

ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Т.Г.ШЕВЧЕНКО
Физико-технический институт
Инженерно-технический факультет
Кафедра индустриальных технологий и машиноведения

Юрченко Е.В., Юрченко О.Е.

**Методическое пособие
для решения задач по дисциплине
«Сопротивление материалов»
1 часть**

Тирасполь

2025

УДК 539.3/6

ББК 34.415

Юрченко Е.В. доц., канд.техн. наук

Юрченко О.Е. ст.преп.

Рецензенты: Клинк Г.В. – к.т.н., доцент, Аграрно-технологический факультет
ПГУ им.Т.Г.Шевченко

Бурменко Ф.Ю. -к.т.н., профессор, Физико-технический институт, инженерно-
технический факультет ПГУ им.Т.Г.Шевченко

Содержание.

1.Глава 1. Раастяжение и сжатие прямого ступенчатого бруса.....	4
2. Глава 2. Геометрические характеристики плоских сечений.....	24
3. Глава 3. Кручение бруса.....	40
4.Список литературы	53

Введение.

В процессе изучения дисциплины «Сопротивление материалов» особую роль играет приобретение навыков решения задач. Эта часть дисциплины достаточно сложна для самостоятельного изучения и для облегчения этого процесса создано данное руководство.

ГЛАВА 1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА

В задачах на растяжение и сжатие ступенчатых стержней требуется определить прочность и жесткость стержня, и выявить конкретную область в которой внутренние напряжения будут превышать допускаемые, что приведет к разрушению либо недопустимой деформации стержня. Для успешного решения задач направленных на расчет прочности и жесткости прямых брусьев при растяжении или сжатии необходимо ознакомиться с основным принципом метода сечений

Суть метода заключается в следующем: мысленно разрезаем стержень на две части и также мысленно отбрасывании одну из частей, заменяя действие этой части на стержень одной, неизвестной пока силой силой N . Поскольку стержень находится в состоянии равновесия под действием приложенных внешних сил, то и оставшаяся после мысленного отрезания часть также будет находиться в состоянии равновесия. Следовательно, можно составить уравнение равновесия в котором сумма всех внешних приложенных к рассматриваемой части стержня сил, а также силы N - мысленно приложенной к месту сечения должна быть равна нулю. Так, производя последовательные отсечения частей стержня и отбрасывая одну часть, можно определить значение внутренних сил, возникающих в сечениях. Для решения задач сначала необходимо ступенчатый стержень разбить на участки исходя из того, что внутренние напряжения по всей длине участка не должны изменяться. Для этого основными требованиями является изменения на всей протяженности участка значения внешних сил, либо изменений сечения, или же одновременного изменения значения внешних, приложенных к стержню сил и площади сечения

Общий алгоритм решения задач на растяжение-сжатие ступенчатых стержней .

1. Для решения задачи на растяжение-сжатие ступенчатых стержней изначально следует изобразить на листе исследуемый стержень причем лучше будет если расположить его горизонтально даже если на предложенной схеме он располагается вертикально и неизменность его положения специально не оговаривается условиями. Это обусловлено

необходимостью построения эпюор внутренних сил, напряжений и удлинения-сжатия, которые нагляднее строить в горизонтальном виде

Место жесткой заделки следует расположить слева. Таким образом в начале практики у студента будет формироваться система решения такого вида задач, а впоследствии, когда придет глубокое понимание методики решения, можно отступить от этого правила.

Перед решением задачи первоначально следует определиться с положением оси координат. Для случая растяжения- сжатия используется только одна ось X т.к. все продольные силы, приложенные к стержню, располагаются обычно либо непосредственно на оси стержня, либо направлены параллельно оси стержня. Положительное направление оси координат в общем может быть выбрано студентом исходя из личных предпочтений. Но рекомендуется выбирать положительное направление координатной оси – в направлении жесткой заделки. В этом случае при мысленном рассечении стержня есть смысл рассматривать отсеченную правую часть, а силу, которая заменит влияние отсеченной левой части и будет являться внутренней силой N, при этом также следует направлять в сторону жесткой заделки, т.е. влево.

Как известно при каждом типе нагружения существует правило знаков. *Для данного типа задач правило знаков таково – если происходит растяжение стержня либо его участка - то внутренняя продольная сила N при этом будет положительной, если сжатие - то внутренняя продольная сила N отрицательна.*

Правило знаков никакого физического смысла не имеет, оно способствует исключительно получению единобразия в расчетах производимых различными индивидуумами, примерно так же как решение о правостороннем или левостороннем автомобильном движении в разных странах – не важно по какой стороне шоссе двигаются вперед автомобили, главное – они достигают цели. Но тем не менее правила знаков в расчетах должны выполняться неукоснительно.

Поэтому в процессе отсечения левой части стержня при приложении внутренней силы N к оставшейся части сечению силу N следует направлять влево. Таким образом, эта сила N будет способствовать растяжению отсеченного участка и согласно правилу знаков в уравнении равновесия будет положительной. Но в процессе решения уравнения равновесия может оказаться, что сила N окажется отрицательной – это означает только то, что первоначальное направление силы N было выбрано неверно и настоящее направление - вправо, а сама сила N отрицательна. Важно помнить, что это не является ошибкой т.к. внешних сил расположенных справа от сечения на практике

может оказаться очень много и сразу задать правильное направление внутренней силы N весьма проблематично. В случае, если знак внутренней продольной силы N получится отрицательным расчет продолжается учитывая этот фактор и эта сила отображается на эпюре внутренних сил как отрицательная, лежащая ниже оси эпюры.

Далее приводится пример решения задачи на растяжение-сжатие ступенчатого стержня.

Пример решения задачи №1.

Дано:

Для расчета представлен ступенчатый стержень (рис.1.1) с площадями сечения: $A_1=2,7 \text{ см}^2$; $A_2=3,1 \text{ см}^2$; $A_3=5,4 \text{ см}^2$

нагруженный силами $F_1 = 45 \text{ кН}$; $F_2=30 \text{ кН}$; $F_3=80 \text{ кН}$

с длинами ступеней: 1 ступень $0,4 \text{ м}$; 2 ступень $0,2 \text{ м}$; 3 ступень $0,3 \text{ м}$

Стрежень выполнен из стали с модулем продольной упругости $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

С значением $\sigma_{\text{f}}=250 \text{ МПа}$

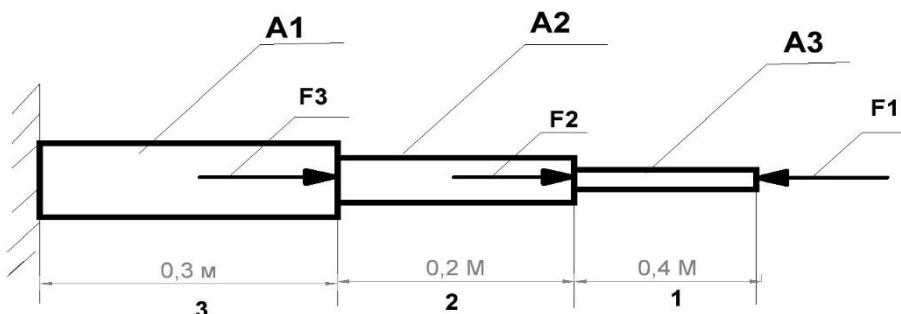


Рисунок 1.1 Расчетная схема растяжения-сжатия ступенчатого стержня.

Первый шаг – выбираем направление координатной оси X -ось направим влево в сторону заделки.

Второй шаг - Разбиваем брус на участки так, чтобы отношение F/A на каждом участке оставались неизменными.

Можно считать, что граница участка будет образована в следующих случаях:

1) в точке приложения внешней силы – следовательно от этой точки и далее изменится значение продольной силы, а значит изменится и соотношение F/A

2) в точке изменения размеров поперечного сечения – изменится значение площади сечения стержня и следовательно опять изменится соотношение F/A

3) в точке, в которой совпадают изменения размеров поперечного сечения и одновременно изменения продольной внешней силы F – тогда изменится значение

площади сечения стержня и изменится значение продольной силы - следовательно опять изменится соотношение F/A

4) в точке, в которой происходит изменение материала бруса если такая существует – для этой точки произойдет изменение B_i и E , а следовательно, изменятся параметры допустимых напряжений и относительное удлинение каждого участка. Данная система на практике маловероятна, но необходимо о её существовании знать.

В нашем случае – границы разбиения стержня совпадают с точками изменения сечений стержня и точками приложенных сил. Номера участков в таком случае совпадают с порядковыми номерами ступеней стержня, приведенных в нижней части рисунка 1 – для данной расчетной схемы – это три участка (1,2,3).

Третий шаг – начинаем использовать способ сечений – производим мысленное отсечение на участке 1 – место сечения не имеет значения и может быть проведено в любой точке, но обязательно относящейся к участку 1 не выходя на границы участка. Всю правую часть оставляем, левую мысленно отбрасываем и заменяем её действие одной внутренней силой, которую обозначим N_1 , приложенной в продольном направлении в сторону жесткой заделки стержня в центре сечения и получаем следующую картину – см.рисунок 1.2.

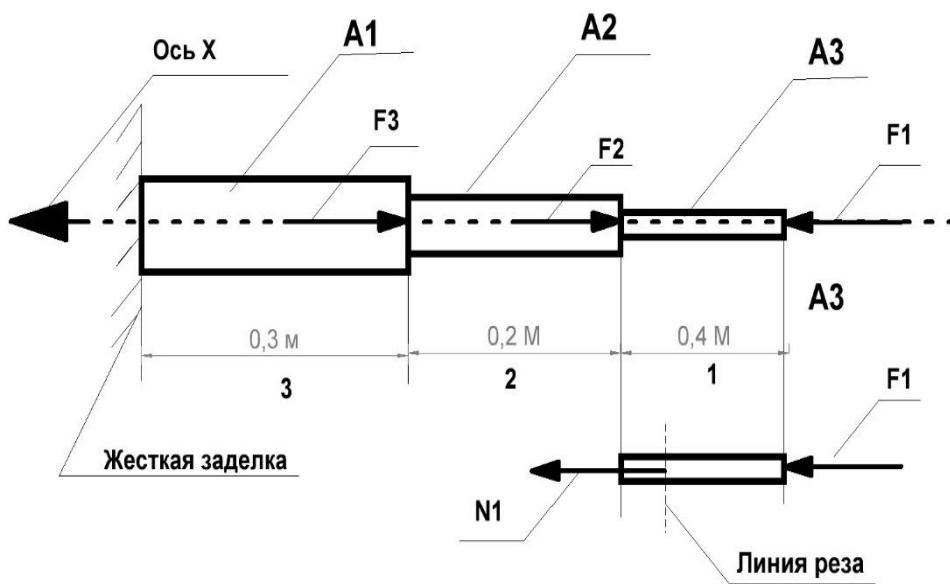


Рисунок 1.2 Схема для определения внутренней силы N_1 на 1-ом участке

Исходя из того, что сам жестко заделанный стержень под действием внешних сил находится в состоянии равновесия, то и вырезанная часть стержня с приложенной внутренней силой N_1 компенсирующая действие отсеченной части стержня тоже

должна находиться в состоянии равновесия, составляем уравнение равновесия первого участка: поскольку мы направили силу N_1 в направлении жесткой заделки, иными словами приняли, что она положительна, поскольку направление её совпадает с направлением оси X, и направление внешней силы F_1 тоже совпадает с направлением оси X получим :

$$\sum X = N_1 + F_1 = 0 \text{ тогда } N_1 = -F_1 = -45 \text{ кН.}$$

Значение силы N_1 получилось отрицательным следовательно направление её действия изначально было выбрано неверно, но это не является ошибкой, это часть методики решения такого рода задач.

Далее производим следующее сечение – в любом месте на протяжении участка 2, но не выходя на границы участка - см рисунок 1.3.

Опять предполагаем, что внутренняя сила N_2 , компенсирующая действие левой, отброшенной части стержня положительна, т.е. направлена по оси X. В таком случае уравнение равновесия правой части стержня будет выглядеть так:

$$\sum X = N_2 - F_2 + F_1 = 0$$

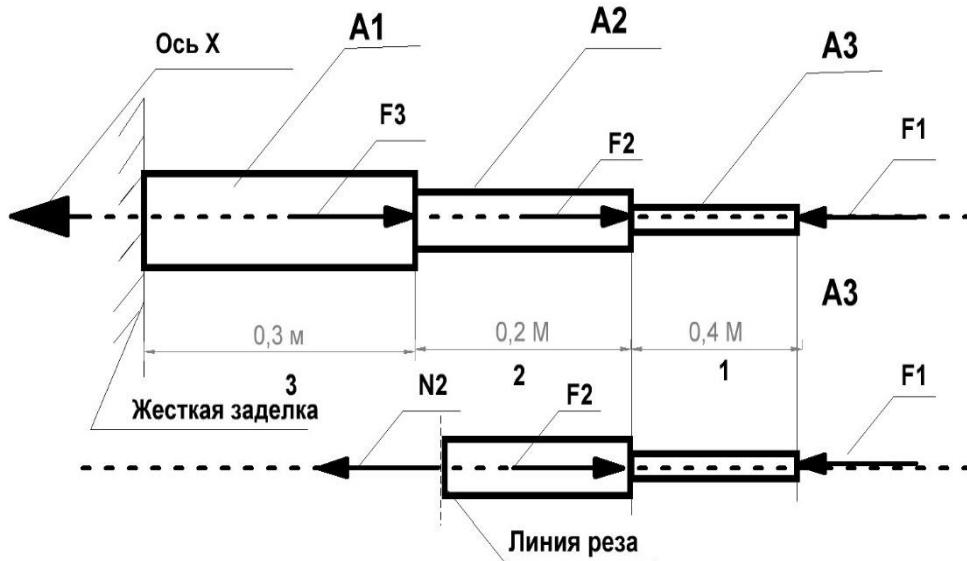


Рисунок 1.3 Схема для определения внутренней силы N_2 на 2-ом участке

Внешняя приложенная сила F_2 направлена против оси X поэтому в уравнении она имеет знак «минус».

Тогда $N_2 = F_2 - F_1 = 30 - 45 = -15$ кН – опять внутренняя сила отрицательная, что в последствии отразим на эпюрах внутренних сил.

Далее производим последнее сечение – в любом месте на протяжении участка 3, но не выходя на границы участка -см рисунок 1.4.

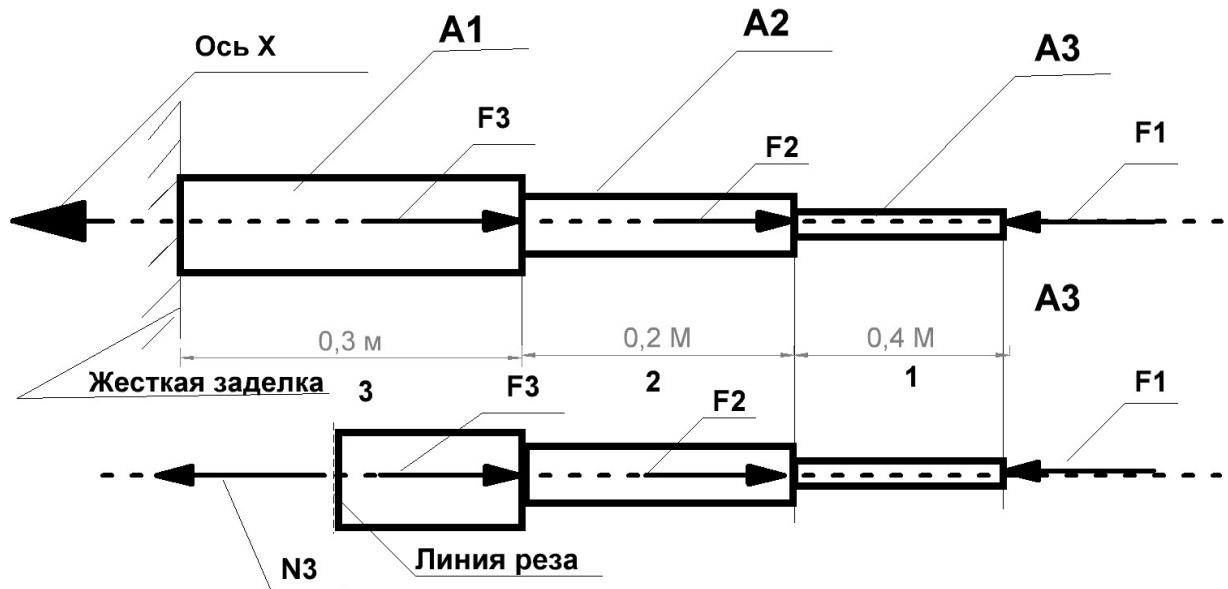


Рисунок 1.4 Схема для определения внутренней силы N_3 на 3-ем участке

Ход процесса повторяется, внутреннюю силу N_3 направляем по оси X и получаем уравнение равновесия системы:

$$\sum X = N_3 - F_3 - F_2 + F_1 = 0 \text{ отсюда } N_3 = F_3 + F_2 - F_1 = 65 \text{ кН}$$

В данном случае внутренняя сила положительна, что и отразится при построении эпюр.

