ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т. Г. ШЕВЧЕНКО

Рыбницкий филиал

Кафедра физики, математики и информатики

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно – методическое пособие

Рыбница, 2014

УДК 51(075)
ББК 22.171
М 34

Составитель:
Т.А. Панченко, преподаватель **Л.А. Тягульская**, доцент

Рецензенты:
Л.К. Скодорова, канд. социологических наук, доцент кафедры прикладная информатика филиала ПГУ им. Т.Г. Шевченко в г. Рыбница
А.Б. Глазов, зав. каф. физики, математики и информатики филиала ПГУ им. Т.Г. Шевченко в г. Рыбница

М 34 Учебно-методическое пособие. / Сост. Т.А.Панченко, Л.А.Тягульская – Рыбница, 2014. – 68 с. (в обл.)

В учебно-методическом пособии изложены цели и задачи дисциплины «Линейная алгебра», последовательность её изучения, основные требования к контрольной работе, список рекомендуемой литературы, представлена программа дисциплины, разбитая на отдельные разделы и темы, которые изучаются на первом курсе во втором семестре.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов заочной формы обучения, будет полезно студентам дневной формы обучения направлений «Программная инженерия» и «Педагогическое образование» изучающих дисциплину «Алгебра и геометрия» на первом курсе.

УДК 51(075)
ББК 22.171

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Оглавление

Введение

Студенты – заочники специальности «Бизнес информатика» изучают дисциплину «Линейная алгебра» в течение одного семестра. Основной формой обучения студента заочного отделения является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, ответы на вопросы для самопроверки, выполнение контрольных работ.

Во время сессии для студентов читаются обзорные лекции по наиболее важным разделам курса и проводятся практические занятия.

В учебно-методическом пособии представлена программа дисциплины, разбитая на отдельные разделы и темы. В конце каждой темы программы есть методические указания по её изучению, вопросы для самопроверки. Далее приведены варианты контрольной работы, которые должны выполнить студенты на первом курсе, во втором семестре, и образец её выполнения. В пособии содержатся разделы Линейной алгебры, изучаемые студентами направления «Бизнес информатика» во втором семестре первого курса: элементы линейной алгебры, элементы векторной алгебры, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.

Контрольные работы следует выполнять в течение семестра, чтобы к моменту сессии они уже были прорецензированы и допущены к экзамену. В период сессии проводится защита контрольных работ (студент отвечает на вопросы по контрольной работе).

Студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения устной или письменной консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ.

Завершающим этапом изучения курса линейной алгебры является сдача экзамена в период сессии. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела, решение задач в простейших случаях должно выполняться без ошибок и уверенно. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, помогут проверить прочность усвоения изученного материала.

Программа курса «Линейная алгебра» и методические указания к изучению предмета

Курс линейной алгебры разбит на темы. По каждой теме указана литература, рекомендуемая для изучения и задачи для самостоятельного решения. Номера в скобках ( ) означают номер пособия из приведенного ниже списка литературы. В каждой теме приведены методические рекомендации и вопросы для самопроверки. Темы объединены в раздел.

После изучения раздела нужно выполнить контрольную работу.

РАЗДЕЛ

Линейная алгебра, векторы, аналитическая геометрия.

ТЕМА 1. *Матрицы и определители. Системы линейных алгебраических уравнений.* ([1], гл.10), ([2], стр.124 №8, стр.129 №38), ([3]).

Определители 2-го и 3-го порядка, их свойства. Системы линейных уравнений. Правило Крамера. Метод Гаусса. Матрицы, действия над ними. Обратная матрица. Матричная запись системы линейных уравнений и её решение.

Методические указания

Один из главных вопросов этой темы - решение систем линейных уравнений. Следует твердо усвоить метод Крамера и метод Гаусса, знать условия их применения. Наиболее универсальным из них является метод Гаусса, называемый также методом исключения неизвестных. Применение метода Гаусса не зависит ни от числа уравнений, ни от числа неизвестных в системе.

Вопросы для самопроверки

1. Матрицы. Линейные операции над матрицами. Произведение матриц. Обратная матрица.
2. Определители второго и третьего порядков. Их свойства и способы вычисления.
3. Понятие решения системы линейных уравнений. Совместные, несовместные, неопределённые системы.
4. Формулы Крамера, условие их применения. Метод Гаусса решения и исследования систем.

ТЕМА 2. *Векторы*. ([1], гл.9, §1-§8), ([2], стр.155 №6, 37, 38, 46, 72, 83), ([3]).

Векторы, линейные операции над ними. Скалярное, векторное, смешанное произведения, их свойства и вычисление через координаты перемножаемых векторов.

Методические указания

Понятие вектора используется как в самой математике, так и в других дисциплинах: в механике, физике, электротехнике и др. Например, все основные действия над векторами соответствуют операциям над силами.

Изучая тему, выпишите определения коллинеарных, равных, компланарных векторов, определения скалярного, векторного, смешанного произведений. Научитесь вычислять скалярное, векторное, смешанное произведения по координатам перемножаемых векторов.

Вопросы для самопроверки

1. Определение вектора. Линейные операции над векторами.
2. Координаты вектора.
3. Определение скалярного произведения двух векторов, его свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов.
4. Формула длины вектора, угла между двумя векторами, формула расстояния между двумя точками в декартовой системе координат.
5. Определение векторного произведения двух векторов, его свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов.
6. Определение смешанного произведения трёх векторов, его свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов.

ТЕМА 3. *Аналитическая геометрия*.([1], гл.3, §6-7; гл.9, §11-§14); ([3]) стр.22 №41; стр.168 № 105,119, 131, 151).

Прямая на плоскости, различные формы её уравнения. Уравнение плоскости и прямой в пространстве. Взаимное расположение плоскостей и прямых. Кривые второго порядка, их свойства. Полярные координаты на плоскости.

Методические указания

В аналитической геометрии изучение фигур на плоскости и в пространстве производится с помощью их уравнений. В декартовой системе координат на плоскости уравнение вида $Ax+By+C=0$ определяет некоторую прямую, а в пространстве уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ определяет плоскость. Прямая линия в пространстве задаётся как линия пересечения двух плоскостей.

Вопросы для самопроверки

1. Определение линий и поверхностей в аналитической геометрии.
2. Виды уравнений прямой на плоскости.
3. Нормальный вектор плоскости. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору, по трем точкам. Общее уравнение плоскости.
4. Общие, канонические, параметрические уравнения прямой в пространстве.
5. Определение и канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы.
6. Полярные координаты на плоскости. Уравнение линии в полярных координатах. Формулы перехода от полярных координат к декартовым.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

ЗАДАНИЕ 1

Определить совместность системы линейных уравнений по теореме Кронекера-Капели и применяя метод Жордана – Гаусса, решить систему линейных уравнений.

1. $$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 11, \\ x_1 - 6x_3 + 9x_4 = -8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 2x_4 = -11, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 = -8, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 8, \\ 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 13. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -3, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 12, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -18, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 = -10. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 - 9x_3 - 5x_4 = -9, \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 15, \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 13, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$$

9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -27, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 10. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -8, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -11, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 9. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 11, \\ x_1 - 6x_3 + 9x_4 = -8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 2x_4 = -11, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 = -8, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 8, \\ 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 13. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -3, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 12, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -18, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 = -10. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 - 9x_3 - 5x_4 = -9, \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 15, \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 13, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -27, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 10. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -8, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -11, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 9. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 11, \\ x_1 - 6x_3 + 9x_4 = -8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 2x_4 = -11, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 = -8, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 8, \\ 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 13. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -3, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 12, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -18, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 = -10. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 - 9x_3 - 5x_4 = -9, \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 15, \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 13, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3-x_4=-4, \\ 3x_1+x_2-7x_3+x_4=-27, \\ -2x_1-x_2+x_3-5x_4=0, \\ x_1+3x_2+4x_3+2x_4=10. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3+x_4=-8, \\ 5x_1+x_2+2x_3=-11, \\ -x_1+x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+6x_3-3x_4=9. \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 2

Даны координаты вершин треугольника ABC. Требуется:

1) вычислить длину стороны BC;
2) составить уравнение линии BC;
3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины A;
4) вычислить длину высоты, проведенной из вершины A;
5) найти точку пересечения медиан;
6) вычислить внутренний угол при вершине B;
7) найти координаты точки M, расположенной симметрично точке A относительно прямой BC.

