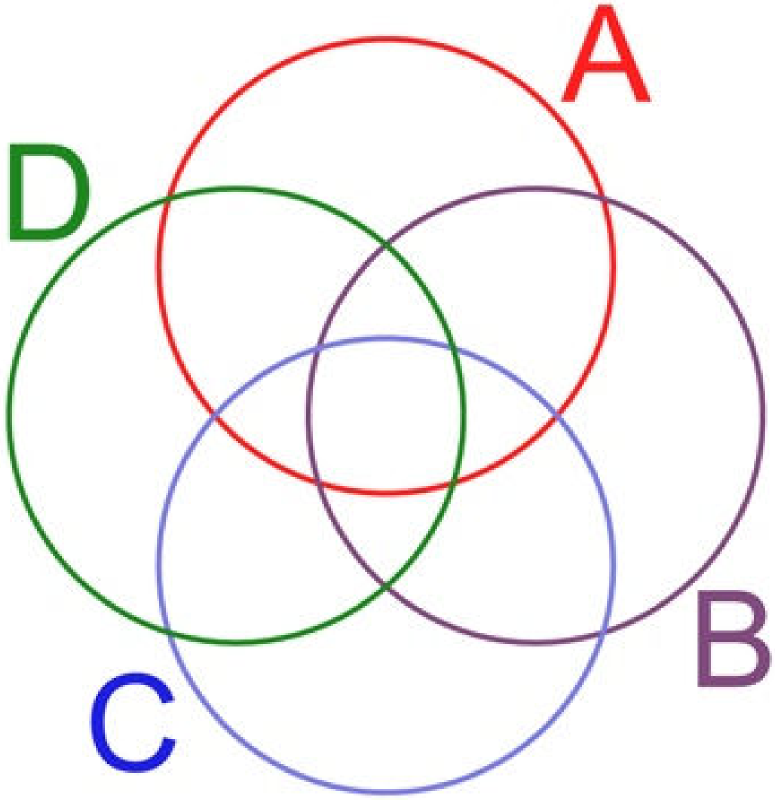
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум



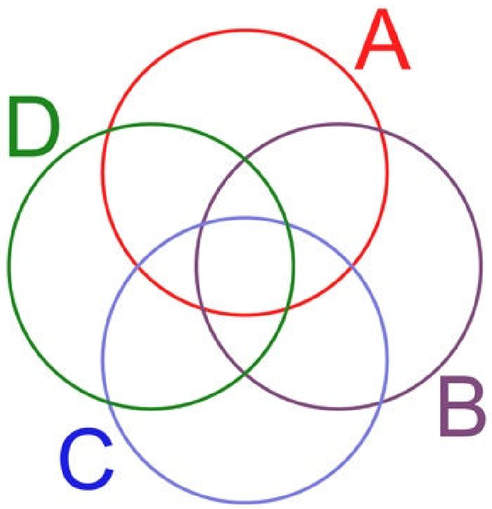
ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т. Г. ШЕВЧЕНКО

Рыбницкий филиал

Кафедра физики, математики и информатики

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум



Рыбница, 2013

УДК 519.1
ББК 22.174
Д 48

Составители

С.И. Борсуковский, ст. преп. каф. физики, математики и информатики филиала ПГУ им. Т.Г.Шевченко в г. Рыбнице

Н.В. Чернега, преп. каф. физики, математики и информатики филиала ПГУ им. Т.Г.Шевченко в г. Рыбнице

Рецензенты:

А.Б. Глазов, зав. каф. физики, математики и информатики филиала ПГУ им. Т.Г.Шевченко в г. Рыбнице

Д.Ю. Паустовский, ст. преп. каф. социально-экономических дисциплин филиала ПГУ им. Т.Г.Шевченко в г. Рыбнице

Д 48 Дискретная математика. Практикум. / Сост. С.И. Борсуковский, Н.В. Чернега – Рыбница, 2013. – 56 с. – (в обл.)

Данный практикум составлен с учетом рабочей программы по дискретной математике и содержит основные понятия теории множеств, комбинаторики и теории графов. Цель практикума углубление и закрепление теоретических и практических навыков по дисциплине дискретная математика.

Предназначен для студентов специальности «Прикладная информатика в экономике». Может быть использован студентами других специальностей, изучающими дискретную математику.

УДК 519.1
ББК 22.174

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика является относительно молодой наукой, высокий интерес к которой в настоящее время связан с бурно развивающимися средствами вычислительной техники и информационными технологиями, в том числе и системами автоматизированного проектирования. Дисциплина «Дискретная математика» обеспечивает фундаментализацию образования, формирование мировоззрения и развитие логического мышления.

Знание дискретной математики является важной составляющей общей математической культуры выпускника. Эти знания необходимы как при проведении теоретических исследований в различных областях математики, так и при решении практических задач из разнообразных прикладных областей, таких, как информатика, программирование, математическая экономика, математическая лингвистика, обработка и передача данных, распознавание образов, криптография и др.

Практикум составлен с учетом рабочей программы по дискретной математике. Цель практикума углубление и закрепление теоретических и практических навыков по дисциплине «дискретная математика».

Практикум содержит 8 основных тем: элементы теории множеств, комбинаторные схемы и теория графов. Практикум рассчитан на студентов первого курса, обладающих знаниями по дискретной математике.

Каждая тема включает в себя теоретический материал, контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы, а в 4-7 темах описаны алгоритмы работы с графами.

ТЕМА 1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1. Теоретический раздел

Множества. Операции над множествами.

Понятие множества принадлежит к числу основных, неопределяемых понятий математики. Оно не сводится к другим, более простым понятиям. Поэтому его нельзя определить, а можно лишь пояснить, указывая синонимы слова «множество» и приводя примеры множеств: *множество* – набор, совокупность, собрание каких-либо объектов (элементов), обладающих общим для всех их характеристическим свойством.

Примеры множеств:

1) множество студентов в данной аудитории;
2) множество людей, живущих на нашей планете в данный момент времени;
3) множество корней уравнения x^2-5x+6=0.

Объекты, составляющие данное множество, называют его элементами.

Множество обычно обозначают большими латинскими буквами, а элементы множества – малыми латинскими буквам. Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут: $a \in A$, а если a не принадлежит A, то пишут: $a \notin A$.

Операции над множествами.

С помощью нескольких множеств можно строить новые множества или, как говорят, производить операции над множествами. Мы рассмотрим следующие операции над множествами: объединение, пересечение, разность множеств, дополнение множества. Все рассматриваемые операции над множествами мы будем иллюстрировать на диаграммах Эйлера-Венна.

I. Объединение множеств.

Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B.

Символическая запись этого определения: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

Здесь союз «или» понимается в смысле «неразделительного или», т.е. не исключается, что x может принадлежать и A и B. Отметим, что в таком случае элемент x, входящий в оба множества A и B, входит в их объединение только один раз (поскольку для множества не имеет смысла говорить о том, что элемент входит в него несколько раз).

Поясним определение объединения множеств с помощью диаграммы Эйлера-Венна:

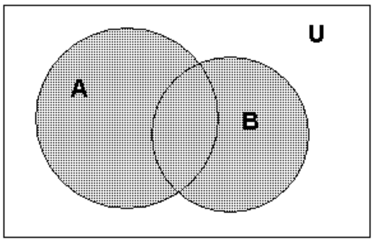


Рис. 1. $A \cup B$

На диаграмме объединение множеств А и В выделено штриховкой.

Если множество А определяется характеристическим свойством Р (х), а множество В - характеристическим свойством Q(x), то $A \cup B$ состоит из всех элементов, обладающих, по крайней мере, одним из этих свойств.

Примеры объединений двух множеств:

1) Пусть А={2; 5; 7}, В={3; 5; 6}. Тогда $A \cup B$ ={2; 3; 5; 6; 7}.
2) Пусть А=[-1/4; 2], В=[-2/3; 7/4]. Тогда $A \cup B$ =[-2/3; 2] .
3) Пусть А= $\{x \mid x=8k, k \in Z\}$, В=$\{x \mid x=8n-4, n \in Z\}$.

Тогда $A \cup B = \{x \mid 4m, m \in Z\}$.

Операция объединения множеств может проводиться не только над двумя множествами. Определение объединения множеств можно распространить на случай любого количества множеств и даже – на систему множеств. Система множеств определяется так: если каждому элементу а множества М отвечает множество A_α, то совокупность всех таких множеств мы будем называть системой множеств.

Объединением системы множеств $\{A_\alpha\}$ называется множество $\bigcup_{\alpha \epsilon M} A_\alpha$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A_α. При этом общие элементы нескольких множеств не различаются.

Из определения операции объединения непосредственно следует, что она коммутативна, т.е. $A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$, и ассоциативна, т.е. $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$.

II. Пересечение множеств.

Пересечением $A \cap B$ множеств А и В называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно каждому из множеств А и В.

Символическая запись этого определения: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Поясним определение пересечения множеств с помощью диаграммы Эйлера-Венна:

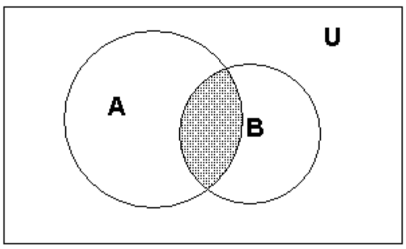


Рис. 2. $A \cap B$

На диаграмме пересечение множеств A и B выделено штриховкой.

Если множество A задается характеристическим свойством P(x), а множество B-свойством Q(x), то в $A \cap B$ входят элементы, одновременно обладающие и свойством P(x), и свойством Q(x).

Примеры пересечений двух множеств:

1. Пусть A={2; 5; 7; 8}, B={3; 5; 6; 7} .Тогда $A \cap B$={5; 7}.
2. Пусть A=[-1/4; 7/4], B=[-2/3; 3/2]. Тогда $A \cap B$= [-1/4; 3/2].
3. Пусть A= $\{x \mid x=2k, k \in Z\}$, B=$\{x \mid x=3n, n \in Z\}$.

Тогда $A \cap B = \{x \mid x=6m, m \in Z\}$.

Пусть A - множество всех прямоугольников, B-множество всех ромбов. Тогда $A \cap B$ – множество фигур, одновременно являющихся и прямоугольниками, и ромбами, т.е. множество всех квадратов.

Операцию пересечения можно определить и для произвольной системы множеств $\{A_\alpha\}$, где $\alpha \in M$.

Пересечением системы множеств $\{A_\alpha\}$, называется множество $\bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha$, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно каждому из множеств A_α, $a \in M$, т.е. $\bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha = \{x \mid x \in A$ для каждого $\alpha \in M\}$.

Операция пересечения множеств, как и операция объединения, очевидно, коммутативна и ассоциативна, т.е. $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$ и $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3)$.

III. Разность множеств.

Разностью A\B множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, т.е. $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$, что можно пояснить на диаграмме Эйлера-Венна следующим образом:

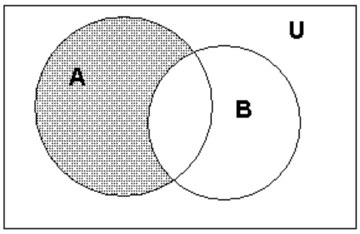


Рис. 3. A\B

На диаграмме разность A\B выделена штриховкой.

Примеры разностей множеств:

Пусть A={1; 2; 5; 7}, B={1; 3; 5; 6}. Тогда A\B ={2;7}, а B\A={3; 6}.

Пусть A – множество всех четных целых чисел, B – множество всех целых чисел, делящихся на 3. тогда A\B – множество всех четных целых чисел, которые не делятся на 3, а B\A – множество всех нечетных целых чисел, кратных трем.

IV. Дополнение множества.

Пусть множество A и B таковы, что $A \subseteq B$. Тогда *дополнением* множества A до множества B называется разность B\A. В этом случае применяется обозначение $CBA=B\setminus A$. Если в качестве множества B берётся универсальное множество U, то применяется обозначение $CA=C \cup A=U\setminus A$ и такое множество просто называют дополнением множества A. Таким образом, символическая запись определения дополнения множества будет следующей:

$$CA=\{x \mid x \notin A\}.$$

На диаграммах Эйлера-Венна можно также пояснить определения CBA и CA:

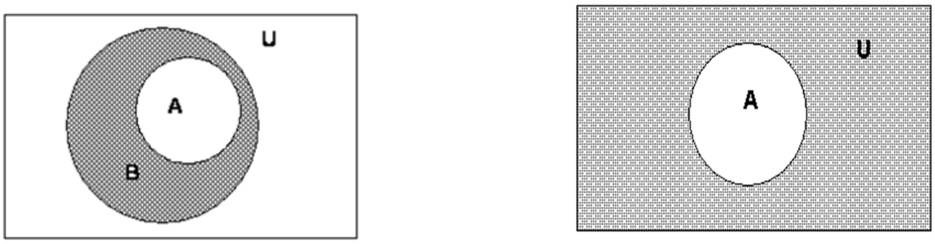


Рис. 4. CBA и CA

2. Контрольные вопросы

1) Что такое множество?
2) Перечислите операции над множествами и проиллюстрируйте их на диаграммах Эйлера-Венна.
3) Объединение множеств и его свойства.
4) Пересечение множеств и его свойства.
5) Разность множеств и ее свойства.
6) Дополнение и его свойства.
7) Множества в программировании.

3. Задания для самостоятельного решения

1. Доказать следующие равенства:

   a) $(A\cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B\setminus C)$;
   b) $A \setminus B=A \setminus (A \cap B)$;
   c) $\overline{B\setminus A} =\overline{B} \cup (A \cap B)$;
   d) $A \cap \overline{B\setminus A} = A \setminus B$;
   e) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \cap (A \setminus C)$;
   f) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;
   g) $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$.

2. Упростить следующие выражения:

a) $A \setminus (A \setminus (A \setminus B))$;
b) $A \cup \overline{A \cap (A \cup B)}$;
c) $(A \cup B) \cap (A \setminus B)$;
d) $(A \cup B) \setminus (A \setminus B)$;
e) $A \cup (B \cap (A \setminus B)) \cup (B \setminus A)$;
f) $\overline{A \cup (\overline{A} \cap (B \setminus A))}$.

3. Построить множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяю следующим соотношениям:

a) $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq x^5 \end{cases}$;
b) $0 < x < y \leq 2x$;
c) $1 < x^2 + y^2 \leq 4$;
d) $0 < 1/x \leq y < -x + 10/3$;
e) $\begin{cases} x^2 \leq 1 \\ y^2 \leq x^4 \end{cases}$

4. Изобразить на координатной плоскости множества:

a) $\{1;2\} \times [1;2]$;
b) $\{1;2\} \times ([1;2] \setminus (1;2))$;
c) $\{1;2\}^2 \setminus \{(x,y) \in R^2 | y>x\}$;
d) $\{(x,y) \in [0;+\infty)^2, | \, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5. Доказать следующие соотношения:

a) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$;
b) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{C})$;
c) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;
d) $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$;
e) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap$ □;
f) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
g) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

6. Какие из следующих множеств конечны, а какие бесконечны? Найдите все элементы конечных множеств:

a) $X=\{x | x \in R, x^2-5x+4=0\}$;
b) $X=\{x | x \in N, x^2-5x+4>0\}$;
c) $X=\{x | x \in N, (\exists y \in N)\ 2x+3y = 24\}$;
d) $X=\{x | x \in N, (\exists y \in Z)\ 2x+3y = 24\}$.

7. Найти пересечение множеств всех прямоугольников и всех ромбов; множество всех параллелограммов и всех четырехугольников с равными диагоналями.

8. Решить системы уравнений:

a) $\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$ где $B \subseteq A \subseteq C$;

b) $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C, \end{cases}$ где $B \subseteq A, A \cap C = \varnothing$;

c) $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$ где $B \subseteq A \subseteq C$.

