ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г. Шевченко

Физико-математический факультет

Кафедра Математического анализа и приложений

МАТЕМАТИКА

Сборник контрольных материалов

Тирасполь – 2018

УДК 51 (082)
ББК В1я43
М34

Составители:
Н.В. Косюк ст. преподаватель кафедры математического анализа и приложений

Рецензенты:
Г.И. Ворническу, к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой математического анализа и приложений
Н.Г. Леонова, к.соц.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики

М34 Математика: Сборник контрольных материалов / Сост.: Н.В. Косюк. Тирасполь, 2018. - 78с.

В пособии рассматриваются варианты заданий индивидуальной работы, методические указания выполнения индивидуальной работы, примерные варианты заданий к зачету, список вопросов для сессионного контроля по дисциплине «Математика», литература и приложение, в котором приведены таблицы производных и интегралов элементарных функций.

Пособие рекомендуется студентам бакалаврам аграрно-технологического факультета первого курса заочного отделения направлений «4.35.03.04 Агрономия» и «4.35.03.05 Садоводство»; может быть использовано преподавателями для проведения практических и индивидуальных заданий со студентами дневного отделения, как данных направлений, так и других факультетов.

УДК 51 (082)
ББК В1я43

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

© Н.В. Косюк, составление, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ ***5***

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ. ***27***

ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЗАЧЕТУ ПО МАТЕМАТИКЕ ***63***

СПИСОК ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ ПО МАТЕМАТИКЕ ***70***

ЛИТЕРАТУРА. ***73***

ПРИЛОЖЕНИЯ ***74***

ВВЕДЕНИЕ

Студенты-заочники аграрно-технического факультета направлений «4.35.03.04 Агрономия», «4.35.03.05 Садоводство» изучают дисциплину «Математика» в первом семестре, которая состоит из алгебры, аналитической геометрии, математического анализа и элементов математической статистики. Согласно стандартам третьего поколения большее число часов, отведенное на дисциплину, отведено самостоятельной работе студентов, которая включает в себя изучение теоретического материала по учебникам, выполнение упражнений, решение задач с использованием учебных и методических пособий.

В соответствии с учебным планом после изучения как теоретического так и практического материала студенты должны сдать зачет по курсу «Математика». Для того чтобы курс был хорошо освоен и своевременно сдан зачет, студентам предлагается выполнить индивидуальную работу, которая содержит подборку практических заданий по всему курсу. Каждое задание подробно разбирается. Это делается для того чтобы помочь студентам самостоятельно разобраться в некоторых разделах дисциплины.

В настоящем пособии приводятся:

- варианты заданий для индивидуальной работы;
- образец выполнения индивидуальной работы;
- примерные варианты зачетной работы;
- список вопросов для сессионного контроля;
- литература;
- таблицы производных и интегралов.

Программа дисциплины составлена с учетом требований Федерального Государственного образовательного стандарта ВО третьего поколения по направлениям «4.35.03.04 Агрономия» и «4.35.03.05 Садоводство».

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задание 1

Вычислите определитель четвертого порядка путем разложения по заданной строке или столбцу

1. $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 9 & 6 \\ 3 & 15 & -9 & 8 \\ 1 & 12 & 6 & 6 \\ -4 & 20 & 1 & 10 \end{vmatrix}$

по четвертой строке

2. $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 & -5 \\ 1 & 4 & 2 & -6 \\ -4 & 6 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & -4 & -6 \end{vmatrix}$

по третьей строке

3. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 3 \\ 9 & 7 & 6 & 8 \\ -5 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

по второму столбцу

4. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 12 & 10 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

по первому столбцу

11. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 & -2 \\ 6 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 8 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

по четвертому столбцу

12. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 12 & 10 \\ 5 & -2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

по третьему столбцу

13. $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 2 & -7 \\ 4 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & -4 \end{vmatrix}$

по третьей строке

14. $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & 9 \\ -1 & -4 & 2 & 4 \\ -2 & 11 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

по третьей строке

5. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

по первой строке

6. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 9 & 10 \\ 3 & -1 & 6 & 12 \\ 6 & 9 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

по третьей строке

7. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

по первому столбцу

8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 3 & 1 \\ 12 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

по третьему столбцу

9. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 13 & 8 & 4 & 2 \\ 6 & -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

по четвертому столбцу

10. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

по второй строке

15. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & -3 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

по четвертому столбцу

16. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 & 5 \\ 6 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

по четвертой строке

17. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -4 \\ -4 & 6 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & -6 & 6 \end{vmatrix}$

по третьему столбцу

18. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \\ 8 & 1 & 6 & 2 \\ 17 & 12 & 8 & -6 \end{vmatrix}$

по третьему столбцу

19. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \\ 8 & 1 & 6 & 2 \\ 17 & 12 & 8 & -6 \end{vmatrix}$

по третьему столбцу

20. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 10 & -1 \end{vmatrix}$

по второй строке

Задание 2

Даны квадратные матрицы A и B размерности 3×3. Требуется определить их сумму и произведение.