1. $A(-12,-3),\ B(12,-10),\ C(-6,\ 14)$.
2. $A(-19,-1),\ B(5,-8),\ C\ (-13,16)$.
3. $A(-6,-5),\ B(18,-12),\ C(0,\ 12)$.
4. $A(3,\ 12),\ B(27,\ 5),\ C(9,\ 29)$.
5. $A(6,0),\ B(30,-7),\ C(12,\ 17)$.
6. $A(-9,\ 20),\ B(15,\ 13),\ C(-3,\ 37)$.
7. $A(-21,18),\ B(3,11),\ C(-15,35)$.
8. $A(-15,\ 27),\ B(9,\ 20),\ C(-9,\ 44)$.
9. $A(-27,-24), B(-3,-31), C(-21,-7)$.
10. $A(-17,\ 26),\ B(7,\ 19),\ C(-11,43)$.
11. $A(6,\ 2),\ B(30,\ -5),\ C(12,\ 19)$.
12. $A(4,\ 3),\ B(-12,-9),\ C(-5,\ 15)$.
13. $A(-1,\ 7),\ B(11,\ 2),\ C(17,\ 10)$.
14. $A(1,\ 1),\ B(-15,\ 11),\ C(-8,\ 13)$.
15. $A(-14,\ 10),\ B(10,\ 3),\ C(-8,\ 27)$.

16. $A(7,\ 1),\ B(-5,\ -4),\ C(-9,\ -1).$

17. $A(-2,\ 1),\ B(-18,\ -11),\ C(-11,\ 13).$

18. $A(10,\ -1),\ B(-2,\ -6),\ C(-6,\ -3).$

19. $A(-12,\ 6),\ B(12,\ -1),\ C(-6,\ 23).$

20. $A(8,\ 0),\ B(-4,\ -5),\ C(-8,\ -2).$

21. $A(-20,\ 0),\ B(4,\ -7),\ C(-14,\ 17).$

22. $A(-16,\ -8),\ B(8,\ -15),\ C(-10,\ 9).$

23. $A(-20,\ -6),\ B(4,\ -13),\ C(-14,\ 10).$

24. $A(-4,\ 7),\ B(20,\ 0),\ C(2,\ 24).$

25. $A(-8,\ 8),\ B(16,\ 1),\ C(-2,\ 25).$

26. $A(-24,\ 2),\ B(0,\ -5),\ C(-18,\ 19).$

27. $A(-14,\ 6),\ B(10,\ -1),\ C(-8,\ 23).$

28. $A(-8,\ -3),\ B(4,\ -12),\ C(8,\ 10).$

29. $A(-5,\ 7),\ B(7,\ -2),\ C(11,\ 20).$

30. $A(-12,\ -1),\ B(0,\ -10),\ C(4,\ 12).$

ЗАДАНИЕ 3

1. Вершина квадрата $A(7, 3)$, сторона CD лежит на прямой, отсекающей на осях координат отрезки $\mathrm{a} = 4,\ \mathrm{b} = 3$. Написать уравнение стороны *АД* (Квадрат ABCD).

2. В треугольнике ABC даны уравнения: высоты $AN:\ x - 2y + 7 = 0$, высоты $BM:\ 9x - 4y - 11 = 0$ и стороны $AB:\ x - 3y + 9 = 0$. Составить уравнение третьей высоты.

3. Найти точку, симметричную точке $M(-2, -9)$ относительно прямой $2x + 5y - 38 = 0$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых: $x + 2y - 4 = 0$ и $3x - 2y + 12 = 0$ и образующей угол в 45^0 с прямой $2x - y - 1 = 0$.

5. Через точку пересечения прямых $3x + 5y + 3 = 0$ и $x - 2y + 12 = 0$ провести прямую перпендикулярно прямой $2x + 8y - 6 = 0$.

6. В треугольнике ABC даны уравнения: стороны AB и высот $AN: \ 4x-3y+1=0 \ \ и \ \ BM: \ 7x+2y-22=0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

7. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон ($x+2y=4 \ \ и \ \ x+2y=10$) и уравнение одной из его диагоналей $y=x+2$.

8. Из точки $A(5,\ 4)$ выходит луч света под углом $\varphi = arctg2$ к оси Ох и от нее отражается. Написать уравнения падающего и отраженного лучей.

9. Под каким углом к оси Ох наклонена прямая, проходящая через точки $A(1,\ 4)$, $B(3,\ 5)$.

10. В квадрате $ABCD$ даны вершина $A(2,3)$ и точка $M(5,\ 2)$ - точка пересечения диагоналей. Найти уравнения сторон квадрата, не проходящих через вершину A.

11. Даны точки $A(1,\ 5),\ B(6,\ 9),\ C(7,\ \ 2)$. Отрезок AC разделен точкой D в отношении $\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DC}}=2$. Найти расстояние от точки A до прямой BD.

12. Отрезок прямой $3x-5y-30=0$, заключенный между осями координат, является диагональю квадрата. Найти уравнение одной (любой) стороны квадрата.

13. Через точку пересечения прямых $2x-y=-7 \ \ и \ \ 3x+4y=6$ провести прямую перпендикулярно прямой $2x+5y-1=0$.

14. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $3x-2y=1 \ \ и \ \ x-4y+3=0$ и точка пересечения диагоналей $M(4,\ 3)$. Составить уравнения двух других сторон параллелограмма.

15. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $P(2,\ -1)$ и составляющих угол 45^0 с прямой $y=3x+5$.

16. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x+2y+9=0 \ \ и$ $2x+y+1=0$ - и точка пересечения его диагоналей $E(5,-4)$. Составить уравнения двух других его сторон.

17. Даны середины противоположных сторон квадрата $M(-2,\ 1) \ \ и \ \ N(4,\ 3)$. Написать уравнения двух сторон квадрата, на которых лежат точки $M \ \ и \ \ N$.

18. Провести прямую так, чтобы точка $A(1, 2)$ была серединой ее отрезка, заключенного между осями координат. Составить уравнение этой прямой.

19. Даны две точки: $A(-4,\ 0)$ *и* $B(0,\ 6)$. Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую от оси Ox отрезок, вдвое больший, чем отрезок на оси Oy.

20. В треугольнике ABC даны вершины: $A(1, 2)$, $B(0, 4)$, $C(-2, 2)$. Определить: а) угол между стороной AB и медианой стороны BC; б) длину высоты, опущенной из вершины C.

21. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y = 3x + 7$ и вершину прямого угла $A(4,\ -1)$.

22. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(8,\ -2)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью 8 дм^2.

23. В треугольнике ABC даны вершины: $A(0,\ 3)$, $B(-4,\ 3)$, $C(2,\ 7)$. Найти точку, симметричную точке B относительно стороны AC.

24. В треугольнике ABC даны вершины: $A(-1,\ 2)$, $B(4, 1)$, $C(2,5)$. Найти угол между медианой AM и высотой BH.

25. Даны точки $A(-2,\ 0)$, $B(2,\ 2)$. На отрезке OA (O – начало координат), построить параллелограмм *ОАСД*, диагонали которого пересекаются в точке B. Написать уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

26. Под каким углом к оси Ox наклонена прямая, проходящая через точки $A(1,\ 7)$ *и* $B(-3,\ 5)$?

27.Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x - 2y - 8 = 0$ *и* $x + 2y - 4 = 0$ и образующую с осью Ox угол, вдвое больший угла, образованного с той же осью прямой $2y - x - 6 = 0$.

28. Найти точку, симметричную точке $P(-5,\ -13)$ относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

29. Прямая ℓ отсекает на осях координат отрезки $a = 2$ *и* $b = -3$. Найти точку, симметричную точке $A(1,\ 4)$ относительно прямой ℓ.

30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $5x - 4y + 3 = 0$ *и* $13x + 2y - 17 = 0$ - и одна из его вершин $A(3,\ -4)$. Найти точку пересечения его диагоналей.

ЗАДАНИЕ 4

Даны матрицы *A, B, C, D*.