Четвертый шаг предполагает построение эпюры внутренних сил. Эпюра внутренних сил – это графическое изображение распределения внутренних продольных сил по длине бруса, с помощью которой можно определить место приложения наибольшей силы и подготовить материал для построения эпюры напряжений. Сама по себе эпюра сил не дает информации о прочности стержня, о возможных «слабых» участках, так как на ней не фигурирует площадь сечения – один из основных параметров обеспечения прочности стержня при растяжении-сжатии. Эпюра внутренних сил строится по участкам выделенным в начальной части решения задачи см рисунок 1.5. Внутренние силы на каждом участке откладываются от базисной линии эпюр – если значение сил положительное – то вверх над базисной линией эпюр, если отрицательные – вниз под базисной линией эпюр. Эпюра штрихуется тонкими вертикальными линиями и в кружке ставится знак эпюры – плюс если она сверху над

базисной линией, и минус – соответственно если под базисной линией. Построение эпюры в ответственных документах должно производиться строго в масштабе. Сбоку от тела эпюры у линий обозначающих границы участков ставятся численные значения эпюр.

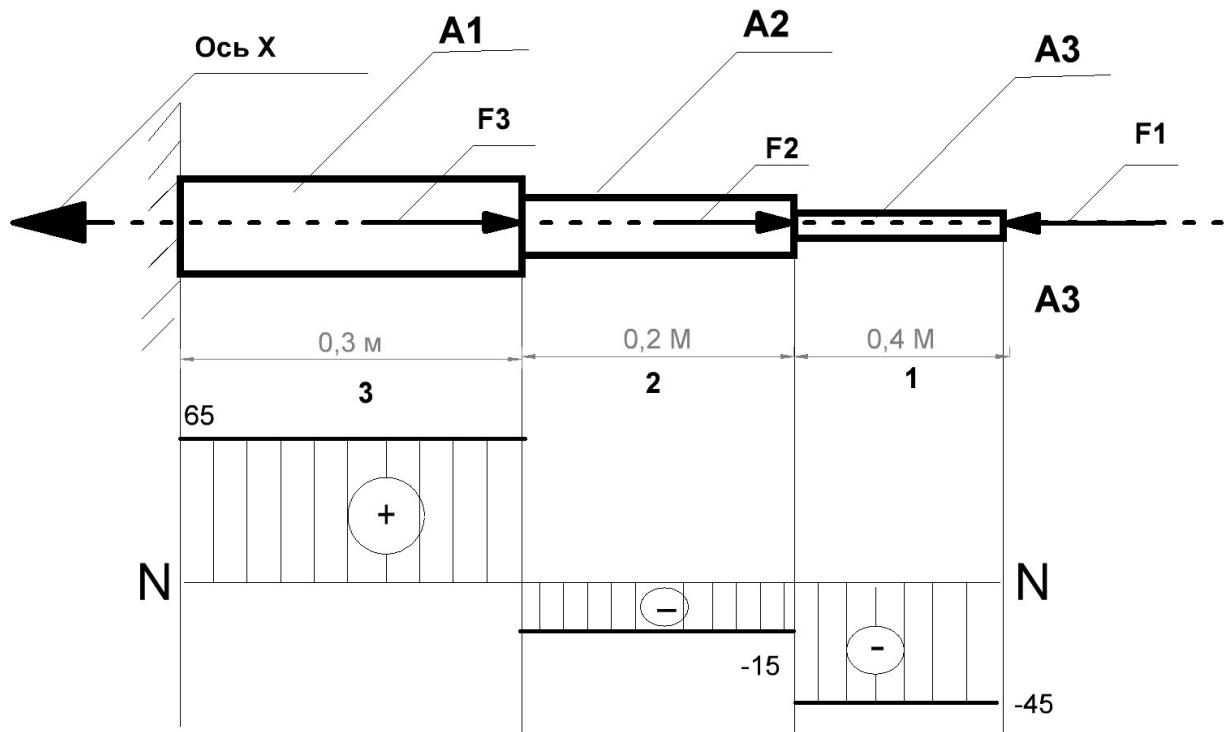


Рисунок 1.5 Построение эпюр внутренних сил.

Пятый шаг определяет построение эпюры напряжений. Для того, чтобы построить эпюру напряжений необходимо сначала определить нормальные напряжения действующие по всем трем участкам. Эти показатели рассчитываются по формуле

$$\sigma_i = N_i / A_i \quad (1.1)$$

На данном этапе для каждого участка мы имеем значение внутренних сил и площади сечения. Используя значения внутренних сил снятое с эпюры и данные по площадям сечения находим нормальные напряжения соответствующие каждому участку. Зная величину нормальных напряжений мы можем сравнить её с допустимым значением напряжений для конкретной марки стали из которой будет изготовлен брус и таким образом можем оценить его прочностные показатели.

Определение напряжений для каждого из участков:

Первый участок :

$$\sigma_1 = N_1 / A_1 = -45 \cdot 10^3 / 2,7 \cdot 10^{-4} = -16,67 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = -16,67 \cdot 10 \cdot 10^6 \text{ Па} = -166,7 \text{ МПа}$$

Поскольку внутренняя сила выражена в кН то в расчете переводим в ньютоны - $45 \cdot 10^3$ Н

Аналогично, т.к. площадь сечения дана в см² при переводе в м² получаем $2,7 \cdot 10^{-4}$ м²
Второй участок :

$$\sigma_2 = N_2 / A_2 = -15 \cdot 10^3 / 3,1 \cdot 10^{-4} = -4,83 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = -48,3 \text{ МПа}$$

Третий участок :

$$\sigma_3 = N_3 / A_3 = 65 \cdot 10^3 / 5,4 \cdot 10^{-4} = 12,04 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 120,4 \text{ МПа}$$

На основании полученных данных строится эпюра напряжений –
см рисунок 1.6.

На эпюре видно, что форма эпюры напряжений довольно близко повторяет форму эпюры внутренних продольных сил. Но это не является решающим критерием оценки правильности расчета, могут встречаться и некоторые отличия форм. По данным эпюры нормальных напряжений самый напряженный участок – это первый, где напряжения сжатия составляют 166,7 Мпа – он и будет самым опасным с точки зрения прочности.

Шестой шаг Коэффициент запаса прочности.

Согласно гипотез дисциплины «Сопротивление материалов» металл стержня считается однородным и изотропным. Но на самом деле редко, но встречаются ситуации, когда в глубине металла встречаются газовые раковины, пористость и неметаллические включения.

Все эти образования являются концентриаторами напряжений и при нагружении стержня могут стать источниками образования микротрещин, которые при дальнейшем развитии могут привести к разрушения стержня. Для того, чтобы нивелировать данное явление вводится понятие запаса прочности

Запас прочности – отношение предельно допустимой теоретической нагрузки к нагрузке, при которой возможна безопасная работа конструкции с учетом случайных перегрузок, непредвиденных внутренних.

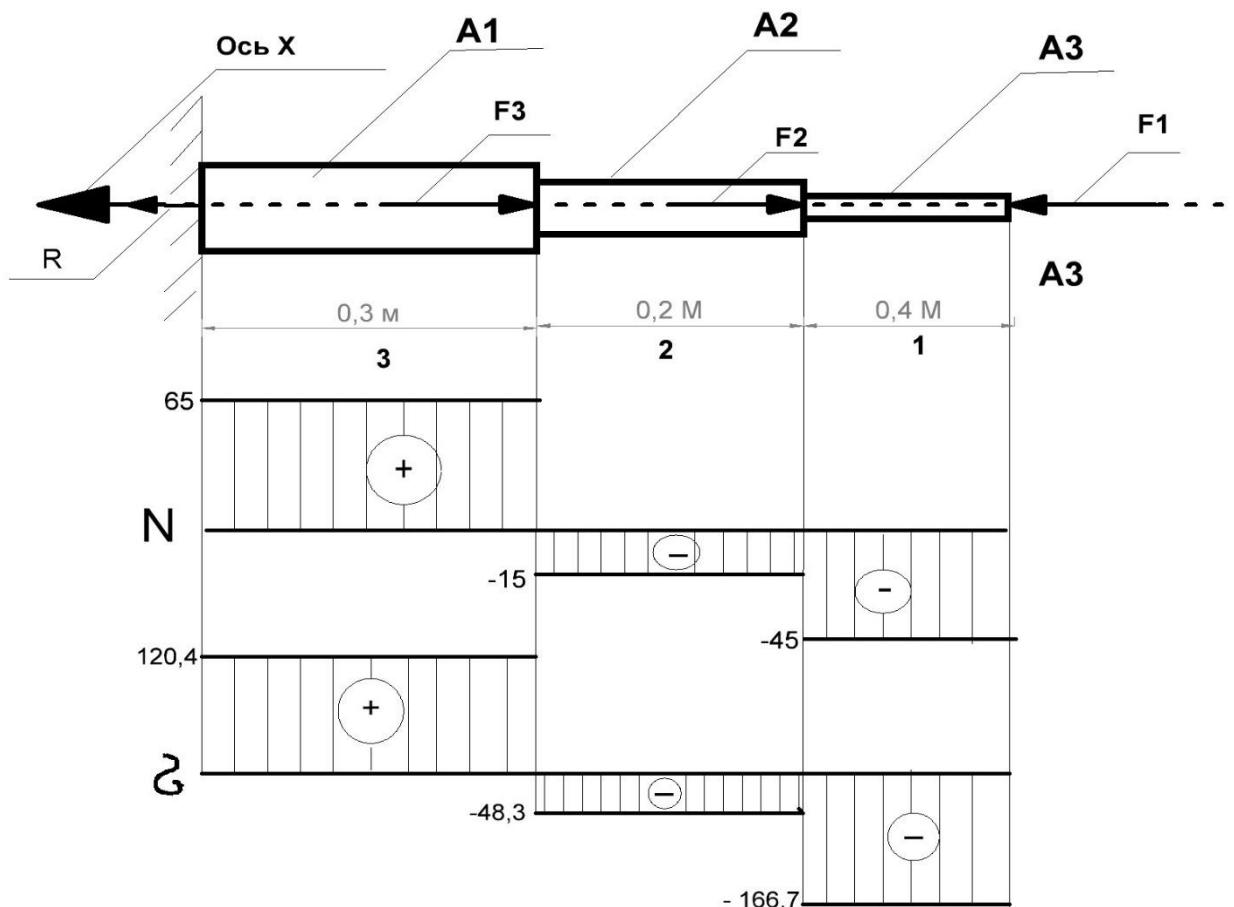


Рисунок 1.6 Построение эпюор нормальных напряжений на основании данных эпюры сил.

Запас прочности численно выражается в виде нормативного коэффициента запаса прочности, обозначается буквой n - диапазон значений которого для каждой отрасли промышленности или строительства выбирается индивидуально с учетом специфических особенностей. В целом на диапазон значений коэффициента запаса прочности влияют следующие факторы: уровень долговременности эксплуатации конструкции, уровень условий эксплуатации – наличие коррозионного износа, радиационного облучения, агрессивной среды и т.п., сюда же входят неточности при задании внешних нагрузок и некорректность проектирования расчетной модели. Кроме того, на диапазон значений коэффициента запаса прочности влияет физические свойства металла – например для отрасли машиностроения приняты следующие правила. Для пластичных металлов за критерий прочности принимается предел текучести поскольку при достижении этого порога напряжений растет деформация металла без увеличения внешней нагрузки, т.е. металл «течет». В этом случае опасность представляют возможные значительные деформации детали, например удлинение стержня более допустимого по конструктивным показателям, которые могут привести к аварийному заклиниванию

механизма. Для таких материалов нормативный коэффициент запаса прочности лежит в диапазоне $1,3 < [n_t] < 2,2$

Индекс «т» говорит о том, что за основу в данном случае взят предел текучести, а квадратные скобки извещают что в данном случае коэффициент нормативный.

Для твердых и хрупких металлов нормативный коэффициент запаса прочности лежит в диапазоне $3 < [n_b] < 5$. Индекс «в» говорит о том, что за основу в данном случае взят предел прочности.

В процессе расчетов конкретный коэффициент запаса прочности выбирается из диапазона соответствующего прочности заданного металла – либо пластичный металл либо твердый, прочный но хрупкий. Чем выше нагрузка, чем более ответственна данная деталь, чем выше цена аварии при возможной поломке этой детали, тем более высокое значение коэффициента запаса прочности принимается. Но тем не менее значение этого коэффициента не должно выходить за рамки приведенных выше диапазонов. Поскольку в условии задачи приведен параметр

σ_t , следовательно металл стержня пластичный и значит нам следует руководствоваться коэффициентом запаса прочности лежащем в диапазоне $1,3 < [n_t] < 2,2$.

Для информации:

При $n = 1$ вероятность невыхода детали из строя 50 %;

При $n = 1,2$ вероятность невыхода детали из строя 90 %;

При $n = 1,5$ вероятность невыхода детали из строя 99 %;

При $n = 2$ вероятность невыхода детали из строя 99,9 %.

При расчете стержней или стержневых конструкций на прочность после построения эпюра производится расчет на проверку прочности стержня, который заключается в том, что при известных напряжениях на каждом участке, а также при данном пределе текучести выбранного материала определяется коэффициент запаса прочности , который затем будет сравниваться с нормативным.

В некоторых случаях значение внутренней силы получается отрицательным, т.е. сжимающим согласно правила знаков. Для большинства металлов предел текучести при сжатии и предел текучести при растяжении разные, но существуют металлы, у которых эти показатели одинаковы. Для упрощения процесса обучения, поскольку расчет ведется в учебных целях примем, что предел текучести при растяжении и предел текучести при сжатии одинаковы и напряжения на участках берутся по модулю не учитывая сжат ли этот участок или растянут. Но в ответственных расчетах всегда необходимо помнить и учитывать то, что при растяжении и сжатии предел текучести может быть разным. Тогда:

Для первого участка: $n_{t1} = \sigma_t / |\sigma_1| = 250 / 166,7 = 1,49$

Для второго участка: $n_{t2} = \sigma_t / |\sigma_2| = 250 / 48,3 = 5,18$

Для третьего участка: $n_{t3} = \sigma_t / |\sigma_3| = 250 / 120,4 = 2,08$

Исходя из нормативного диапазона $1,3 < [n_t] < 2,2$ получаем:

Для первого участка: коэффициент запаса прочности лежит в пределах нормативного диапазона $n_{t1} = 1,49$, следовательно прочность первого участка вполне обеспечена.

Для второго участка: $n_{t2} = 5,18$ -коэффициент запаса прочности лежит за пределами нормативного диапазона следовательно прочность второго участка будет не только обеспечена, но и излишней. Это приведет к перерасходу металла и как следствие повышению себестоимости всего механизма и снижению его конкурентоспособности. Кроме того существенная излишняя масса детали может повлиять и на кинематические показатели узла – скорости перемещения, ускорения и т.п.

Для третьего участка: коэффициент запаса прочности лежит в пределах нормативного диапазона $n_{t1} = 2,08$, следовательно прочность третьего участка вполне обеспечена.

В случае неудовлетворительного результата при определении прочности обычно производят перерасчет площади опасного сечения исходя из выбранного из нормативного диапазона коэффициента запаса прочности. Возможно конечно, вместо площади сечения изменять нагрузку, но как правило этого не делается т.к. нагрузка задается исходя из показателей функционирования всего механизма и изменять её – значит пересчитывать все звенья механизма заново, что крайне нецелесообразно.

Что касается второго участка – следует произвести перерасчет площади поперечного сечения исходя из выбранного коэффициента запаса прочности.

Предположим, что данный стержень выполняет достаточно ответственную операцию и примем коэффициент запаса прочности $[n_t] = 2$. Находим допустимые напряжения – это максимальные напряжения, которые данный материал может выдерживать без разрушения или остаточных деформаций.:

$$[\sigma] = \sigma_t / [n_t] = 250 / 2 = 125 \text{ МПа}$$

Тогда исходя из основной формулы

$\sigma = N / A$ получим значение площади сечения:

$$A_2 \geq |N_2| / [\sigma]$$

$$A_2 \geq 15 \cdot 10^3 / 125 \cdot 10^6 = 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 1,2 \text{ см}^2$$

По результатам расчета получено значение площади сечения второго участка при котором будет выполняться условие прочности стержня с коэффициентом запаса

прочности $[n_t] = 2$. Дальнейшие шаги по поводу изменений в стержне 2 могут быть следующими: либо мы изменяем площадь сечения второго участка стержня согласно расчета и тогда придется престраивать эпюру напряжений, либо оставить площадь в исходном состоянии – часто именно такого подхода требует конструктив устройства, то есть компоновка механизма в который входит рассчитываемый стержень такова, что площадь сечения второго участка должна быть именно такой. Поскольку в данном случае прочность избыточна, а уменьшение площади сечения не очень значительно и выигрыш в материале будет не существенным, примем второй вариант предположив, что компоновка не позволяет изменить площадь сечения. Но большую роль здесь будет играть то будет ли производство данного изделия массовым либо серийным либо единичным. При массовом или крупносерийном производстве имеет смысл учитывать каждый грамм металла и перекомпоновка с изменением площади сечения была бы неизбежна.