9. Доказать следующие соотношения:

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;
d) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

10. Даны множества A={1,6,43,32,9,16,12,33,3,15}, B={1,3,22,15,9,35,16}, C={12,6,33,3,15,21}, U={1,2,3,…50}. Проиллюстрировать с помощью диаграмм Венна справедливость следующих соотношений:

a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
e) $A \cup (A \cap B) = A$
f) $A \cap (A \cup B) = A$
g) $(A \cap B) \cup (A \cup \overline{B}) = A$
h) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$

11. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, A\B, B\A, если

a) A= {-1; -1\2; 1\2; 1}, B={0;1;2};
b) A= (0;5), B=(1;8];
c) A= $(-\infty;1) \cup (5;+\infty)$, □=[0;6].

12. Найти $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(A \cap B) \cup C$, $A \cap (B \cap C)$, если

a) A=[-2;2], B=(0;5), C=$(1;+\infty)$;
b) A={0;2;4;6}, B={0,1,3,5}, C={2,3,4};
c) A={{1;2},{1;3},{2}}, B={{1;2;4},{2;3},{1}}, C={{1;3},{1}}.

13. Найти дополнение множества A до множества U, если

a) U= {1;2;3;4;5;6}, A={1;3;6};
b) U= Z, A= {a|a $\in$ Z, a делится на 2 или на 3}.

14. Найти все элементы множеств $A \times B$, $B \times A$, если

a) $A = \{1;2\}$, $B=\{3;4;5\}$;
b) $A = \{1;2\}$, $B=\{1;2;3\}$;
c) $A=\{1\}$, $B = \{1;2;3\}$;
d) $A = \emptyset$, $B = \{1;2;3;4\}$.

15. Найти область определения и множество значений соответствий $S \subseteq A \times B$:

a) $A=\{1;2;3;4;5\}$, $B=\{12;16\}$, $S=\{(a,b)|a \in A, b \in B$, a делит $b\}$;
b) $A = Z^2$, $B = N$, $S = \{(a,b)|a=\frac{z_1}{z_2}, z \in Z, b \in N, a=b\}$;
c) $A = N \setminus \{0\}$, $B = Q \setminus \{0\}$, $S = \{(a,b)| a \in A, b \in B, a \cdot b \in Z\}$;
d) $A = Z$, $B = Q$, $S = \{(a,b)|a \in A, b \in B, a \cdot b = 1\}$;
e) $A = Z$, $B = Q$, $S = \{(a,b)|a \in A, b \in B, a=2b\}$.

16. Даны множества: $U=\{a,b,c,d\}$; $X=\{a,c\}$; $Y=\{a,b,d\}$; $Z=\{b,c\}$. Найти:

a) $X \cap \overline{Y}$
b) $(X \cap Z) \cup \overline{Y}$
c) $X \cup (Y \cap Z)$
d) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
e) $X \cup Y$
f) $\overline{X} \cap \overline{Y}$
g) $\overline{X \cap Y}$
h) $(X \cup Y) \cup Z$
i) $X \cup (Y \cup Z)$
j) $X \setminus \overline{Z}$
k) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$

17. Осуществить все операции над множествами $A =\{2,4,6,8\}$; $B=\{3,6,9\}$, если $U =\{1,2,3,\ldots,10\}$.

18. Найти элементы следующих множеств:

a) $X = \{x|x \in R, x^2-3x+2=0\}$;
b) $X = \{x|x \in R, \frac{2x}{x^2+1}<3\}$;
c) множество всех двузначных натуральных чисел, делящихся на 5, но не делящихся на 10;
d) множество всех чисел от 0 до 30, которые можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел;
e) множество всех трехзначных телефонных номеров, сумма цифр которых равна 3.

ТЕМА 2. ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, ПОРЯДКА И ТОЛЕРАНТНОСТИ

1. Теоретический раздел

Любое подмножество ρ прямого произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется *n-местным (n-арным)* отношением, определенным на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

$$\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n .$$

Другими словами элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (где $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$) связаны отношением ρ тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \rho$. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - упорядоченный набор из n элементов.

Отношения, хотя и являются множествами, принято обозначать малыми буквами греческого алфавита α, β, $\gamma, \ldots, \rho$, σ, τ.

Пример:

1) Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Тогда $\rho=\{(x, y)\} | x, y \in A$, x-делитель y, $x \leq 5\}$ может быть записано в виде:

$$\rho=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (3,3), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10)\}$$

2) R-множество действительных чисел. $\alpha \subseteq R_2 = R \times R$.

$\alpha=\{(x, y) \mid x, y \in R, x<y\}$, $(1, 2) \in \alpha$,
$(2, 1) \notin \alpha$ т.к. $x > y$.

Свойства бинарных отношений.

Пусть ρ - бинарное отношение на множестве A. Тогда:

а) ρ - рефлексивно, если $(x,x) \in \rho$ для $\forall x \in A$. (главная диагональ матрицы содержит только единицы)

б) ρ - антирефлексивно, если $(x,x) \notin \rho$ $\forall x \in A$. (главная диагональ матрицы содержит только нули)

в) ρ - симметрично, если из того, что $(x,y) \in \rho$ следует, что $(y,x) \in \rho$. ($\rho=\rho$ - 1 матрица отношения симметрична относительно главной диагонали)

г) ρ - антисимметрично, если из того, что $(x,y) \in \rho$ и $(y,x) \in \rho$ следует, что $x = y$.

Замечание: Отношение ρ антисимметрично тогда и только тогда, когда из того, что $((x,y) \in \rho$ и $x \neq y) \Rightarrow (x,y) \notin \rho$.

д) ρ - асимметрично, если из двух соотношений $(x,y) \in \rho$ и $(y,x) \in \rho$ по крайней мере одно не выполняется.

е) ρ - транзитивно, если из того, что $(x,y) \in \rho$ и $(y,z) \in \rho$ следует, что $(x,z) \in \rho$

Основные виды отношений.

Отношение эквивалентности (~) на множестве X — это бинарное отношение, для которого выполнены следующие условия:

- Рефлексивность;
- Симметричность;
- Транзитивность.

Запись вида «а ~ n» читается как «а эквивалентно b».

Бинарное отношение R на множестве X называется *отношением строгого порядка*, если имеют место:

- антирефлексивность;
- асимметричность;
- транзитивность

и отношением нестрогого порядка, если имеют место:

- рефлексивность;
- антисимметричность
- транзитивность.

Отношение R, удовлетворяющее только условиям рефлексивности и транзитивности, называется *квазипорядком*, или предпорядком.

Отношение толерантности на множестве X — это бинарное отношение, для которого выполнены следующие условия:

- рефлексивность;
- симметричность;
- антиранзитивность.

2. Контрольные вопросы

1) Что такое n-арные отношения? Приведите примеры.
2) Основные свойства бинарных отношений и их характеристики.
3) Какому свойству соответствует матрица с главной диагональю, содержащей только единицы?
4) Какому свойству соответствует матрица с главной диагональю, содержащей только нули?
5) Основные виды отношений.
6) Свойства отношения эквивалентности.
7) Свойства отношения порядка.
8) Свойства отношения толерантности.

3. Задания для самостоятельного решения

1. Найти все элементы бинарных отношений R, построить таблицы(матрицы) и графы этих отношений:
    а) xRy, ⇔ x<y на множестве A={1;2;3;4};

b) $xRy, \Leftrightarrow x|y$ на множестве A = {5;6;…15};
c) $xRy, \Leftrightarrow y=x+1$ на множестве A= {1;2;…;10}.

2. Для каждого из следующих бинарных отношений определить, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, асимметричность, антисимметричность, транзитивность) оно обладает.
   1) Отношения R заданы на множестве R:
      a) $xRy, \Leftrightarrow x^2 = y^2$;
      b) $xRy, \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$;
      c) $xRy, \Leftrightarrow xy>1$;
      d) $xRy, \Leftrightarrow y=|x|$.
   2) Отношения R заданы на множестве Z:
      a) $xRy, \Leftrightarrow x \leq y + 1$;
      b) $xRy, \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$;
      c) $xRy, \Leftrightarrow 2x=3y$.

3. Доказать, что приведенные ниже бинарные отношения являются отношениями эквивалентности, и найти классы эквивалентности:
   a) отношение R задано на множестве N^2+: (a,b) R (c,d) $\Leftrightarrow$ a+b = = c+d, a, b, c, d $\in$ N;
   b) отношение R задано на множестве N^2: (a,b) R (c,d) $\Leftrightarrow$ ad=bc, a,b,c,d $\in$ N;
   c) отношение G задано на множестве R: aGb $\Leftrightarrow$ $a^2=b^2$;
   d) отношение G задано на множестве R: aGb $\Leftrightarrow$ a-b $\in$ Z.

4. Отношение R задано на множестве M={2,3,4,5,6,7,8,9,10}.Задайте отношение R списком, матрицей, графом, если R ={(a,b):a+3b делится на a}. Определите отношение, обратное к R и дополнение к R. Какими свойствами обладают данные отношения?

5. Отношение R задано на множестве M={2,3,4,5,6,7,8,9,10,12}.Задайте отношение R списком, матрицей, графом, если R ={(a,b) | a+b четное}. Определите отношение, обратное к R и дополнение к R. Какими свойствами обладают данные отношения?

6. Отношение R задано на множестве: M={2,3,4,5,6,7,8,9,10,12}.Задайте отношение R списком, матрицей, графом, если R означает - «быть делителем». Определите отношение, обратное к R и дополнение к R. Какими свойствами обладают данные отношения?

7. Отношение R задано на множестве: M={2,3,4,5,6,7,8,9,10,12}.Задайте отношение R списком, матрицей, графом, если R означает-«иметь один и тот же делитель, отличный от единицы».Определите отношение, обратное к R и дополнение к R. Какими свойствами обладают данные отношения?

8. Отношение R задано на множестве: $M=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,12\}$.Задайте отношение R списком, матрицей, графом, если $R=\{(a,b){:}a+b$ делится на $a\}$. Определите отношение, обратное к R и дополнение к R. Какими свойствами обладают данные отношения?

9. Отношение R задано на множестве $M=\{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Задайте отношение R списком, матрицей, графом, если $R=\{(a,b){:}a+b$ делится на $5\}$. Определите отношение, обратное к R и дополнение к R.Какими свойствами обладают данные отношения?

10. Какими свойствами характеризуются следующие отношения на $M=\{1,2,3,\ldots,9\}$:
    a) $R_1=\{(a,b){:}\ (a-b)$ - четное$\}$;
    b) $R_2=\{(a,b){:}\ (a+b)$ - четное$\}$;
    c) $R_3=\{(a,b){:}\ (a+1)$ – делитель $(a+b)\}$;
    d) $R_3=\{(a,b){:}\ a$ – делитель $(a+b),\ a\neq 1\}$.

11. Пусть $M=\{1,3,5,7\}$ и отношение $R\subseteq M\times M$. Задать списком отношение R, обратное отношение R^{-1}, дополнение $\overline{R}$, транзитивное R^{o} и рефлексивное R^{*} замыкания, если:
    a) $R=\{(a,b){:}\ a\leq b\}$;
    b) $R=\{(a,b){:}\ a+2=b\}$;
    c) $R=\{(a,b){:}\ (a+b)/2\in M\}$;
    d) $R=\{(a,b){:}\ (a+b-1)\in M\}$;
    e) $R=\{(a,b){:}\ a-1=b\}$;
    f) $R=\{(a,b){:}\ 2a+b\in M\}$.

12. Пусть $M=\{a,b,c\}$ и $\beta(M)$ – множество всех подмножеств множества M. Задать списком отношение R, заданное на $\beta(M)$, а также обратное отношение R^{-1}, дополнение $\overline{R}$, транзитивное R^{o} и рефлексивное R^{*} замыкания, если:
    a) $R=\{(A,B){:}A\subset B\}$;
    b) $R=\{(A,B){:}A\subseteq B\}$;
    c) $R=\{(A,B){:}A\supset B\}$;
    d) $R=\{(A,B){:}A\cap\square\neq\varnothing\}$;
    e) $R=\{(A,B){:}A\cap\square=\varnothing\}$;
    f) $R=\{(A,B){:}A\cap B=\varnothing$ и $A\cup B=U\}$.

ТЕМА 3. КОМБИНАТОРНЫЕ СХЕМЫ

1. Теоретический раздел

Размещения без повторений.

Подсчитаем количество способов расположить n различных элементов по k различным позициям (k<n). Такие расположения называются размещениями, а их количество, от французского слова arrangement обозначается A_n^k. В случае, если k=n количество предметов совпадает с количеством имеющихся мест, получаем перестановки из n элементов.

Если из n объектов выбирают k штук, то число выборов последнего объекта есть n-k невыбранных объектов, что означает наличие n-k+1 возможности выбора последнего выбранного объекта. То же, другими словами: после выбора первых k-1 элемента остается выбрать n-(k-1)= n-k+1 элемент.

Теорема: число размещений n различных элементов по k различным позициям есть:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1),$$

или, в терминах факториалов:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 1. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти цветов?

Решение. Искомое число трехполосных флагов:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Примечание: заметим, что в случае, когда число мест, по которым размещают предметы, совпадает с количеством самих предметов, т. е. когда k=n, рассматриваемая задача становится задачей о числе перестановок. В нашем случае при этом мы получаем в знаменателе дроби ноль факториал, и для того, что бы разные формулы, соответствующие одной и той же задаче, приводили к одинаковым результатам, полагают, что 0!=1.

Размещения с повторениями.

Пусть даны n различных видов предметов, которые можно разместить по k различным местам, причем выбирать предметы можно с повторениями (т.е. можно выбрать несколько предметов одного вида). Такие выборки называются размещениями с повторениями, а их количество вычисляется по формуле: $\overline{A}_n^k = n^k$.

Сочетания без повторений.

Подсчитаем количество способов, которыми можно выбрать k из n различных предметов. Такие выборки называются сочетаниями, а их количество обозначается C_n^k.

При k<n, выбрать k предметов из n можно A_n^k способами, переставляя их P_k способами:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Рекуррентная формула:

$$C_m^n = C_m^{n-1}\frac{m-n+1}{n}$$

Свойства сочетаний:

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$$

Сочетания с повторениями.

Пусть имеются предметы n различных видов, и из них составляются наборы, содержащие k элементов. Такие выборки называются сочетаниями с повторением. Их число обозначается $\overline{C}_n^k$.

Теорема: число сочетаний с повторениями может быть вычислено по формулам:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}.$$

Перестановки без повторений.

Перестановки в ряд.

Перестановкой из n элементов (или n-перестановкой) называется n-элементное упорядоченное множество, составленное из элементов n-элементного множества.

Иначе: Перестановкой из n элементов (или n-перестановкой) называется размещение из n элементов по n без повторений.

Число перестановок из n элементов без повторений обозначается P_n от французского слова perturbation.

Теорема: число способов расположить в ряд n различных объектов есть

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Замечание: Рекуррентная формула:

$$P_n = nP_{n-1}.$$

Пример 2. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4,5, если цифры в числе не повторяются?

Решение:

1) Найдем количество всех перестановок из этих цифр: P_6=6!=720.

2) 0 не может стоять впереди числа, поэтому от этого числа необходимо отнять количество перестановок, при котором 0 стоит впереди. А это P_5=5!=120.

$$P_6 - P_5 = 720 - 120 = 600$$

Перестановки симметричных объектов.

N различных предметов можно расположить по кругу (n-1)! способами, а если их можно еще и переворачивать, то $\frac{(n-1)!}{2}$ различными способами.

Перестановки с повторениями.

Пусть даны n_1 элементов первого типа, n_2 — второго типа, ..., n_k — k-го типа, всего n элементов. Способы разместить их по n различным местам называются перестановками с повторениями. Их количество обозначается $P_n(n_1,n_2,\ldots,n_k)$.

Теорема: число перестановок с повторениями:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_3!}.$$

Пример 3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «ананас»?

Решение: всего букв 6. Из них одинаковы n_1«а»=3, n_2«н»=2, n_3«с»=1. Следовательно, число различных перестановок равно P(3,2,1)

2. Контрольные вопросы

1) Размещения без повторений. Теорема о количестве размещений без повторений.
2) В каком случае задача о размещениях становится задачей о перестановках?
3) Размещения с повторениями. Формула вычисления количества размещений с повторениями.
4) Сочетания без повторений. Формула вычисления количества сочетаний без повторений. Свойства сочетаний без повторений.
5) Сочетания с повторениями. Теорема о количестве сочетаний с повторениями.
6) Перестановки без повторений. Теорема о числе перестановок без повторений. Перестановки симметричных объектов.
7) Перестановки с повторениями. Теорема о числе перестановок с повторениями.