а) Найти матрицы $2A - B$, A^2, $A * C$, $D * C$;

б) Найти $2f(A) - 3g(B)$, если $f(x) = x^2 - 5x + 4$, а $g(x) = x^2 - 1$.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}4&3&1\\2&1&4\\1&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&2&1\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\4&3&7\\1&2&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&-4\\3&1&1\\1&3&-7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&-1&10\\8&1&0\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}2&3&-4\\3&2&-4\\-1&-1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2&1\\3&1&-7\\2&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3&4&6\\1&2&0\end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}5&4&2\\5&2&4\\-4&3&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-7&1\\5&3&-1\\3&2&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-2&10&11\\1&1&0\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&4\\2&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&4\\2&1&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&-3&5\\1&1&2\end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\2&3&1\\-4&-7&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&4\\1&2&3\\1&-4&-7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&3&4\\2&1&2\end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix}-2&1&2\\1&3&1\\-7&-4&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&1&3\\4&-7&-4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&-3&4\\1&1&1\end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix}2&1&5\\-4&3&-4\\1&-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&4\\-4&-2&1\\2&1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&4&9\\1&0&1\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&4&2\\-4&1&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&4\\1&3&-4\\0&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}5&6&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix}2&-4&3\\1&-2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-4&2\\0&3&1\\4&-7&5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}7&-1&3\\2&1&1\end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix}4&3&1\\2&1&4\\1&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&2&1\end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\4&3&7\\1&2&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&-4\\3&1&1\\1&3&-7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&-1&10\\8&1&0\end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix}2&3&-4\\3&2&-4\\-1&-1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2&1\\3&1&-7\\2&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3&4&6\\1&2&0\end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix}5&4&2\\5&2&4\\-4&3&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-7&1\\5&3&-1\\3&2&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-2&10&11\\1&1&0\end{pmatrix}$

21. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

22. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ -4 & -7 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -4 & -7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

23. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ -7 & -4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 4 & -7 & -4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

24. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ -4 & 3 & -4\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ -4 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & 4 & 9\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

25. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 2\\ -4 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 1 & 3 & -4\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}5 & 6 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

26. $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}7 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

27. $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

28. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

29. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

30. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ 5

Даны векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе. Систему линейных уравнений решить по формулам Крамера.

1. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(-1;3;2)$, $\vec{c}(7;-3;5)$, $\vec{d}(6;10;17)$.
2. $\vec{a}(4;7;8)$, $\vec{b}(9;1;3)$, $\vec{c}(2;-4;1)$, $\vec{d}(1;-13;-13)$.
3. $\vec{a}(8;2;3)$, $\vec{b}(4;6;10)$, $\vec{c}(3;-2;1)$, $\vec{d}(7;4;11)$.
4. $\vec{a}(10;3;1)$, $\vec{b}(1;4;2)$, $\vec{c}(3;9;2)$, $\vec{d}(19;30;7)$.
5. $\vec{a}(2;4;1)$, $\vec{b}(1;3;6)$, $\vec{c}(5;3;1)$, $\vec{d}(24;20;6)$.
6. $\vec{a}(1;7;3)$, $\vec{b}(3;4;2;)$, $\vec{c}(4;8;5)$, $\vec{d}(7;32;14)$.
7. $\vec{a}(1;-2;3)$, $\vec{b}(4;7;2)$, $\vec{c}(6;4;2)$, $\vec{d}(14;18;6)$.
8. $\vec{a}(1;4;3)$, $\vec{b}(6;8;5)$, $\vec{c}(3;1;4)$, $\vec{d}(21;18;33)$.

9. $\vec{a}(2;7;3)$, $\vec{b}(3;1;8)$, $\vec{c}(2;-7;4)$, $\vec{d}(16;14;27)$.

10. $\vec{a}(7;2;1)$, $\vec{b}(4;3;5)$, $\vec{c}(3;4;-2)$, $\vec{d}(2;-5;-13)$.

11. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(-1;3;2)$, $\vec{c}(7;-3;5)$, $\vec{d}(6;10;17)$.

12. $\vec{a}(4;7;8)$, $\vec{b}(9;1;3)$, $\vec{c}(2;-4;1)$, $\vec{d}(1;-13;-13)$.

13. $\vec{a}(8;2;3)$, $\vec{b}(4;6;10)$, $\vec{c}(3;-2;1)$, $\vec{d}(7;4;11)$.

14. $\vec{a}(10;3;1)$, $\vec{b}(1;4;2)$, $\vec{c}(3;9;2)$, $\vec{d}(19;30;7)$.

15. $\vec{a}(2;4;1)$, $\vec{b}(1;3;6)$, $\vec{c}(5;3;1)$, $\vec{d}(24;20;6)$.

16. $\vec{a}(1;7;3)$, $\vec{b}(3;4;2;)$, $\vec{c}(4;8;5)$, $\vec{d}(7;32;14)$.

17. $\vec{a}(1;-2;3)$, $\vec{b}(4;7;2)$, $\vec{c}(6;4;2)$, $\vec{d}(14;18;6)$.

18. $\vec{a}(1;4;3)$, $\vec{b}(6;8;5)$, $\vec{c}(3;1;4)$, $\vec{d}(21;18;33)$.

19. $\vec{a}(2;7;3)$, $\vec{b}(3;1;8)$, $\vec{c}(2;-7;4)$, $\vec{d}(16;14;27)$.

20. $\vec{a}(7;2;1)$, $\vec{b}(4;3;5)$, $\vec{c}(3;4;-2)$, $\vec{d}(2;-5;-13)$.

21. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(-1;3;2)$, $\vec{c}(7;-3;5)$, $\vec{d}(6;10;17)$.

22. $\vec{a}(4;7;8)$, $\vec{b}(9;1;3)$, $\vec{c}(2;-4;1)$, $\vec{d}(1;-13;-13)$.

23. $\vec{a}(8;2;3)$, $\vec{b}(4;6;10)$, $\vec{c}(3;-2;1)$, $\vec{d}(7;4;11)$.

24. $\vec{a}(10;3;1)$, $\vec{b}(1;4;2)$, $\vec{c}(3;9;2)$, $\vec{d}(19;30;7)$.

25. $\vec{a}(2;4;1)$, $\vec{b}(1;3;6)$, $\vec{c}(5;3;1)$, $\vec{d}(24;20;6)$.

26. $\vec{a}(1;7;3)$, $\vec{b}(3;4;2;)$, $\vec{c}(4;8;5)$, $\vec{d}(7;32;14)$.

27. $\vec{a}(1;-2;3)$, $\vec{b}(4;7;2)$, $\vec{c}(6;4;2)$, $\vec{d}(14;18;6)$.

28. $\vec{a}(1;4;3)$, $\vec{b}(6;8;5)$, $\vec{c}(3;1;4)$, $\vec{d}(21;18;33)$.

29. $\vec{a}(2;7;3)$, $\vec{b}(3;1;8)$, $\vec{c}(2;-7;4)$, $\vec{d}(16;14;27)$.

30. $\vec{a}(7;2;1)$, $\vec{b}(4;3;5)$, $\vec{c}(3;4;-2)$, $\vec{d}(2;-5;-13)$.

ЗАДАНИЕ 6

Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, про-ходящей через три точки
$M_1,\ M_2\ и\ M_3$:

1. $M_1(-3,\ 4,\ -7)$, $M_2(1,\ 5,\ -4)$, $M_3(-5,\ -2,\ 0)$, $M_0(-12,\ 7,\ -1)$.
2. $M_1(-1,\ 2,\ -3)$, $M_2(4,\ -1,\ 0)$, $M_3(2,\ 1,\ -2)$, $M_0(1,\ -6,\ -5)$.
3. $M_1(-3,\ -1,\ 1)$, $M_2(-9,\ 1,\ -2)$, $M_3(3,\ -5,\ 4)$, $M_0(-7,\ 0,\ -1)$.
4. $M_1(1,\ -1,\ 1)$, $M_2(-2,\ 0,\ 3)$, $M_3(2,\ 1,\ -1)$, $M_0(-2,\ 4,\ 2)$.
5. $M_1(1,\ 2,\ 0)$, $M_2(1,\ -1,\ 2)$, $M_3(0,\ 1,\ -1)$, $M_0(2,\ -1,\ 4)$.
6. $M_1(1,\ 0,\ 2)$, $M_2(1,\ 2,\ -1)$, $M_3(2,\ -2,\ 1)$, $M_0(-5,\ -9,\ 1)$.
7. $M_1(1,\ 2,\ -3)$, $M_2(1,\ 0,\ 1)$, $M_3(-2,\ -1,\ 6)$, $M_0(3,\ -2,\ -9)$.
8. $M_1(3,\ 10,\ -1)$, $M_2(-2,\ 3,\ -5)$, $M_3(-6,\ 0,\ -3)$, $M_0(-6,\ 7,\ -10)$.
9. $M_1(-1,\ 2,\ 4)$, $M_2(-1,-2,-4)$, $M_3(3,\ 0,\ -1)$, $M_0(-2,\ 3,\ 5)$.