В случае если прочность получилась бы недостаточной производится аналогичный приведенному выше расчет для получения нового значения площади сечения, только в этом случае нет возможности проигнорировать результат и если необходимо – переделывать компоновку механизма с учетом значения новой площади сечения стержня.

Седьмой шаг. Определение удлинений/укорочений стержня.

При расчетах стержня важной составляющей является расчет изменения длины стержня при нагружении, особенно при заданном пластичном материале. Удлинение (укорочение) стержня рассчитывается по каждому выделенному участку, а затем складывается и на базе этих данных строится эпюра удлинений/укорочений стержня.

При расчете значения удлинение / укорочения стержня используется закон Гука

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (1.2)$$

Где

Δl – удлинение рассматриваемого участка стержня

N – внутренняя продольная сила

l – длина стержня (участка стержня)

E – модуль продольной упругости

A – площадь сечения для первого участка:

$$\Delta l_1 = \frac{-45 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,7 \cdot 10^{-4}} = -3,33 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

для второго участка:

$$\Delta l_2 = \frac{-15 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,1 \cdot 10^{-4}} = -0,484 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

для третьего участка

$$\Delta l_3 = \frac{65 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5,4 \cdot 10^{-4}} = 1,81 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Из полученных данных можно сделать вывод – первые два участка стержня сжаты, третий участок растянут.

Эпюры растяжения - сжатия строятся иначе чем эпюры сил и напряжений.

Построение начинается с точки жесткой заделки и участка 3 т.к. заделка в любом случае остается на месте. Начальная точка эпюры лежит в точке 0, на границе жесткой заделки и третьего участка. На границе третьего и второго участков размещается точка с ординатой $\Delta l_3 = 1,81 \cdot 10^{-4}$ – значение удлинения третьего участка.

Затем определяем совместное удлинение третьего и второго участков методом сложения полученных величин – удлинение третьего и второго участков и откладываем на эпюре удлинения на границе второго и первого участков

$$\Delta l(32) = \Delta l_3 + \Delta l_2 = 1,81 \cdot 10^{-4} + (-0,484 \cdot 10^{-4}) = 1,326 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

И аналогично определяем суммарное значение на всех трех участках

$$\Delta l(321) = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = 1,81 \cdot 10^{-4} + (-0,484 \cdot 10^{-4}) + (-3,33 \cdot 10^{-4}) = -2,004 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Полученные значения наносим на эпюру растяжений. По виду эпюры можно сказать, что стержень под действием внешних сил укоротился на $2,004 \cdot 10^{-4} \text{ м}$

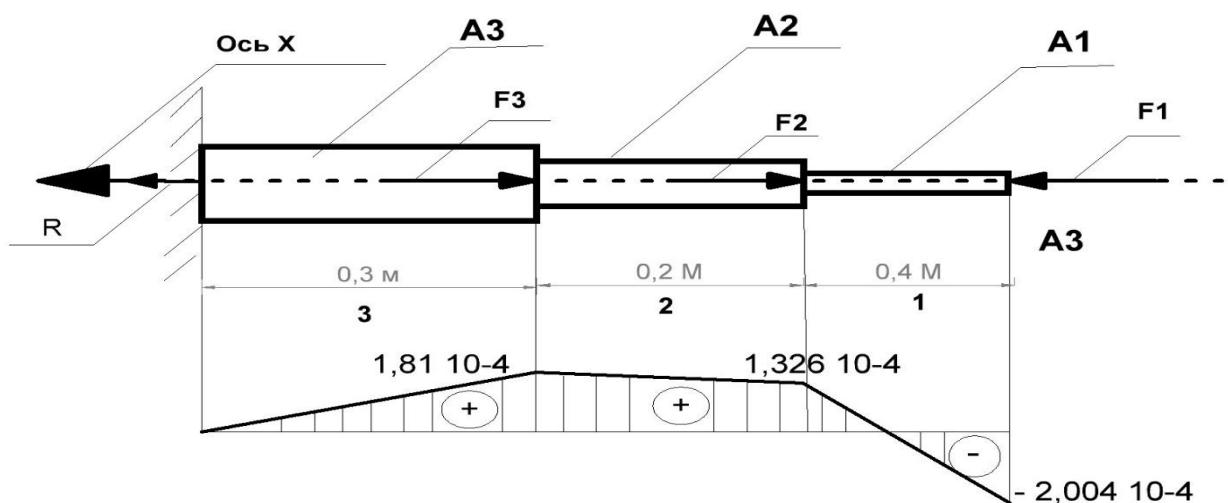


Рисунок 1.7 Построение эпюр удлинений стержня.

Таким образом задача решена – определены нормальные напряжения по всей длине стержня, оценена прочность по каждому участку, а также определены параметры жесткости выраженные в значениях удлинения каждого участка и стержня в целом.

Пример решения задачи №2

Дано: Ступенчатый стальной стержень нагружен осевыми силами $F_1=30\text{т}$, $F_2=24\text{т}$, $F_3=10\text{т}$. Площади поперечных сечений $A_1=20\text{см}^2$, $A_2=10\text{см}^2$. Построить эпюры

продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений. Собственным весом стержня пренебречь. Схема стержня на рисунке 1.8.

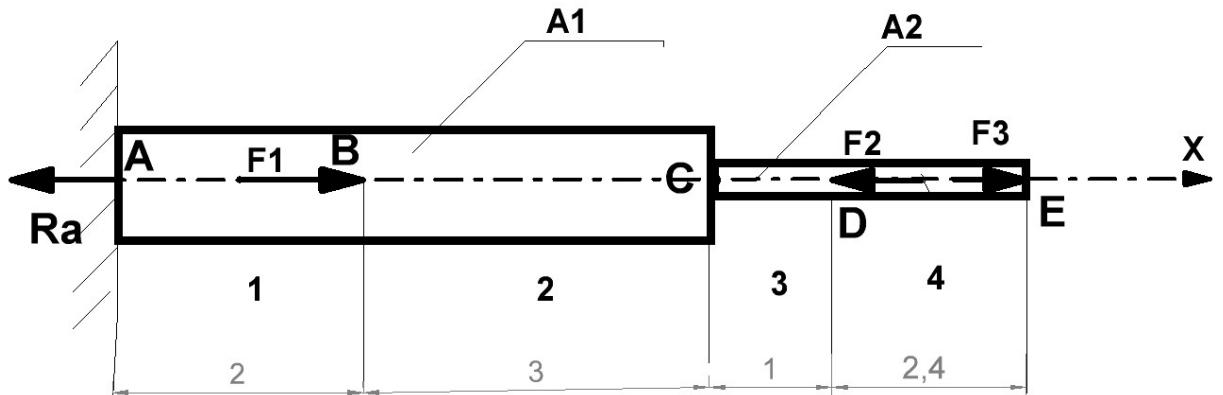


Рисунок 1.8 Расчетная схема стержня.

Решение:

Первый шаг :

Аналогично как в предыдущей задаче – определяем положение оси Х. Изменим алгоритм и примем направление оси Х – в сторону от жесткой заделки к свободному концу стержня. Но двигаться в этом случае будем от заделки к свободному концу, см рисунок 6.

Второй шаг: Аналогично как в предыдущей задаче – разбиваем весь стержень на участки, чтобы отношение F/A на каждом участке оставались неизменными. В данном случае можно выделить четыре участка :

1-ый – от заделки до точки приложения силы F_1 -точка В поскольку сила приложена, отношение F/A изменено.

2-ой – от точки В до точки С – до места изменения площади сечения – также отношение F/A изменяется.

3-ий – от точки С до точки D – в которой приложена сила F_2

4-ый от точки D до точки Е – конец стержня и точка приложения силы F_3

Шаг третий - Построение эпюры продольных сил.

Определяем реакцию в заделке $R_A=30+10-24=16\text{т}$

В предыдущей задаче данная реакция не определялась специально, она получилась автоматически при построении эпюры продольных сил т.к. сечения, а также построение эпюры производились со стороны свободного конца стержня .

Определяем усилия в сечениях для чего производим сечения как показано на рис.7 и мысленно отбрасываем правую часть стержня с приложением внутренней силы N , компенсирующий влияние отброшенной части стержня. Сила N направлена по оси X :

$$1-1) \sum X = N_1 - R_A = 0 \quad N_1 = R_A = 16000 \text{ кГ}$$

$$2-2) \sum X = N_2 - R_A + F_1 = 0 \quad N_2 = 16000 - 30000 = -14000 \text{ кГ}$$

$$3-3) \sum X = N_3 - R_A + F_1 = 0 \quad N_3 = -14000 \text{ кГ}$$

$$4-4) \sum X = N_4 - R_A + F_1 - F_2 = 0 \quad N_4 = 16000 - 30000 + 24000 = 10000 \text{ кГ}$$

Эпюра продольных сил построена на рис. 1.9

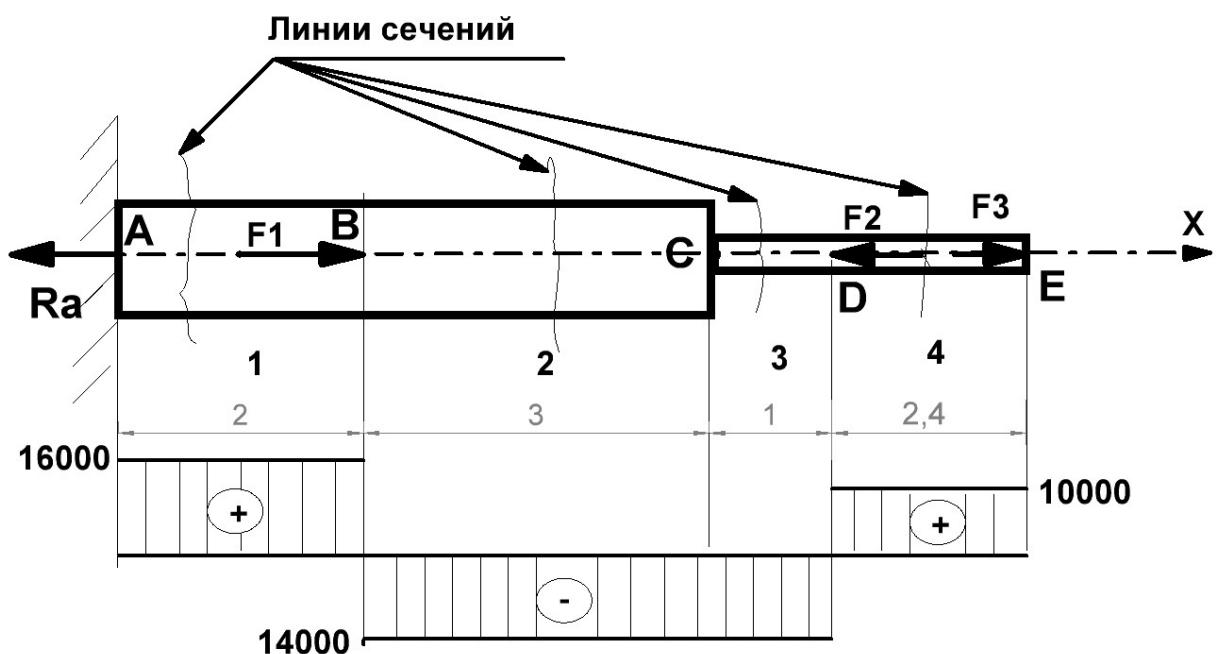


Рисунок 1.9 Эпюра продольных внутренних сил.

Шаг четвертый - Построение эпюры напряжений

Рассчитаем напряжения в сечениях:

$$1-1) \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{16000}{20} = 800 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$$

$$2-2) \sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = -\frac{14000}{20} = -700 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$$

$$3-3) \sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = -\frac{14000}{10} = -1400 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$$

$$4-4) \sigma_4 = \frac{N_4}{A_2} = +\frac{10000}{20} = +1000 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$$

По этим данным на рис. 1.10 построена эпюра напряжений σ , изображающая изменение напряжений в поперечных сечениях по длине стержня.

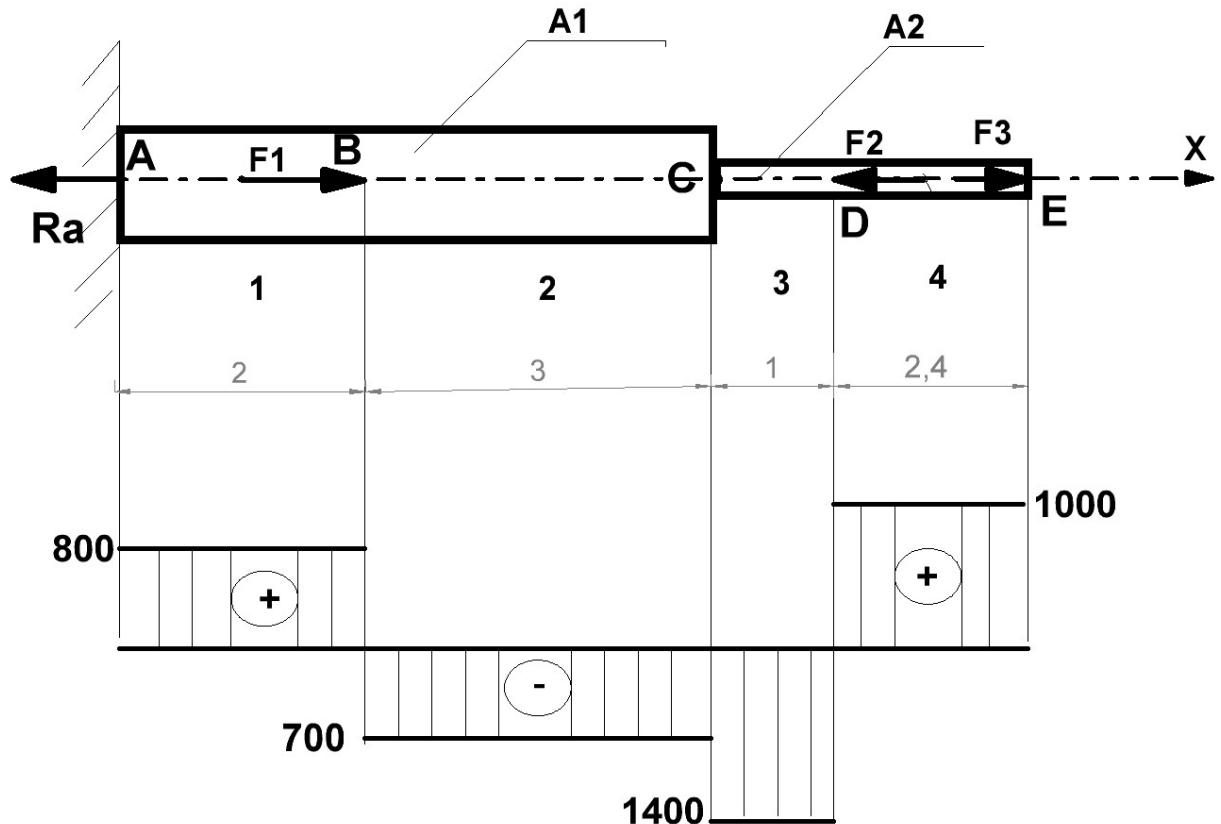


Рисунок 1.10 Эпюра нормальных напряжений .