3. Задания для самостоятельного решения

1. Сколькими способами 4 юноши могут пригласить четырех из шести девушек на танец?
2. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи».
3. На памятные сувениры в «Поле Чудес» спонсоры предлагают кофеварки, утюги, телефонные аппараты, духи. Сколькими способами 9 участников игры могут получить эти сувениры? Сколькими способами могут быть выбраны 9 предметов для участников игры?

4. На ферме есть 20 овец и 24 свиньи. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?
5. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»?
6. В книжный магазин поступили романы Ф. Купера «Прерия», «Зверобой», «Шпион», «Пионеры», «Следопыт» по одинаковой цене. Сколькими способами библиотека может закупить 17 книг на выбранный чек?
7. У людоеда в подвале томятся 25 пленников. Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин?
8. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо? Указание. Сосчитайте отдельно количества одно-, двух-, трех- и четырехбуквенных слов.
9. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырехместную?
10. Труппа театра состоит из 20 артистов. Сколькими способами можно выбрать из нее в течение двух вечеров по 6 человек для участия в спектаклях так, чтобы ни один артист не участвовал в двух спектаклях?
11. Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, один апельсин, одну сливу и один мандарин?
12. На каждом борту лодки должно сидеть по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причем десять человек хотят сидеть на левом борту лодки, двенадцать - на правом, а девяти безразлично где сидеть?
13. Сколькими способами могут восемь человек стать в очередь к театральной кассе?
14. В автомашине 7 мест. Сколькими способами семь человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя могут только трое из них?
15. Алфавит некоторого языка содержит 30 букв. Сколько существует шестибуквенных слов (цепочка букв от пробела до пробела), составленных из букв этого алфавита, если:
    a) буквы в словах не повторяются?
    b) буквы в словах могут повторяться?
16. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные числа, каждое из которых содержит не менее трех цифр. Сколько таких чисел можно составить, если повторения цифр в числах запрещены?
17. Сколько слов можно образовать из букв слова фрагмент, если слова должны состоять:
    a) из восьми букв;
    b) из семи букв;
    c) из трех букв?
18. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из пяти цифр,

a) если первая из них не равна нулю;

b) если номер состоит из одной буквы латинского алфавита, за которой следуют четыре цифры, отличные от нуля?

19. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг, если

a) две определенные книги должны всегда стоять рядом;

b) эти две книги не должны стоять рядом?

20. Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?

21. Компания из двадцати мужчин разделяется на три группы, в первую из которых входят три человека, во вторую — пять и в третью — двенадцать. Сколькими способами они могут это сделать?

22. Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова сапфир?

a) Сколько среди них таких, которые не содержат буквы р?

b) Сколько таких, которые начинаются с буквы с и оканчиваются буквой р?

23. Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных, можно образовать из букв слова «уравнение»?

24. Сколько различных перестановок можно образовать изо всех букв слова «перестановка»? Сколько из них начинается с буквы п и оканчивается буквой а?

ТЕМА 4. ПОИСК ПУТЕЙ С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ДУГ

1. Теоретический раздел

Граф G - это математический объект, состоящий из множества вершин $X = \{x_1, x_2, ..., x_n)$ и множества ребер $L = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ Таким образом, граф полностью определяется совокупностью множеств X, A: G = (X, A).

Для многих задач несущественно, являются ли ребра отрезками прямых или криволинейными дугами; важно лишь то, какие вершины соединяет каждое ребро.

Если ребрам графа приданы направления от одной вершины к другой, то такой граф называется *ориентированным*. Ребра ориентированного графа называются *дугами*. Соответствующие вершины ориентированного графа называют *началом и концом*. Если направления ребер не указываются, то граф называется *неориентированным* (или просто графом).

Пример 1.

На рис.5 изображен неориентированный граф G =(X, A).

$X= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$A = \{a_1 = (x_1, x_2), a_2=(x_2, x_3), a_3=(x_1, x_3), a_4= (x_3, x_4)\}$.

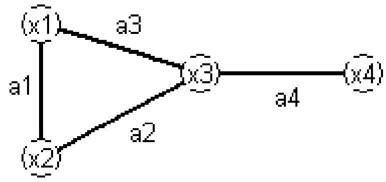


Рис. 5. Пример неориентированного графа

Пример 2.

На рис. 6 изображен ориентированный граф G =(X,A).

$X= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$A = \{a_1 = (x_1, x_2), a_2=(x_1, x_3), a_3=(x_3, x_4), a_4= (x_3, x_2)\}$.

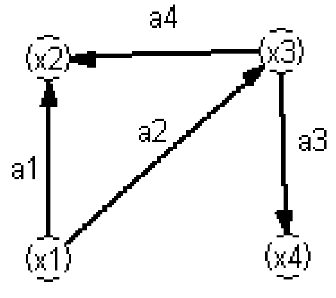


Рис. 6. Пример ориентированного графа

Граф, имеющий как ориентированные, так и неориентированные ребра, называется *смешанным*.

Различные ребра могут соединять одну и ту же пару вершин. Такие ребра называют *кратными*. Граф, содержащий кратные ребра, называется мультиграфом.

Неориентированное ребро графа эквивалентно двум противоположно направленным дугам, соединяющим те же самые вершины.

Ребро может соединять вершину саму с собой. Такое ребро называется *петлей*. Граф с кратными ребрами и петлями называется *псевдографом*.

Множество ребер графа может быть пустым. Множество вершин графа не может быть пустым.

Как в случае ориентированного, так и в случае неориентированного ребра говорят, что вершины x и y инцидентны ребру a, если эти вершины соединены этим ребром.

Две *вершины* называются *смежными*, если они инцидентны одному и тому же ребру. Два *ребра* называются *смежными*, если они имеют общую вершину.

Степенью вершины графа называется число ребер, инцидентных этой вершине. Вершина, имеющая степень 0, называется изолированной, а степень 1 - висячей.

Для ориентированного графа множество вершин, в которые ведут дуги, исходящие из вершины x, обозначают G(x), то есть $G(x) = \{ y: (x\ y) \in G\}$. Множество G(x) называют образом вершины x. Соответственно $G^{-1}(y)$ - множество вершин, из которых исходят дуги, ведущие в вершину y, $G^{-1}(y) = \{x: (x, y) \in G\}$. Множество $G^{-1}(y)$ называют прообразом вершины y.

Подграфом неориентированного графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G. Аналогично определяется подграф ориентированного графа. Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа,

Граф G = (X, A) - *полный*, если для любой пары вершин x_i и x_j существует ребро $(x_i\ x_j)$.

Граф G - (X, A) - *симметрический*, если для любой дуги (x_i, x_j) существует противоположно ориентированная дуга (x_j, x_i).

Граф G = (X, A) - *планарный*, если он может быть изображен на плоскости так, что не будет пересекающихся дуг.

Неориентированный граф G = (X, A) - *двудольный*, если множество его вершин X можно разбить на два такие подмножества X_1 и X_2, что каждое ребро имеет один конец в X_1, а другой в X_2.

2. Описание алгоритма фронта волны

Рассмотрим задачу поиска пути с минимальным числом дуг, начинающегося в произвольной вершине x ориентированного графа G(X, A) и заканчивающегося в другой произвольной вершине y этого графа. Эта задача может быть решена с помощью алгоритма фронта волны.

Пусть G(x) - множество вершин, принадлежащих графу G и являющихся концами дуг, связывающих эти вершины с вершиной x (образ вершины x), а $G^{-1}(x)$ - множество вершин, принадлежащих графу G и являющихся началами дуг, связывающих эти вершины с вершиной x (прообраз вершины x).

Алгоритм фронта волны.

Шаг 1. Установить начальные значения: n - число вершин, x - начальная вершина, y - конечная вершина, W(0) = x (вершина x помечена индексом 0).

Шаг 2. Положить к = 1. Множество вершин, принадлежащих G(x), пометить индексом 1. Полученное таким образом множество вершин обозначить через W(k), т. е. положить W(k)=G(x).

Шаг 3. Если W(k) = Ø или же одновременно выполняются условия: к = n-1, y $\notin$ W{k), то вершина y не достижима из вершины x. Работу закончить. В противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Если y $\notin$ W(k), то перейти к шагу 6. В противном случае перейти к шагу 5.

Шаг 5. Найден путь минимальной длины, равной k. Обозначим этот путь $xz_1z_2...z_{k-1}y$. Восстановить этот путь можно по следующему правилу, двигаясь от последней вершины y к первой вершине x:

Вершина $z_{k-1} \in W(k-1) \cap G^{-1}(y)$;

Вершина $z_{k-2} \in W(k-2) \cap G^{-1}(z_{k-1})$;

…

Вершина $z_1 \in W(1) \cap G^{-1}(z_2)$.

Шаг 6. Пометить индексом k+1 все непомеченные вершины, которые принадлежат образу множества вершин W(k). Полученное множество вершин обозначить через W(k+1). Присвоить k:= k +1 и перейти к шагу 3.

Множество W(k) называется фронтом волны k - го уровня.

Очевидно, что алгоритм может быть использован для поиска маршрута минимальной длины в неориентированном графе.

Пример:

Используя алгоритм фронта волны, найдем путь с минимальным числом дуг для графа, изображенного на рисунке:

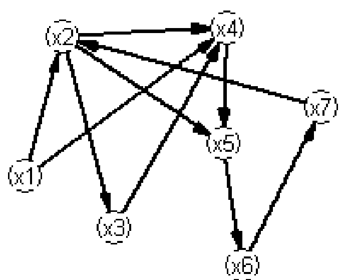


Рис. 7. Пример применения алгоритма фронта волны

Матрица смежности этого графа имеет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Шаг 1. Установим начальные значения: $n = 7$, $x = x_1$ - начальная вершина, $y = x_7$ - конечная вершина, $W(0) = x_1$.

Шаг 2. Положим к= 1. $W(1) = G(x) = \{x_2, x_4\}$.

Шаг 3. $W(1)\neq\varnothing$, $k\neq n-1,(1\neq6),y=x_7 \notin W(1)$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. $y = x_7 \notin W(1)$ переходим к шагу 6.

Шаг 6. Пометим индексом $k+1 = 2$ все непомеченные, вершины, которые принадлежат образу множества вершин $W(k)$, т. е. объединению непомеченных вершин множеств $G(x_2)\cup G(x_4) = \{x_3,x_5\}\cup\{x_5\} =\{x_3,x_5\}$ (вершину x_4 не помечаем, т. к. ока была помечена раньше, на шаге 2).

Получаем множество вершин $W(2) = \{x_3, x_5\}$. Полагаем $k:= k +1 = 2$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. $W(2)\neq\varnothing$, $k\neq n-1,(2\neq6),y=x_7\notin W(2)$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. $y = x_7 \notin W(2)$, переходим к шагу 6.

Шаг 6. Пометим индексом $k+1 = 3$ все непомеченные вершины, которые принадлежат образу множества вершин $W(2)$, т. е. объединению непомеченных вершин множеств $G(x_3) \cup G(x_5) = \{x_6\}$ (вершину x_4 не помечаем, т. к. она была помечена раньше, на шаге 2).

Получаем множество вершин $W(3) = \{x_6\}$. Полагаем $k= k+1 = 3$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. $W(3)\neq\varnothing$, $k\neq n-1,(3\neq6),y=x_7\notin W(3)$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. $y = x_7 \notin W(3)$, переходим к шагу 6.

Шаг 6. Пометим индексом к+1= 4 все непомеченные вершины, которые принадлежат образу множества вершин $W(3)$, т. е. непомеченные вершин множества $G(x_6) = \{x_7\}$.

Получаем множество вершин $W(4) = \{x_7\}$. Полагаем к: = к+1 = 4 и переходим к шагу3.

Шаг 3. $W(3)\neq\varnothing$, $k\neq n-1,(4\neq6),y=x_7\in W(4)$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. $y = x_7 \in W(4)$, переходим к шагу 5.

Шаг 5. Найден путь минимальной длины, равной 4. Обозначим этот путь $x_1z_1z_2z_3x_7$.

Восстановим этот путь:

Вершина $z_3 \in W(3) \cap G^{-1}(x_7)=\{x_6\}\cap\{x_6\};z_3 = x_6$.

Вершина $z_2 \in W(2) \cap G^{-1}(x_6)=\{x_3,x_5\}\cap\{x_5\};z_2 = x_5$.

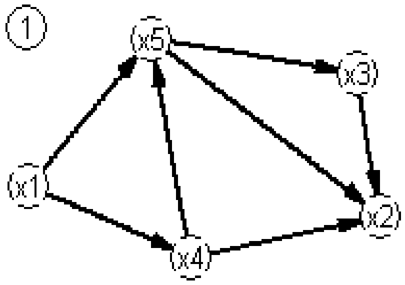
Вершина $z_1\in W(1) \cap G^{-1}(x_5)=\{x_2,x_4\}\cap\{x_2,x_4\}$; в качестве z_1 можно взять любую из вершин множества $\{x_2, x_4\}$, положим $z_1 = x_2$. Итак, найденный путь есть $(x_1x_2x_5x_6x_7)$.

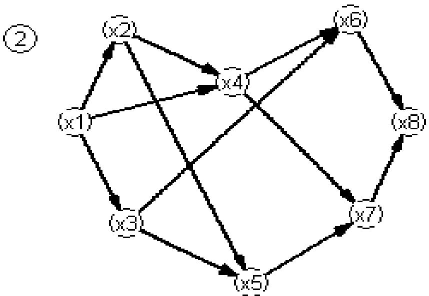
3. Контрольные вопросы

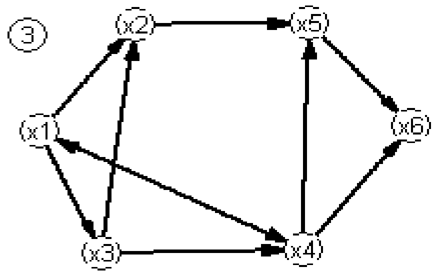
1) Граф и его части.
2) Ориентированный и неориентированный граф.
3) Степень вершины графа.
4) Виды графа и их характеристики.
5) Алгоритм фронта волны.