10. $M_1(0,-3,1)$, $M_2(-4,\ 1,\ 2)$, $M_3(2,\ -1,\ 5)$, $M_0(-3,\ 4,\ -5)$.
11. $M_1(1,\ 3,0)$, $M_2(4,\ -1,\ 2)$, $M_3(3,\ 0,\ 1)$, $M_0(4,\ 3,\ 0)$.
12. $M_1(-2,\ -1,-1)$, $M_2(0,\ 3,\ 2)$, $M_3(3,\ 1,\ -4)$, $M_0(-21,\ 20,\ -16)$.
13. $M_1(-3,\ -5,\ 6)$, $M_2(2,\ 1,\ -4)$, $M_3(0,\ -3,\ -1)$, $M_0(3,\ 6,\ 68)$.
14. $M_1(1,\ 5,\ -7)$, $M_2(-3,6,\ 3)$, $M_3(-2,\ 7,\ 3)$, $M_0(1,\ -1,\ 2)$.
15. $M_1(1,\ -1,\ 2)$, $M_2(2,\ 1,\ 2)$, $M_3(1,\ 1,\ 4)$, $M_0(-3,\ 2,\ 7)$.
16. $M_1(1,\ 3,\ 6)$, $M_2(2,2,1)$, $M_3(-1,0,1)$, $M_0(5,\ -4,\ 5)$.
17. $M_1(-4,\ 2,6)$, $M_2(2,\ -3,\ 0)$, $M_3(-10,\ 5,\ 8)$, $M_0(-12,\ 1,8)$.
18. $M_1(7,\ 2,\ 4)$, $M_2(7,\ -1,\ -2)$, $M_3(-5,-2,-1)$, $M_0(10,\ 1,\ 8)$.
19. $M_1(2,\ 1,\ 4)$, $M_2(3,\ 5,\ -2)$, $M_3(-7,\ -3,\ 2)$, $M_0(-3,\ 1,8)$.
20. $M_1(-1,\ -5,\ 2)$, $M_2(-6,\ 0,-3)$, $M_3(3,\ 6,-3)$, $M_0(10,\ -8,-7)$.
21. $M_1(0,-1,-1)$, $M_2(-2,\ 3,5)$, $M_3(1,-5,-9)$, $M_0(-4,-13,\ 6)$.
22. $M_1(5,\ 2,\ 0)$, $M_2(2,\ 5,\ 0)$, $M_3(1,\ 2,\ 4)$, $M_0(-3,\ -6,\ -8)$.
23. $M_1(2,\ -1,\ -2)$, $M_2(1,\ 2,\ 1)$, $M_3(5,\ 0,\ -6)$, $M_0(14,\ -3,\ 7)$.

24. $M_1(-2,\ 0,\ -4)$, $M_2(-1,\ 7,\ 1)$, $M_3(4,\ -8,\ -4)$, $M_0(-6,\ 5,\ 5)$.
25. $M_1(14,\ 4,\ 5)$, $M_2(-5,\ -3,\ 2)$, $M_3(-2,-6,-3)$, $M_0(-1,-8,\ 7)$.
26. $M_1(1,\ 2,\ 0)$, $M_2(3,\ 0,\ -3)$, $M_3(5,\ 2,\ 6)$, $M_0(-13,\ -8,\ 16)$.
27. $M_1(2,\ -1,\ 2)$, $M_2(1,\ 2,\ -1)$, $M_3(3,\ 2,\ 1)$, $M_0(-5,\ 3,\ 7)$.
28. $M_1(1,\ 1,\ 2)$, $M_2(-1,\ 1,\ 3)$, $M_3(2,-2,\ 4)$, $M_0(2,\ 3,\ 8)$.
29. $M_1(2,\ 3,\ 1)$, $M_2(4,\ 1,\ -2)$, $M_3(6,\ 3,\ 7)$, $M_0(-5,-4,\ 8)$.

ЗАДАНИЕ 7

Найти угол между плоскостями:

1. $x-3y+5=0,\quad 2x-y+5z-16=0$.
2. $x-3y+z-1=0,\quad x+z-1=0$.
3. $4x-5y+3z-1=0,\ x-4y-z+9=0$.
4. $3x-y+2z+15=0,\ 5x+9y-3z-1=0$.
5. $6x+2y-4z+17=0,\ 9x+3y-6z-4=0$.
6. $x-y\sqrt{2}+z-1=0,\quad x+y\sqrt{2}-z+3=0$.
7. $3y-z=0,\quad 2y+z=0$.
8. $6x+3y-2z=0,\ x+2y+6z-12=0$.
9. $x+2y+2z-3=0,\ 16x+12y-15z-1=0$
10. $2x-y+5z+16=0,\ x+2y+3z+8=0$.
11. $2x+2y+z-1=0,\ x+z-1=0$.
12. $3x+y+z-4=0,\ x+2y+3z+8=0$.
13. $3x-2y-2z-16=0,\ x+y-3z-7=0$.
14. $2x+2y+z+9=0,\ x-y+3z-1=0$.
15. $x+2y+2z-3=0,\ 2x-y+2z+5=0$.
16. $3x+2y-3z=0,\quad x+y+z-7=0$.
17. $x-3y-2z-8=0,\ x+y-z+3=0$.
18. $3x-2y+3z+23=0,\quad y+z+5=0$.
19. $x+y+3z-7=0,\quad y+z-1=0$.
20. $x-2y+2z+17=0,\ x-2y-1=0$.

21. $x+2y-1=0,\ \ x+y+6=0$.

22. $2x-z+5=0,\ \ 2x+3y-7=0$.

23. $5x+3y+z-18=0,\ \ 2y+z-9=0$.

24. $4x+3z-2=0,\ \ x+2y+2z+5=0$.

25. $x+4y-z+1=0,\ \ 2x+y+4z-3=0$.

26. $2y+z-9=0,\ \ x-y+2z-1=0$.

27. $2x-6y+14z-1=0,\ 5x-15y+35z-3=0$.

28. $x-y+7z-1=0,\ \ 2x-2y-5=0$.

29. $3x-y-5=0,\ \ 2x+y-3=0$.

30. $x+y+z\sqrt{2}-3=0, x-y+z\sqrt{2}-1=0$

ЗАДАНИЕ 8

Написать канонические уравнения прямой:

1. $\begin{cases} 2x-y-3z+1=0, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y+3z-1=0, \\ 2x-3y+2z-9=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 8x+3y-6z-2=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ 4x-3y+z-1=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+5y-3z-4=0, \\ 4x-3y+2z-9=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x+7y-z-8=0, \\ x+2y+z-4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+4y+2z-8=0, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x-4y-3z+3=0, \\ 3x+y+z-5=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x+2y+z-4=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x+y+z-5=0, \\ 4x-3y+z-1=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+y+z-2=0, \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x-3y+2z+2=0, \\ x+3y+z+14=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+2y-z-8=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-2z+2=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x+3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x+y-z-6=0, \\ 3x-y+2z=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+5y+2z+11=0, \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x+4y-2z+1=0, \\ 2x-4y+3z+4=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x+y-3z+4=0, \\ x-y+2z+2=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x-y-z-2=0, \\ x-2y+z+4=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x+y-3z+2=0, \\ 2x-y+z-8=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x+3y-2z-1=0, \\ 2x-3y+z+6=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 6x-7y-4z-2=0, \\ x+7y-z-5=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 8x-y-3z-1=0, \\ x+y+z+10=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 6x-5y-4z+8=0, \\ 6x+5y+3z+4=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x+5y-z-5=0, \\ 2x-5y+2z+5=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x-3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x+y+2z+4=0, \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 4x+y+z+2=0, \\ 2x-y-3z-8=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x+y-3z-2=0, \\ 2x-y+z+6=0. \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 9

Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$ и $x+2y+3z-14=0$.

2. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$ и $x+2y-5z+20=0$.

3. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ и $x-3y+7z-24=0$.

4. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{2}$ и $2x-y+4z=0$.

5. $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$ и $3x+y-5z-12=0$.

6. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и $x+3y-5z+9=0$.

7. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$ и $x-2y+5z+17=0$.

8. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}$ и $x-2y+4z-19=0$.

9. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1}$ и $2x-y+3z+23=0$.

10. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}$ и $2x-3y-5z-7=0$.

11. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$ и $4x+2y-z-11=0$.

12. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}$ и $3x-2y-4z-8=0$.

13. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$ и $x+2y-z-2=0$.

14. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3}$ и $5x-y+4z+3=0$.

15. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$ и $x+3y+5z-42=0$.

16. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}$ и $7x+y+4z-47=0$.

17. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{5}$ и $2x+3y+7z-52=0$.

18. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$ и $3x+4y+7z-16=0$.

19. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}$ и $2x-5y+4z+24=0$.

20. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}$ и $x-2y-3z+18=0$.

21. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0}$ и $x+7y+3z+11=0$.

22. $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2}$ и $3x+7y-5z-11=0$.

23. $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-1}$ и $4x+y-6z-5=0$.

24. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0}$ и $5x+9y+4z-25=0$.

25. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}$ и $x+4y+13z-23=0$.

26. $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}$ и $3x-2y+5z-3=0$.

27. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}$ и $3x-y+4z=0$.

28. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}$ и $x+2y-5z+16=0$.

29. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2}$ и $3x-7y-2z+7=0$.

30. $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{11}$ и $5x+7y+9z-32=0$.

ЗАДАНИЕ 10

Дана матрица А. Найти матрицу A^{-1} обратную данной. Сделать проверку, вычислив произведение AA^{-1} . Решить задачу а) воспользовавшись определением обратной матрицы. б) по методу Жор дана-Гаусса.

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix}$ 4. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$ 6. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & -1 & -3\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 8 & 3 & -6\\ 4 & 1 & -3\end{pmatrix}$ 8. $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ 3 & -5 & -6\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}7 & -5 & 0\\ 4 & 0 & 11\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ 10. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 12. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -4\\ 3 & -2 & -5\end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 2 & 5 & -3\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix}$ 14. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$ 16. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & -1 & -3\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

21. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

22. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

23. $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

24. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

25. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

26. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

27. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

28. $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

29. $A=\begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 30. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Указания по выполнению контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо остав - лять поля шириной 4-5 см для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия, имя и отчество студента, его учебный номер (шифр), название дисциплины, номер контрольной работы. Здесь же следует указать название учебного заведения и дату отсылки работы в университет.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать её условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения.

7. После получения прорецензированной работы, как не зачтённой, так и зачтённой, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты и выполнить все рекомендации рецензента. Если рецензент предлагает ввести в решения задач те или иные исправления или дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок. Вместе с исправленными заданиями должна обязательно

находиться прорецензированная работа и рецензия на неё. Поэтому рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после её рецензирования запрещается.

8. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются по списку группы.

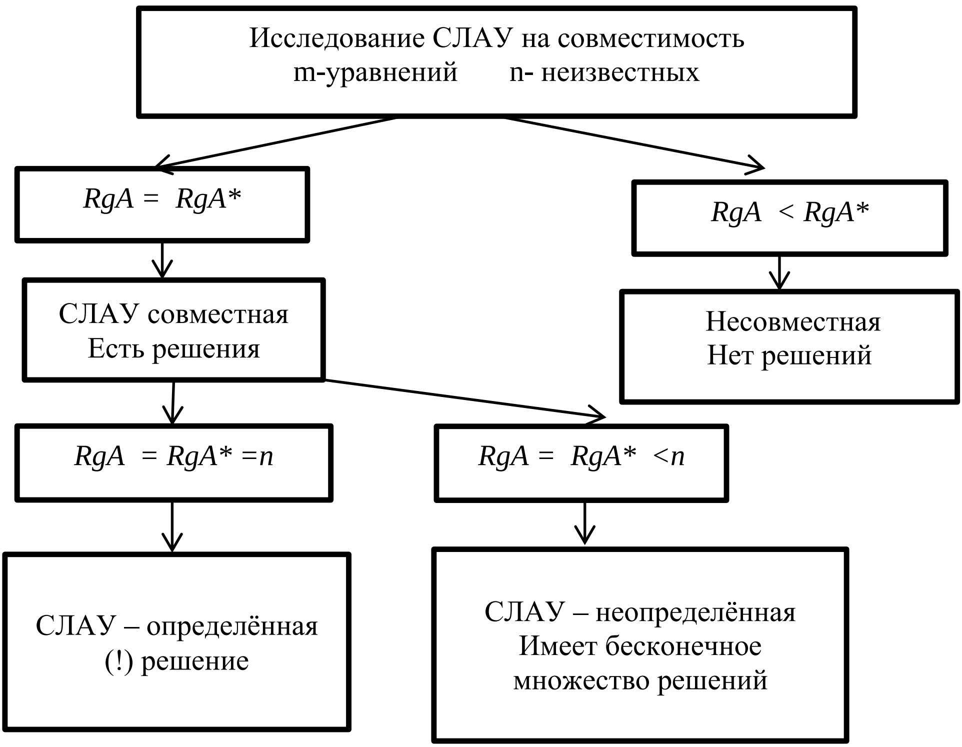
ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ

КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

З а д а н и е 1

Ответ на вопрос о совместности исследуемой системы дает теорема Кронекера – Капелли.

Теорема. *Система (2) совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы:* $RgA = RgA^*$, *система (2) не имеет решений, если ранг матрицы* A *меньше, чем ранг матрицы* A^* $(RgA < RgA^*)$. *Совместная система линейных уравнений (2) имеет единственное решение, если ранг матрицы системы равен числу неизвестных* $(RgA = RgA^* = n)$, *и бесконечно много решений, если* $RgA = RgA^* < n$.



Пример1.1 Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$RgA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} /3 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11-6$$

$= 5 \neq 0 => RgA=2$

$$RgA^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 11 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 =$$

$> RgA^*=3.$

Так как $RgA < RgA^*$, то система *несовместна*, т.е. она *не имеет решений.*

Пример1.2 Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases}$$

$$RgA=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & 2\\ 7 & 10\\ 5 & 6\\ 3 & -16\end{pmatrix};\ \begin{vmatrix}1 & -4\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2+12=14\neq 0;\ RgA=2;$$

$$RgA^{*}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 3 & 2 & 4\\ 7 & 10 & 12\\ 5 & 6 & 8\\ 3 & -16 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 0 & 14 & 7\\ 0 & 38 & 19\\ 0 & 26 & 13\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ \begin{vmatrix}1 & -4\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0;$$

$RgA^{*}=2$.

Система *совместна*. По скольку по теореме Кронекера – Капелли $RgA=RgA^{*}=n$, где n – число неизвестных, то система *имеет единственное решение*.

Существуют различные методы приведения матрицы к ступенчатому виду. Для ручного счета удобны правила исключения Гаусса (метод Жордана – Гаусса), реализуемые с помощью так называемого *«разрешающего элемента»*, который при вычислениях заключается в рамку и всегда должен быть отличен от нуля.

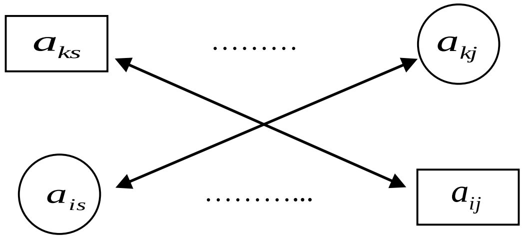
Первый шаг (исключение неизвестной x_1) прямого хода выполняется с разрешающим элементом $a_{11}\neq 0$, второй шаг (исключение неизвестного x_2) -с помощью $a'_{22}\neq 0$ (если $a'_{22}=0$, то надо переставить уравнения так, чтобы a'_{22} *ФО,* а если $a'_{22}\neq 0$,а если $a'_{i2}=0(i=\overline{2,m})$,то пытаемся исключить неизвестную x_3 и т.д.).