Шаг пятый Определение перемещений и построение эпюры перемещений

Для определения перемещений следует предварительно найти удлинения участков стержня.

$$\text{Участок AB: } \Delta l_1 = \mathcal{E}_1 l_1 = \frac{\sigma_1 \cdot l_1}{E} = + \frac{800 \cdot 200}{2 \cdot 10^6} = +0,08 \text{ см}$$

$$\text{Участок BC: } \Delta l_2 = \mathcal{E}_2 l_2 = \frac{\sigma_2 \cdot l_2}{E} = - \frac{700 \cdot 300}{2 \cdot 10^6} = -0,105 \text{ см}$$

$$\text{Участок CD: } \Delta l_3 = \mathcal{E}_3 l_3 = \frac{\sigma_3 \cdot l_3}{E} = - \frac{1400 \cdot 100}{2 \cdot 10^6} = -0,07 \text{ см}$$

$$\text{Участок DE: } \Delta l_4 = \mathcal{E}_4 l_4 = \frac{\sigma_4 \cdot l_4}{E} = + \frac{1000 \cdot 240}{2 \cdot 10^6} = +0,120 \text{ см}$$

Определяем перемещения:

Перемещения сечения В равно удлинению участка АВ

$$\delta_B = \Delta l_1 = +0,08 \text{ см}$$

Перемещения сечения В равно сумме удлинений участков АВ и ВС

$$\delta_C = \Delta l_1 + \Delta l_2 = +0,08 - 0,105 = -0,25 \text{ см}$$

Перемещения сечения D

$$\delta_D = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = +0,08 - 0,105 - 0,07 = -0,095 \text{ см}$$

Перемещения сечения Е

$$\delta_E = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = +0,08 - 0,105 - 0,07 + 0,12 = +0,025 \text{ см}$$

По этим данным на рис.1.10 построена эпюра перемещений

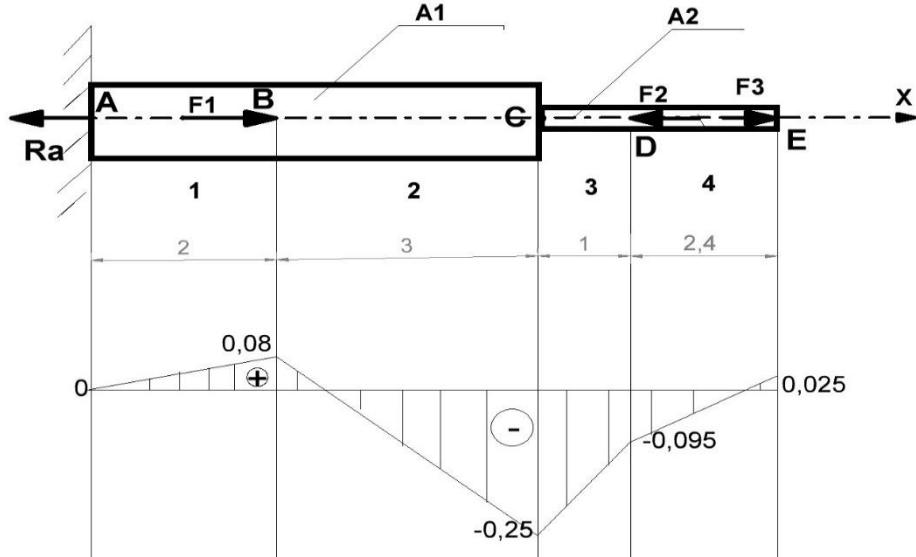


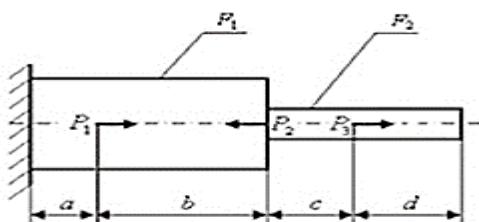
Рисунок 1.10 Эпюра перемещений при растяжении – сжатии стержня.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.

Проверить прочность и определить перемещение свободного конца стержня.

Материал стержня – сталь $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$



$$P_1=2\text{т}, P_2=3\text{т}, P_3=2,1\text{т}$$

$$a=0,2 \text{ м}; b=0,5 \text{ м}; c=0,2 \text{ м}; d=0,4 \text{ м}$$

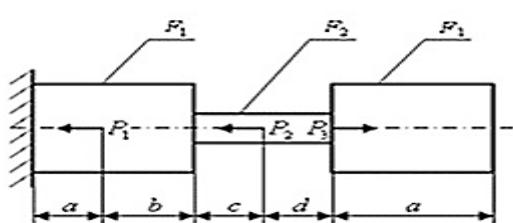
$$F_1=4,9 \text{ см}^2; F_2=2,3 \text{ см}^2$$

$$\sigma_t=1600 \text{ МПа}$$

Задача 2.

Проверить прочность и определить перемещение свободного конца стержня.

Материал стержня сталь $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$



$$P_1=1,5\text{т}, P_2=2,5\text{т}, P_3=3\text{т}$$

$$a=0,3 \text{ м}; b=0,4 \text{ м}; c=0,4 \text{ м}; d=0,3 \text{ м}$$

$$F_1=5,5 \text{ см}^2; F_2=2,3 \text{ см}^2$$

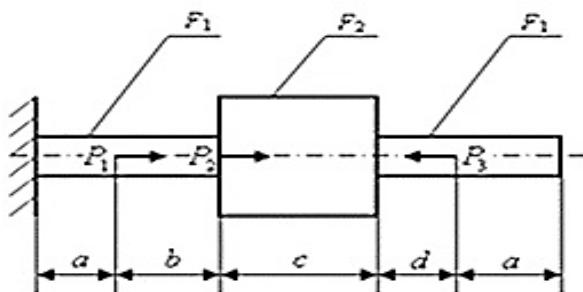
$$\sigma_t=1600 \text{ МПа}$$

Задача 3.

Проверить прочность и определить перемещение свободного конца стержня.

Материал стержня – сталь $E = 2 \cdot 10^5$ МПа

$a =$



$$P_1 = 2,2\text{т}, P_2 = 1,5\text{т}, P_3 = 1,5\text{т}$$

$$0,4 \text{ м}; b = 0,3 \text{ м}; c = 0,5 \text{ м}; d = 0,2 \text{ м}$$

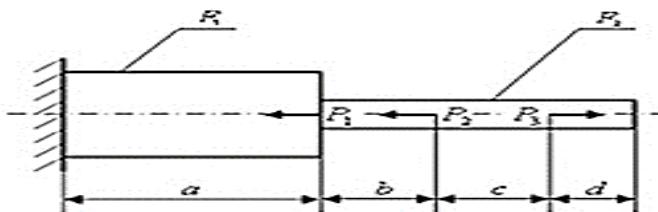
$$F_1 = 1,9 \text{ см}^2; F_2 = 5,3 \text{ см}^2$$

$$\sigma_t = 1600 \text{ МПа}$$

Задача 4.

Проверить прочность и определить перемещение свободного конца стержня.

Материал стержня – сталь $E = 2 \cdot 10^5$ МПа



$$P_1 = 1,8\text{т}, P_2 = 1,5\text{т}, P_3 = 1,8\text{т}$$

$$a = 0,5 \text{ м}; b = 0,2 \text{ м}; c = 0,3 \text{ м};$$

$$d = 0,5 \text{ м}$$

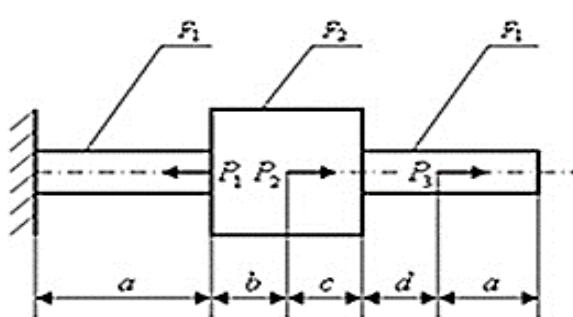
$$F_1 = 5,1 \text{ см}^2; F_2 = 1,8 \text{ см}^2$$

$$\sigma_t = 1600 \text{ МПа}$$

Задача 5.

Проверить прочность и определить перемещение свободного конца стержня. Материал стержня – сталь $E = 2 \cdot 10^5$ МПа

$a =$



$$P_1 = 1,9\text{т}, P_2 = 2\text{т}, P_3 = 1,6\text{т}$$

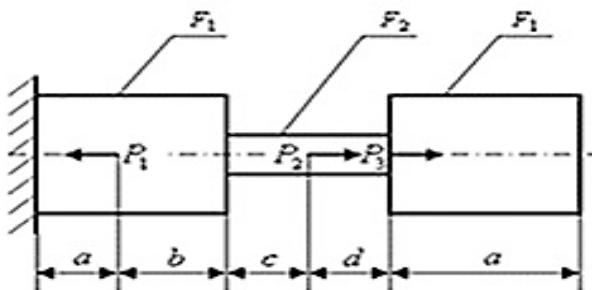
$$0,4 \text{ м}; b = 0,5 \text{ м}; c = 0,2 \text{ м}; d = 0,3 \text{ м}$$

$$F_1 = 2,3 \text{ см}^2; F_2 = 4,8 \text{ см}^2$$

$$\sigma_t = 1600 \text{ МПа}$$

Задача 6.

Проверить прочность и определить перемещение свободного конца стержня.



Материал стержня – сталь

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

$$P_1 = 2,4 \text{ т}, P_2 = 1,7 \text{ т}, P_3 = 1,9 \text{ т}$$

$$a = 0,3 \text{ м}; b = 0,4 \text{ м}; c = 0,5 \text{ м};$$

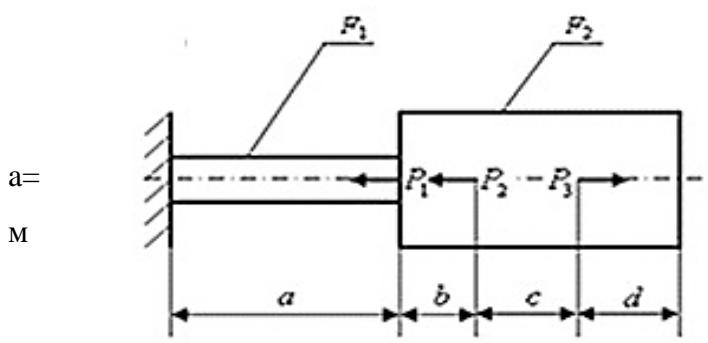
$$d = 0,2 \text{ м}$$

$$F_1 = 4,8 \text{ см}^2; F_2 = 2,1 \text{ см}^2$$

$$\sigma_t = 1600 \text{ МПа}$$

Задача 7.

Проверить прочность и определить перемещение свободного конца стержня.



Материал стержня – сталь

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

$$P_1 = 3 \text{ т}, P_2 = 2,2 \text{ т}, P_3 = 2 \text{ т}$$

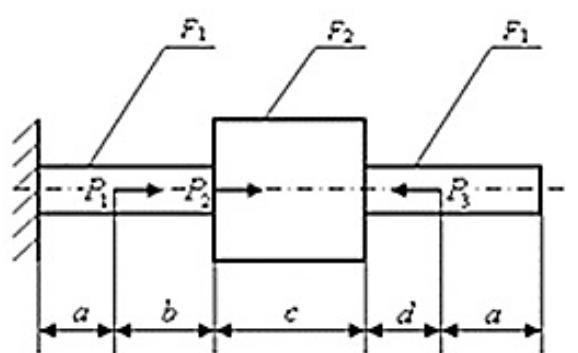
$$0,5 \text{ м}; b = 0,3 \text{ м}; c = 0,2 \text{ м}; d = 0,4$$

$$F_1 = 2,1 \text{ см}^2; F_2 = 4,6 \text{ см}^2$$

$$\sigma_t = 1600 \text{ МПа}$$

Задача 8.

Проверить прочность и определить перемещение свободного конца стержня.



Материал стержня – сталь

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

$$P_1 = 1,5 \text{ т}, P_2 = 2,8 \text{ т}, P_3 = 1,6 \text{ т}$$

$$a = 0,2 \text{ м}; b = 0,4 \text{ м}; c = 0,4 \text{ м}; d = 0,3 \text{ м}$$

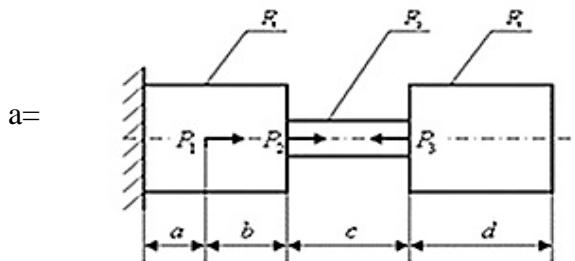
$$F_1 = 2,1 \text{ см}^2; F_2 = 4,6 \text{ см}^2;$$

$$\sigma_t = 1600 \text{ МПа}$$

Задача 9.

Проверить прочность и определить перемещение свободного конца стержня.

Материал стержня – сталь $E = 2 \cdot 10^5$ МПа



$$P_1 = 2,8\text{т}, P_2 = 1,8\text{т}, P_3 = 2,2\text{т}$$

$$0,3 \text{ м}; b = 0,5 \text{ м}; c = 0,2 \text{ м}; d = 0,4 \text{ м}$$

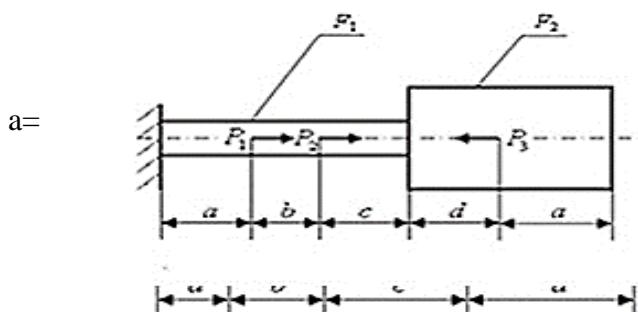
$$F_1 = 5,2 \text{ см}^2 F_2 = 2,8 \text{ см}^2$$

$$\sigma_t = 1600 \text{ МПа}$$

Задача 10.

Проверить прочность и определить перемещение свободного конца стержня.

Материал стержня – сталь $E = 2 \cdot 10^5$ МПа



$$P_1 = 3,8\text{т}, P_2 = 1,9\text{т}, P_3 = 1,7\text{т}$$

$$0,4 \text{ м}; b = 0,2 \text{ м}; c = 0,5 \text{ м}; d = 0,3 \text{ м}$$

$$F_1 = 2,2 \text{ см}^2 F_2 = 4,6 \text{ см}^2$$

$$\sigma_t = 1600 \text{ МПа}$$

ГЛАВА 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ СЕЧЕНИЯ

Напряжения, а следовательно и деформации бруса при растяжении(сжатии) зависят от возникающих в стержне силовых факторов к которым относятся внутренние силы. Но весьма значительную роль играют и геометрические параметры сечения. Для нагружения методом осевого растяжения(сжатия) таким геометрическим параметром является площадь поперечного сечения. Она фигурирует в числителе расчетной формулы напряжений:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.1)$$

где F – сила;

A – площадь сечения

Сама форма поперечного сечения при нагружении растяжением (сжатием) не играет роли, оно может быть круглым, квадратным и т.п.

Напряжения в этом случае распределяются по всей площади сечения равномерно Но так происходит только при нагружении в виде осевого растяжения(сжатия). При нагружении в виде кручения или изгиба стержня характерной отличительной особенностью геометрических характеристик помимо площади сечения является еще и **форма сечения** , которая играет очень важную , если не решающую роль в обеспечении прочности и жесткости. Оба эти вида нагружения объединяет одно свойство напряжений: **они не располагаются равномерно по всей площади сечения**. Поэтому для определения прочностных и жёсткостных показателей при кручении и изгибе требуются дополнительные показатели, характеризующие форму сечения.

К таким показателям относятся:

- a) статические моменты плоского сечения относительно некоторой оси x и статические моменты плоского сечения относительно перпендикулярной ей оси y. Эти моменты являются осевыми.
- б) моменты инерции плоских сечений относительно оси x и относительно оси y – эти моменты тоже являются осевыми.
- в) моменты инерции относительно некоторого полюса – полярные моменты инерции
- г) моменты инерции относительно двух перпендикулярных осей – центробежные моменты инерции.

СТАТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ

Статические моменты часто используют для определения координат центров тяжести плоских сечений

Статические моменты плоского сечения относительно некоторых осей x и y обозначаются буквами S_x и S_y описываются уравнениями :

$$S_x = \int_A y \, dA \quad S_y = \int_A x \, dA \quad (2.2)$$

Статический момент плоского сечения относительно некоторой оси – это, взятая по всей площади A сумма произведений площадей элементарных площадок dA на расстояние от каждой площадки до этой оси см. рис 2.1. Единицей измерения статического момента инерции является м^3 .

Если известны координаты центра тяжести плоского сечения по оси x и по оси y т.е. x_c и y_c то статические моменты S_x и S_y можно определить как

$$S_x = y_c A; \quad S_y = x_c A \quad (2.3)$$

Исходя из этих равенств можно сделать вывод, что статические моменты сечения относительно оси, которая проходит через центр тяжести сечения равны нулю т.к. тогда x_c и y_c равны нулю

Если известны статические моменты относительно осей x и y можно определить координаты центра тяжести как:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} \quad (2.4)$$

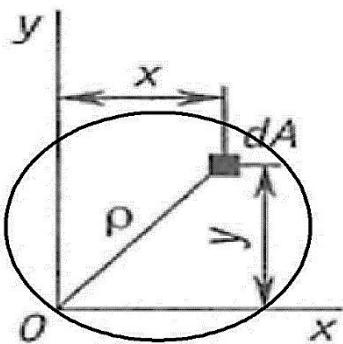


Рисунок 2.1. Иллюстрация для определения статического момента плоского сечения, осевых моментов инерции, центробежного момента инерции относительно взаимно перпендикулярных осей и полярного момента инерции относительно полюса 0.