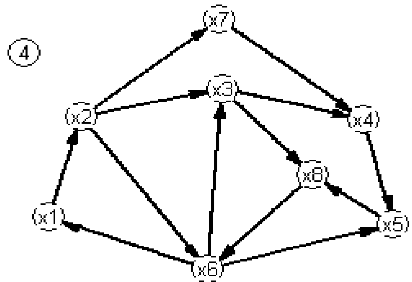
4. Задания для самостоятельного решения

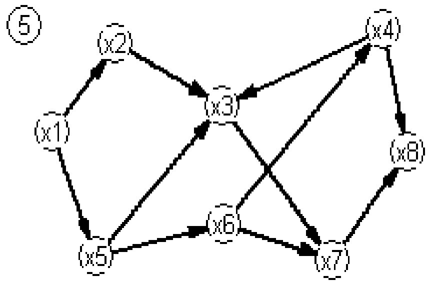
Используя алгоритм фронта волны, найти пути с минимальным числом дуг для графов, изображенных на рисунках:

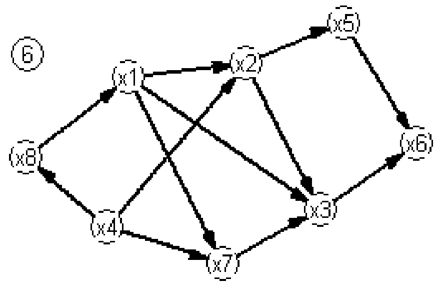


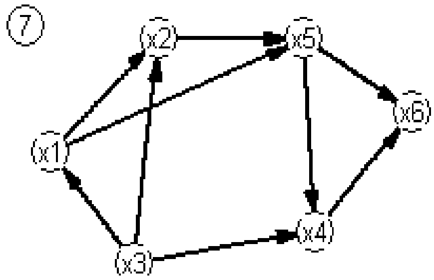


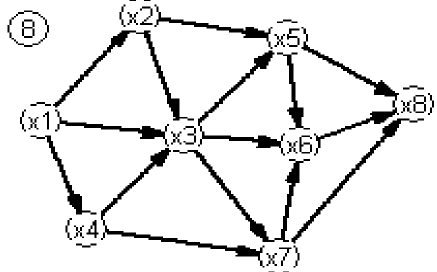




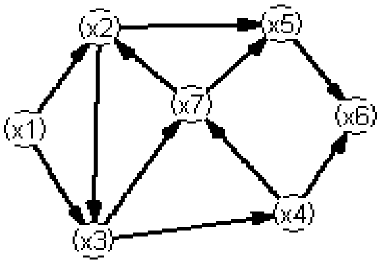




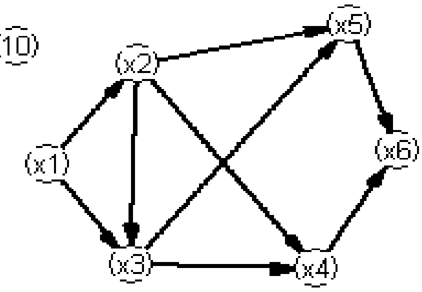




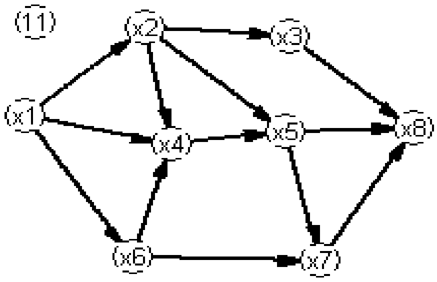
(9)



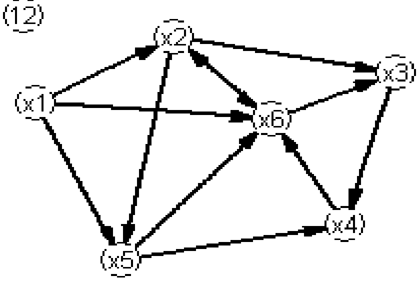
(10)



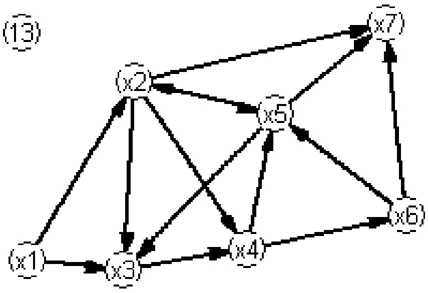
(11)



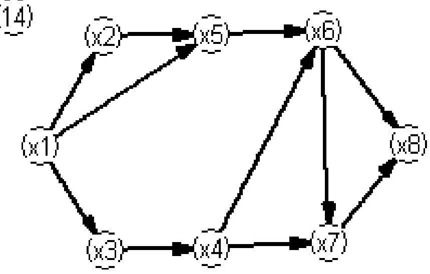
(12)



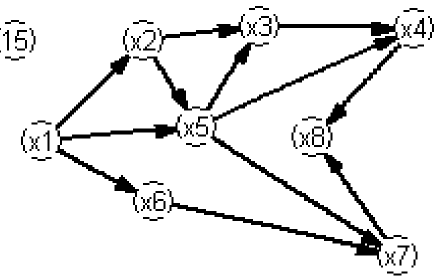
(13)



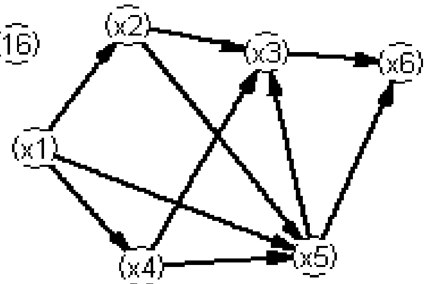
(14)



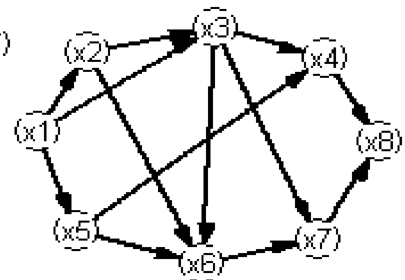
(15)



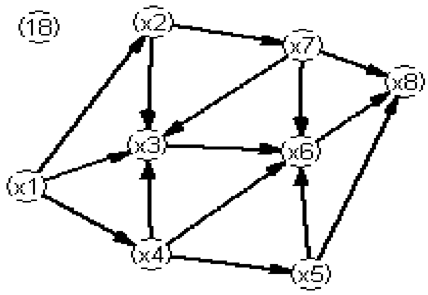
(16)



(17)



(18)



ТЕМА 5. ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ОСТОВНОГО ДЕРЕВА. АЛГОРИТМ КРАСКАЛА

1. Теоретический раздел

Существует простой и важный тип графов, которому разные авторы дали одинаковое название, - это деревья. Деревья важны не только потому, что они находят приложения в различных областях знания, но и в силу их особого положения в самой теории графов, что вызвано предельной простотой структуры деревьев. Часто при решении какой-либо задачи о графах её сначала исследуют на деревьях.

Неориентированное дерево (или просто дерево) - это связный ациклический граф (неорграф называется связанный, если каждая пара различных вершин может быть соединена по крайней мере одной цепью).

Граф, не содержащий циклов, называется *лесом* (ясно, что компонентами леса являются деревья). Если зафиксирована некоторая вершина x_0, то она называется корнем дерева, а само дерево называется деревом с корнем. Известны и другие определения понятия "дерево", которые неявно содержатся в следующее теореме.

Для графа G, имеющего p вершин и q ребер, следующие утверждения эквивалентны:

1. Граф G - дерево
2. Любые две вершины в графе G соединены единственной цепью;
3. Граф G - связный граф и p=q+1;
4. Граф G - ациклическицй граф и p=q+1;
5. граф G - ациклическицй граф и, если любую пару несмежных вершин соединить ребром а, то в графе G+а будет точно один цикл.

Очевидны 2 следствия данной теории:

1. в любом дереве имеется, по крайней мере, две висячие вершины;
2. каждой дерево с n - вершинами имеет ровно n -1 ребро.

Неорграф, получающийся в результате " снятия ориентации с дуг" орграфа G, называется *лежащим в основе неорграфа* G. Орграф G называется ориентированным (корневым) деревом, если он является деревом и имеет корень.

Поддеревом корневого дерева T называется его часть T, которая является корневым деревом, удовлетворяющим следующему условию: вместе с корнем V дерево T содержит все вершины и дуги достижимые в T из V.

Вершины граф G с нулевой полустепенью исхода (иными словами, не имеющий приемников) называется листьями. Корневое дерево, как следует из определения, удовлетворяет следующим условия:

а) имеется ровно одна вершина, называемая корнем, в которую не входит не одна дуга.

б) в каждую вершину, отличную от корня, входит ровно одна дуга в) приемники всякой вершины упорядочены.

С точки зрения представления в памяти важно различать 2 типа деревьев: бинарные и сильно ветвящиеся. *Бинарные (двоичное) дерево* - это корневое дерево, в котором каждая вершина имеет не более двух приемников, называемых левыми и правыми приемниками (сыновьями). В сильно ветвящемся дереве количество приемников может быть произвольным. Бинарные деревья классифицируются по нескольким признакам. Степенью узла в дереве называется количество дуг, которые из него выходят. Степень дерева равна максимальной степени узла, входящего в дерево.

Ясно, что степень узла бинарного дерева не превышает числа 2. При этом листьями в дереве являются вершины, имеющие степень нуль.

Другим важным признаком структурной классификации бинарных деревьев является строгость бинарного дерева.

Строго бинарное дерево состоит из узлов, имеющих степень 2 или степень 0 . Нестрого бинарное дерево содержит узлы со степенью равной 1.

Остовным деревом связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Пусть граф G имеет n вершин и m ребёр. Так как всякое дерево с n вершинами по определению имеет n-1 ребёр, то любое остовное дерево графа G получается из этого графа в результате удаления m-(n-1)=m-n+1 ребёр. Число γ = m-n+1 называется цикломатическим числом графа.

Граф называется *нагруженным*, если ребрам этого графа поставлены в соответствие веса, так что ребру (x_i, x_j) сопоставлено некоторое число $c(x_i, x_j) = c_{ij}$, называемое длиной (или весом, стоимостью ребра).

Длиной (или весом или стоимостью) пути S, состоящего из некоторой последовательности дуг (x_i, x_j), называется число l(s), равное сумме длин дуг входящих в этот путь, т.е. $l\ (s) = \Sigma C_{ij}$ причем суммирование ведется по всем дугам $(x_i, x_j) \in S$

Матрица $C = (C_{ij})$ называется *матрицей весов.*
Например, рассмотрим граф

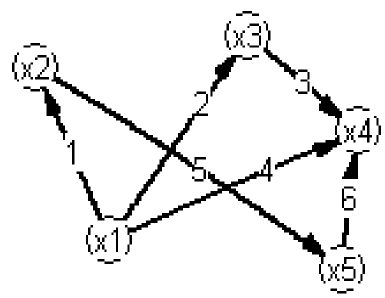


Рис.8. Пример нагруженного дерева

Длина пути $(x_1,\ x_2,\ x_5,\ x_4)$ равна 1+5+6=12. Пусть G – связный нагруженный граф. Задача построения минимального основного дерева заключается в том, чтобы из множества основных деревьев найти дерево у которого сумма длин ребер минимальна.

Приведем типичные случаи, когда возникает необходимость построения минимального основного дерева графа

1. Нужно соединить n городов железнодорожными линиями (автомобильными дорогами, линиями электропередач, сетью трубопроводов и т.д.) так, чтобы суммарная длина линий или стоимость была бы минимальной;
2. Требуется построить схему электрической сети, в которой элементы должны быть соединены с помощью проводов наименьшей общей длины.

2. Описание алгоритма построения минимального остовного дерева

Задачу построения минимального остовного дерева (МОД) можно решить с помощью следующего алгоритма:

Алгоритм Краскала

Шаг 1. Установка начальных значений. Вводится матрица длин ребер С графа G

Шаг 2. Выбрать в графе G ребро минимальной длины. Построить граф G_2, состоящий из данного ребра и инцидентных ему вершин. Положить i = 2

Шаг 3. Если i=n, где n – число ребер графа, то закончить работу (задача решена) в противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Построить граф G_{i+1}, добавляя к графу G_i новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно какой-нибудь вершине графа G_i и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не содержащейся в G_i.

Вместе с этим ребром включаем в G_{i+1} и инцидентную ему вершину, не содержащуюся в G_i. Присваиваем i: =i+1 и переходим к шагу 3.

Пример: Найти минимальное остовное дерево для графа G

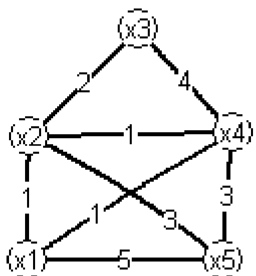


Рис.9. Задача построения минимального остовного дерева

Шаг 1. Установка начальных значений.

Введем матрицу длин ребер G

$$C=\begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 1 & 5 \\ 1 & \infty & 2 & 1 & 3 \\ \infty & 2 & \infty & 4 & \infty \\ 1 & 1 & 4 & \infty & 3 \\ 5 & 3 & \infty & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

Шаг 2. Выберем ребро минимальной длины. Минимальная длина ребра равна единице. Таких ребер три (x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_1, x_4) В этом случае можно взять любое.

Возьмем (x_1, x_2). Построим граф G_2, состоящий из данного ребра и инцидентных ему вершин x_1 и x_2. Положим i=2 и перейдем к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i=2 \neq n=5$, то переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_3, добавляя к графу G_2 новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно одной из вершин x_1, x_2 и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не содержащейся в G_2 т.е. одной из вершин x_3, x_4, x_5. Таким образом нужно выбрать ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_4) (x_1, x_5) (x_2, x_3) (x_2, x_4) (x_2, x_5). Таких ребер длины единица два (x_1, x_4) и (x_2, x_4). Можно выбрать любое. Возьмем (x_1, x_4). Вместе с этим ребром включаем в G_3 вершину x_4, не содержащуюся в G_2. Полагаем i=3 и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i \neq n$, то переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_4, добавляя к графу G_3 новое ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_5), (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_4, x_5). Такое ребро длины два одно (x_2, x_3). Вместе с этим ребром включаем в G_4 вершину x_3, не содержащуюся в G_3. полагаем i=4 и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i=4 \neq n=5$, переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_5, добавляя к графу G_3 новое ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_4, x_5). Таких ребер длины 3 два (x_2, x_5) и (x_4, x_5) возьмем $(x_{2,} x_5)$.

Вместе с этим ребром включаем в G_5 вершину x_5, не содержащуюся в G_4. Полагаем i=5 и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как i=n, то граф G_5 –искомое минимальное остовное дерево. Суммарная длина ребра равна 1+1+2+3=7.

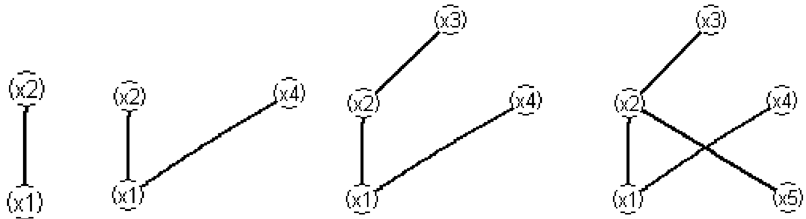


Рис.10. Ход построения минимального остовного дерева

Ориентация неориентированного дерева осуществляется следующим образом. В дереве G отмечается корень x_0 и все ребра такого дерева с корнем ориентируются от этой вершины. Вершину x_i ребра (x_i, x_{i+1}) можно соединить единственной цепью L с корнем x_0. Если эта цепь не содержит ребра (x_i, x_{i+1}) в это ребро вводится ориентация от x_i к x_{i+1}, в противном случае от x_{i+1} к x_i. Данная ориентация дерева с корнем x_0 единственная, ориентированное таким образом дерево с корнем называют ориентированным деревом. В нем все ребра имеют направление от корня. При выборе другой вершины-корня получаем другой орграф-дерево.

Множество всех вершин, связанных с корнем цепями, проходящими через вершину x порождает подграф G(x) называемый ветвью вершины x в дереве с корнем x_0.

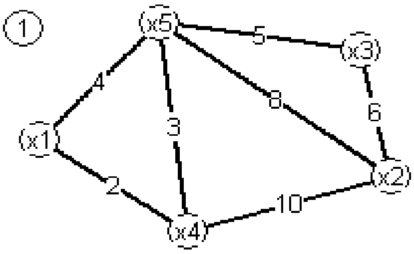
3. Контрольные вопросы

1) Ориентированное и неориентированное дерево.
2) Части дерева и их свойства.
3) Примеры ситуаций, в которых необходимо построить минимальное остовное дерево.
4) Алгоритм Краскала.