Пересчет элементов матрицы выполняется по следующим правилам:

1) элементы разрешающей строки и всех вышерасположенных строк остаются неизменными;

2) элементы разрешающего столбца, находящиеся ниже разрешающего элемента, обращаются в нули;

3) все прочие элементы матрицы вычисляются по *правшу прямоугольника:* преобразованный элемент a'_{ij} новой матрицы равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.



$$a'_{ij} = a_{ks} \cdot a_{ij} - a_{is} \cdot a_{kj}$$

Здесь a_{ks} - разрешающий элемент, a_{ks}, a_{ij} - главная диагональ, a_{is}, a_{kj} - побочная диагональ.

Пример1.3 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ \hline 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

Элемент $a_{11} = 2 \neq 0$ принимаем за разрешающий. Первую строку составляем без изменения, элементы первого (разрешающего) столбца заполняем нулями, а остальные элементы вычисляем по правилу прямоугольника:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2\cdot 3-4\cdot 2 & 2\cdot(-1)-4\cdot(-1) & 2\cdot 2-4\cdot 1 & 2\cdot 6-4\cdot 4 \\ 0 & 2\cdot 5-8\cdot 2 & 2\cdot(-3)-8\cdot(-1) & 2\cdot 4-8\cdot 1 & 2\cdot 12-8\cdot 4 \\ 0 & 2\cdot 3-3\cdot 2 & 2\cdot(-2)-3\cdot(-1) & 2\cdot 2-3\cdot 1 & 2\cdot 6-3\cdot 4 \end{array}\right]=$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

В полученной матрице элементы второй и третьей строки разделим на 2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

На втором шаге разрешающим является элемент $a'_{22} = -1 \neq 0$. Первые две строки и первый столбец переписываем без изменения, под разрешающим элементом записываем нули, а остальные элементы вычисляем по правилу прямоугольника:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1\cdot 1-(-3)\cdot 1 & -1\cdot 0-(-3)\cdot 0 & -1\cdot(-4)-(-3)\cdot(-2) \\ 0 & 0 & -1\cdot(-1)-0\cdot 1 & -1\cdot 1-0\cdot 0 & (-1)\cdot 0-0\cdot(-2) \end{array}\right]=$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 2 & -1 & 1 & 4\\0 & -1 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 2 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right]$$

В полученной матрице элементы третьей строки разделим на 2 и на третьем шаге разрешающим является элемент $a'_{33} = 1 \neq 0$. Элементы первых трех строк сохраняем без изменений, под разрешающим элементом запишем нуль. Остальные элементы пересчитаем по правилу прямоугольника:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 2 & -1 & 1 & 4\\0 & -1 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}2 & 2 & -1 & 1 & 4\\0 & -1 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 0 & 1\cdot(-1)-1\cdot 0 & 1\cdot 0-1\cdot(-1)\end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 2 & -1 & 1 & 4\\0 & -1 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right]$$

Так как система привелась к треугольному виду, то она имеет единственное решение. Найдем его, выписав систему, соответствующую последней матрице:

$$\left.\begin{array}{rl}2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4\\ -x_2 + x_3 &= -2\\ x_3 &= -1\\ -x_4 &= 1\end{array}\right\}.$$

Отсюда находим

$$x_4=-1,\ \ x_3=-1,\ \ x_2=x_3+2=1,$$

$$2x_1=-2x_2+x_3-x_4+4,\ 2x_1=-2\cdot 1+(-1)-(-1)+4,\ 2x_2=2,\quad x_1=1$$

Ответ*: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=-1$*

З а д а н и е 2

Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$Ax+By+C=0\,,\qquad (1)$$

где *A, B* – координаты нормального (перпендикулярного) вектора прямой.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0,\ y_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}\ =\ \{A;B\}$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)\ =\ 0\qquad (2)$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0,\ y_0)$, параллельно вектору $\vec{S}=\{m;\ n\}$, имеет вид

$$\frac{x-x_0}{m}\ =\ \frac{y-y_0}{n}.\qquad (3)$$

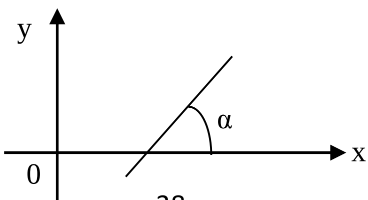
Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M(x_1,\ y_1)$ и $M(x_2,\ y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\qquad (4)$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0,\ y_0)$ в данной направлении, имеет вид

$$y-y_0=k\,(x-x_0)\qquad (5)$$

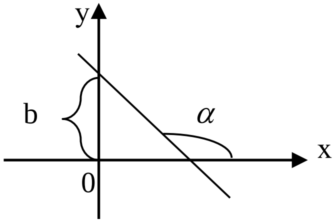
где $k\ =\ tg\alpha$ - угловой коэффициент прямой, α - угол, образованный прямой с положительным направлением на оси *OX*.



Если прямая проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид: $y = kx$ (6) .

Уравнение: $y = kx + b$ (7)

называется уравнением прямой с угловым коэффициентом, где b – величина отрезка, отсекаемого прямой от оси ОУ.



Пусть две прямые заданы общими уравнениями

$\ell_1 :\ A_1 x + B_1 y = C_1$ и $\ell_2 : A_2 x + B_2 y = C_2$.

Если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Если $\ell_1 \perp \ell_2$, то $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$.

Если $\ell_1, \ell_2 = \delta$, то $\cos\delta = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Пусть две прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$\ell_1 : y = k_1 x + b_1$ и $\ell_2 : y = k_2 x + b_2$.

Если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $k_1 = k_2$.

Если $\ell_1 \perp \ell_2$, то $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Если $\ell_1, \ell_2 = \delta$, то $tg\delta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

Расстояние d от точки $M(x_0,\ y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (8).$$

Пример 2

Даны координаты вершин треугольника $A(2,\ 5)$, $B(5,\ 1)$, $C(11,\ 3)$.

1) Вычислить длину стороны BC.

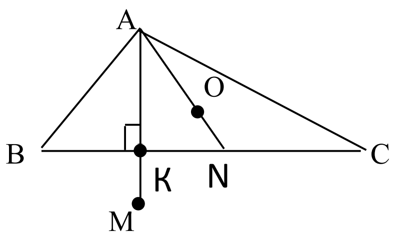
2) Составить уравнение линии BC.

3) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A, и найти ее длину.

4) Найти точку пересечения медиан.

5) Найти косинус внутреннего угла при вершине B.

6) Найти координаты точки M, расположенной симметрично точке A, относительно прямой BC.



Решение

1. Длина стороны BC равна модулю вектора $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC} = \{11-5;\ 3-1\}$, $\overrightarrow{BC} = \{6;\ 2\}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$.

2. Уравнение прямой BC: $\dfrac{x - x_в}{x_с - x_в} = \dfrac{y - y_в}{y_с - y_в}$; $\dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y-1}{2}$;

$x - 3y - 2 = 0$.

3. Уравнение высоты AK запишем как уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,5)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC} = \{6;\ 2\}$:

$6(x-2) + 2(y-5) = 0;$

$3x + y - 11 = 0$. Длину высоты *AK* можно найти как расстояние от точки *A* до прямой *BC*: $|AK| = d = \dfrac{|1\cdot 2 - 3\cdot 5 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \dfrac{15}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

4. Найдем координаты точки *N* – середины стороны *BC*:

$$x_N = \frac{x_в + x_c}{2} = \frac{5+11}{2} = 8;\ y_N = \frac{y_в + y_c}{2} = \frac{1+3}{2} = 2;\ N(8,2).$$

Точка пересечения медиан *O* делит каждую медиану на отрезки в отношении $\lambda = 2:1$.