1.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -2 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ -4 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

2.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 4 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 2\\ 4 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

3.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

4.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

5.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

6.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

11.

$$A=\begin{pmatrix}1- & 2 & 6\\ 2- & 4 & 1\\ 3- & 5 & 2\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

12.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

13.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -1\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

14.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 2 & -5 & -2\end{pmatrix}$$

15.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 2 & -5 & -2\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

16.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

7.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

8.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$$

9.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & -4 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

10.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1- & 2 & 6\\ 2- & 4 & 1\\ 3- & 5 & 2\end{pmatrix}$$

17.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -7\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

18.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -7\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

19.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

20.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

Задание 3.

Дан многочлен $f(x)$ третьей степени. Найдите значение этого многочлена от матрицы А.

1. $f(x)=2x^3+4x^2-2x-9$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

2. $f(x)=x^3+3x^2-x-10$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}$$

3. $f(x)=6x^3-x^2+4x-10$

11. $f(x)=8x^3-3x^2+6x-8$

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 2 & 5 & 1\\ -1 & -2 & -9\end{pmatrix}$$

12. $f(x)=-7x^3+2x^2+4x-2$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 4\\ 2 & 2 & -6\\ 10 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

13. $f(x)=-6x^3+x^2+3x-1$

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 9 & 2\\ 2 & 4 & -3\\ 1 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

4. $f(x)=2x^3+4x^2-4x+4$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 5 & -4 & 3\\ 12 & -10 & 5\end{pmatrix}$$

5. $f(x)=x^3+3x^2-5x+5$

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 6 & 5 & -3\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

6. $f(x)=4x^3+x^2-2x+2$

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 5 & -4 & 2\\ 8 & -2 & 10\end{pmatrix}$$

7. $f(x)=5x^3+2x^2-x+1$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 5 & 2 & 4\\ -1 & 5 & -1\end{pmatrix}$$

8. $f(x)=-3x^3+4x^2+3x-6$

$$A=\begin{pmatrix}7 & 6 & 3\\ 4 & -6 & 2\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

9. $f(x)=5x^3-2x^2+5x+6$

$$A=\begin{pmatrix}6 & 2 & -1\\ 6 & 5 & -2\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}6 & 6 & 5\\ -4 & 2 & 3\\ 8 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

14. $f(x)=5x^3-4x^2-3x-4$

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 4 & 5 & -3\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix}$$

15. $f(x)=3x^3-3x^2+4x-5$

$$A=\begin{pmatrix}6 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & 10 & 6\end{pmatrix}$$

16. $f(x)=6x^3-5x^2-2x+4$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ -3 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

17. $f(x)=-2x^3-4x^2+2x+9$

$$A=\begin{pmatrix}3 & -8 & 3\\ 2 & -5 & 0\\ 3 & -6 & 3\end{pmatrix}$$

18. $f(x)=-3x^3-5x^2+3x+8$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 4\\ 1 & 4 & 2\\ -4 & 2 & 10\end{pmatrix}$$

19. $f(x)=3x^3+5x^2-3x+3$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 8 & 8 & -6\end{pmatrix}$$

10. $f(x)=7x^3-2x^2+5x-9$

$$A=\begin{pmatrix}6 & 2 & 2\\ 4 & 6 & -3\\ 1 & -1 & 8\end{pmatrix}$$

20. $f(x)=-x^3-3x^2+x+10$

$$A=\begin{pmatrix}7 & 5 & 5\\ 2 & 6 & 3\\ 0 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

Задание 4

Дана матрица A размерности 3×3. Требуется найти матрицу обратную матрице A с помощью алгебраических дополнений и таблиц Гаусса. В конце сделайте проверку, используя единичную матрицу

1. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix}5 & 8 & 1\\ 3 & -2 & 6\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -7\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 5

Решите систему линейных алгебраических уравнений: а) методом определителей (Крамера); б) методом Гаусса. В конце сделайте проверку.

1. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -7 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 16 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -10 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$

11. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 = -4 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -3x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ -6x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -14 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = -7 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -12 \end{cases}$

20. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

Задание 6

Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Требуется найти:

а) длину и уравнение стороны *BA*;

б) длину и уравнение высоты *CN*;

в) медианы *AM* и *BK*, и точку их пересечения;

г) площадь треугольника ABC двумя способами.

Сделать чертеж.

№ п/п	$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$	№ п/п	$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$
1.	A(2;0); B(0;3); C(-3;-4)	**11.**	A(-4;9); B(2;0); C(7;15)
2.	A(3;-1); B(-1; 1); C(2;-3)	**12.**	A(1;-1); B(3;5); C(10;-6)
3.	A(3; -2); B(4;0); C(1;-2)	**13.**	A(9;4); B(3; 3); C(7;12)
4.	A(5;-3); B(3;-1); C(0;-1)	**14.**	A(-4;-1); B(4;7); C(8;-4)
5.	A(9;4); B(4;-2); C(3;0)	**15.**	A(-2;4); B(6;10); C(10;1)
6.	A(-8;1); B(0;7); C(4;4)	**16.**	A(2;3); B(10;9); C(14;-2)
7.	A(1;0); B(9;6); C(13;-5)	**17.**	A(-3;10); B(9;1); C(7;15)
8.	A(4;1); B(-1;3); C(5;-5)	**18.**	A(8;-5);B(4;-7); C(8;10)
9.	A(0;3); B(8;-6); C(6;8)	**19.**	A(-5;7); B(7;-2); C(7;12)
10.	A(3;2); B(2;-4); C(5;-6)	**20.**	A(3;-2); B(5;4); C(9;-7)