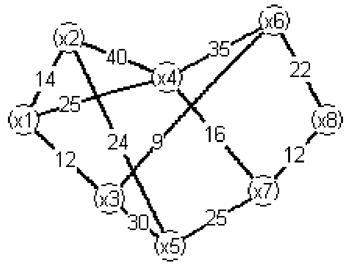
4. Задания для самостоятельного решения

Используя алгоритм Краскала, построить минмальное остовное дерево:

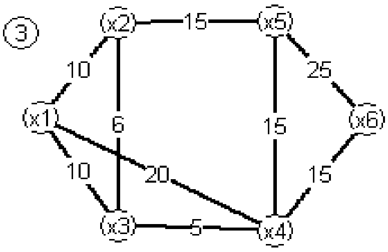
1



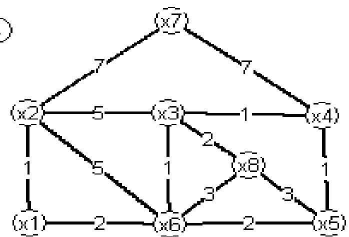
2



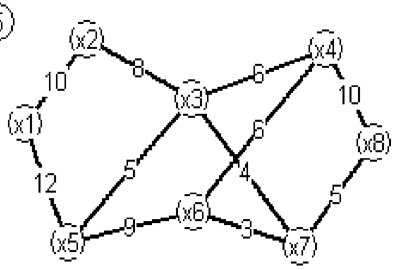
3



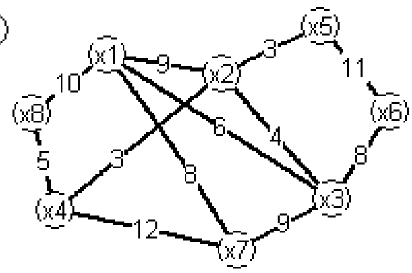
4



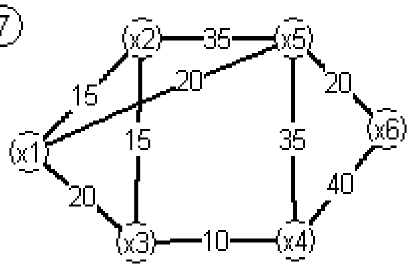
5



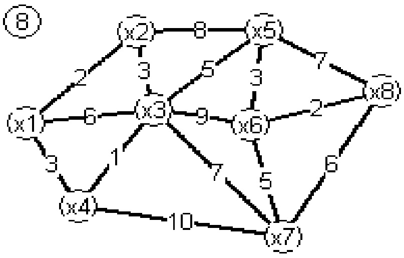
6



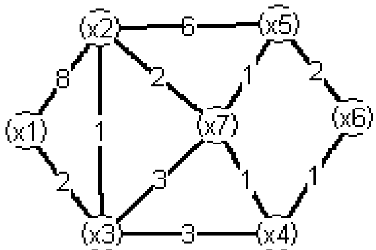
(7)



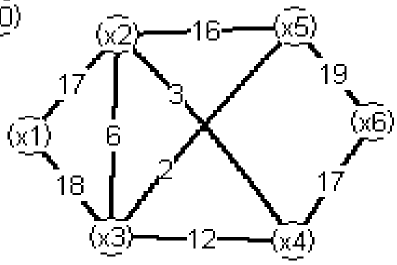
(8)



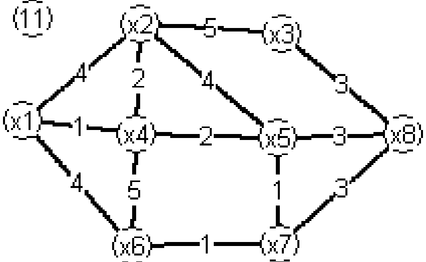
(9)



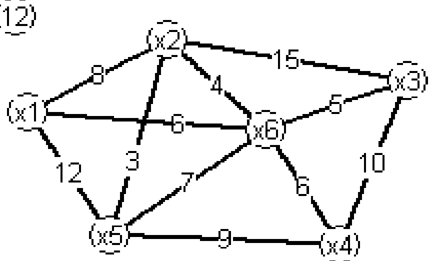
(10)



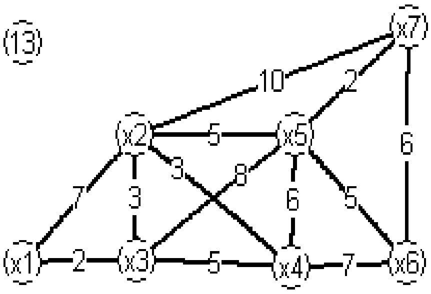
(11)



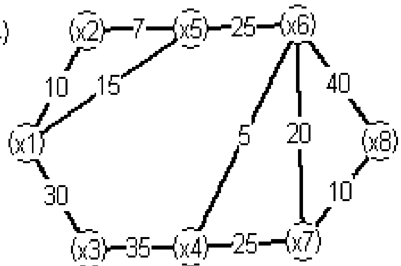
(12)



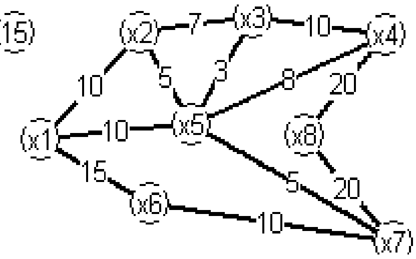
(13)



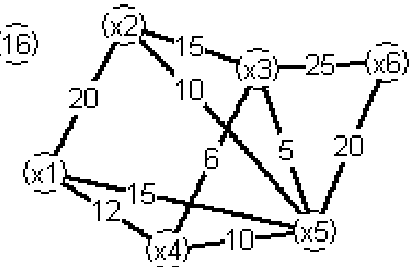
(14)



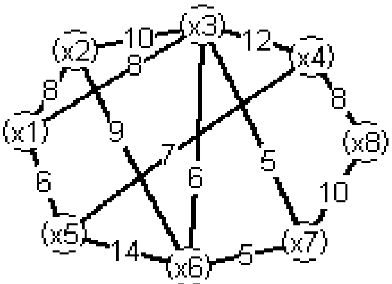
(15)



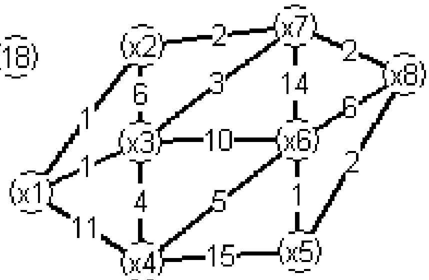
(16)



(17)



(18)



ТЕМА 6. НАХОЖДЕНИЕ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ. АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРЫ, АЛГОРИТМ ФОРДА - БЕЛЛМАНА

1. Теоретический раздел

Задача о нахождении кратчайшего пути состоит в нахождении кратчайшего пути от заданной начальной вершины до заданной конечной вершины, при условии, что такой путь существует.

Можно дать много практических интерпретаций задачи о кратчайших путях. Например, вершины могут соответствовать городам и каждая дуга - некоторому пути, длина которого представлена весом дуги. Мы ищем кратчайшие пути между городами. Вес дуги может соответствовать стоимости (или времени) передачи информации между вершинами. В этом случае мы ищем самый дешевый (или самый скорый).

Рассмотрим головоломку о трех бидонах.

Восьмилитровый бидон заполнен некой жидкостью, а два бидона емкостью 5 и 3 литра пусты. Необходимо разделить 8 литров жидкости на две равные части, используя только три имеющихся бидона. Какое минимальное количество переливаний из бидона в бидон надо сделать, чтобы достичь желаемого результата?

В этой сетевой модели каждый узел будет соответствовать объемам жидкости в 8-, 5- и 3-литровом бидонах. Начальным узлом будет (8, 0, 0), а конечным - (4, 4, 0). Новый узел получается из текущего при однократном переливании жидкости из одного бидона в другой.

На рис. 11 показаны различные маршруты, ведущие от начального узла (8, 0, 0) к конечному (4, 4, 0). Таким образом, наша головоломка сведена к задаче определения кратчайшего пути между узлами (8, 0, 0) и (4, 4, 0).

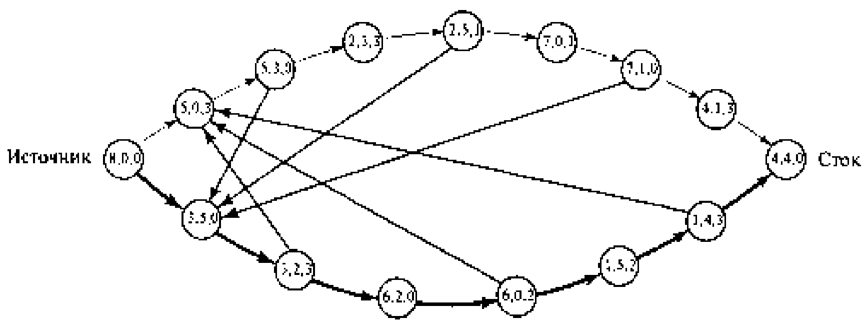


Рис. 11. Головоломка о трех бидонах как задача вычисления кратчайшего пути

Оптимальное решение, показанное в нижней части рис. 11, требует семи переливаний из бидона в бидон.

2. Описание алгоритмов нахождения кратчайшего пути

2.1. Алгоритм Дейкстры нахождения минимального пути

Для нахождения минимального пути между двумя произвольными вершинами для случая, когда все $c_{ij} > O$ можно воспользоваться простым алгоритмом Дейкстры

Алгоритм Дейкстры.

Шаг 1. Установка начальных условий.

Ввести число вершин графа n и матрицу весов $C = (c_{ij})$. Ввести номер начальной вершины s и номер конечной вершины t.

Для начальной вершины s положить M(s) = O и считать эту пометку постоянной. Положить $M(x_i)$ для всех остальных вершин $x_i \neq s$ равными достаточно большому числу (например, 99999999) и считать эти пометки временными. Положить номер текущей вершины p = s. Сформировать множество П вершин с постоянной пометкой, вначале П= {p}, и множество В вершин с временной пометкой, В ={X\П}.

Шаг 2. Обновление пометок.

Заполнить множество вершин G(p), являющихся образом вершины p. Для всех вершин $x_i \in G(p)$, имеющих временные пометки, т.е. для $x_i \in G(p) \cap B$, изменить пометки следующим образом:

$M(x_i) = \min (M(x_i), M(p)+c(p,x_i))$.

Шаг 3. Превращение временных пометок в постоянные.

Из всех вершин, имеющих временные пометки, найти такую, для которой $M(x^*) = \min(M(x_i))$.

Считать пометку вершины x* постоянной. Положить p = x*.

Шаг 4. Проверка, является ли найденный путь минимальным.

Если p =t, то M(p) является длиной минимального пути; перейти к шагу 6. Иначе перейти к шагу 5.

Шаг 5. Изменение множеств П и В.

Удалить номер вершины p из множества В и добавить номер вершины p в множество П. Перейти к шагу 2.

Шаг 6. Восстановление минимального пути.

Для любой вершины x_i, предшествующая ей вершина x_j определяется из соотношения:

$$M(x_j)+c(x_j,x_i)=M(x_i),$$
$$x_j \in G^{-1}(x_i) \cap \Pi,$$

где $G^{-1}(x_i)$ - прообраз вершины x_i.

Последовательно применяя это соотношение, начиная от последней вершины t, найдем минимальный путь.

Пример нахождения кратчайшего пути с помощью алгоритма Дейкстры.

Определим минимальный путь из вершины x_1 а вершину x_6 в нагруженном графе, изображенном на рис. 12.

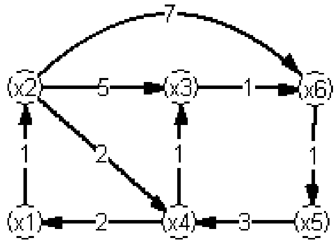


Рис. 12. Нагруженный граф

Рассмотрим подробно работу алгоритма Дейкстры для этого примера.

Шаг 1. Установка начальных условий.

Матрица весов имеет вид:

$$c = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 5 & 2 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ 2 & \infty & 1 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

$s=x_1$; $M(s)=0$; $p= x_1$; $П=\{ x_1\}$; $B=\{ x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

1-ая итерация.

Шаг 2. $G(x_1)=\{x_2\}$; $G(x_1)\cap B=\{x_2\}$; $M(x_2)=\min\{\infty,0+1\}=1$.

Шаг 3. $x^*= x_2$; $p= x_2$.

Шаг 4. $x_2\neq x_6$

Шаг 5. $П=\{x_1,x_2\}$;$B=\{x_3,x_4,x_5,x_6\}$.

2-ая итерация.

Шаг 2. $G(x_2)=\{x_3,x_4,x_6\}$;$G(x_2)\cap B=\{x_3,x_4,x_6\}$;$M(x_3)=\min\{\infty,1+5\}=6$;
$M(x_4)=\min\{\infty,1+2\}=3$; $M(x_6)=\min\{\infty,1+7\}=8$.

Шаг 3. $x^*= x_4$; $p=x_4$.

Шаг 4. $x_2\neq x_6$

Шаг 5. $П=\{x_1,x_2,x_4\}$;$B=\{x_3,x_5,x_6\}$.

3-ая итерация.

Шаг 2. $G(x_4)=\{x_1,x_3,x_5\}$;$G(x_4)\cap B=\{x_3,x_5\}$;
$M(x_3)=\min\{6,3+1\}=4$; $M(x_5)=\min\{\infty,3+4\}=7$.

Шаг 3. $x^*= x_3$; $p= x_3$.

Шаг 4. $x_3\neq x_6$

Шаг 5. $П=\{x_1,x_2,x_4,x_3\}$;$B=\{x_5, x_6\}$. 4-ая итерация.

Шаг 2. $G(x_3)=\{x_6\}$; $G(x_3)\cap B=\{x_6\}$; $M(x_6)=\min\{8,4+1\}=5$.

Шаг 3. $x^*= x_6$; $p= x_6$.

Шаг 4. $x_6 = x_6$.

Переходим к шагу 6.

Прежде, чем перейти к восстановлению минимального пути, представим полученные результаты в виде таблицы, которой удобно пользоваться для расчетов (табл.1.)

Таблица 1

Восстановление минимального пути.

№ итерации	**p**	**П**	**М(П)**	**В**	**М(В) старые**	**М(В) обновленные**
0	1	1	0	2	∞	1
				3	∞	∞
				4	∞	∞
				5	∞	∞
				6	∞	∞
1	2	1	0	3	∞	6
		2	1	4	∞	3
				5	∞	∞
				6	∞	8
2	4	1	0	3	6	4
		2	1	5	∞	7
		4	3	6	8	8
3	3	1	9	5	7	7
		2	1	6	8	5
		4	3			
		3	4			
4	6					

Шаг 6. Определим вершину, предшествующую вершине x_6

$G^{-1}(x_6) = \{x_2, x_3\}$;

$G^{-1}(x_6) \cap П = \{x_2, x_3\}$;

$M(x_2) + c(x_2, x_6) = 1+7 \neq M(x_6)$,

$M(x_3) + c(x_3, x_6) = 4+1=5=M(x_6)$,

т.е. вершина x_3 предшествует вершине x_6.

Определим вершину, предшествующую вершине x_3

$G^{-1}(x_3) = \{x_2, x_4\}$;

$G^{-1}(x_3) \cap П = \{x_2, x_4\}$;

$M(x_2) + c(x_2, x_3) = 1+5 \neq M(x_3)$,

$M(x_4) + c(x_4, x_3) = 3+1=4=M(x_3)$,

т.е. вершина x_4 предшествует вершине x_3.

Определим вершину, предшествующую вершине x_6

$G^{-1}(x_4) = \{x_2\}$;

$G^{-1}(x_4) \cap П=\{x_2\}$;

$M(x_2) + c(x_2,x_4) =1+2=3=M(x_4)$,

т.е. вершина x_3 предшествует вершине x_3.

Определим вершину, предшествующую вершине x_2

$G^{-1}(x_2) =\{x_1\}$;

$G^{-1}(x_2) \cap П=\{x_1\}$;

$M(x_1) + c(x_1,x_2) =0+1=1=M(x_2)$,

т.е. вершина x_1 предшествует вершине x_2.

Итак, x_1 x_2 x_4 x_3 x_6 есть минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_6. Его длина равна 5.

2.2. Алгоритм нахождения минимального пути Форда-Беллмана

Предполагается, что ориентированный граф не содержит контуров отрицательной длины.

Алгоритм Форда - Беллмана.

Основными вычисляемыми величинами этого алгоритма являются величины $\lambda_i(к)$, где i = 1,2, ... , n (n - число вершин графа); к = 1, 2, ... , n - 1. Для фиксированных i и к величина $\lambda_i(k)$ равна длине минимального пути, ведущего из заданной начальной вершины x_1 в вершину x_i и содержащего не более к дуг.

Шаг 1. Установка начальных условий.

Ввести число вершив графа n и матрицу весов $C= (c_{ij})$.

Шаг 2. Положить к = 0. Положить $\lambda_i(O) = \infty$ для всех вершин, кроме x_i, положить $\lambda_i(0)= 0$.