Используем формулы деления отрезка в данном отношении λ:

$$x_0 = \frac{x_A + \lambda x_N}{1+\lambda};\ y_0 = \frac{y_A + \lambda y_N}{1+\lambda};$$

$$x_0 = \frac{2 + 2\cdot 8}{3} = 6;\ y_0 = \frac{5 + 2\cdot 2}{3} = \frac{9}{3} = 3;\ O(6,\ 3).$$

5. Косинус угла при вершине *B* найдем как косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ $\{2-5;\ 5-1\} = \overrightarrow{BA}\{-3, 4\}$; $\overrightarrow{BC}\{6;\ 2\}$,

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-3\cdot 6 + 4\cdot 2}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}\cdot 2\sqrt{10}} = \frac{-10}{10\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

6. Точка *M*, симметричная точке *A* относительно прямой *BC*, расположена на прямой *AK*, перпендикулярной к прямой *BC*, на таком же расстоянии от прямой, как и точка *A*. Координаты точки *K* найдем как решения системы $\begin{cases} x - 3y - 2 = 0, \\ 3x + y - 11 = 0. \end{cases}$ Систему решим по формулам Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 35;\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5;$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2};\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2};\ K\left(\frac{7}{2};\ \frac{1}{2}\right).$$

Точка К является серединой отрезка *AM*.

$$x_K = \frac{x_A + x_M}{2};\ \frac{7}{2} = \frac{2 + x_M}{2};\ x_M = 5;$$

$$y_K = \frac{y_A + y_M}{2};\ \frac{1}{2} = \frac{5 + y_M}{2};\ y_M = -4$$

$M\,(5, -4)$.

Задание 3

Пример 3

Через точку $M(3,\ 5)$ провести прямую так, чтобы она отсекала от координатного угла равнобедренный треугольник.

«Провести прямую» - это значит записать уравнение прямой, при этом делать чертеж и проводить прямую не обязательно.

Будем искать уравнение прямой в отрезках, т. е. в форме $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат. По условию задачи $|a| = |b|$ и прямая проходит через точку $M(3,\ 5)$. Следовательно, $\frac{3}{a} + \frac{5}{b} = 1$. Для определения a и b имеем две системы:

$$\begin{cases} \frac{3}{a} + \frac{5}{b} = 1, \\ a = b, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{3}{a} + \frac{5}{b} = 1, \\ a = -b. \end{cases}$$

Решение первой системы: $a_1 = b_1 = 8$, решение второй системы: $b = 2,\ a = -2$. Получаем две прямые: $\frac{x}{8} + \frac{y}{8} = 1$ *или* $x + y - 8 = 0$ и

$$-\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \quad \text{или} \quad x - y + 2 = 0$$

Задание 4

Матрицей размера $n \times m$ называется прямоугольная таблица mn действительных чисел, записываемая в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Если число строк матрицы A равно числу ее столбцов, то есть $m = n$, то матрицу называют *квадратной* порядка n и обозначают A_n. Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют главную диагональ. Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной матрицей*. Диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны 1, называется *единичной матрицей* и обозначается E.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, стоящие ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю.

Транспонированием матрицы $A = (a_{ij})_{mxn}$ называется такое ее преобразование, при котором строки и столбцы меняются местами с сохранением их номеров и порядком следования элементов. Матрица, полученная транспонированием матрицы A, называется транспонированной и обозначается A'. Таким образом, $A' = (a'_{ij})_{nxm}$, где $a'_{ji} = a_{ij}$, $i=1,2,\ldots, m;$ $j=1,2,\ldots,n$.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{mxn}$ и $B = (b_{ij})_{mxn}$ называется такая матрица $C = (c_{ij})_{mxn}$, в которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(I = 2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots,n)$. Кратко пишут $C = A + B$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{mxn}$ на число α называется такая матрица $B = (b_{ij})_{mxn}$, в которой $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots, n)$. Кратко пишут $B = A{*}\alpha$ или $B = \alpha{*}A$.

Произведением матрицы $A = (a_{ik})_{mxn}$ на матрицу $B = (b_{kj})_{nxp}$ справа (или матрицы B на матрицу A слева) называется такая матрица $C = (c_{ij})_{mxp}$ в которой $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$ $(i=\overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Произведение матрицы A на матрицу B справа обозначается $C = AB$ (так же обозначается произведение матрицы B на матрицу A слева). Правило умножения матриц формулируется следующим образом: чтобы получить элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $C = AB$, нужно элементы i-й строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и полученные произведения сложить.

Пример 4.1. Пусть $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$. Тогда

$$AB =\begin{bmatrix}1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 2 & 1\cdot(-1)+2\cdot(-2)+3\cdot 0\\ 4\cdot 1+0\cdot 0+(-1)\cdot 2 & 4\cdot(-1)+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & -5\\ 2 & -4\end{bmatrix}.$$

$$BA =\begin{bmatrix}1\cdot 1+(-1)\cdot 4 & 1\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 3+(-1)\cdot(-1)\\ 0\cdot 1+(-2)\cdot 4 & 0\cdot 2+(-2)\cdot 0 & 0\cdot 3+(-2)\cdot(-1)\\ 2\cdot 1+0\cdot 4 & 2\cdot 2+0\cdot 0 & 2\cdot 3+0\cdot(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 4\\ -8 & 0 & 2\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

Таким образом, $AB \neq BA$.

Пример 4.2. Пусть $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$.

$$AB = \begin{bmatrix}1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot(-1)\\ 1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} =0$$

$$BA = \begin{bmatrix}-1\cdot 1+1\cdot 1 & -1\cdot 1+1\cdot 1\\ -1\cdot 1+1\cdot 1 & -1\cdot 1+1\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} =0$$

Таким образом, $AB = BA = 0$, хотя $A\neq 0$, $B\neq 0$.

Многочлены от матриц. Пусть A – произвольная квадратная матрица n- го порядка, k – натуральное число. Тогда *k-й степенью* матрицы A называется произведение k матриц, каждая из которых равна A: $A^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k\text{ раз}}$. Нулевой степенью A^0 квадратной матрицы A ($A\neq 0$) называется единичная матрица, порядок которой равен порядку A: $A^0 = E$.

Пусть $f(t) = \alpha_0 t^m + \alpha_1 t^{m-1} + \ldots + \alpha_m$ есть многочлен аргумента t, где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – действительные числа. Тогда *многочленом $f(A)$ от матрицы A* называется матрица $f(A) = \alpha_0 A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \ldots + \alpha_m E$; порядок матрицы $f(A)$ совпадает с порядком матрицы A. Если $f(A)$ есть нулевая матрица:

$f(A)=0$, то многочлен $f(t)$ называется *аннулирующим многочленом* матрицы A, а сама матрица A называется *корнем многочлена* $f(t)$.

Пример 4.3. Если $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $f(t) = t^2 - 2t + 3$, то

$$f(A)= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} +3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

З а д а н и е 5

Пусть в пространстве R^3 заданы три вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и пусть $\vec{d}$ – произвольный вектор пространства. Будем говорить, что векторы $\vec{e}_1$ $\vec{e}_2\vec{e}_3$ образуют в пространстве **векторный базис**, если любой вектор $\vec{d}$ в пространстве представим в виде $\vec{d} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ и это представление единственно.

Коэффициенты x, y, z разложения называются **координатами** (компонентами) вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{e}_1\,\vec{e}_2\,\vec{e}_3$. Записывают $\vec{d} =\{x ,y , z\}$.

Теорема. Если три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы (некомпланарны), то любой вектор $\vec{d}$ пространства можно разложить по векторам $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ и такое представление единственно.

Из теоремы следует, что три любых некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке, образуют в пространстве векторный базис.

Если векторы, образующие базис, единичны и попарно ортогональны, то базис называется **ортонормированным**. Ортонормированный базис будем обозначать

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| =1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{i}$.

Базисом на прямой является любой ненулевой вектор.

Пример 5.

Даны векторы $\vec{a}\,(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}\,(-1;\ 0;\ 3)$, $\vec{c}\,(2;\ 1;\ -1)$ и $\vec{d}\,(3;\ 2;\ 2)$ в некотором базисе.

Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если существует нетривиальное (ненулевое) решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0 * \beta + \gamma = 0, \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$ которая является следствием

векторного равенства:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\2 & 0 & 1\\3 & 3 & -1\end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\2 & 0 & 1\\3 & 3 & -1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1\\3 & -1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 1\\3 & -1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}2 & 0\\3 & 3\end{vmatrix} = -3 + (-2-3) + 12 = 4 \neq 0.$$

Таким образом, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, образуют базис и $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + 0 * y + z = 2 \\ 3x + 3y - z = 2 \end{cases}.$$

Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix}a1 & b1 & c1\\a2 & b2 & c2\\a3 & b3 & c3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\2 & 0 & 1\\2 & 3 & -1\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}0 & 1\\3 & -1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 1\\3 & -1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}2 & 0\\3 & 3\end{vmatrix} = 3(-3) +$$

$+(-2-2)+12 = -1$, $x = \frac{\Delta 1}{\Delta} = \frac{-1}{4}$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}a1 & b1 & c1\\a2 & b2 & c2\\a3 & b3 & c3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\2 & 2 & 1\\3 & 2 & -1\end{vmatrix} = (-2-2) - 3(-2-3) + 2(4-6) = -4+15-4=7,$$

$y = \frac{\Delta 2}{\Delta} = \frac{7}{4}$;

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10,$$

$z=\frac{\Delta 3}{\Delta} = \frac{5}{2}$;

Координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{d} = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 5/2\right\}$.

