a, b) .

2. Модуль комплексного числа

а) $|z| = \sqrt{a^2 - b^2}$, б) $|z| = a^2 + b^2$, *в) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, г) $|z| = \sqrt{a + b}$.

3. Комплексно сопряженное число для $z = a + ib$ есть

а) $z = a + b$, *б) $z = a - ib$, в) $z = b + ia$, г) $z = b - ia$.

4. Суммой двух комплексных чисел $z_1(a_1, b_1)$ и $z_2(a_2, b_2)$ называется комплексное число $z(a, b)$:

а) $a = a_1 + b_1$, $b = a_2 + b_2$; *б) $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$;

в) $a = a_1 + b_2$, $b = a_2 + b_1$; г) $a = b_1 + b_2$, $b = a_1 + a_2$.

5. Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется число

*а) $z = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$,

б) $z = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 - a_2b_1)$,

в) $z = a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$,

г) $z = a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_1b_2 - a_2b_1)$.

6. Формула Муавра имеет вид:

а) $z^n = |z|(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, б) $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi))$,

*в) $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, г) $z^n = |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

7. Формула Эйлера имеет вид:

- а) $e^{i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$, б) $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$,
 в) $e^{-i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, *г) $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

8. Тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид:

- *а) $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, б) $z = (\cos \varphi + i \sin \varphi)$,
 в) $z = |z|(\cos \varphi - i \sin \varphi)$, г) $z = |z|(\cos \varphi + \sin \varphi)$.

9. Односвязной областью называется область, если

- а) ее граница – это непрерывная кривая,
 *б) ее граница – это непрерывная кривая, без самопересечений.

10. Функция $\omega = f(z)$ называется аналитической в точке z_0 , если

- а) существует $f'(z_0)$,
 *б) существует $f'(z_0)$, причем не только в точке z_0 , но и в ее окрестности.

11. Приращение функции $\omega = f(z)$, дифференцируемой в точке z_0 имеет вид

- а) $\Delta \omega = Az + \alpha(z)\Delta z$, б) $\Delta \omega = Az + \alpha(\Delta z)z$,
 *в) $\Delta \omega = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z$, г) $\Delta \omega = A\Delta z - \alpha(z)\Delta z$.

12. Условия Коши-Римана имеют вид

$$\begin{array}{ll} \text{*а) } \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, & \text{б) } \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \text{в) } \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, & \text{г) } \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{array}$$

13. Функция $\omega = f(z)$ называется однолистной в области D , если:

- а) $z_1 \neq z_2$, то $f(z_1) = f(z_2)$; *б) $z_1 \neq z_2$, то $f(z_1) \neq f(z_2)$;
 в) $z_1 = z_2$, то $f(z_1) = f(z_2)$; г) $z_1 = z_2$, $f(z_1) \neq f(z_2)$.

14. По теореме Коши для односвязной области интеграл по замкнутому контуру Γ от аналитической функции $f(z)$ равен

$$\text{а) } \int_{\Gamma} f(z) dz = \infty, \quad \text{б) } \int_{\Gamma} f(z) dz = 1, \quad \text{*в) } \int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad \text{г) } \int_{\Gamma} f(z) dz = \text{const}$$

15. Интегральная формула Коши имеет вид:

$$\text{а) } f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad \text{б) } f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta + z},$$

$$\text{в) } f(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta + z}, \quad \text{*г) } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

16. Формула Коши для производных

$$\text{*а) } f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad \text{б) } f^{(n)}(z) = \frac{n}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n-1}}$$

$$\text{в) } f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad \text{г) } f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^n}.$$

17. Закончите формулировку теоремы Лиувилля: если функция $f(z)$ является аналитической и ограниченной во всей комплексной плоскости, то

$$\text{а) } f(z) = 0, \quad \text{б) } f'(z) = 0, \quad \text{*в) } f(z) \equiv \text{const}, \quad \text{г) } f'(z) = \text{const}.$$

18. Формула Тейлора для коэффициентов степенного ряда (ряда Тейлора) имеет вид

$$\text{а) } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n}, \quad \text{б) } c_n = \frac{f^n(z_0)}{n}, \quad \text{*в) } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \text{г) } c_n = f^{(n)}(z_0).$$

19. Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 называется число, равное

$$\text{а) } \text{res}_{z_0} f = \frac{1}{2} \int_{\gamma} f(z) dz, \quad \text{б) } \text{res}_{z_0} f = \pi \int_{\gamma} f(z) dz,$$

$$\text{*в) } \text{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz, \quad \text{г) } \text{res}_{z_0} f = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

20. Интеграл по замкнутому контуру Γ от функции $f(z)$, аналитической во всех точках Γ , за исключением особых $(z_1, \dots, z_n)$, равен

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_{\Gamma} f(z) dz &= 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f, & \text{б) } \int_{\Gamma} f(z) dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f, \\ \text{в) } \int_{\Gamma} f(z) dz &= \sum_{k=0}^n \operatorname{res}_{z_k} f, & \text{*г) } \int_{\Gamma} f(z) dz &= 2\pi i \sum_{k=n}^{\infty} \operatorname{res}_{z_k} f. \end{aligned}$$

21. Вычетом в точке $z_0 = \infty$ называется число

$$\begin{aligned} \text{*а) } \operatorname{res}_{z_0} f &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} f(z) dz, & \text{б) } \operatorname{res}_{z_0} f &= \int_{\Gamma^-} f(z) dz, \\ \text{в) } \operatorname{res}_{z_0} f &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^-} f(z_0) dz, & \text{г) } \operatorname{res}_{z_0} f &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma^-} f(z) dz. \end{aligned}$$

22. Отображение называется конформным в точке z_0 , если

- а) сохраняются углы между любыми двумя кривыми, проходящими через z_0 ,
- б) растяжение в точке z_0 не зависит от направления,
- в) сохраняются углы между любыми двумя кривыми и растяжение в точке z_0 зависит от направления,
- *г) сохраняются углы между любыми двумя кривыми и растяжение в точке z_0 не зависит от направления.

(правильные ответы отмечены *)

Литература

1. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1999.
2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
3. *Краснов М.Л., Кисилев А.И. Макаренко Г.И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Учебное пособие. - М.: Наука, 1981.
4. *Волковыский Л.И., Луиц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1975.
5. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Высшая школа, 1980.