Шаг 3. В цикле по k, k =1,.., n - 1, каждой вершине x_i на k -ом шаге приписать индекс $\lambda_i(k)$ по следующему правилу:

$$\lambda_i(k) = min_{1\le j\le n}\{\lambda_j(k-1) + c_{ij}\} \qquad (1)$$

для всех вершин, кроме x_1, положить $\lambda_1(k) = O$

В результате работы алгоритма формируется таблица индексов $\lambda_1(k)$, i=1, 2, ... , n, k = 0, 1, 2, ... , n - 1. При этом $\lambda_1(k)$ определяет длину минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более k дуг.

Шаг 4. Восстановление минимального пути.

Для любой вершины x_s предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения:

$$\lambda_r(n\text{-}2)+c_{rs}= \lambda_s(n\text{-}1), \quad x_r \in G^{-1}(x_s), \qquad (2)$$

где $G^{-1}(x_s)$ - прообраз вершины x_s.

Для найденной вершины x_r предшествующая ей вершина x_q определяется из соотношения:

$$\lambda_q(n\text{-}3)+c_{qr}= \lambda_r(n\text{-}2), \quad x_q \in G^{-1}(x_r),$$

где $G^{-1}(x_r)$ - прообраз вершины x_r и т. д.

Последовательно применяя это соотношение, начиная от последней вершины x_i, найдем минимальный путь.

Пример нахождения минимального пути с помощью алгоритма Форда-Беллмана.

С помощью алгоритма Форда - Беллмана найдем минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_3 в графе, изображенном на рис. 13.

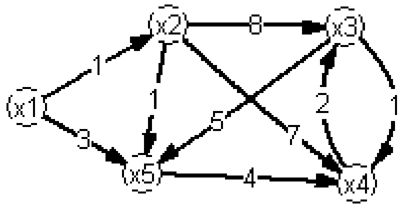


Рис. 13. Нагруженный граф

Рассмотрим подробно работу алгоритма Форда - Беллмана для этого примера.

Значения индексов $\lambda_i(k)$ будем заносить в таблицу индексов (табл. 2).

Шаг 1. Введем число вершин графа n =5. Матрица весов этого графа имеет вид:

$$c = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 8 & 7 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & -5 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

Шаг 2. Положим k =0, $\lambda_1(0)= \lambda_2(0)= \lambda_3(0)= \lambda_4(0)= \lambda_5(0)=\infty$. Эти значения занесем в первый столбец табл. 3.

Шаг 3. k =1, $\lambda_1(1) = 0$.

Равенство (1) для k =1 имеет вид:

$$\lambda_i(1) = \min_{1\le j\le 5}\{\lambda_j(0) + c_{ji}\}$$

$\lambda_2(1)=\min\{\lambda_1(0)+c_{12}; \lambda_2(0)+c_{22}; \lambda_3(0)+c_{32}; \lambda_4(0)+c_{42}; \lambda_5(0)+c_{52};\}=$
$= \min\{0+1; \infty+\infty; \infty+\infty; \infty+\infty; \infty+\infty;\}=1$

$\lambda_3(1)=\min\{\lambda_1(0)+c_{13}; \lambda_2(0)+c_{23}; \lambda_3(0)+c_{33}; \lambda_4(0)+c_{43}; \lambda_5(0)+c_{53};\}=$
$= \min\{0+\infty; \infty+8; \infty+\infty; \infty+2; \infty+\infty;\}=\infty$

$\lambda_4(1)=\min\{\lambda_1(0)+c_{14}; \lambda_2(0)+c_{24}; \lambda_3(0)+c_{34}; \lambda_4(0)+c_{44}; \lambda_5(0)+c_{54};\}=$
$= \min\{0+\infty; \infty+7; \infty+1; \infty+\infty; \infty+4;\}=\infty$

$\lambda_5(1)=\min\{\lambda_1(0)+c_{15}; \lambda_2(0)+c_{25}; \lambda_3(0)+c_{35}; \lambda_4(0)+c_{45}; \lambda_5(0)+c_{55};\}=$
$= \min\{0+3; \infty+1; \infty-5; \infty+\infty; \infty+\infty;\}=3.$

Полученные значения $\lambda_i(1)$ занесем во второй столбец табл. 3. Убеждаемся, что второй столбец, начиная со второго элемента, совпадает с первой строкой матрицы весов, что легко объясняется смыслом величин λ_i (1), которые равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более одной дуги,

k = 2.

$\lambda_1(2) = 0$.

Равенство (1) для k =2 имеет вид:

$$\lambda_i(2) = \min_{1\le i\le 5}\{\lambda_j(1) + c_{ji}\}$$

$\lambda_2(2)=\min\{0+1;1+\infty;\infty+\infty;\infty+\infty;3+\infty\}=1$.

$\lambda_3(2)=\min\{0+\infty;1+8;\infty+\infty;\infty+2;3+\infty\}=9$.

$\lambda_4(2)=\min\{0+\infty;1+7;\infty+1;\infty+\infty;3+4\}=7$.

$\lambda_5(2)=\min\{0+3;1+1;\infty-5;\infty+\infty;3+\infty\}=2$.

Полученные значения $\lambda_i(2)$ занесем в третий столбец табл. 3. Величины $\lambda_i(2)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более двух дуг.

k = 3.

λ_1 (3) = 0.

Равенство (1) для k =3 имеет вид:

$$\lambda_i(3) = \min_{1\le i\le 5}\{\lambda_j(2) + c_{ji}\}$$

$\lambda_2(3) = \min\{0+1;1+\infty;9+\infty;7+\infty;2+\infty\}=1$.

$\lambda_3(3) = \min\{0+\infty;1+8;9+\infty;7+2;2+\infty\}=9$.

$\lambda_4(3)= \min\{0+\infty;1+7;9+1;7+\infty;2+4\}=6$.

$\lambda_5(3) = \min\{0+3;1+1;9-5;7+\infty;2+\infty\}=2$.

Полученные значения $\lambda_i(3)$ занесем в четвертый столбец табл. 2. Величины $\lambda_i(3)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более трех дуг.

k = 4.

λ_1 (4) = 0.

Равенство (1) для k =4 имеет вид:

$$\lambda_i(4) = \min_{1\le i\le 5}\{\lambda_j(13) + c_{ji}\}$$

$\lambda_2(4) = \min\{0+1;1+\infty;9+\infty;6+\infty;2+\infty\}=1$.

$\lambda_3(4) = \min\{0+\infty;1+8;9+\infty;6+2;2+\infty\}=8$.

$\lambda_4(4) = \min\{0+\infty;1+7;9+1;6+\infty;2+4\}=6$.

$\lambda_5(4) = \min\{0+3;1+1;9-5;6+\infty;2+\infty\}=2$.

Полученные значения $\lambda_i(4)$ занесем в пятый столбец табл. 2. Величины $\lambda_i(4)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более четырех дуг.

Таблица 2

Определение длины минимального пути.

i (номер вершины)	**λi(0)**	**λi(1)**	**λi(2)**	**λi(3)**	**λi(4)**
1	0	0	0	0	0
2	∞	1	1	1	1
3	∞	∞	9	9	8
4	∞	∞	7	6	6
5	∞	3	2	2	2

Шаг 4. Восстановление минимального пути.

Для последней вершины x_3 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (2) полученного при s=3:

$$\lambda_r+c_{r3}=\lambda_3(4), \qquad x_r \in G^{-1}(x_3), \qquad (3)$$

где $G^{-1}(x_3)$ – прообраз вершины x_3

$G^{-1}(x_3)=\{x_2,x_4\}$.

Подставим в (3) последовательно r = 2 и r = 4, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$$\lambda_2(3)+c_{23}=1+8 \neq \lambda_3(4)=8,$$
$$\lambda_4(3)+c_{43}=6+2 = \lambda_3(4)=8$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_3, является вершина x_4.

Для вершины x_4 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (2) полученного при s =4:

$$\lambda_r(2)+c_{r4}=\lambda_4(3), \qquad x_r \in G^{-1}(x_4), \qquad (4)$$

где $G^{-1}(x_4)$ - прообраз вершины x_4.

$G^{-1}(x_4) = \{x_2,x_3,x_5\}$.

Подставим в (4) соотношение последовательно r = 2, r = 3 и r = 5, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$$\lambda_2(2)+c_{24}=1+7 \neq \lambda_4(4)=6;$$
$$\lambda_3(2)+c_{34}=1+1 \neq \lambda_4(4)=6;$$
$$\lambda_5(2)+c_{54}=2+4 \neq \lambda_4(4)=6.$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_4, является вершина x_5.

Для вершины x_5 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (2) полученного при s =5:

$$\lambda_r(1)+c_{r5}=\lambda_5(2), \qquad x_r \in G^{-1}(x_5), \qquad (5)$$

где $G^{-1}(x_5)$ - прообраз вершины x_5.

$G^{-1}(x_5) = \{x_1x_2,x_3\}$.

Подставим в (5) последовательно r=1 и r = 2, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$$\lambda_1(1)+c_{15}=0+3\neq\lambda_5(2)=2;$$
$$\lambda_2(1)+c_{25}=1+1\neq\lambda_5(2)=2.$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_5, является вершина x_2.

Для вершины x_2 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения (2) полученного при s=2:

$$\lambda_r(0)+c_{r2}=\lambda_2(1), \qquad x_r \in G^{-1}(x_2), \qquad (6)$$

где $G^{-1}(x_2)$ - прообраз вершины x_2.

$G^{-1}(x_2) = \{x_1\}$.

Подставим в (6) r = 1, чтобы определить, выполняется ли это равенство:

$$\lambda_1(0)+c_{12}=0+1=\lambda_2(1)=1.$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_2, является вершина x_1.

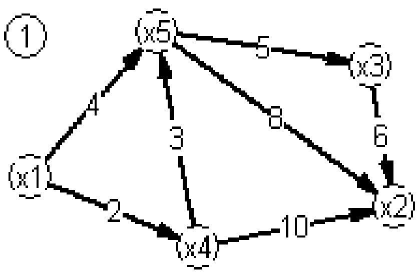
Итак, найден минимальный путь – x_1, x_2, x_5, x_4, x_3, его длина равна 8.

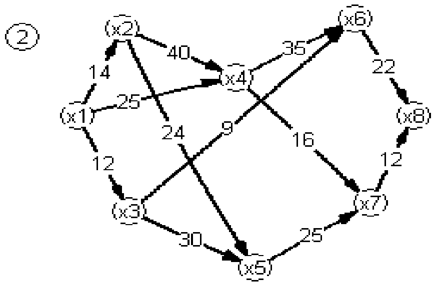
3. Контрольные вопросы

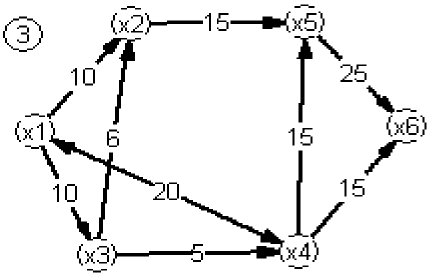
5) Суть нахождения кратчайшего пути?
6) Решение головоломки о трех бидонах на ЭВМ.
7) Суть алгоритма Дейкстры?
8) Суть алгоритма Форда – Беллмана?

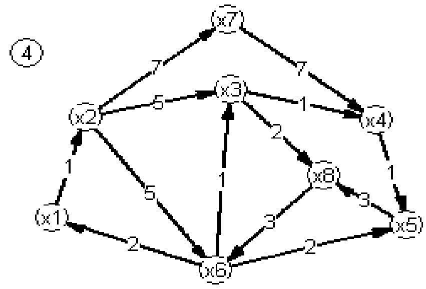
4. Задания для самостоятельного решения

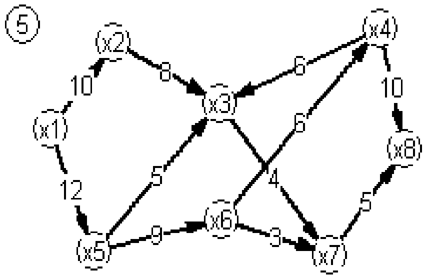
Используя алгоритм Дейкстры и алгоритм Форда-Беллмана, найти кратчайшие пути в графах, изображенных на рисунках:

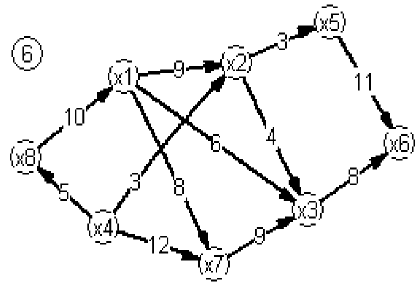




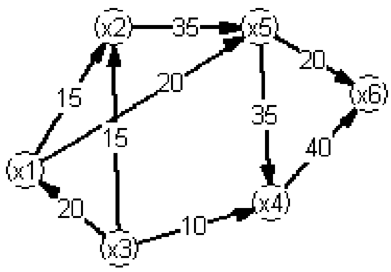




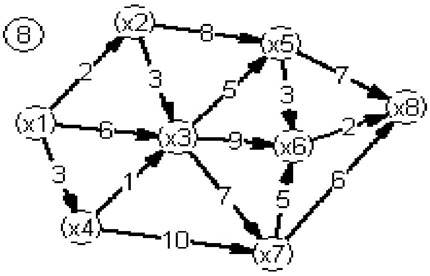




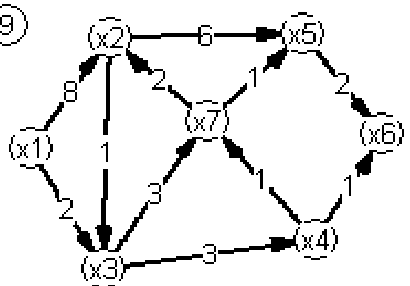
(7)



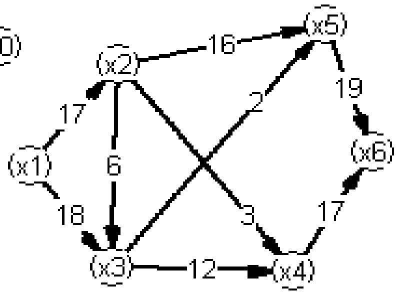
(8)



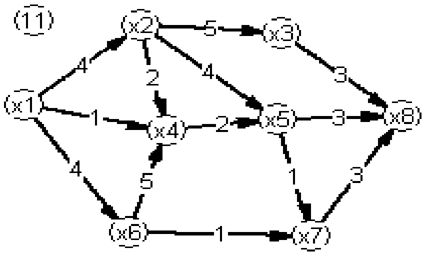
(9)



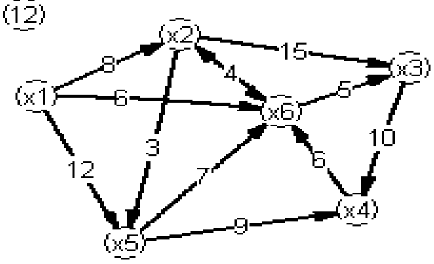
(10)



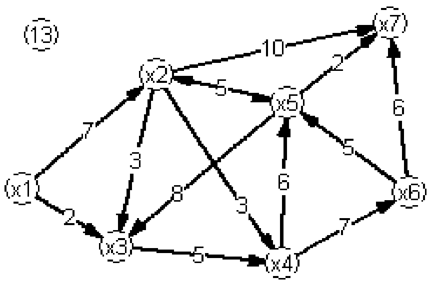
(11)



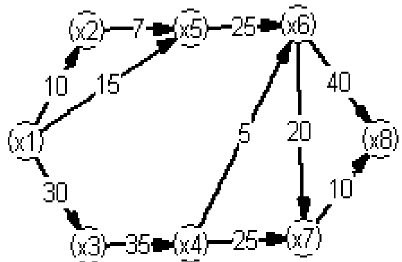
(12)



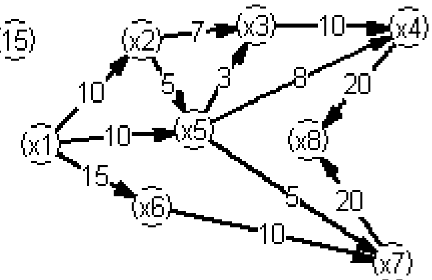
(13)