Если плоское сечение можно представить как совокупность простых геометрических фигур, то статические моменты находятся как :

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_x i = \sum_{i=1}^n A_i y_{ci}; \quad S_y = \sum_{i=1}^n S_y i = \sum_{i=1}^n A_i x_{ci} \quad (2.5)$$

Тогда координаты центра тяжести можно представить как:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (2.6)$$

Осьевой момент инерции плоского сечения

Моментом инерции плоского сечения относительно оси называется взятая по всей площади сечения A сумма произведений площадей элементарных площадок dA на

квадраты расстояний до этой оси. Осевые моменты инерции описываются следующими уравнениями:

$$J_x = \int_A y^2 dA ; \quad J_y = \int_A x^2 dA \quad (2.7)$$

Единицей осевого момента инерции является m^4

Полярный момент инерции

Полярным моментом инерции сечения относительно некоего полюса(точки) называется взятая по всей площади сечения A сумма произведений площадей элементарных площадок dA на квадраты расстояния до этого полюса

$$J_p = \int_A \rho^2 dA \quad (2.8)$$

Единицей полярного момента инерции является m^4

Центробежный момент инерции

Центробежным моментом инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей называется взятая по всей площади сечения A сумма произведений площадей элементарных площадок dA на расстояния до этих осей

$$J_{xy} = \int_A xy dA \quad (2.9)$$

Единицей центробежного момента инерции является m^4

Между осевым и полярным моментом инерции существует связь:

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_y + J_x \quad (2.10)$$

Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна популярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей.

Моменты инерции сечения при параллельном переносе осей

Предположим известны координаты положения центра тяжести С сечения и моменты инерции J_{xc}, J_{yc} осей x_c и y_c – такие моменты называют центральными.

Нужно определить моменты инерции сечения относительно новых осей инерции x и y проведенных параллельно центральным при расстояниях между осями по вертикали - a и по горизонтали - b. Тогда координаты центра тяжести сечения в системе координат x, y (см рис 2.2)можно записать как :

$$x = x_c + b ; \quad y = y_c + a$$

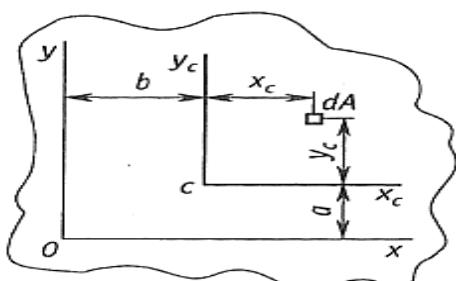


Рисунок 2.2 Координаты центра тяжести сечения относительно новых осей x и y

Теперь координаты центра тяжести сечения можно определить:

По оси x : $x = x_c + b$

По оси y : $y = y_c + a$

А моменты инерции сечения относительно осей x и y будут следующими:

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y_c + a)^2 dA = \int_A y_c^2 dA + 2a \int_A y_c dA + a^2 \int_A dA \quad (2.11)$$

Если рассмотреть последние три интеграла уравнения можно сделать следующие выводы:

Первый интеграл - это момент инерции сечения относительно оси Xc,

$$J_{Xc} = \int_A y_c^2 dA \quad (2.12)$$

Второй интеграл суммы – это статический момент относительно центральной оси Xc - S_{Xc}

$S_{Xc} = \int_A y_c dA = 0$ - так как статический момент относительно оси проходящей через центр тяжести сечения равен нулю.

Третий интеграл суммы представляет из себя всю площадь рассматриваемого сечения:

$$A = \int_A dA \quad (2.13)$$

Тогда можно записать значение момента инерции относительно новой оси X как:

$$J_x = J_{Xc} + a^2 A \quad (2.14)$$

И относительно новой оси Y как:

$$J_y = J_{Yc} + b^2 A \quad (2.15)$$

Тогда определение будет звучать следующим образом :

Момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно параллельной ей центральной оси плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между осями.

Главные оси и главные моменты инерции сечений

Если учитывать, что сумма осевых моментов инерции сечения, взятых относительно определенной пары взаимно перпендикулярных осей будет равна полярному моменту инерции взятому относительно точки пересечения этих осей, можно сделать вывод, что эта сумма, как и полярный момент инерции есть величина постоянная. Следовательно вращая оси координат вокруг точки пересечения или полюса можно получить такое положение при котором один из осевых моментов инерции сечения будет максимальным, а другой соответственно минимальным. Для такого положения осей координат центробежный момент инерции будет равен нулю. Отсюда вытекает следующее правило: если один из осевых моментов инерции для данного положения взаимно перпендикулярных осей максимальен, второй осевой момент инерции минимальен и при этом центробежный момент инерции относительно данных осей будет равен нулю, то такие взаимно перпендикулярные оси называются **главными осями инерции**, а соответствующие моменты – **главными моментами инерции**.

Главные оси инерции можно провести через любую точку сечения и их бесконечное количество. Соответственно, если рассматривать моменты инерции относительно этих осей их также будет бесчисленное множество. Но в процессах расчетов рассматривают моменты инерции относительно осей, точка пересечения которых находится в центре тяжести сечения. Тогда такие оси называют главными центральными осями инерции, а моменты инерции взятые относительно этих осей – главными центральными моментами инерции.

Если сечение некоторой детали имеет ось симметрии, то центр тяжести сечения лежит на этой оси и соответственно центробежный момент инерции относительно взаимно пересекающихся осей будет равен нулю. Следовательно ось, совпадающая с осью симметрии и перпендикулярная ей ось, проходящая через центр тяжести сечения (центральная) будут называться главными осями инерции.

Для определения наиболее эффективного положения сечения детали в пространстве относительно нагружающих сил необходимо знать положение главных центральных осей и значение соответствующего максимального момента инерции и располагать сечение так, чтобы главная центральная ось, относительно которой момент инерции максимальен была направлена в сторону нагрузки.

Если несколько деталей с поперечными сечениями различной формы соединены в общую конструкцию (например с помощью сварки) мы получаем случай сложного сечения. Тогда момент инерции сложного сечения относительно некоторой оси будет

равен сумме моментов инерций сечений составляющих сложную фигуру относительно этой оси.

Алгоритм нахождения положения главных центральных осей и главных центральных моментов следующий :

1 Шаг. Сложное сечение нужно разделить на отдельные элементарные сечения (круг, квадрат, прямоугольник и т.п.), либо если предложены к рассмотрению детали со стандартными сечениями (тавр, двутавр, швеллер, уголок и т.п.). – определить для них статические моменты , осевые и центробежные моменты инерции, площади сечений и координаты центров тяжести взяв из соответствующих технических справочников

2 Шаг. Найти координаты центра тяжести сложного сечения согласно формул:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Где i – порядковый номер сечения.

A_i – площадь i-того сечения

x_{ci}, y_{ci} – расстояния от центра тяжести каждого сечения до соответствующей оси.

3 Шаг. Для каждого сечения, входящего в сложное нужно определить: дополнительные значения координат по горизонтали (a_i) и вертикали (b_i) относительно центральных осей X_c и Y_c сложного сечения и пользуясь формулой Штайнера получим моменты инерции всего сложного сечения относительно его центра тяжести :

$$J_{Xc} = J_{y_1} + b_1^2 A_1 + J_{y_2} + b_2^2 A_2 + \dots + J_{y_n} + b_n^2 A_n$$

$$J_{yc} = J_{x_1} + a_1^2 A_1 + J_{x_2} + a_2^2 A_2 + \dots + J_{x_n} + a_n^2 A_n$$

А также центробежный момент сложного сечения относительно этих осей:

$$J_{xcyc} = J_{x_1 y_1} + a_1^2 b_1^2 A_1 + J_{x_2 y_2} + a_2^2 b_2^2 A_2 + \dots + J_{x_n y_n} + a_n^2 b_n^2 A_n$$

4 Шаг. Определив координаты центра тяжести каждого сечения, относительно центральных осей сложного сечения X_c и Y_c, можно вычислить моменты инерций каждого сечения .

Моменты инерции относительно центральных осей сложного сечения будут равны сумме моментов инерции каждой, составляющей сложное сечение фигур:

Момент инерции относительно оси X: J_x

$$J_x = \int_{A_1} y_1^2 dA + \int_{A_2} y_2^2 dA + \int_{A_3} y_3^2 dA + \dots + \int_{A_n} y_n^2 dA =$$

$$= J_x^I + J_x^{II} + J_x^{III} + \dots + J_x^n$$

Момент инерции относительно оси y: J_y

$$J_y = \int_{A_1} x_1^2 dA + \int_{A_2} x_2^2 dA + \int_{A_3} x_3^2 dA + \dots + \int_{A_n} x_n^2 dA = \\ = Jy^I + Jy^{II} + Jy^{III} + \dots + Jy^n$$

Центробежный момент инерции : J_{xy}

$$J_{xy} = \int_{A_1} x_1^2 y_1^2 dA + \int_{A_2} x_2^2 y_2^2 dA + \int_{A_3} x_3^2 y_3^2 dA + \dots + \int_{A_n} x_n^2 y_n^2 dA = \\ = Jxy^I + Jxy^{II} + Jxy^{III} + \dots + Jxy^n$$

5 Шаг. Определение положения главных осей. Угол наклона взаимно перпендикулярных осей X_c и Y_c - α_0 определяется из формулы:

$$\tan 2\alpha_0 = - \frac{2J_{xy}}{J_x + J_y}$$

6 Шаг. Определяем значения главных моментов инерции по формуле:

$$J_u = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 J_{xy}^2}$$

$$J_v = \frac{J_x + J_y}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 J_{xy}^2}$$

В процессе расчета в случае, если после дроби в этих формулах выдерживается неравенство $J_x > J_y$, то для расчета после дроби следует использовать верхние знаки, если же выдерживается неравенство $J_x < J_y$ следует использовать нижние знаки.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Пример 1.

Для поперечного сечения состоящего из полосы и двух прокатных профилей необходимо определить их геометрические характеристики. В данном случае – определить положение главных осей инерции и значения главных моментов. Взаимное расположение сечений приведено на рис.2.3

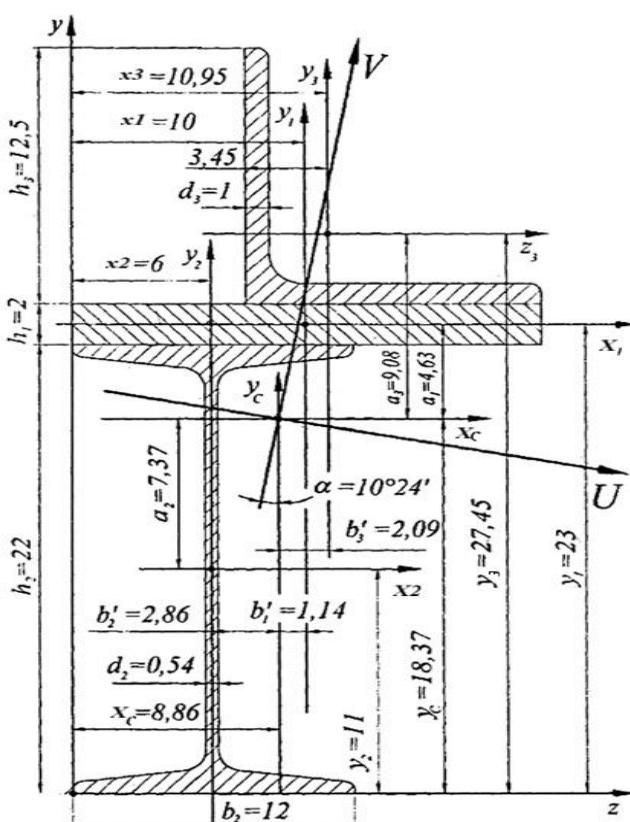
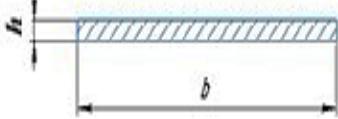
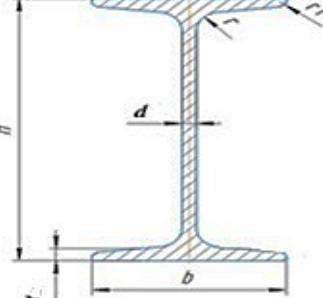
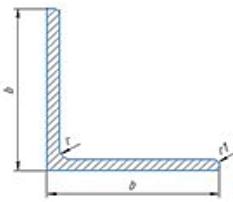


Рисунок 2.3 Сложное сечение, состоящее из тавра, полосы и неравнобокого уголка
 Дано: 1) Полоса 20× 2; 2) Двутавр №22а; 3)Уголок равнобокий 125 × 10 (рис.3.2)

1. Выпишем данные прокатных профилей из таблицы сортаментов :

№1.Полоса 20× 2	№2.Двутавр №22а	№3.Уголок равнобокий 125 × 10
		
$h_1=2 \text{ см}$	$h_2=22 \text{ см}$	$b_3=12,5 \text{ см}$
$b_1=20 \text{ см}$	$b_2=12 \text{ см}$	$d_3=1 \text{ см}$
	$d_2=0,54 \text{ см}$	$A_3=24,3 \text{ см}^2$
	$t_2=0,89 \text{ см}$	$I_{x3}=360 \text{ см}^4$
	$A_2=32,8 \text{ см}^2$	$I_{y3}=360 \text{ см}^4$
	$I_{x2}=2790 \text{ см}^4$	$X_{O3}=3,45 \text{ см}$
	$I_{y2}=206 \text{ см}^4$	

1. Для определения координат центра тяжести заданного сложного сечения:

a) Определяем (выберем из сортамента) площади сечений

$$1) \text{площадь сечения полосы } A_1 = b_1 \cdot h_1 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ см}^2$$

$$2) \text{площадь сечения тавра (ГОСТ 8510-86) } A_2 = 32,8 \text{ см}^2$$

$$3) \text{площадь сечения уголка } A_3 = 24,3 \text{ см}^2$$

б) определим координаты центров тяжести каждой фигуры входящей в сложное сечение относительно осей X и Y

$$y_1 = h_2 + \frac{h_1}{2} = 22 + 1 = 23 \text{ см}$$

$$y_2 = \frac{h_2}{2} = \frac{22}{2} = 11 \text{ см}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ см}$$

$$x_2 = \frac{b_2}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ см}$$

$$y_3 = h_2 + h_1 + y_{O_3} = 22 + 2 + 3,45 = 27,45 \text{ см}$$

$$x_3 = b_1 - b_3 + X_{O_3} = 20 - 12,5 + 3,45 = 10,95 \text{ см}$$

3. Определим координаты центра тяжести всего заданного сложного сечения :

$$Y_C = \frac{\sum S_x}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{40 \cdot 23 + 32,8 \cdot 11 + 24,3 \cdot 27,45}{40 + 32,8 + 24,3} = 18,37 \text{ см}$$

$$X_C = \frac{\sum S_y}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{40 \cdot 10 + 32,8 \cdot 6 + 24,3 \cdot 10,95}{40 + 32,8 + 24,3} = 8,86 \text{ см}$$

4. Определяем собственные осевые и центробежные моменты инерции каждой фигуры относительно своих центральных осей (методом расчета и для стандартных сечений – из справочников).

$$I_{x_1} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = \frac{20 \cdot 2^3}{12} = 13,33 \text{ см}^4; \quad I_{x_2} = 2790 \text{ см}^4; \quad I_{x_3} = 360 \text{ см}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} = \frac{2 \cdot 20^3}{12} = 1333,33 \text{ см}^4; \quad I_{y_2} = 206 \text{ см}^4; \quad I_{y_3} = 360 \text{ см}^4$$

5. Определим осевые и центробежный моменты инерции заданного сечения относительно центральных координатных осей Xc и Yc, для чего предварительно определим расстояния между параллельными осями

$$a_1 = y_1 - y_C = 23 - 18,37 = 4,63 \text{ см};$$

$$a_2 = y_2 - y_C = 11 - 18,37 = -7,37 \text{ см};$$

$$a_3 = y_3 - y_C = 27,45 - 18,37 = 9,08 \text{ см};$$

$$b_1 = x_1 - x_C = 10 - 8,86 = 1,14 \text{ см};$$

$$b_2 = x_2 - x_C = 6 - 8,86 = -2,86 \text{ см};$$

$$b_3 = x_3 - x_C = 10,95 - 8,86 = 2,09 \text{ см};$$

$$\begin{aligned} I_{x_C} &= I_{x_1} + a_1^2 \cdot A_1 + I_{x_2} + a_2^2 \cdot A_2 + I_{x_3} + a_3^2 \cdot A_3 = \\ &= 13,33 + 4,63^2 \cdot 40 + 2790 + (-7,37)^2 \cdot 32,8 + 360 + 9,08^2 \cdot 24,3 = \\ &= 7805,8178 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_C} &= I_{y_1} + b_1^2 \cdot A_1 + I_{y_2} + b_2^2 \cdot A_2 + I_{y_3} + b_3^2 \cdot A_3 = 1333,33 + 1,14^2 \cdot 40 + 206 + \\ &\quad (-2,86)^2 \cdot 32,8 + 360 + 2,09^2 \cdot 24,3 = 2325,7488 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x_C y_C} &= I_{x_1 y_1} + a_1 b_1 \cdot A_1 + I_{x_2 y_2} + a_2 b_2 \cdot A_2 + I_{x_3 y_3} + a_3 b_3 \cdot A_3 = 0 + 4,63 \cdot 1,14 \cdot 40 + 0 + \\ &\quad (-7,37) \cdot (-2,86) \cdot 32,8 + (-360) + 9,08 \cdot 2,09 \cdot 24,3 = 1152,63 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

5. Определим положение главных осей инерции

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{x_c}y_c}{I_{x_c} - I_{y_c}} = -\frac{2 \cdot 1152,63}{7805,82 - 2325,75} = -\frac{2305,26}{5480,07} = -0,4206$$

отсюда $2\alpha \approx -20^\circ 48'$ или $\alpha \approx -10^\circ 24'$ (оси U и V главные)

6. Определим значения главных моментов инерции

$$I_{\min} = \frac{I_{x_c} + I_{Y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{Y_c})^2 + 4I_{x_c Y_c}^2} = \frac{7805,82 + 2325,75}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(7805,82 - 2325,75)^2 + 4 \cdot 1152,63^2} = 5065,785 \pm 2972,600 \text{ см}^4$$

$$I_{\max} = 5065,785 + 2972,6 = 8038,385 \text{ см}^4$$

$$I_{\min} = 5065,785 - 2972,6 = 2093,186 \text{ см}^4$$

В качестве проверки используем равенство суммы моментов инерции относительно центра тяжести и суммы главных моментов – максимального и минимального:

$$I_{\max} + I_{\min} = I_{x_c} + I_{Y_c} = \text{const}$$

$$8038,385 + 2093,186 = 7805,82 + 2325,75$$

$$10131,571 = 10131,571$$

Суммы моментов равны, следовательно можно утверждать, что задача решена правильно.