Задание 7

Найдите пределы следующих функций:

1. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2 + x - 2}{2x^2 + 5x + 3}$ при a) $x_0 = 3$; b) $x_0 = \infty$; c) x_0=-1;

2) $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{\sqrt{x-8} - \sqrt{12-x}}{x-10}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \sin 2x \, ctg 7x$

2. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 7x + 2}$ при a) $x_0 = 1$; b) $x_0 = -2$; c) $x_0 = \infty$;

2) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x-6}{\sqrt{x-5} - \sqrt{7-x}}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} tg 3x \, ctg 5x$

3. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2+x-3}$ при a) $x_0=-3$; b) $x_0=1$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}}{x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{tg4x}$;

4. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-8x-3}{2x^2-7x+3}$ при a) $x_0=4$; b) $x_0=3$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\arcsin 2x}$;

5. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+x-1}{3x^2+4x+1}$ при a) $x_0=5$; b) $x_0=-1$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{8-x}}{x-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg7x}{ctg2x}$;

6. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2-5x+3}$ при a) $x_0=2$; b) $x_0=1$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}{x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{arctg3x}$;

7. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+5x-2}{2x^2+5x+2}$ при a) $x_0=3$; b) $x_0=-2$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg4x}{\sin 3x}$;

8. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-x-3}{3x^2+5x+2}$ при a) $x_0=4$; b) $x_0=-1$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} tg5x\, ctg7x$;

9. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$ при a) $x_0=2$; b) $x_0=-3$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-3}-\sqrt{7-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 6x\, ctg2x$

10. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2-3x+1}$ при a) $x_0=-4$; b) $x_0=1$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{5-x}}{x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{3x}$;

11. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2-5x-2}$ при a) $x_0=5$; b) $x_0=2$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{tg5x}$;

12. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-x-4}{2x^2+3x+1}$ при a) $x_0=3$; b) $x_0=-1$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}}{x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$

13. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+4x-4}{2x^2+7x-6}$ при a) $x_0=1$; b) $x_0=-2$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg2x}{ctg5x}$

14. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-7x+4}{2x^2-x-1}$ при a) $x_0=-4$; b) $x_0=1$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}}{x-7}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 6x}$

15. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2+2x-6}{6x^2-8x+2}$ при a) $x_0=4$; b) $x_0=1$ c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt{x-3}-\sqrt{13-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{arctg4x}$;

16. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+4x-7}{7x^2-3x-4}$ при a) $x_0=5$; b) $x_0=1$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{1+2x}-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{4x}$;

17. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2+5x-7}$ при a) $x_0=2$; b) $x_0=1$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{\sqrt{7x+2}-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg4x$

18. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+1}$ при a) $x_0=3$; b) $x_0=1$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{2tg3x}$

19. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2+2x-3}$ при a) $x_0=-2$; b) $x_0=1$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}$;

20. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+4}$ при a) $x_0=5$; b) $x_0=1$; c) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{5x^2}$

Задание 8

Найдите производную $y'=\dfrac{dy}{dx}$, пользуясь формулами дифференцирования.

1 а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; б) $y=\left(3^{\sin 4x}-tg^2 2x\right)^3$; в) $y=\left(\sin x+\sqrt{x}\right)^{2x+3}$

2 а) $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+3}}{x+4}$; б) $y=\left(2^{x^2}-\cos 3x\right)^2$; в) $y=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{x+4}$

3 а) $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^3+3x-2}}$; б) $y=\left(e^{\sin x}+3x\right)^4$; в) $y=\left(x^3+4\right)arctg3x$

4 а) $y=\dfrac{3x+5}{\sqrt{x^2-5x+9}}$; б) $y=\left(\sqrt[3]{x}+3^{\sin 2x}\right)^3$; в) $y=\left(tgx+\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

5 а) $y=\dfrac{3+x}{\sqrt{x^3-6x+15}}$; б) $y=\left(2^{\sin^2 x}-\cos 2x\right)^4$; в) $y=e^{arctg\sqrt{1-x}}$

6 а) $y=\dfrac{8x+3}{\sqrt{x^2+8x-1}}$; б) $y=\left(2^{tg3x}-\dfrac{2}{\cos 3x}\right)^4$; в) $y=\left(4-\dfrac{3}{x}\right)^{x^2}$

7 а) $y=\dfrac{7x-2}{\sqrt{x^2-7x+4}}$; б) $y=\left(4^{\sin 3x}+\cos^3 x\right)^5$; в) $y=(x+1)^{\sin x}$

8 а) $y=\dfrac{3x-10}{\sqrt{x^2+6x+1}}$; б) $y=\left(5^{ctg3x}+\dfrac{4}{\sin 3x}\right)^3$; в) $y=(1-x)^{\sqrt{x}}$

9 а) $y=\dfrac{2x-5}{\sqrt{x^2+9x-6}}$; б) $y=\left(6^{\sin^2 x}-\cos^2 2x\right)^3$; в) $y=\left(x^3+2\right)^{2/x}$

10 а) $y=\dfrac{9x+5}{\sqrt{x^2-9x+1}}$; б) $y=\left(2^{\cos 2x}+\sqrt[3]{x^2}\right)^4$; в) $y=(1+tg2x)^{\cos 2x}$