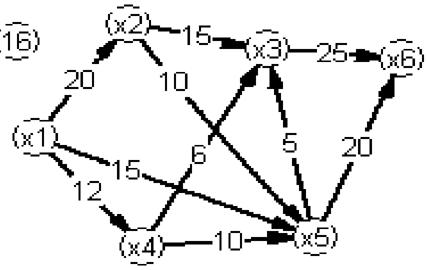
(14)



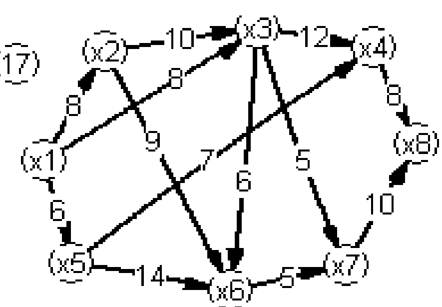
(15)



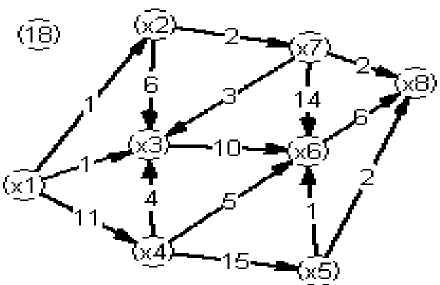
(16)



(17)



(18)



ТЕМА 7. ТРАНСПОРТНЫЕ СЕТИ. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПОЛНОГО ПОТОКА

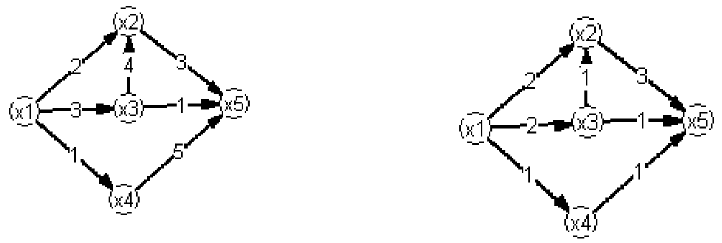
1. Теоретический раздел

Транспортной сетью называется ориентированный граф G ~ (X, A) с множеством вершин $X=\{x_1, ... , x_„)$ и дуг A – $\{a_1, a_2,..., an\}$, для которого выполнены условия:

- существует одна и только одна вершина x_n называемая источником, такая, что $G^{-1}(x_1) = Ø$ (т.е. ни одна дуга не заходит в x_1);
- существует одна и только одна вершина x_n, называемая стоком, такая, что $G(x_n) = Ø$ (т.е. из x_n не исходит ни одной дуги);
- каждой дуге (x, y) поставлено в соответствие число $c(x, y) > 0$ называемое пропускной способностью дуги.

Вершины, отличные от источника и стока, называются промежуточными.

На рис. 14а изображена транспортная сеть с источником x_1 и стоком x_5. У каждой дуги отмечена ее пропускная способность.



а) б)

Рис. 14. Транспортная сеть с источником x_1 и стоком x_5

Функция φ(x, y), определенная на множестве дуг транспортной сети G, называется потоком по транспортной сети G, если:

1. для любой дуги (x, y) функция φ (x, y) - целое неотрицательное число;
2. для любой промежуточной вершины x:
$$\sum_{y\in G^{-1}(x)} \varphi(y,x) = \sum_{y\in G(x)} \varphi(x,y)$$
3. для любой дуги (x, y) выполняется условие $\varphi(x, y) < c(x, y)$.

Значение φ (x, y) на дуге (x, y) называется *потоком* по дуге (x, y). Условия 1 - 3 означают, что поток по дуге - это неотрицательное число, которое не превышает пропускной способности этой дуги и что сумма потоков по дугам, заходящим в промежуточную вершину, равна сумме потоков по дугам, исходящим из нее.

Величиной потока φ по транспортной сети G называется число Ф, равное сумме потоков по всем дугам, заходящим в вершину x_n, то есть:

$$\hat{O} = \sum_{x\in(i^{-1}(x_n))} \varphi(x, x_n)$$

На рис. 14б приведен пример потока по транспортной сети, изображенной на рис. 14а. У каждой дуги указана величина потока по этой дуге. Величина потока Ф по транспортной сети равна 3 + 1 + 1 =5.

Поток φ называется *максимальным*, если величина этого потока Ф принимает максимальное значение по сравнению с другими потоками по транспортной сети G. Задача отыскания максимального потока - одна из наиболее важных в теории транспортных сетей.

Дуга (x, y) транспортной сети G называется *насыщенной*, если поток по ней равен ее пропускной способности, то есть φ(x, y) = c(x, y). Поток φ называется *полным*, если любой путь из x_1 в x_n имеет хотя бы одну насыщенную дугу. Полный поток является некоторым приближением к максимальному потоку, и при нахождении максимального потока удобно начинать с отыскания полного потока.

2. Описание алгоритма нахождения полного потока

Опишем алгоритм отыскания полного потока. Пусть G = (X, A) - транспортная сеть, φ(x, y) — некоторый поток по G (в качестве начального потока можно взять, например, нулевой поток, то есть такой, для которого φ(x, y)=0 для любой дуги (x, y)).

Алгоритм нахождения полного потока.

Шаг 1. Проверить, является ли поток φ полным. Если да, то закончить работу, если нет, то перейти к шагу 2.

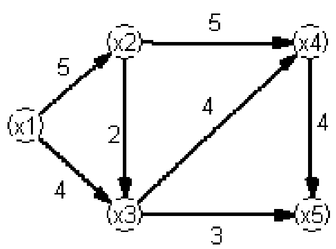
Шаг 2. Удалить из графа G все насыщенные дуги, сохраняя при этом вершины. Полученный граф обозначить G_1.

Шаг 3. Найти в G_1 путь μ из x_1 в x_n, все дуги которого не насыщенные (такой путь найдется, так как поток не полный).

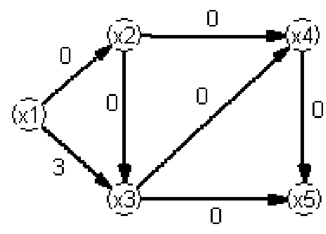
Шаг 4. Увеличивать поток по дугам вдоль пути μ до тех пор, пока какая-нибудь дуга не станет насыщенной, а поток по остальным дугам не менять. При этом опять получится поток по транспортной сети G, величина которого больше на соответствующее число единиц. Перейти к шагу 1.

Пример нахождения полного потока.

Пользуясь алгоритмом, найдем полный поток в транспортной сети, изображенной на рисунке 15а.



а)



б)

в) г)

Рис.15. Нахождение полного потока

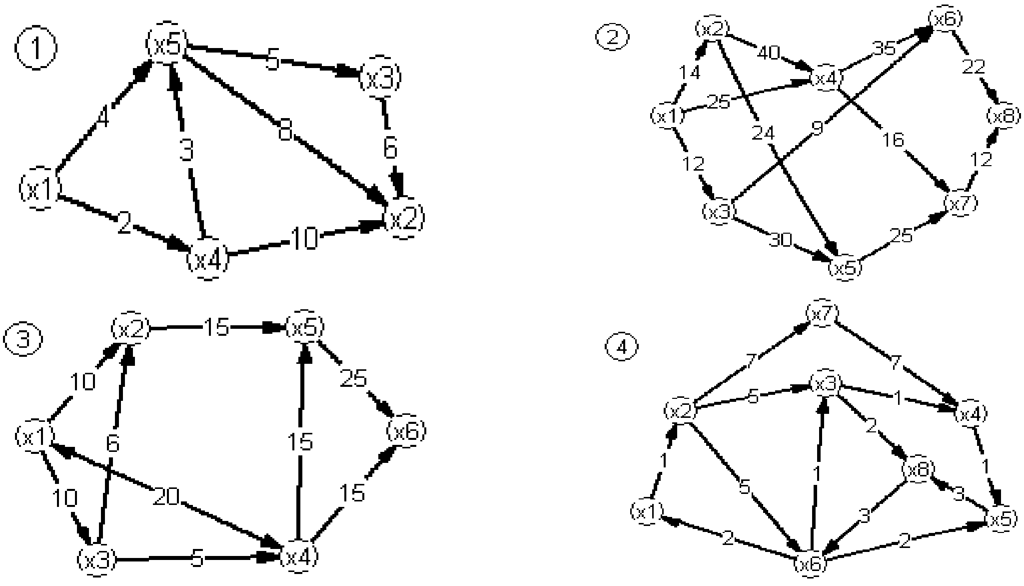
Начинаем с нулевого потока; насыщенных дуг нет (рис 15б)). Выделим путь x_1, x_3, x_5 и увеличим поток вдоль этого пути на 3. Дуга (x_3,x_5) станет насыщенной. Получим поток, изображенный на рис. 15в, который насыщает одну дугу. Удалим ее и построим граф, изображенный на рис. 15г. Выделим в нем путь x_1, x_2, x_4, x_5 и увеличим поток вдоль этого пути на 4. Насыщенная дуга – (x_3,x_5). Удалим ее, поток является полным, так как в соответствующем графе нет пути, соединяющего вершины x_2 и x_5. Величина полного потока равна: $3 + 4 = 7$.

3. Контрольные вопросы

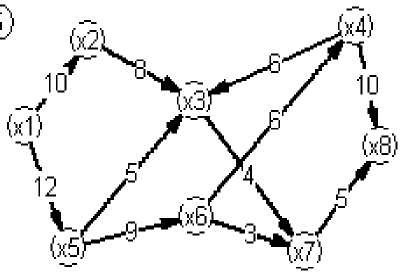
1) Что такое транспортная сеть?
2) Как определить поток по транспортной сети?
3) Как находится полный поток по транспортной сети?
4) Суть максимального потока по транспортной сети?
5) Суть алгоритма нахождения полного потока?

4. Задания для самостоятельного решения

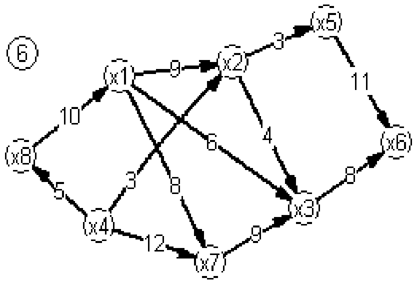
Используя алгоритм нахождения полного потока, найти полный поток для графов, изображенных на рисунках:



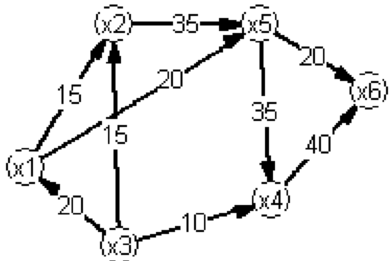
(5)



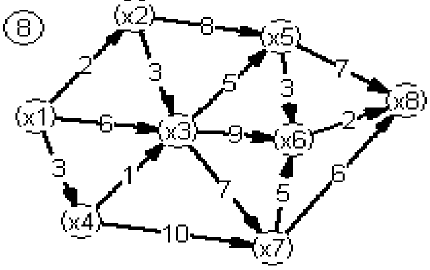
(6)



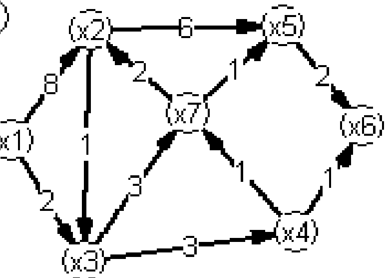
(7)



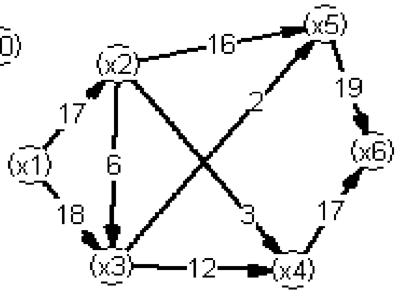
(8)



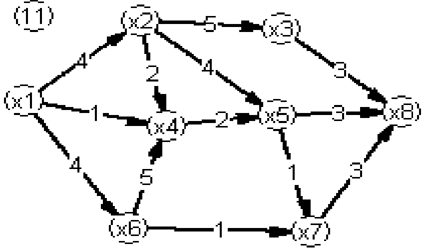
(9)



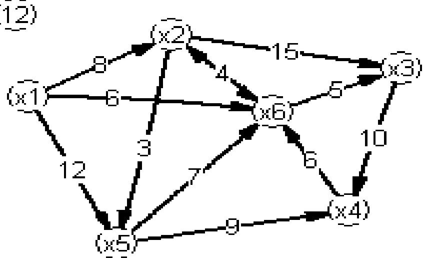
(10)



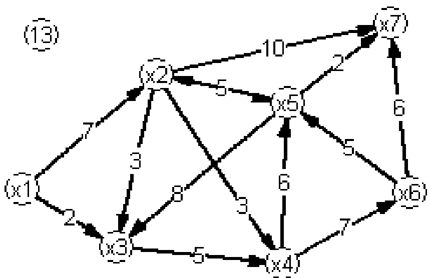
(11)



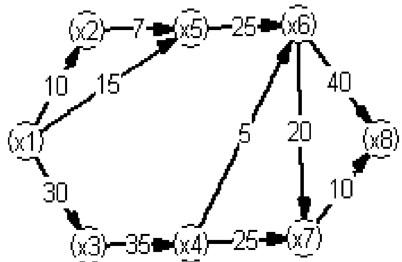
(12)

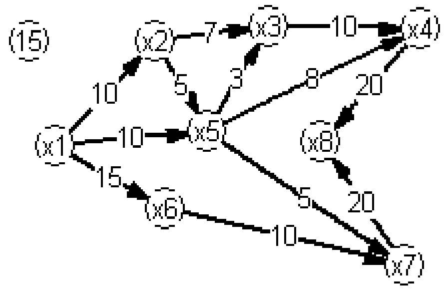


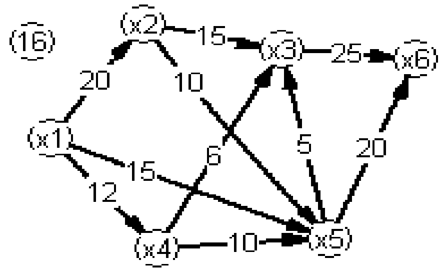
(13)

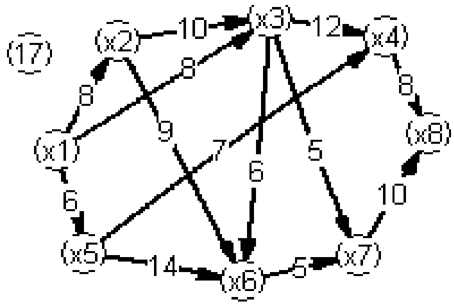


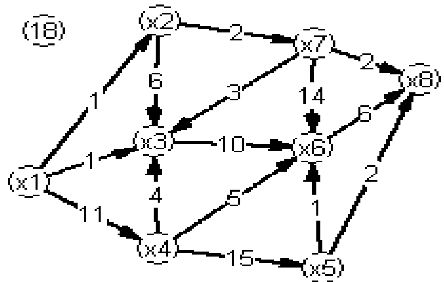
(14)

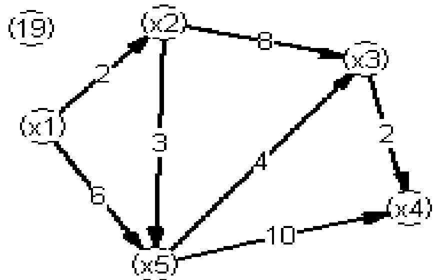


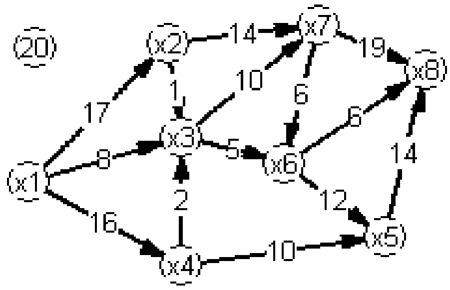

(15)
x1
x2
x3
x4
x5
x6
x7
x8


(16)
x1
x2
x3
x4
x5
x6


(17)
x1
x2
x3
x4
x5
x6
x7
x8


(18)
x1
x2
x3
x4
x5
x6
x7
x8


(19)
x1
x2
x3
x4
x5


(20)
x1
x2
x3
x4
x5
x6
x7
x8

ТЕМА 8. НАХОЖДЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

1. Теоретический раздел

Задача о максимальном потоке является классической и имеет множество применений.