Пример 2

Для сложного поперечного сечения стержня, состоящего из равнобокого уголка, швеллера и полосы (рис.2.4), необходимо определить координаты положения центра тяжести сечения, направление главных центральных осей инерции *u* и *v*, и рассчитать значения главных центральных моментов инерции I_{\max} и I_{\min} .

Дано: взаимное расположение сечений (рис.2.4)

1. Уголок равнобокий 70x70x8

2. Полоса 18x 2;

3. Швеллер №22;

1. Выберем данные прокатных профилей и полос из таблицы сортаментов и запишем в табличном виде см. таблицу 2.

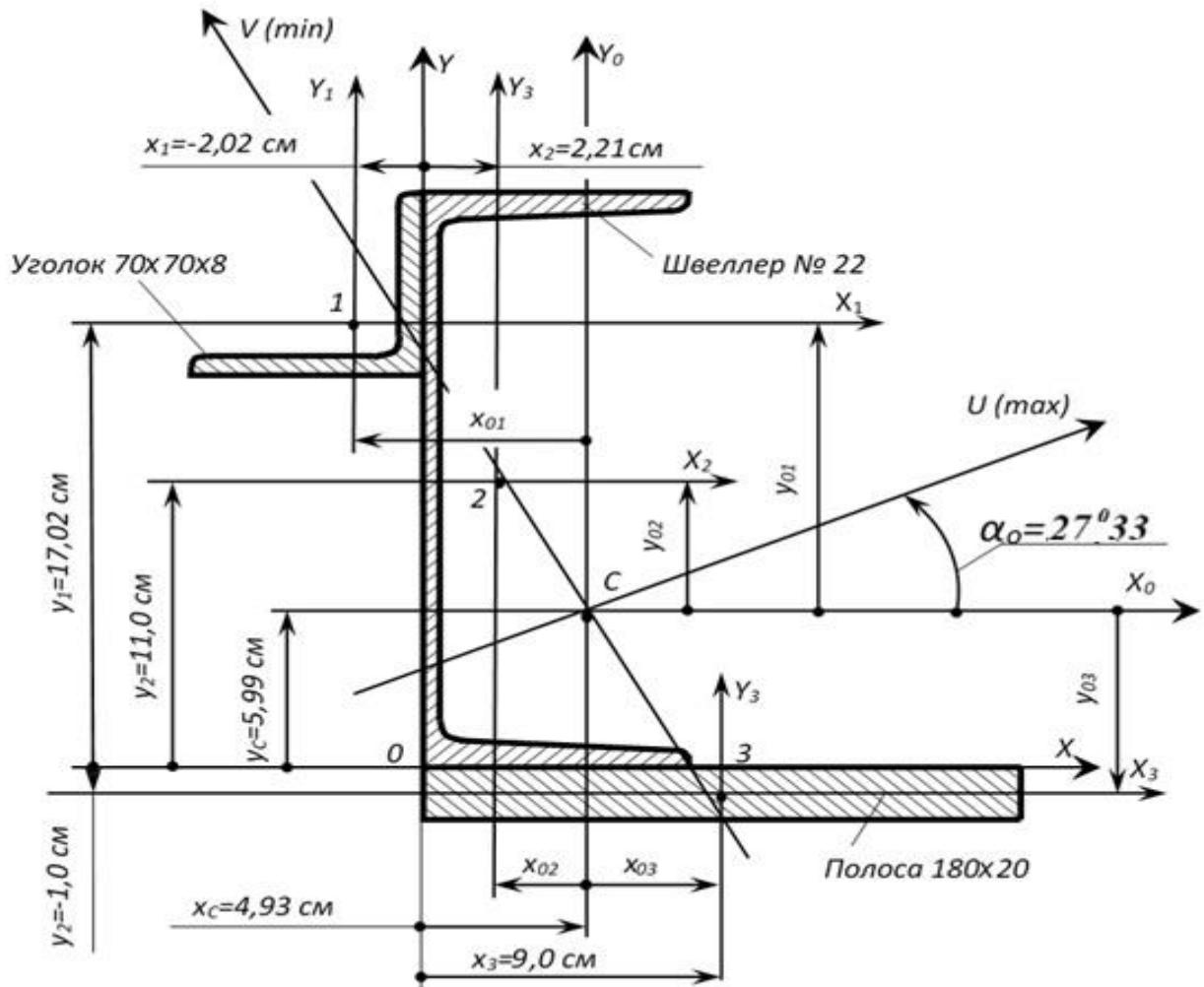


Рисунок 2.4 Сложное сечение, состоящее из равнобокого уголка, швеллера и полосы.

Таблица 2.2. Параметры сечений

№1. Уголок равнобокий 70x70x8	№2. Швеллер №22	№3. Полоса 18×2
$b_1=7,0 \text{ см}$ $t_1=0,8 \text{ см}$	$h_2=22 \text{ см}$ $b_2=8,2 \text{ см}$	$h_3=2 \text{ см}$ $b_3=18 \text{ см}$

$A_1=10,67 \text{ см}^2$	$X_0=2,21 \text{ см}$	
$I_{x1}=28,20 \text{ см}^4$	$S_2=110 \text{ см}$	
$I_{y1}=28,20 \text{ см}^4$	$A_2=26,7 \text{ см}^2$	
$I_{xy}=28,20 \text{ см}^4$	$I_{x2}=2110 \text{ см}^4$	
$X_0=2,02 \text{ см}$	$I_{y2}=151 \text{ см}^4$	

2. Примем основные оси X и Y проходящие :

Ось X проходит вплотную по верхней поверхности сечения полосы - горизонтально;

Ось Y проходит вплотную вдоль стенки швеллера – вертикально см. рис. 3.2.

3. Определим координаты центра тяжести заданного сложного сечения по формулам

$$Y_C = \frac{\sum S_x}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$X_C = \frac{\sum S_y}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Для этого рассчитаем (выберем из сортамента) площади каждого сечения

а) площадь сечения уголка $A_1=10,67 \text{ см}^2$

б) площадь сечения швеллера (из сортамента) $A_2=26,7 \text{ см}^2$

в) площадь сечения полосы $A_3=b \cdot h=18 \cdot 2=36 \text{ см}^2$

Рассчитаем координаты центра тяжести каждой фигуры относительно выбранных осей Y и X

Координаты центра тяжести уголка

$$y_1 = 22 - 7 + 2,02 = 17,02 \text{ см}$$

$$x_1 = -2,02 \text{ см}$$

Координаты центра тяжести швеллера

$$y_2 = 11 \text{ см}$$

$$x_2 = 2,21 \text{ см}$$

Координаты центра тяжести полосы

$$y_3 = -1 \text{ см}$$

$$x_3 = 9 \text{ см}$$

$$Y_C = \frac{\sum S_x}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{10,67 \cdot 17,02 + 26,7 \cdot 11 + 36 \cdot (-1)}{10,67 + 26,7 + 36} = 5,99 \text{ см}$$

$$X_C = \frac{\sum S_Y}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{10,67 \cdot (-2,02) + 26,7 \cdot 2,21 + 36 \cdot 9}{10,67 + 26,7 + 36} = 4,926 \text{ см}$$

4. Определяем собственные осевые и центробежные моменты инерции каждой фигуры относительно своих центральных осей (методом расчета и для стандартных сечений – из справочников).

$$I_{x_1} = 48,16 \text{ см}^4; I_{x_2} = 2110,0 \text{ см}^4; I_{x_3} = \frac{b_3 \cdot h_3^3}{12} = \frac{18 \cdot 2^3}{12} = 12 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1} = 48,16 \text{ см}^4; I_{y_2} = 151 \text{ см}^4; I_{y_3} = \frac{h_3 \cdot b_3^3}{12} = \frac{2 \cdot 18^3}{12} = 972,00 \text{ см}^4;$$

$$I_{X_1 Y_1} = 28,20 \text{ см}^4; I_{X_2 Y_2} = 0; I_{X_3 Y_3} = 0$$

5. Определим осевые и центробежный моменты инерции заданного сечения относительно центральных координатных осей Хс и Yс, для чего предварительно определим расстояния между параллельными осями

$$a_1 = y_1 - y_c = 17,02 - 5,99 = 11,03 \text{ см};$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 11 - 5,99 = 5,01 \text{ см};$$

$$a_3 = y_3 - y_c = -1 - 5,99 = -6,99 \text{ см};$$

$$b_1 = x_1 - x_c = -2,02 - 4,926 = -6,946 \text{ см};$$

$$b_2 = x_2 - x_c = 2,21 - 4,926 = -2,72 \text{ см};$$

$$b_3 = x_3 - x_c = 9,0 - 4,926 = 4,074 \text{ см};$$

$$\begin{aligned} I_{X_C} &= I_{x_1} + a_1^2 \cdot A_1 + I_{x_2} + a_2^2 \cdot A_2 + I_{x_3} + a_3^2 \cdot A_3 = \\ &= 48,16 + 11,03^2 \cdot 10,67 + 2110,00 + 5,01^2 \cdot 26,7 + 12,00 + 6,99^2 \cdot 36 = \\ &= 5897,41 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{Y_C} &= I_{Y_1} + b_1^2 \cdot A_1 + I_{Y_2} + b_2^2 \cdot A_2 + I_{Y_3} + b_3^2 \cdot A_3 = 48,16 + (-6,946)^2 \cdot 10,67 + 151,00 + \\ &\quad (-2,72)^2 \cdot 26,7 + 972,00 + 4,074^2 \cdot 36,00 = 2480,43 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{X_C Y_C} &= I_{X_1 Y_1} + a_1 b_1 \cdot A_1 + I_{X_2 Y_2} + a_2 b_2 \cdot A_2 + I_{X_3 Y_3} + a_3 b_3 \cdot A_3 = 28,20 + 11,03 \cdot (-6,946) \cdot \\ &\quad 10,67 + 0 + 5,01 \cdot (-2,72) \cdot 26,7 + 0 + (-6,99) \cdot 4,074 \cdot 36 = -2149,63 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

5. Определим положение главных осей инерции

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{x_c}y_c}{I_{x_c} - I_{y_c}} = -\frac{-2 \cdot 2149,63}{5897,41 - 2842,32} = \frac{4299,26}{3055,09} = 1,41 \text{ рад}$$

отсюда $2\alpha \approx 54^\circ 65'$ или $\alpha \approx 27^\circ 33'$ (оси U и V главные)

Согласно принятому правилу знаков, поскольку угол α положительный – для проведения главных центральных осей и и v, нужно отложить его против часовой стрелки. В случае, если угол α выходит со знаком минус его следует откладывать по часовой стрелке.

6. Определим значения главных моментов инерции

$$I_{min} = \frac{I_{x_C} + I_{Y_C}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_C} - I_{Y_C})^2 + 4I_{x_C Y_C}^2} = \frac{5897,41 + 2480,43}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(5897,41 - 2480,43)^2 + 4 \cdot (-2149,63)^2} = 4188,92 \pm 1304,59 \text{ см}^4$$

$$I_{max} = 5493,516 \text{ см}^4$$

$$I_{min} = 2884,32 \text{ см}^4$$

Для проверки правильности вычислений рассмотрим равенство суммы моментов инерции относительно центра тяжести сложного сечения и суммы главных моментов – максимального и минимального:

$$I_{max} + I_{min} = I_{x_C} + I_{Y_C}$$

$$8038,385 + 2093,1856 = 7805,82 + 2325,75$$

$$8377,836 = 8377,840$$

Суммы моментов равны, следовательно можно полагать, что расчеты произведены верно.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Для каждой нижеприведенной задачи – найти положение главных центральных моментов инерции относительно центра тяжести сложного сечения – выражается углом α наклона осей к горизонту, а также числовые значения главных центральных моментов.

Задача №1 взаимное расположение сечений см. ис. 2.5

Дано:

Полоса 10 x 157,5 мм

Равнополочный уголок 100x100x8 мм

Двутавр № 24 (см ГОСТ 8239-89)

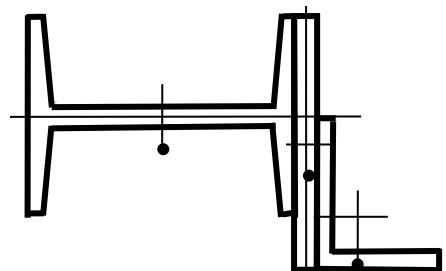


Рисунок 2.5

Задача №2 взаимное расположение сечений см. рис. 2.6

Дано:

Полоса 10 x 190 мм

Равнополочный уголок 100x100x8 мм

Швеллер № 24 (см ГОСТ 8240-97)

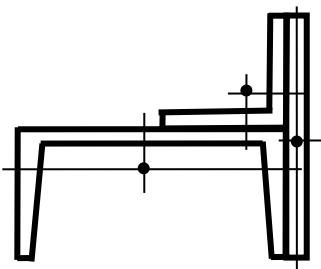


Рисунок 2.6

Задача №3 взаимное расположение сечений см. рис. 2.7

Дано:

Полоса 10 x 84 мм

Равнополочный уголок 100x100x8 мм

Швеллер № 20 (см ГОСТ 8240-97)

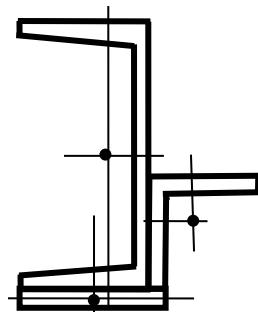


Рисунок 2.7

Задача №4 взаимное расположение сечений рис.2.8

Дано:

Полоса 12 x 162 мм

Равнополочный уголок 80x80x8 мм

Швеллер № 22 (ГОСТ 8240-97)

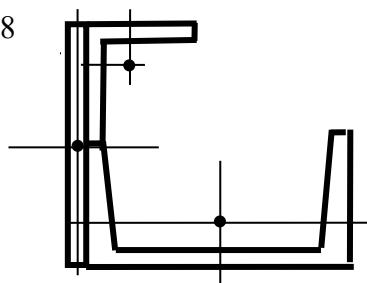


Рисунок 2.8

Задача №5 взаимное расположение сечений рис.2.9

Дано:

Полоса 16 x 180 мм

Равнополочный уголок 63x63x6 мм

Швеллер № 18 (ГОСТ 8240-97)

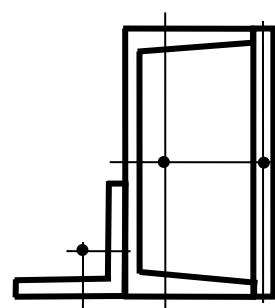


Рисунок 2.9

Глава 3. КРУЧЕНИЕ БРУСА.

Кручение – это вид нагрузки, при котором в поперечных сечениях стержня возникает крутящий момент M_k . Стержни, которые работают на кручение, называют валами.

Кручение возникает под действием внешних моментов (пар сил), действующих в плоскостях, перпендикулярных продольной оси вала. Внешние моменты передаются на вал в местах посадки на него шкивов, зубчатых колес, турбин и т.п.

Валы круглого сечения

Для данного вида нагружения основными параметрами являются прочность и жесткость. Прочность характеризуется максимальными значениями касательных напряжений в проведенных перпендикулярно оси вала сечениях, жесткость характеризуется относительным углом закручивания θ , и абсолютным углом ϕ см. рис.3.1

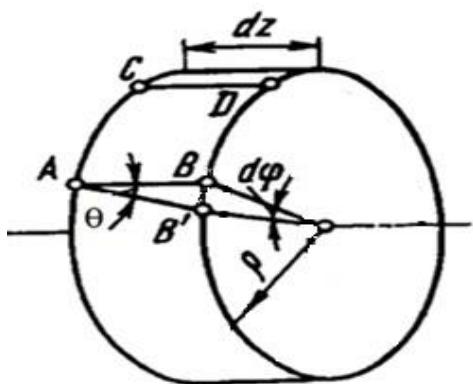


Рисунок 3.1 Относительный угол закручивания θ , и абсолютный угол ϕ

Относительный угол закручивания θ зависит от крутящего момента и жесткости поперечного сечения вала и для круглого вала круглого сечения определяется по формуле:

$$\theta = \frac{M_k}{GJ_p} \quad (3.1)$$

где M_k - крутящий момент

G – модуль сдвига

J_p – полярный момент инерции

Для данного вида нагружения форма сечения играет большую роль, поэтому вид расчетных формул для разных сечений существенно различается, на это необходимо обратить внимание.