11 а) $y=\dfrac{5x+4}{\sqrt{x^3+3x}}$; б) $y=\left(2^{tg4x}+\arcsin 3x\right)^2$; в) $y=(arctg2x)^{\sin x}$

12 а) $y=\dfrac{4x+1}{\sqrt[3]{x^2-6x}}$; б) $y=\left(3^{\arcsin x}-\sqrt{1-x^2}\right)^4$; в) $y=(arctgx+1)^{\sin x}$

13 а) $y=\dfrac{\sqrt{7x^2+1}}{3x-2}$; б) $y=\left(e^{2\sin x}-\log_3 2x\right)^{-1}$; в) $y=(\cos 3x-1)^x$

14 а) $y=\dfrac{\sqrt{3-4x^2}}{2-7x}$; б) $y=\left(\arcsin 8x+x^2\right)^2$; в) $y=\left(x^2-1\right)^{\arccos x}$

15 а) $y=(8-x)^2\sqrt{3x^2+1}$; б) $y=\left(tg4x+\sqrt[3]{x}\right)^5$; в) $y=\left(1+x^2\right)arctgx$

16 а) $y=\dfrac{2x-7}{\sqrt{x^2-5x}}$; б) $y=\left(3^{\sin 4x}-\cos 4x\right)^5$; в) $y=arctg\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)$

17 а) $y=\dfrac{3x+8}{\sqrt{x^3-9x}}$; б) $y=\left(5^{x\sin x}+\cos x\right)^3$; в) $y=arctg\ln\left(\sqrt{2+5x}\right)$

18 а) $y=\dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2+5x}}$; б) $y=\left(3^{x\cos x}-\sin x\right)^5$; в) $y=\sqrt{\arcsin\left(\dfrac{2+x}{x}\right)}$

19 а) $y=\dfrac{2x^3-7}{\sqrt{x^4+2x}}$; б) $y=\left(4^{\arccos 2x}-\sqrt{1-4x^2}\right)^4$; в) $y=\ln\left(\sin\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)\right)$

20 а) $y=\dfrac{6x-1}{\sqrt[3]{x^3+3}}$; б) $y=\left(4^{tg2x}+\ln\left(1+4x^2\right)\right)^4$; в) $y=ctg^3\left(\dfrac{x+2}{x^2-x+1}\right)$

Задание 9

Заменяя полное приращение функции ее дифференциалом, найдите приближенное значение функции y=f(x) в точке $x=x_2$, исходя из ее точного значения в точке $x=x_1$.

1.	а) $y=\sqrt{5x^2-4}$; $x_1=1$; $x_2=1.92$.	б) $y=\cos x$; $x_1=60^0$; $x_2=58^0$
2.	а) $y=\sqrt{2x^2+8x+1}$; $x_1=2$; $x_2=2.02$.	б) $y=tgx$; $x_1=45^0$; $x_2=44^0$
3.	а) $y=\sqrt{2x^2+9x+1}$; $x_1=2$; $x_2=1.97$.	б) $y=\sin x$; $x_1=30^0$; $x_2=28^0$
4.	а) $y=\sqrt{3x^3+5x+4}$; $x_1=3$; $x_2=2.85$.	б) $y=\sin x$; $x_1=45^0$; $x_2=47^0$
5.	а) $y=\sqrt{3x^3+8x+16}$; $x_1=3$; $x_2=3.15$.	б) $y=ctgx$; $x_1=45^0$; $x_2=48^0$
6.	а) $y=\sqrt[3]{3x^3+10x+14}$; $x_1=3$; $x_2=2.92$.	б) $y=\cos x$; $x_1=60^0$; $x_2=62^0$
7.	а) $y=\sqrt[4]{5x^2-2x+9}$; $x_1=4$; $x_2=4.2$.	б) $y=tgx$; $x_1=30^0$; $x_2=32^0$
8.	а) $y=\sqrt[4]{6x^2-5x+5}$; $x_1=4$; $x_2=3.96$.	б) $y=\sin x$; $x_1=45^0$; $x_2=44^0$
9.	а) $y=\sqrt[3]{3x^2-2x-1}$; $x_1=5$; $x_2=4.92$.	б) $y=\cos x$; $x_1=45^0$; $x_2=43^0$