Постановка проблемы: Дан взвешенный ориентированный граф с неотрицательными весами (пропускными способностями). Выделены две вершины: исток S и сток T такие, что любая другая вершина лежит на пути из S в T. Потоком назовем функцию F: V x V с такими свойствами

Ограничение пропускной способности. Поток по ребру не может быть больше его (ребра) пропускной способности.

Антисимметричность. Для каждого ребра (u, v): F(u, v) = -F(v, u).

Сохранение потока. Для каждой вершины (кроме S и T), количество входящего потока (отрицательного) равен количеству исходящего потока (положительного). То есть, алгебраическая сумма потоков для каждой вершины (кроме S и T) равна нулю.

Рассмотрим задачу о коллекционировании монет.

Есть n коллекционеров и m видов монет. Для вступления в клуб, необходимо иметь не меньше одной монеты каждого типа. Вы (у Вас номер 1) можете меняться с коллекционерами имеющимися монетами. Любой коллекционер обменяет свою монету a на Вашу монету b, если у него больше одной монеты типа a и нет ни одной монеты типа b. Вы, в свою очередь, можете нарушать это правило. Нужно набрать как можно больше типов монет по известной ситуации у всех коллекционеров.

Решение:

Построим сеть. Создадим для каждого типа монет по одной вершине. Эти вершины будут соответствовать Вашим монетам. Нужно собрать как можно больше уникальных монет, поэтому проведем ребро пропускной способности 1 в сток из каждой такой вершины. В вершины, соответствующие монетам, которые у Вас есть изначально, проведем ребро, пропускная способность которого равна количеству таких монет у Вас.

Для каждого члена клуба (кроме 1, то есть Вас) заведем по одной вершине. Эта вершина может принимать не более одной монеты, которой у него нет и отдавать не более k-1 монеты, которых у него k (k > 1). Естественно, член клуба отдает одну монету взамен им полученной.

Таким образом, в каждую такую вершину нужно провести ребро пропускной способности 1 из вершин соответствующих монетам, которых нет у этого члена клуба. А из этих вершин нужно провести ребра пропускной способностью ki — 1 в вершину i, соответствующую монетам, которых у члена клуба больше одной. Построенная сеть отражает процессы обмена в клубе. Максимальный поток в такой сети будет равен максимальному количеству монет, которые могут быть собраны Вами.

2. Описание алгоритма нахождения максимального потока

Для нахождения максимального потока используются, например, известный алгоритм Форда-Фалкерсона и его модификации.

Шаг 1. Построить для данного потока φ увеличивающую цепь из x_1 в x_n. Если такой цепи нет, то поток φ - максимальный, иначе перейти к шагу 2.

Шаг 2. Для увеличивающей цепи x1 = v_1, u_1, v_2, u_2, …, v_k, u_k, v_{k+1}= x_n найти значение величины:

$\Delta = \min\limits_{1 \le i \le k} \Delta u_i$, где

$$\Delta u_i = \begin{cases} c(v_i v_{i-1}) - \varphi(v_i v_{i+1}), \text{если } v_{i+1} \in G(v_i) \\ \varphi(v_i v_{i+1}), \text{если } v_{i+1} \in G^{-1}(v_i) \end{cases}$$

Шаг 3. Построить новый поток по следующему правилу: на дугах увеличивающей цепи значение потока по дуге u_i увеличить на Δ если vi+1 е G(v_i) и уменьшить на Δ , если $v_i \in$ G=(v_j). По дугам, не входящим в эту цепь, значение потока не менять и перейти к шагу 1.

Пример нахождения максимального потока.

Пользуясь алгоритмом, найдем полный поток в транспортной сети, изображенной на рис. 16а.

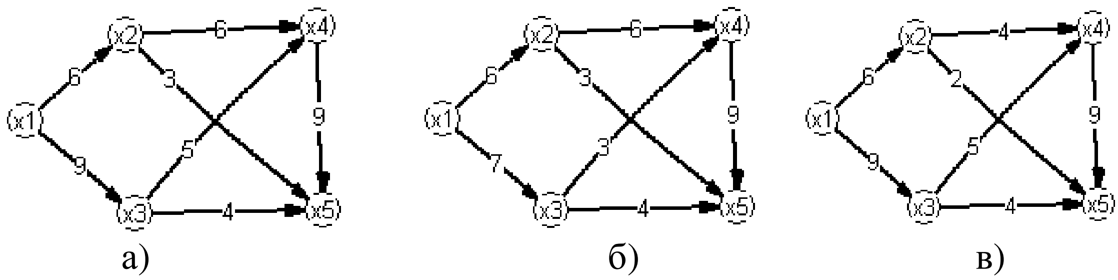


Рис.16. Нахождение максимального потока

Шаг 1. В качестве начального потока выберем полный поток (рис 12.б)).

Шаг 2. Выберем увеличивающую цепь с вершинами x_1, x_3, x_4, x_2, x_5 и соответствующими дугами. При этом Δ = min(9-7, 5-3, 6, 3-0)=2.

Шаг 3. Изменим поток, увеличив его величину на 2 (рис 12.в)). Больше увеличивающих цепей нет. Следовательно, построенный поток является максимальным; его величина равна 9 + 2 + 4 = 15.

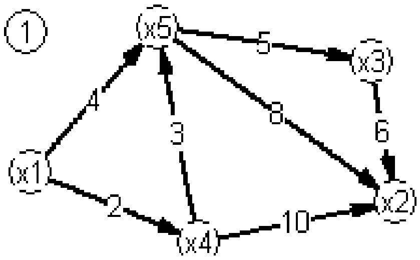
3. Контрольные вопросы

1) Что такое максимальный поток?
2) Каковы варианты разрешения задачи о коллекционировании монет?
3) Суть алгоритма Форда-Фалкерсона?

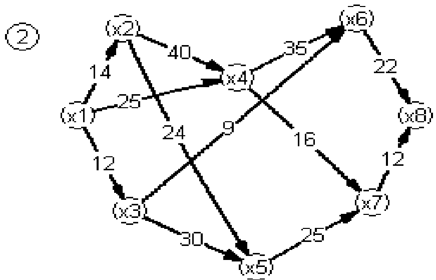
4. Задания для самостоятельного решения

Используя алгоритм Форда-Фалкерсона, найти максимальный поток в графах, изображенных на рисунках:

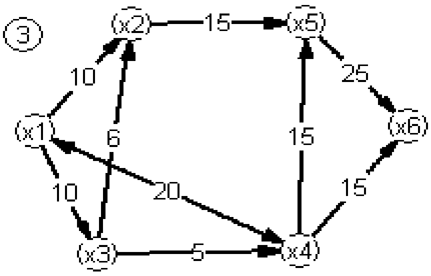
1



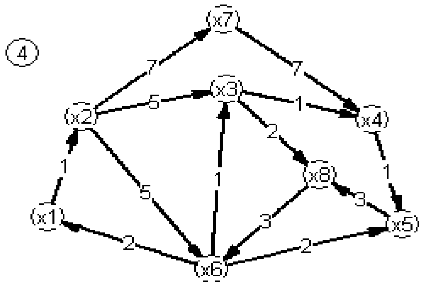
2



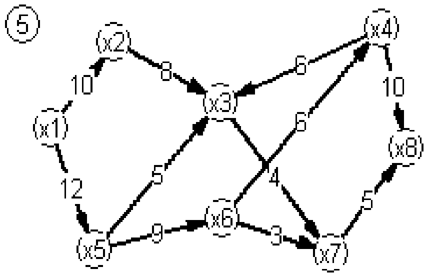
3



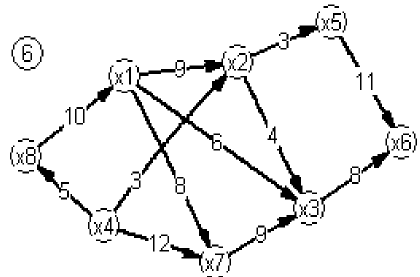
4



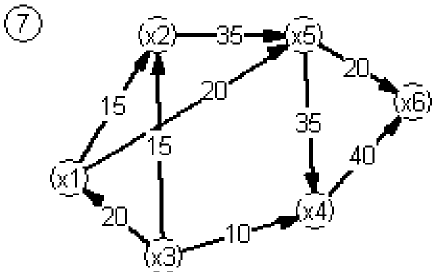
5



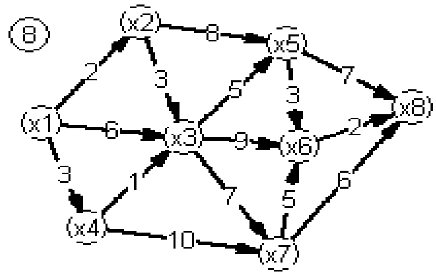
6



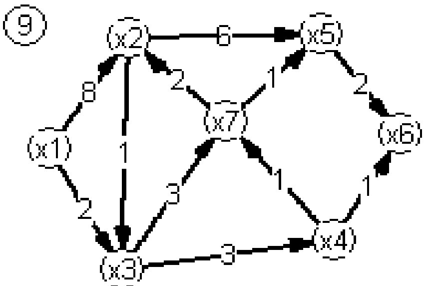
7



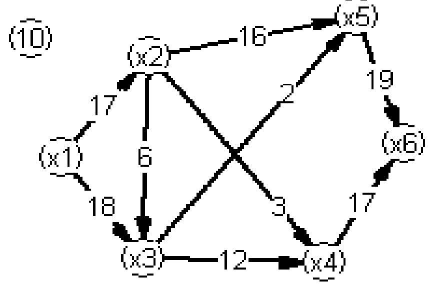
8



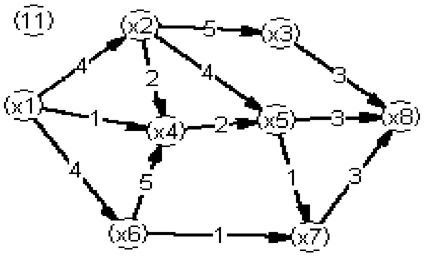
9



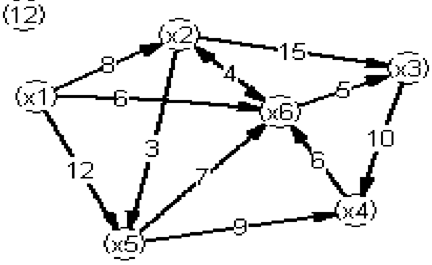
10



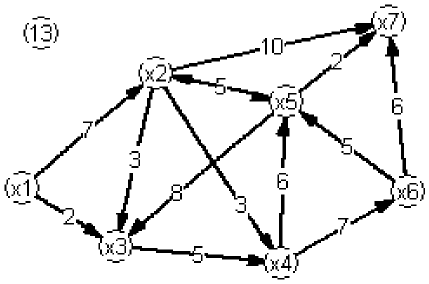
(11)



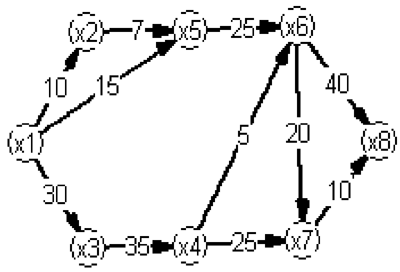
(12)



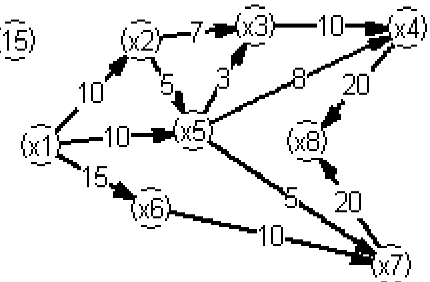
(13)



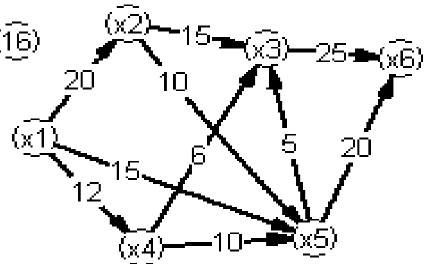
(14)



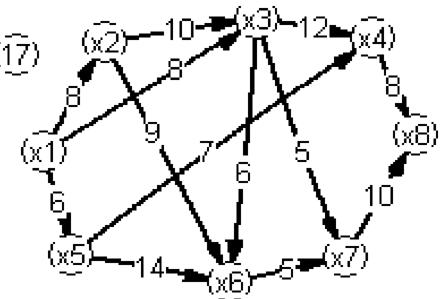
(15)



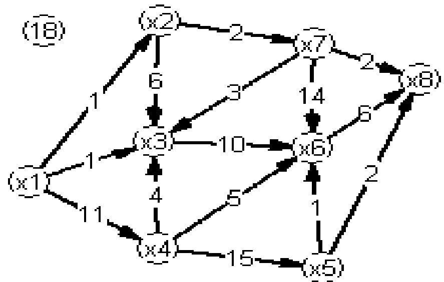
(16)



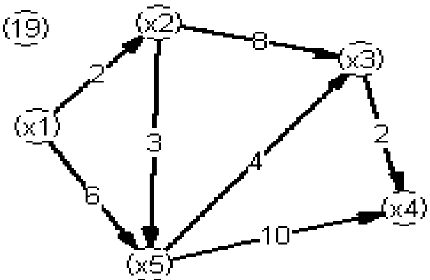
(17)



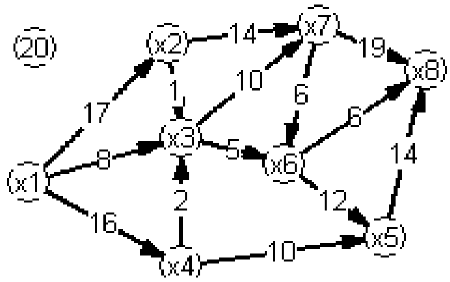
(18)



(19)



(20)



ЛИТЕРАТУРА

1. Аляев Ю. А. Дискретная математика и математическая логика: Учебник/ Ю.А. Аляев, С.Ф. Тюрин. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 368 с.
2. Асанов М. О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. – Ижевск: ННЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 362 с.
3. Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Дискретная математика: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - 3-е изд., стереотип. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744.
4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005 –416. с.
5. Захарова Л. Е. Алгоритмы дискретной математика: Учебное пособие.- Московский гос. институт электроники и математики. М., 2002. – 120 с.
6. Иванов Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Учеб. пособие/ Б. Н. Иванов. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003 – 282 с.
7. Кулаков Ю. В., Шамкин В.Н. Дискретная математика: Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 80 с.
8. Лавров И. А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — 5-е изд., исправл. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 256 с.
9. Макоха А. Н., Сахнюк П. А., Червяков Н. И. Дискретная математика: Учеб. пособие. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 368 с.
10. Мальцев Ю. Н., Петров Е.П. Введение в дискретную математику: Учебное пособие. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 1997. – 135 с.
11. Москинова Г. И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: Учебное пособие. – М.: Логос, 2000. – 240 с.
12. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2000. – 301 с.
13. Плотников А. Д. Дискретная математика: учеб. пособие /А.Д. Плотников.– М.: Новое знание, 2005. – 288 с.
14. Харитонова Е. В. Графы и сети: Учебное пособие/ Е.В. Харитонова. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – 92 с.
15. Шевелев Ю. П. Дискретная математика, Ч.1: Теория множеств. Булева алгебра: Учебное пособие. – Томск: Гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2003. – 118 с.
16. Шевелев Ю. П. Дискретная математика, Ч.2: Теория конечных автоматов. Теория графов: Учебное пособие. – Томск: Гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2003. – 130 с.
17. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.А. Садовничего.– 4-е изд., стер. – М.: Высш шк.; 2003.– 484 с.

Учебное издание

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум

Редактор *Н.В. Чернега*
Компьютерная верстка *Н.В. Чернега*

Формат 60×90/16.
Уч.-изд. 3,4 п.л. Тираж 10 экз.