Исходя из того, что относительный угол закручивания θ является производной от абсолютного угла поворота φ по координате оси вала, он показывает, как быстро меняется угол закручивания по длине вала и выражается формулой:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}; \quad (3.2)$$

Величина абсолютного угла определяется формулой:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_k dz}{GJ_p} \quad (3.3)$$

где M_k – крутящий момент

G – модуль сдвига

J_p полярный момент инерции сечения

Произведение GJ_p называют жесткостью сечения.

Если у рассматриваемого вала сечения в разных точках по длине вала одинаковы, а также одинаков и крутящий момент, то угол закручивания вала рассчитывается по формуле:

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_p} \quad (3.4)$$

где l - длина вала

Условие жесткости при этом приобретает вид:

$$\theta = \frac{|M_k|}{GJ_p} \leq [\theta] \quad (3.6)$$

где $[\theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания.

Условие прочности для вала круглого сечения определяется как

$$\tau_{max} = \frac{|M_k| \cdot r_{max}}{J_p} \leq [\tau] \quad (3.7)$$

Отношение $\frac{J_p}{r_{max}} = W_p$ называется полярным моментом сопротивления. Тогда условие

прочности для круглого сечения будет выглядеть так :

$$\tau_{max} = \frac{|M_k|}{W_p} \leq [\tau] \quad (3.8)$$

Валы прямоугольного сечения

В случае прямоугольного сечения вала формулы для условий прочности и условий жесткости будут иные, непосредственно связанные с значениями сторон прямоугольника.

В данном случае в отличие от круглого сечения условие жесткости необходимо рассматривать в конкретных точках, посередине сторон прямоугольника и будет оно выглядеть так :

$$\tau_{max} = \frac{|M_k|}{W_k} \leq [\tau] \quad (3.10)$$

Где W_k – рассчитывается по формуле:

$$W_k = \alpha h b^2 \quad (3.11)$$

Где

h -ширина прямоугольного сечения см. рис.3.2

b - высота прямоугольного сечения см. рис.3.2

α – коэффициент , зависящий от соотношения h/b см.таб.3.1.

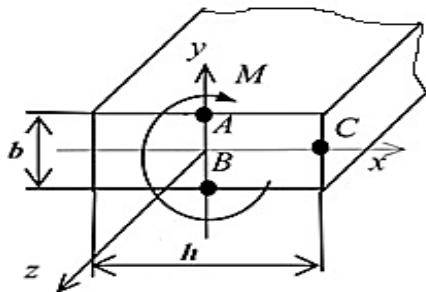


Рисунок 3.2 Параметры вала прямоугольного сечения при кручении.

Эпюры напряжений характерные для скручивания вала прямоугольного сечения приведены на рис. 3.3. Наиболее характерна точка А – в ней образуются максимальные касательные напряжения, аналогичные напряжения образуются и в симметрично расположенной точке В. В точке С и симметричной ей касательные напряжения тоже экстремальны, но значения их существенно ниже, чем в точках А и В.

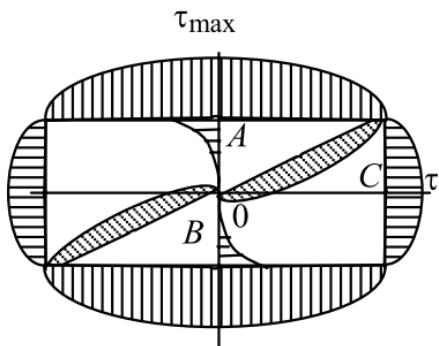


Рисунок 3.3 Распределение касательных напряжений по сечению при кручении вала прямоугольного сечения.

В точке С касательные напряжения рассчитываются по формуле:

$$\tau_c = \gamma \tau_{max} \quad (3.12)$$

Где γ – коэффициент, выбираемый из таблицы 3.1 исходя из соотношения h/b .

Абсолютный угол закручивания вала ϕ рассчитывается по формуле:

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J_k} \quad (3.13)$$

Где $J_k = \beta h b^3$

β – коэффициент выбираемый по таблице 3.1 исходя из соотношения h/b .

h и b – ширина и высота прямоугольного сечения соответственно.

Таблица 3.1 Коэффициенты для расчета касательных напряжений при кручении вала прямоугольного сечения.

h/b	α	β	γ
1,00	0,208	0,141	1,000
1,50	0,231	0,196	0,859
1,75	0,239	0,214	0,820
2,00	0,246	0,229	0,795
2,50	0,258	0,249	0,766
3,00	0,267	0,263	0,753
4,00	0,282	0,281	0,745
6,00	0,299	0,299	0,743
8,00	0,313	0,313	0,742
10,00	0,313	0,313	0,742
> 10	0,333	0,333	0,742

Итог: условия жесткости для вала с прямоугольным сечением определяются исходя из значения допустимого относительного угла закручивания:

$$\theta = \frac{|M_k|}{G J_k} \leq [\theta] \quad (3.14)$$

Условия прочности определяются исходя из значения допустимого касательного напряжения:

$$\tau_{max} = \frac{|M_k|}{W_k} \leq [\tau] \quad (3.15)$$

Далее приводится пример решения задач на кручение бруса.

Пример решения задачи №1.

Дано: вал с приложенными внешними моментами (рис. 3.4) равными:

$M_1=105$ Нм; $M_2=220$ Нм; $M_3=510$ Нм; интенсивность нагрузки $m=130$ Нм/м; длина пролета $l=0,5$ м; коэффициент $k=2$; допустимое касательное напряжение $[\tau]=96$ МПа; Допустимый относительный угол закручивания вала $[\theta]=0,5$ град/м, Модуль сдвига $G=8 \cdot 10^4$ МПа.

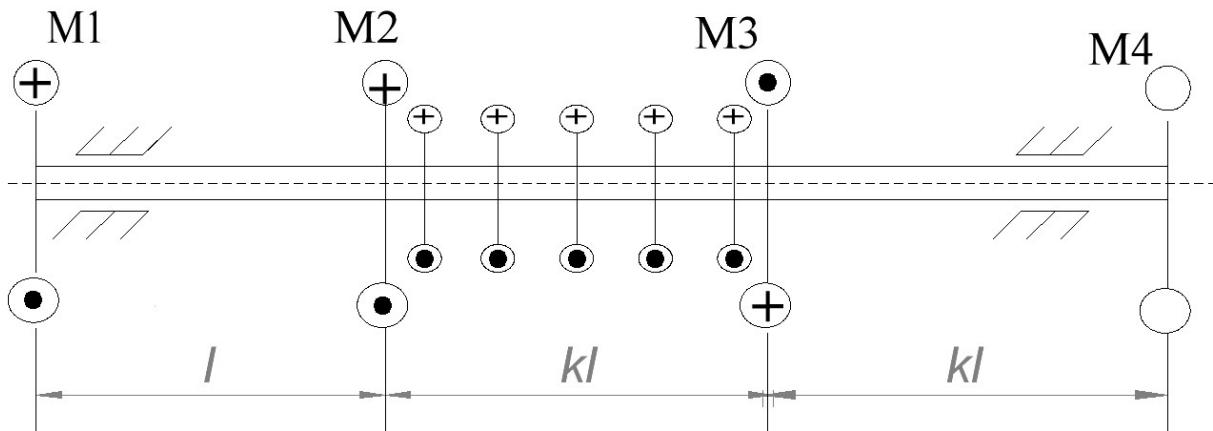


Рисунок 3.4 Схема нагружения вала.

Задание:

1. Исходя из того, что вал находится в состоянии равновесия нужно составить уравнения крутящих моментов, определить значения недостающего момента M_4 и на основании этих данных построить эпюру крутящих моментов.
2. Построить эпюру напряжений.
3. Определить размеры вала круглого сечения, удовлетворяющие условиям прочности и жесткости.

В разных учебниках «Сопротивления материалов» могут встречаться разные варианты обозначения крутящего момента например см рис.3.5:

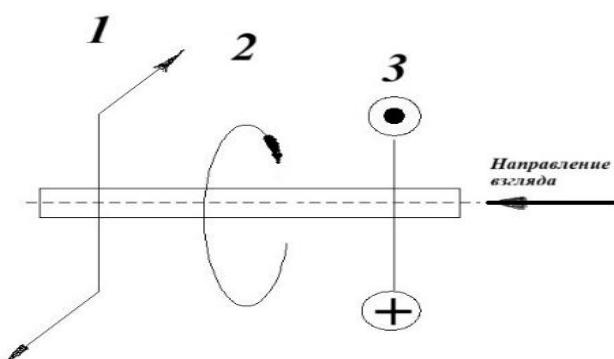


Рисунок 3.5 Варианты обозначения крутящего момента.

В данном случае используем вариант 3, как самый простой. Круг с точкой - имеет направление из чертежа к наблюдателю, а круг с крестиком – имеет направление от наблюдателя вглубь чертежа. Таким образом, если смотреть на торец вала справа налево (на чертеже обозначается стрелкой) крутящий момент будет стремиться вращать сечение вала против часовой стрелки.

Правило знаков принимаемое при расчете крутящего момента :

Крутящий момент в сечении а-а см рис.3.6 принимается положительным, если при взгляде со стороны внешней нормали к сечению скручивающий момент вращает отсеченную часть по часовой стрелке. За крутящий момент принимаем внутренний момент который создается внутри стержня в ответ на воздействие внешнего скручивающего момента.

Необходимо понимать, что правило знаков физического смысла не имеет и создано исключительно для единобразия расчетов и возможности сравнения результатов. Поэтому не следует удивляться если в каком либо учебном пособии по сопротивлению материалов встречается обратная интерпретация правила знаков – возможно это сказывается влияние специфики данного направления деятельности – например машиностроение, транспорт и строительство.

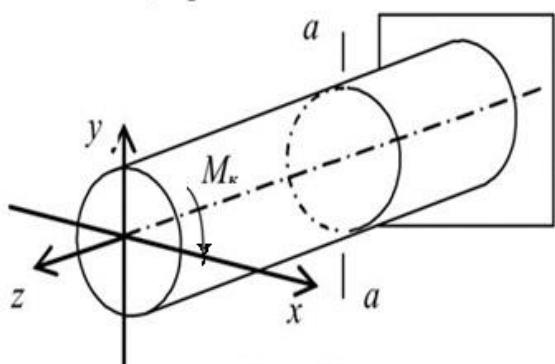


Рисунок 3.6. Иллюстрация к определению знака крутящего момента.

Шаг 1. Исходя из вышеприведенного определим знаки крутящего момента для примера приведенного на рис.3.7 :

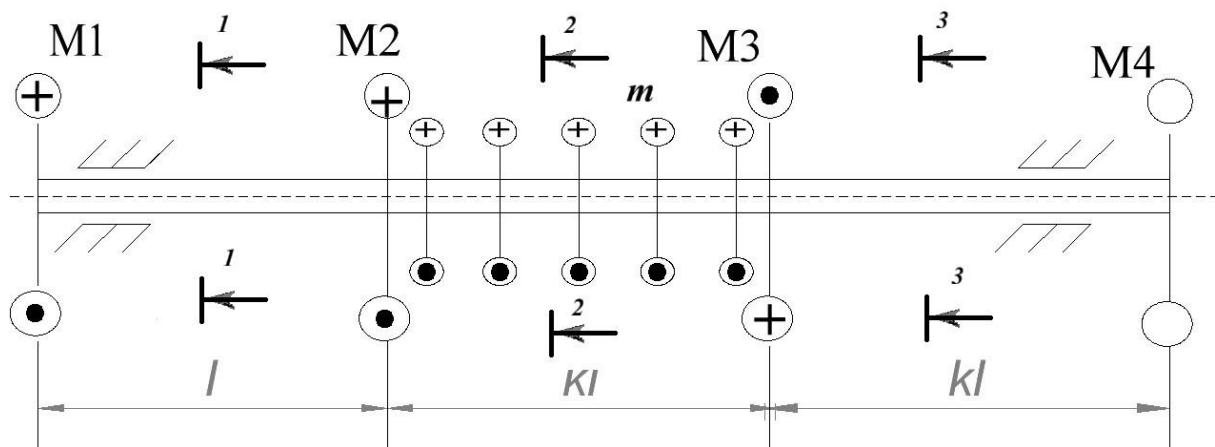


Рисунок 3.7. Проведение линий сечения и определение знака крутящего момента.

Если производить сечения вала двигаясь слева направо и смотреть на торец сечения:

Момент M_1 – стремится вращать по часовой стрелке - положительный

Момент M_2 – стремится вращать по часовой стрелке – положительный

Равномерно распределенная по длине участка стержня нагрузка с интенсивность m - стремится вращать по часовой стрелке – положительная

Момент M_3 – стремится вращать против часовой стрелки - отрицательный

Момент M_4 – необходимо определить знак и значение. Для этого используется уравнение равновесия – если вал находится в состоянии покоя, сумма всех моментов и равномерно распределенных нагрузок должна быть равна нулю. Предположим, что момент M_4 положительный тогда уравнение равновесия будет выглядеть так:

$$M_1 + M_2 + m \cdot kl - M_3 + M_4 = 0$$

Тогда $M_4 = -M_1 - M_2 - m \cdot kl + M_3$

$$M_4 = -105 - 220 - 130 \cdot 2 \cdot 0,5 + 510 = 55 \text{ Нм.}$$

Шаг 2. После определения неизвестного момента можно приступить к построению эпюор крутящих моментов (рис.3.8). Эпюра представляет собой графическое изображение крутящих моментов, возникающих внутри вала в ответ на внешние приложенные скручивающие моменты. Для построения эпюры пользуются методом сечений, т.е. изначально разделяют вал на участки границами которых являются точки приложения моментов. Затем производят мысленное рассечение вала с отбрасыванием, например правой части вала и рассмотрением условия равновесия левой части. При построении эпюор в случае положительных крутящих моментах их значения откладываются вверх от базовой линии, при отрицательных – вниз. На уровне приложения момента происходит скачок вверх или вниз на размер значения момента в зависимости от знака момента – положительного или отрицательного. Под участком вала расположенным между двумя моментами, эпюра размещается параллельно базовой линии, если же между моментами присутствует равномерно распределенная нагрузка – эпюра моментов выглядит как наклонно располагаемая прямая, с наклоном в зависимости от интенсивности нагрузки m , длины участка воздействия нагрузки и знака распределенной нагрузки – в нашем случае такая нагрузка располагается в средней части вала между моментами M_2 и M_3 . Нагрузка рассчитывается как произведение удельной интенсивности нагрузки на 1 метр (m) умноженной на число метров на которых действует эта равномерная нагрузка : $m \cdot k \cdot l$

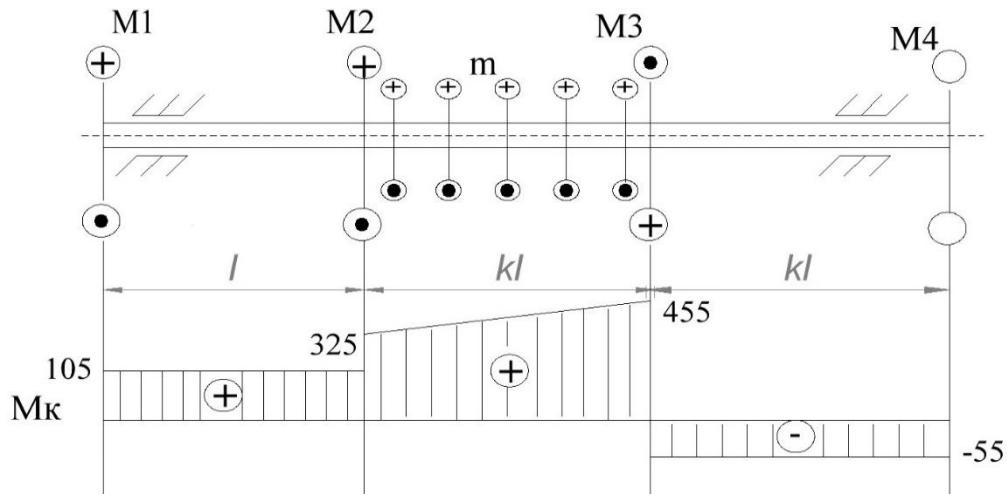


Рисунок 3.8 Эпюры крутящих моментов

По окончании построения эпюры крутящих моментов находим максимальное значение крутящего момента – оно составляет в данном случае $M_{k \max} = 455 \text{ Нм}$ – это наиболее опасное сечение, его и будем использовать в качестве максимального крутящего момента для данного вала.