10.	а) $y=\sqrt{4x^2+2x-5}$; $x_1=-3;\ x_2=-3.2$.	б) $y=\sin x$; $x_1=60^0;\ x_2=58^0$
11.	а) $y=\sqrt{3x^3-5x^2+5}$; $x_1=2;\ x_2=2.09$.	б) $y=ctgx$; $x_1=30^0;\ x_2=31^0$
12.	а) $y=\sqrt{4x^2+3x+6}$; $x_1=-2;\ x_2=-2.12$.	б) $y=\cos x$; $x_1=45^0;\ x_2=46^0$
13.	а) $y=\sqrt{5x^2+2x-3}$; $x_1=-3;\ x_2=-2.92$.	б) $y=tgx$; $x_1=60^0;\ x_2=63^0$
14.	а) $y=\sqrt{5x^2-3x+8}$; $x_1=-4;\ x_2=-4.2$.	б) $y=ctgx$; $x_1=45^0;\ x_2=43^0$
15.	а) $y=\sqrt[3]{4x^2-6x-5}$; $x_1=-5;\ x_2=4.9$.	б) $y=\sin x$; $x_1=30^0;\ x_2=32^0$
16.	а) $y=\sqrt[3]{2x^3+x+7}$; $x_1=-4;\ x_2=-4.18$.	б) $y=\cos x$; $x_1=30^0;\ x_2=31^0$
17.	а) $y=\sqrt[3]{5x^2-6x+1}$; $x_1=-3;\ x_2=-3.12$.	б) $y=tgx$; $x_1=30^0;\ x_2=29^0$
18.	а) $y=\sqrt[3]{2x^2-3x-1}$; $x_1=-5;\ x_2=-5.12$.	б) $y=ctgx$; $x_1=45^0;\ x_2=46^0$
19.	а) $y=\sqrt{4x^2-6x+7}$; $x_1=3;\ x_2=2.97$.	б) $y=\sin x$; $x_1=45^0;\ x_2=46^0$
20.	а) $y=\sqrt{7x^2-6x+9}$; $x_1=-2;\ x_2=-2.14$.	б) $y=tgx$; $x_1=45^0;\ x_2=47^0$

Задание 10

Найдите неопределенные интегралы, результаты проверить дифференцированием.

1. а) $\int \frac{3x-2}{(x+1)(x-2)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}dx$; в) $\int x^2 \cos 3x dx$

2. а) $\int \frac{2x+1}{(x+3)(x-1)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}dx$; в) $\int e^x \sin 2x dx$

3. а) $\int \frac{4x-3}{(x+2)(x-4)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}dx$; в) $\int x \ln x dx$

4. а) $\int \frac{2x-1}{(x+5)(x-1)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}+3}{x-9}dx$; в) $\int x^2 \sin 3x dx$

5. а) $\int \frac{3x+1}{(x-2)(x-1)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}+5}{x-25}dx$; в) $\int x \cos 4x dx$;

6. а) $\int \frac{3x-4}{(x-5)(x+1)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}-6}{x-36}dx$; в) $\int x^2 \ln x dx$

7. а) $\int \frac{5x-1}{(x+4)(x+1)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}-7}{x-49}dx$; в) $\int e^x \cos 3x dx$;

8. а) $\int \frac{4x+3}{(x-2)(x+2)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}+4}{x-16}dx$; в) $\int x \sin 2x dx$;

9. а) $\int \frac{(6x-1)dx}{(x-3)(x+4)}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}dx$; в) $\int x \cos 4x dx$

10. *а*) $\int \frac{4x+3}{(x-3)(x+2)}dx$; *б*) $\int \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}dx$; *в*) $\int x^2 \sin 2x dx$;

11. а) $\int \frac{3x-2}{(x+4)(x-2)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}-6}{36-x}dx$; в) $\int x arctg x dx$

12. а) $\int \frac{(6x-1)dx}{(2x-3)(x+4)}$; б) $\int \frac{\sqrt{4x}}{3+\sqrt{4x}}dx$; в) $\int x \cos 10x dx$

13. а) $\int \frac{(7x-3)dx}{(x-5)(3x+1)}$`; б) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-1}dx$; в) $\int x \sin 7x dx$

14. а) $\int \frac{(2x+3)dx}{(3x-1)(3x+2)}$; б) $\int \frac{7-\sqrt{x}}{x-49}dx$; в) $\int 3\sqrt[3]{x}\ln x dx$

15. а) $\int \frac{6x+5}{(x+5)(2x+3)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}+7}dx$; в) $\int x\sin 3x\, dx$;

16. а) $\int \frac{2x-4}{(x-5)(3x+1)}dx$; б) $\int \frac{3dx}{2-\sqrt[4]{x+1}}$; в) $\int 2xe^{-7x}dx$

17. а) $\int \frac{6x+1}{(3x-4)(x-2)}$; б) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x-2}}$; в) $\int x\sin 11x dx$

18. а) $\int \frac{8x+3}{(4x-1)(3-x)}dx$; б) $\int \frac{3\sqrt[3]{2x}}{1-\sqrt[3]{2x}}dx$; в) $\int x\cos 5x dx$

19. а) $\int \frac{4x+3}{(2x-5)(x+3)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}-2}dx$; в) $\int 7\ln(x+4)dx$

20. а) $\int \frac{(2x+5)dx}{(x+4)(x-5)}$; б) $\int \frac{7+\sqrt{x}}{x-49}dx$; в) $\int 3xe^{2x}dx$

Задание 11

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Сделать чертеж.