Как следует из примера, процедура нахождения координат вектора в произвольном базисе достаточно трудоёмка и связана с решением СЛАУ.

З а д а н и е 6

Общее уравнение плоскости имеет вид: $Ax + Bx + Cz + D = 0$, где $\vec{n} = \{A; B\ C\}$ - ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости (нормальный вектор плоскости).

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $[\ M_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\quad M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и $M_3(x_3,\ y_3,\ z_3)\ ]$ определяется равенством

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до плоскости $Ax + Bx + Cz + D = 0$ находится по формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Пример 6

Найти расстояние от точки $M_0(1,\ -2,\ 3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(3,\ \ -1,\ \ 2)$, $M_2(4,\ \ -1,\ \ -1)$, $M_3(2,\ \ 0,\ \ 2)$.

Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, разложив его по первой строке:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$3(x-3)+3(y+1)+(z-2) = 0;\ 3x+3y+z-9+3-2=0;\ 3x+3y+z-8=0.$$

Найдем расстояние от точки M_0 до плоскости $3x+3y+z-8=0$.

$$d = \frac{|3\cdot1-3\cdot2+3-8|}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{19}} = \frac{8\sqrt{19}}{19}.$$

З а д а н и е 7

Косинус угла φ между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}|\cdot|\overrightarrow{N_2}|} \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Пример 7

Найти угол между плоскостями $x+y-1=0$ и $2x-y+\sqrt{3}z+1=0$
.
Найдем косинус искомого угла:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot2+1(-1)+0\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+1^2+0}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} = \frac{1}{4},$$

$$\varphi = arc\cos\frac{1}{4}.$$

З а д а н и е 8

Канонические уравнения кривых второго порядка имеют вид

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - эллипс с фокусами $F_1(-c,\ 0)$ *и* $F_2(c,\ 0)$, где $c^2=a^2-b^2$, и эксцентриситетом $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$. Если $a=b$, то уравнение $x^2+y^2=a^2$ описывает окружность, в этом случае $\varepsilon=0$;

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - гипербола с фокусами $F_1(-c,\ 0)$ *и* $F_2(c,\ 0)$, где $c^2=a^2+b^2$, и эксцентриситетом $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$. Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы;

3) $y^2=2px$ - парабола, симметричная оси Ох, с фокусом $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ и директрисой $x=-\frac{p}{2}$, $x^2=2py$ парабола, симметричная относительно Оу, с фокусом $F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$ и директрисой $y=-\frac{p}{2}$.

Пример 8

Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее директриса параллельна оси Оу и проходит через левый фокус гиперболы:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Определим координаты левого фокуса гиперболы: $a^2=16;\ b^2=9;\ c=\sqrt{a^2+b^2}=5$, $F_1(-c,\ 0)=F_1(-5,\ 0)$. Так как дирек - триса параболы параллельна оси Оу и проходит через точку $F_1(-5,\ 0)$, то она имеет уравнение $x=-5$. Определим значение параметра *p* параболы: $x=-\frac{p}{2}=-5;\ p=10$. Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$, т. е. $y^2=20x$.

З а д а н и е 9

Точка пересечения P прямой и плоскости находится следующим образом: уравнения прямой приводят к параметрическому виду

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$, затем подставляют в уравнение плоскости

$Ax + By + Cz + D = 0$ и определяют значение параметра t , соответ - ствующее точке пересечения. Если при такой подстановке уравнение плоскости выполняется при любом t, то прямая лежит в плоскости, а если не выполняется ни при каком t, то прямая параллельна плоскости. Найденное значение t подставляют в параметрические уравнения прямой.

Пример 9

Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ и плоскости $3x + 5y - z - 2 = 0$.

Приведем уравнения прямой к параметрическому виду:

$\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1} = t$; $\quad \dfrac{x-12}{4} = t \Rightarrow x = 12 + 4t$;

$\dfrac{y-9}{3} = t \Rightarrow y = 9 + 3t$; $\dfrac{z-1}{1} = t \Rightarrow z = 1 + t$, т. е. параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Подставив x, y, z в уравнение плоскости, найдем t:

$3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0; \quad t = -3$.

Искомая точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты

$x_0 = 12 + 4(-3) = 0; \quad y_0 = 9 + 3(-3) = 0; \quad z_0 = 1 - 3 = -2$, т. е. $P(0,\ 0,\ -2)$.

З а д а н и е 10

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Delta = det\ A$.

Квадратная матрица А называется *невырожденной,* или *неособенной*, если ее определитель отличен от нуля, и *вырожденной,* или *особенной*, если $\Delta = 0$.

Квадратная матрица В называется *обратной* для квадратной матрицы *А* того же порядка, если их произведение $A\ B = B\ A = E$, где *Е* - единичная матрица того же порядка, что и матрицы *А и В*.

Теорема. Для того, чтобы матрица *А* имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Матрица, обратная матрице *А*, обозначается через A^{-1}, так что $B = A^{-1}$. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij}.

Вычисление обратной матрицы по формуле (1) для матриц высокого порядка очень трудоемко, поэтому на практике бывает удобно находить обратную матрицу с помощью метода элементарных преобразований (ЭП). Любую неособенную матрицу *А* путем ЭП только столбцов (или только строк) можно привести к единичной матрице *Е*. Если совершенные над матрицей *А* ЭП в том же порядке применить к единичной матрице *Е*, то в результате получится обратная матрица. Удобно совершать ЭП над матрицами *А* и *Е* одновременно, записывая обе матрицы рядом через черту. Отметим еще раз, что при отыскании канонического вида матрицы с целью нахождения ее ранга можно пользоваться преобразованиями строк и столбцов. Если нужно найти обратную матрицу, в процессе преобразований следует использовать только строки или только столбцы

Пример 10 а)Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^{-1} обратную данной, воспользовавшись определением обратной матрицы.

б) Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ по методу Гаусса.

Решение.

*а)*Находим сначала детерминант матрицы A

$\Delta = det\, A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$, значит, обратная матрица существует и мы ее можем найти по формуле: $A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где A_{ij} $(i,j=1,2,3)$ - алгебраические дополнения элементов a_{ij} исходной матрицы.

Имеем: $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6,$ $\quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4-2) = 6,$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6,$ $\quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-2) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2+4 = 6,$$

откуда $A^{-1} = \dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

б) Приписываем к исходной матрице справа единичную матрицу того же порядка: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. С помощью элементарных преобразова - ний столбцов приведем левую “половину” к единичной, совершая одновременно точно такие преобразования над правой матрицей. Для этого поменяем местами первый и второй столбцы: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. К третьему столбцу прибавим первый, а ко второму - первый, умноженный на -2: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Из первого столбца вычтем удвоенный второй, а из третьего - умноженный на 6 второй; $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Прибавим третий столбец к первому и второму: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

Умножим последний столбец на -1: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$. Полученная справа от вертикальной черты квадратная матрица является обратной к данной матрице A. Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Перечень рекомендуемой литературы

Учебники

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1987, 1998.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.
3. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов – М.: ЮНИТИ-ДАНА,2007.
4. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. Ч.1. М.: Высшая школа, 1997.
5. Шестаков А.А., Малышева И.А., Полозков Д.П. Курс высшей математики. М.: Высшая школа, 1987.
6. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа, 1990, 1999.
7. Борсуковский С.И., Тягульская Л.А. Математика. Алгебра и геометрия. Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. Рыбница, 2010. – 38с.

Задачники

8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. М.: Высшая школа, 1986, 1997, 1999.
9. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1987.

Справочники

10. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986.
11. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Высшая школа, 1995.

Учебное издание

Учебно-методическое пособие

Формат А5.
Уч.-изд. 2,4 п. л. Тираж 5 экз.