Шаг 3. Определяем возможный диаметр круглого сплошного вала исходя из условий прочности, используя формулы:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_k|}{W_p} \leq [\tau]$$

Где $M_k = 455 \text{ Нм}$ – максимальный крутящий момент

W_p – полярный момент сопротивления и для круглого сплошного сечения представляет собой:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$$

Отсюда

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_k \cdot 16}{\pi [\tau]}}$$

Подставляя числовые значения получаем значение диаметра вала исходя из условий прочности:

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_k \cdot 16}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{455 \cdot 16}{3,14 \cdot 96 \cdot 1000000}} = 0,0289 \text{ м} = 2,89 \text{ см}$$

Для выполнения условия прочности необходим вал диаметром $D \geq 2,89 \text{ см}$

Шаг 4. Но, кроме того существуют требования жесткости согласно которых максимальный относительный угол закручивания должен удовлетворять условию:

$$\theta = \frac{|M_k|}{GJ_p} \leq [\theta]$$

Где $M_k=455$ Нм – максимальный крутящий момент

$$\text{Полярный момент инерции круглого сечения } J_p = \frac{|M_k|}{G[\theta]}$$

Кроме того, полярный момент для сплошного круглого сечения определяется по формуле

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

Приравняв правые части обоих уравнений получим :

$$\frac{|M_k|}{G[\theta]} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Отсюда

$$D = \sqrt[4]{\frac{M_k \cdot 32}{\pi \cdot G[\theta]}}$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{455 \cdot 32}{3,14 \cdot 8 \cdot 10000 \cdot 1000000 \cdot 0,0087}} = 0,051 \text{ м} = 5,1 \text{ см}$$

Для выполнения условия жесткости необходим вал диаметром $D \geq 5,1$ см

По результатам расчета, для выполнения условий и прочности и жесткости принимаем диаметр вала большего сечения т.е. $D \geq 5,1$ см. Окончательно округляем диаметр до $D = 6,0$ см

Шаг 5. Для определения параметров жесткости вала для каждого участка определяем угол закручивания и строим эпюру углов закручивания. Угол закручивания вала на участке рассчитывается по знакомой формуле:

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J_p}$$

$$\varphi_1 = \frac{105 \cdot 0,5 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,06^4} = 0,0005 \text{ рад.}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\frac{(325+455)}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,06^4} = 0,0005 + \frac{\frac{(325+455)}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,06^4} =$$

$$= 0,0005 + 0,00012 = 0,00062 \text{ рад}$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{(-55) \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,06^4} = 0,00062 - 0,00054 = 0,00008 \text{ рад}$$

Согласно полученным данным строим эпюру углов закручивания см рис.3.9

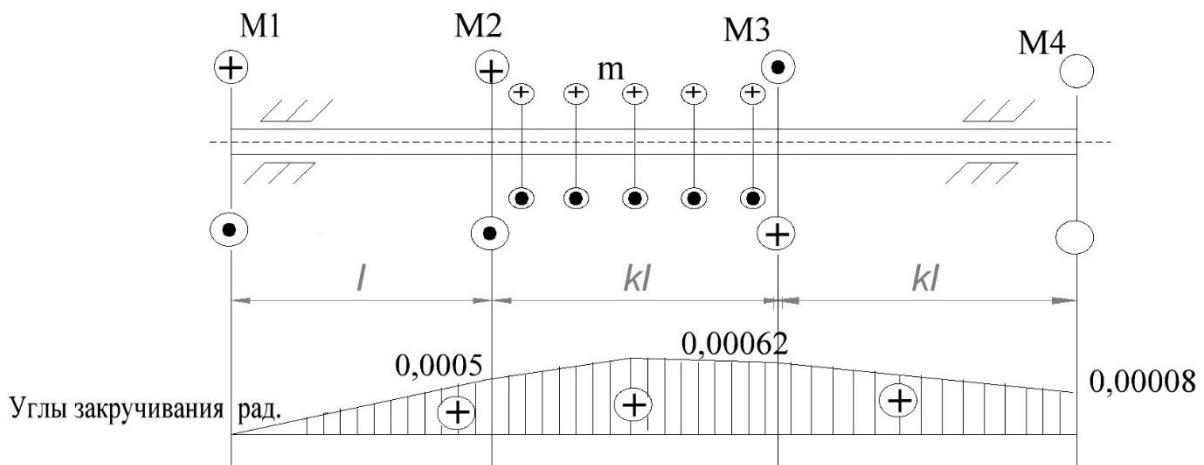


Рисунок 3.9 Эпюра углов закручивания ϕ

Заключение

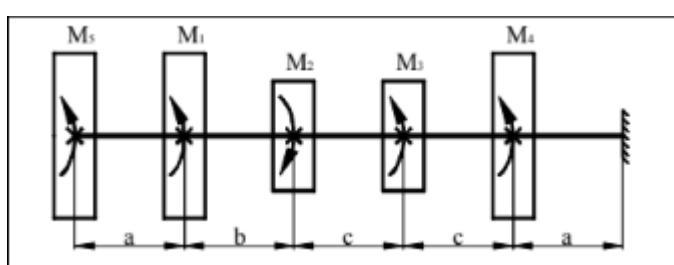
На участках вала, где эпюра моментов M_k постоянна, закономерность на эпюре углов закручивания ϕ выражается как линейная зависимость. На тех участках, где есть распределенный крутящий момент, эпюра углов закручивания ϕ выражается в виде параболы. В сечениях, где приложены сосредоточенные крутящие моменты, на эпюре углов закручивания ϕ наблюдается излом.

Задачи на кручение для самостоятельного решения.

Для заданной расчетной схемы необходимо:

- 1) Вычертить расчетную схему вала в произвольном масштабе.
- 2) Построить эпюру крутящих моментов.
- 3) Из условия прочности определить размеры поперечного сечения вала, приняв сечение вала круглым.
- 4) Построить эпюру углов закручивания для круглого вала, приняв жесткость сечения постоянной.

Задача 1.

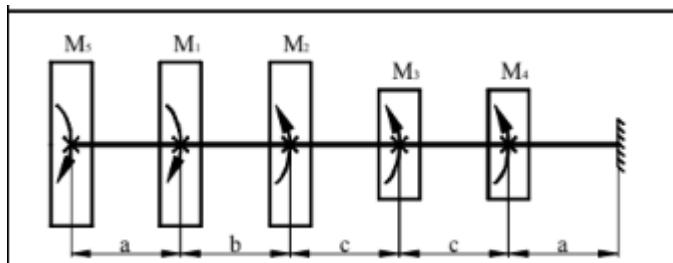


$$M_1=100H; M_2=500H; M_3=800H; \\ M_4=400H; M_5=600H$$

$a = 0,2 \text{ м}; b = 0,7 \text{ м}; c = 0,5 \text{ м};$

$[\tau] = 50 \text{ МПа}$

Задача 2.

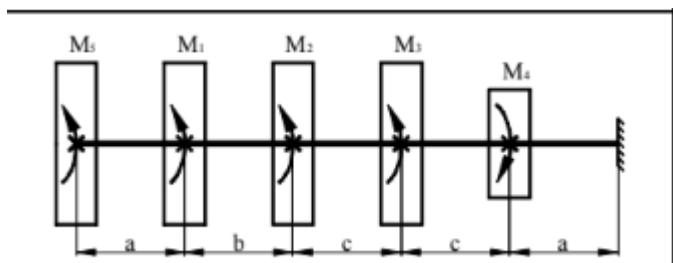


$M_1 = 200 \text{ H}; M_2 = 600 \text{ H}; M_3 = 700 \text{ H};$
 $M_4 = 300 \text{ H}; M_5 = 500 \text{ H}$

$a = 0,3 \text{ м}; b = 0,6 \text{ м}; c = 0,6 \text{ м};$

$[\tau] = 60 \text{ МПа}$

Задача 3.

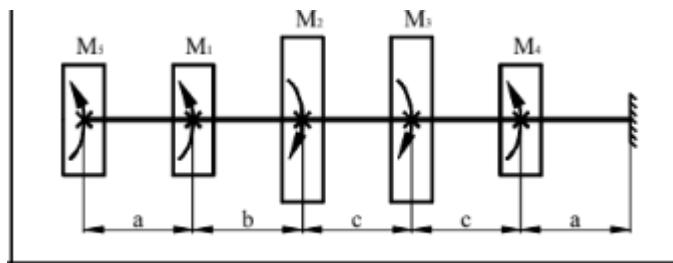


$M_1 = 300 \text{ H}; M_2 = 700 \text{ H}; M_3 = 600 \text{ H};$
 $M_4 = 800 \text{ H}; M_5 = 300 \text{ H}$

$a = 0,4 \text{ м}; b = 0,5 \text{ м}; c = 0,4 \text{ м};$

$[\tau] = 70 \text{ МПа}$

Задача 4.

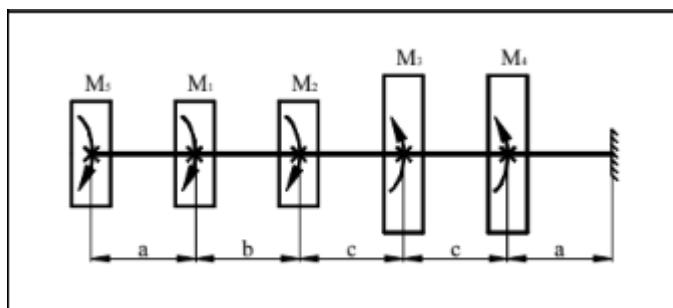


$M_1 = 400 \text{ H}; M_2 = 800 \text{ H}; M_3 = 500 \text{ H};$
 $M_4 = 700 \text{ H}; M_5 = 200 \text{ H}$

$a = 0,5 \text{ м}; b = 0,4 \text{ м}; c = 0,3 \text{ м};$

$[\tau] = 80 \text{ МПа}$

Задача 5.

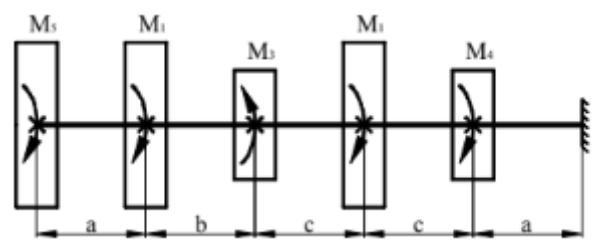


$M_1 = 500 \text{ H}; M_2 = 900 \text{ H}; M_3 = 400 \text{ H};$
 $M_4 = 600 \text{ H}; M_5 = 700 \text{ H}$

$a = 0,6 \text{ м}; b = 0,3 \text{ м}; c = 0,5 \text{ м};$

$[\tau] = 90 \text{ МПа}$

Задача 6.

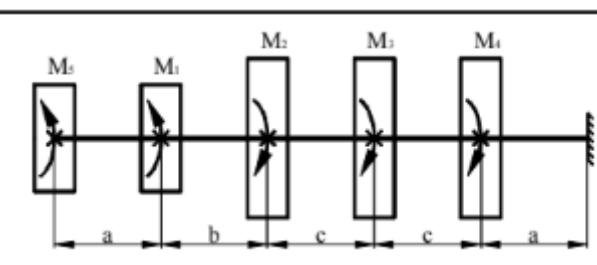


$M_1 = 600 \text{ H}; M_2 = 1000 \text{ H}; M_3 = 300 \text{ H};$
 $M_4 = 500 \text{ H}; M_5 = 800 \text{ H}$

$a = 0,7 \text{ м}; b = 0,2 \text{ м}; c = 0,8 \text{ м};$

$[\tau] = 50 \text{ МПа}$

Задача 7.

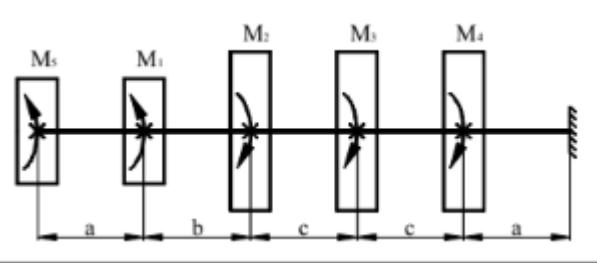


$M_1 = 700 \text{ H}; M_2 = 900 \text{ H}; M_3 = 200 \text{ H};$
 $M_4 = 600 \text{ H}; M_5 = 900 \text{ H}$

$a = 0,8 \text{ м}; b = 0,3 \text{ м}; c = 0,7 \text{ м};$

$[\tau] = 60 \text{ МПа}$

Задача 8.

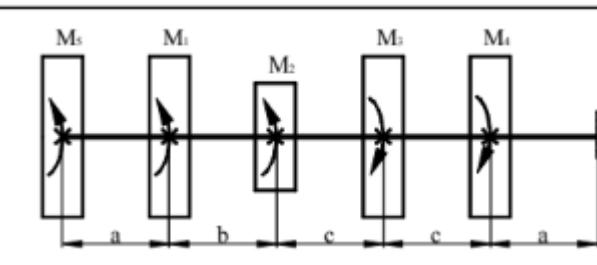


$M_1 = 800 \text{ H}; M_2 = 800 \text{ H}; M_3 = 100 \text{ H};$
 $M_4 = 300 \text{ H}; M_5 = 1000 \text{ H}$

$a = 0,7 \text{ м}; b = 0,4 \text{ м}; c = 0,3 \text{ м};$

$[\tau] = 70 \text{ МПа}$

Задача 9.

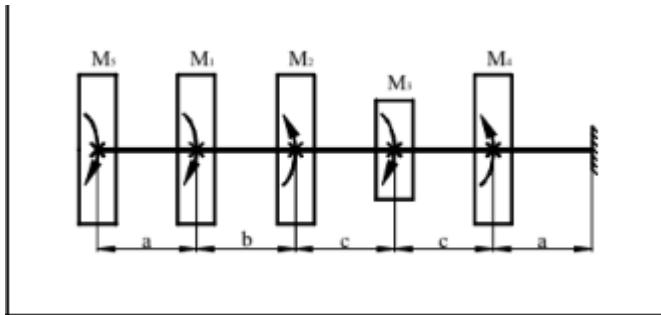


$M_1 = 900 \text{ H}; M_2 = 700 \text{ H}; M_3 = 1000 \text{ H};$
 $M_4 = 200 \text{ H}; M_5 = 400 \text{ H}$

$a = 0,6 \text{ м}$; $b = 0,5 \text{ м}$; $c = 0,4 \text{ м}$;

$[\tau] = 80 \text{ МПа}$

Задача 10.



$M_1 = 1000 \text{ H}$; $M_2 = 100 \text{ H}$; $M_3 = 900 \text{ H}$;
 $M_4 = 300 \text{ H}$; $M_5 = 100 \text{ H}$

$a = 0,5 \text{ м}$; $b = 0,6 \text{ м}$; $c = 0,2 \text{ м}$;

$[\tau] = 90 \text{ МПа}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Терегулов И.Г. «Сопротивление материалов и основ теории упругости и пластичности» М.: Высшая школа, 1984
2. Тимошенко С.П. Механика материалов: Учебник для вузов / Гере, Джеймс Монро. - 2-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2002. - 672с
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712с.
4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов : Учебник для вузов / 11-е изд., стереотип. - М. : МГТУ им.Н.Э.Баумана, 1999. - 592с.
5. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: «Высшая школа», 2000. – 560с.
6. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. -М.: Изд-во «Наука», 1976. – 607с.
7. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука., ред. Физ.мат.лит. – 1979.- 384с.
8. Варданян Г.С., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов. – М.: Инфра – М., 2003. – 478с.
9. Дарков А.В., Шapiro Г.С. Сопротивление материалов. -М.: «Высшая школа», 1989. – 624с.
10. Долинский Ф.В., Михайлов М.Н. Краткий курс сопротивления материалов. – М.: «Высшая школа», 1988. – 431с.
11. Копнов В.А., Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов. Руководство для решения задач и выполнения расчетно-графических работ. – М.: «Высшая школа», 2005. – 351с.
12. Кочетов В.Т., Кочетов М.В., Павленко А.Д. Сопротивление материалов. – СПб.: БХВ – Петербург, 2004. – 544с.
13. Костенко Н.А., Балысникова С.В., Волошановская Ю.Э. Сопротивление материалов. – М.: «Высшая школа», 2000. – 430с.
14. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: «Наук.думка», 1988. – 736с.
15. Сопротивление материалов /Под редакцией Смирнова А.Ф./ М.: «Высшая школа», 1975. – 480с.
16. Строительная механика. Под редакцией Даркова А.В. - М.: «Высшая школа», 1976. – 600с.
17. Степин П.А. Сопротивление материалов. – М.: «Высшая школа», 1988. – 366с.

18. Серазутдинов М.Н., Островская Э.Н., Петухов Н.П., Сидорин С.Г. Механика. Вопросы теоретической механики, сопротивления материалов, деталей машин. Казань: Центр инновационных технологий, 2007. – 330с.