1. $y = -x^2 - 4x + 5$
$y = x^2 + 2x - 3$

2. $y = -x^2 - 5x + 6$
$y = 2x + 6$

3. $y = -x^2 - 7x + 8$
$y = x^2 + 5x - 6$

4. $y = x^2 - 7x + 12$
$y = 12 - x$

5. $y = -x^2 + 3x - 2$
$y = x^2 - 5x + 4$

11. $y = -x^2 + 5x - 4$
$y = x^2 - 7x + 12$

12. $y = x^2 - 8x + 15$
$y = 15 - 4x$

13. $y = -x^2 + x + 12$
$y = x^2 - 4x$

14. $y = -x^2 + x + 12$
$y = 3x + 4$

15. $y = -x^2 + 4x + 5$
$y = x^2 - 6x + 5$

6. $y = -x^2 - 7x + 8$
$y = 5x + 28$

7. $y = -x^2 + 6x - 5$
$y = x^2 - 8x + 15$

8. $y = x^2 - 5x + 4$
$y = 3x - 8$

9. $y = -x^2 - 7x + 8$
$y = x^2 + 11x + 24$

10. $y = x^2 - 6x + 5$
$y = -2x + 5$

16. $y = -x^2 + 3x - 2$
$y = 3x - 6$

17. $y = -x^2 - 3x + 4$
$y = x^2 + 5x + 4$

18. $y = x^2 + 7x + 6$
$y = 6 - x$

19. $y = -x^2 - 5x + 6$
$y = x^2 + 7x + 6$

20. $y = x^2 + 11x + 24$
$y = -2x - 12$

Задание 12

Дана функция двух переменных $z=f(x;y)$ Требуется: а) исследовать эту функцию на экстремум; б) найти условный экстремум при условии $g(x;y) = C$ двумя способами.

1. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - 2y^2$; $3x + 4y = 12$

2. $z = 2x^2 - 6xy + 5x + y^2 - 4y$; $5x + 4y = 20$

3. $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2xy - 4x - 5y$; $3x - 4y = 12$

4. $z = 14x^2 + 27xy - 69x - 54y + 7y^2$; $3x + 2y = 6$

5. $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x - 12y + 7$; $3x + 4y = -12$

6. $z = x^2 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$; $2x + 3y = 6$

7. $z = x^2 - y^2 + 4x - 4y$; $6x + 3y = 18$

8. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 4$; $3x + 5y = 15$

9. $z = 6x^2 + y^2 - 2x + 4xy - 2y - 3$; $4x + 3y = 12$

10. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$; $7x + 2y = 14$

11. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$; $2x + 5y = 10$

12. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y - 1;$ $\quad 7x - 2y = 14$

13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x - 8y + 5;$ $\quad 3x + 4y = 12$

14. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4;$ $\quad 5x - 2y = 10$

15. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1;$ $\quad 3x - 5y = 15$

16. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2;$ $\quad 3x + 8y = 24$

17. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + x - y + 5;$ $\quad 3x - 5y = -15$

18. $z = x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 10y + 1;$ $\quad 3x + 2y = -6$

19. $z = 5x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 4;$ $\quad 4x - 3y = -12$

20. $z = 2x^2 + 2y^2 - 36xy + 4x - 3y + 10;$ $\quad 5x - 3y = 15$

Задание 13

Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

1. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2;$

2. $y' - 4xy = x;$

3. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2};$

4. $y' - \dfrac{2y}{x} = x^4;$

5. $y' - \dfrac{y}{x} = x\cos x;$

6. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{e^x}{x};$

7. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x};$

8. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2};$

9. $y' + \dfrac{y}{x} = 3x^2;$

11. $y' - 4xy = x;$

12. $y' - y = e^x;$

13. $y' - 2xy = x \cdot e^{x^2};$

14. $y' - \dfrac{y}{x} = 4x^3;$

15. $y' - \dfrac{y}{x} = x^4 + 2x;$

16. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 + 3x;$

17. $y' + \dfrac{2y}{x} = x - 2;$

18. $y' + \dfrac{3y}{x} = 4;$

19. $y' + \dfrac{2y}{x} = 3;$

20. $y' - \dfrac{3y}{x} = x^4 + 3x^2.$

10. $y' + \frac{y}{x} = x - 2$;

Задание 14

Используя начальные условия, найдите частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

1. $y'' + 8y' = 0$; $y(0)=1$; $y'(0) = -1$;

2. $y'' - 7y' + 6y = 0$; $y(0)=1$; $y'(0) = -1$;

3. $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(0)=1$; $y'(0) = 2$;

4. $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0)=1$; $y'(0) = -1$;

5. $y'' - 5y' + 4y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$;

6. $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0)=1$; $y'(0) = -1$;

7. $y'' - 10y' + 9y = 0$; и $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;

8. $y'' - 9y' + 8y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

9. $y'' - 7y' + 6y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$;

10. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$;

11. $y'' + 4y' + 3 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;

12. $y'' + 9y' - 10y = 0$; $y(0)=1$; $y'(0) = -1$;

13. $y'' - 10y' + 16y = 0$; $y(0)=0$; $y'(0) = 1$;

14. $y'' - 25y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$;

15. $y'' + 4y' = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$;

16. $y'' - 9y = 0$; $y(0)=-1$; $y'(0) = -1$;

17. $y'' - 5y' = 0$; $y(0)=-1$; $y'(0) = 1$;

18. $y'' - 16y = 0$; $y(0) = -1$; $y'(0) = -1$;

19. $y'' + 6y' = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$;

20. $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 1$.

Задание 15

Дано распределение признака X. Требуется: 1) построить полигон частот; 2) найти $\overline{x}$, D, σ, Mo, Me, V.

1	x_i	1	3	5	7	**11**	x_i	1	3	5	7
	n_i	2	3	4	1		n_i	2	3	4	1
2	x_i	2	4	6	8	**12**	x_i	-1	2	5	8
	n_i	1	3	4	2		n_i	2	3	4	1
3	x_i	-1	1	3	5	**13**	x_i	-2	1	4	7
	n_i	2	2	3	3		n_i	3	5	1	1
4	x_i	-2	0	2	4	**14**	x_i	-2	1	4	7
	n_i	2	3	4	1		n_i	3	5	1	1
5	x_i	1	4	7	10	**15**	x_i	3	4	5	6
	n_i	2	3	4	1		n_i	2	3	4	1
6	x_i	-3	-1	1	3	**16**	x_i	-4	-2	0	2
	n_i	1	4	3	2		n_i	2	3	2	3
7	x_i	3	5	7	9	**17**	x_i	2	5	8	11
	n_i	2	3	3	2		n_i	3	1	4	2
8	x_i	1	3	5	7	**18**	x_i	-2	-1	0	1
	n_i	4	1	2	3		n_i	2	4	2	2
9	x_i	1	3	5	7	**19**	x_i	1	4	7	10
	n_i	4	1	2	3		n_i	4	1	2	3
10	x_i	1	3	5	7	**20**	x_i	-1	1	3	5
	n_i	2	3	4	1		n_i	1	4	3	2

Задание 16

Признак X дан в виде распределения частичных интервалов. Требуется: а) построить гистограмму частот; б) найти $\overline{x}$, D, σ.

частичный интервал	частота частичного интервала, n_i									
вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2–4	3	5	4	5	4	6	2	2	5	4
4–6	7	12	9	7	7	9	8	10	9	11

6−8	9	15	13	14	10	14	12	8	15	14
8−10	4	9	10	9	14	8	7	6	11	9
10−12	1	3	7	4	3	4	1	3	6	2

частичный интервал	частота частичного интервала, n_i									
вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
3−5	6	1	5	4	7	6	2	2	5	4
5−7	9	7	13	9	12	10	8	10	9	11
7−9	15	14	16	15	15	12	12	11	15	14
9−11	11	6	10	13	9	7	7	6	11	9
11−13	3	5	7	8	5	3	1	3	6	2

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ.

Задание 1

Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 3 \\ 9 & 7 & 6 & 8 \\ -5 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ путем разложения по второму столбцу.

Решение. Используем теорему разложения: определитель равен сумме произведений элементов второго столбца на соответствующие алгебраические дополнения, при этом каждое алгебраическое дополнение есть минор со знаком, т.е. определитель третьего порядка, который получается вычеркиванием соответствующей строки и столбца. В результате получаем:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 3 \\ 9 & 7 & 6 & 8 \\ -5 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot A_{12} + 5\cdot A_{22} + 7\cdot A_{32} - 2\cdot A_{42} =$$

$$= -1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 8 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 9 & 6 & 8 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+7\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(36-40-54+90-9+9) + 5\cdot(18+160+36-60+36+48) -$$
$$-7\cdot(3+60+24-10+24+18) - 2\cdot(24-108-72+18+192-54) =$$
$$= 119 + 5\cdot 238 - 7\cdot 119 - 2\cdot 0 = 119 + 1190 - 833 = 476$$

Ответ: 476.

Задание 2

Даны квадратные матрицы А и В размерности 3×3. Требуется определить их сумму и произведение.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Решение. Складывать можно матрицы одной размерности: суммой двух матриц является матрица, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц А и В. Замечаем, что матрицы А и В имеют размерность 3×3, поэтому

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+3 & -4-1 & 3+3\\ 1+1 & -2-2 & 1+0\\ 0-3 & 1+1 & -1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -5 & 6\\ 2 & -4 & 1\\ -3 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Перемножать можно две матрицы тогда и только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. В результате получаем матрицу, у которой число строк равно числу строк первой матрицы, а число столбцов равно числу столбцов второй матрицы, при этом элементы получаются суммированием произведений элементов строк первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы. Замечаем, что наши матрицы удовлетворяют вышесказанному, тогда имеем:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot3-4\cdot1-3\cdot3 & -1\cdot2+4\cdot2+3\cdot1 & 2\cdot3-4\cdot0+3\cdot1\\ 1\cdot3-2\cdot1-1\cdot3 & -1\cdot1+2\cdot2+1\cdot1 & 1\cdot3-2\cdot0+1\cdot1\\ 0\cdot3+1\cdot1+1\cdot3 & -1\cdot0-1\cdot2-1\cdot1 & 0\cdot3+1\cdot0-1\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & 9 & 9\\ -2 & 4 & 4\\ 4 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

***Ответ*:**

$$A+B=\begin{pmatrix}5 & -5 & 6\\ 2 & -4 & 1\\ -3 & 2 & 0\end{pmatrix}\qquad A\cdot B=\begin{pmatrix}-7 & 9 & 9\\ -2 & 4 & 4\\ 4 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

Задание 3.

Дан многочлен $f(x)=7x^3-2x^2-4x+2$ третьей степени. Найдите значение этого многочлена от матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. Найти значение многочлена $f(x)=7x^3-2x^2-4x+2$ это означает подставить в многочлен вместо переменной x матрицу А, т.е. необходимо вычислить $f(x)=7x^3-2x^2-4x+2$, где E - единичная матрица третьего порядка.

Найдем отдельно матрицы A^2, A^3, используя действия над матрицами.

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4-3+3 & -2-4-2 & 2+2+4\\ 6+12-6 & -3+16+4 & 3-8-8\\ 6-6+12 & -3-8-8 & 3+4+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -8 & 8\\ 12 & 17 & -13\\ 12 & -19 & 23\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}4 & -8 & 8\\ 12 & 17 & -13\\ 12 & -19 & 23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8-24+24 & -4-32-16 & 4+16+32\\ 24+51-39 & -12+68+26 & 12-34-52\\ 24-57+69 & -12-76-46 & 12+38+92\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -52 & 52\\ 36 & 82 & -74\\ 36 & -134 & 142\end{pmatrix}$$

Тогда

$$f(A)=7\begin{pmatrix}8 & -52 & 52\\ 36 & 82 & -74\\ 36 & -134 & 142\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4 & -8 & 8\\ 12 & 17 & -13\\ 12 & -19 & 23\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}+$$

$$+2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}56 & -364 & 364\\ 252 & 574 & -518\\ 252 & -938 & 994\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8 & 16 & -16\\ -24 & -34 & 26\\ -24 & 38 & -46\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}8 & 4 & -4\\ -12 & -16 & 8\\ -12 & 8 & -16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}56-8-8+2 & -364+16+4+0 & 364-16-4+0\\ 252-24-12+0 & 574-34-16+2 & -518+26+8+0\\ 252-24-12+0 & -938+38+8+0 & 994-46-16+2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}42 & -344 & 344\\ 216 & 526 & -484\\ 216 & -892 & 934\end{pmatrix}$$

Ответ: $f(A)=\begin{pmatrix} 42 & -344 & 344 \\ 216 & 526 & -484 \\ 216 & -892 & 934 \end{pmatrix}$.

Задание 4

Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ размерности 3×3.

Требуется найти матрицу обратную матрице A с помощью алгебраических дополнений и таблиц Гаусса. В конце сделайте проверку, используя единичную матрицу

Решение. <u>1 способ</u>. Вычислим определитель матрицы А:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot(-1)+(-4)\cdot 1\cdot 0+1\cdot 1\cdot 3-3\cdot(-2)\cdot 0-$$

$$-1\cdot(-4)\cdot(-1)-1\cdot 1\cdot 2=4+0+3+0-4-2=1.$$

Так как определитель матрицы А отличен от нуля, т.е. $|A|\neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}, которую определим по формуле:

$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где $|A|$ – определитель матрицы А,

A_{ij}–алгебраические дополнения для элементов a_{ij} матрицы А

Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=2-1=1$=2-1=1; $A_{21}=-\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-(4-3)=-1$;

$A_{31}=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-4+6=2$; $A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-(-1-0)=1$;

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2-0=-2; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(2-3)=1;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1-0=1; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-(2-0)=-2;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4+4=0.$$

Таким образом, обратная матрица имеет вид: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

<u>2 способ</u>. Найдем матрицу обратную матрице *A*, используя таблицы Гаусса. Для этого строим таблицу, состоящую из двух столбцов: в первом – записываем матрицу *A*, во втором – единичную матрицу такого же порядка, что и матрица А. Суть способа состоит в том, чтобы, используя метод Жордана-Гаусса, преобразовать матрицу *A* таким образом, чтобы в результате в первом столбце получить единичную матрицу.

В первой строке в качестве разрешающего элемента берем число 2 (в таблице это число в скобках), делим эту строку на 2 и записываем ее в первой строке новой таблицы. Остальные элементы находим по правилу прямоугольника, начиная с разрешающего. Затем в новой таблице выбираем следующий разрешающий элемент. Лучше, чтоб им было число, стоящее на втором месте второй строки, но в нашем случае на этом месте стоит нуль, а на нуль делить нельзя. Поэтому возьмем число, стоящее на третьем месте третьей строки, т.е. –1. Строим другую таблицу, в которой все элементы третьей строки поделены на –1, а оставшиеся элементы вычислены по правилу прямоугольника. Для завершения преобразований осталось в третьей таблице в качестве разрешающего элемента взять число $-\frac{1}{2}$, стоящее во второй строке на втором месте. Делим эту строку на это число и записываем в

следующей таблице. Оставшиеся элементы вычисляем по правилу прямоугольника.

A	E
$\begin{matrix} (2) & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & (-1) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{matrix}$
E	A^{-1}

Замечаем, что в первом столбце последней таблицы получилась единичная матрица, а тогда во втором столбце находится обратная матрица, которую и выписываем. Имеем,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку, т.е. покажем, что $A^{-1} \cdot A = E$,
где Е – единичная матрица

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot(-4)+(-1)\cdot(-2)+2\cdot 1 & 1\cdot 3+(-1)\cdot 1+2\cdot(-1)\\ 1\cdot 2+(-2)\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot(-4)+(-2)\cdot(-2)+1\cdot 1 & 1\cdot 3+(-2)\cdot 1+1\cdot(-1)\\ 1\cdot 2+(-2)\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot(-4)+(-2)\cdot(-2)+0\cdot 1 & 1\cdot 3+(-2)\cdot 1+0\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2-1+0 & -4+2+2 & 3-1-2\\ 2-2+0 & -4+4+1 & 3-2-1\\ 2-2+0 & -4+4+0 & 3-2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$ - единичная матрица.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

Задание 5

а) Решить систему линейных уравнений с помощью определителей:

$$\begin{cases}x_1-3x_2-x_3=1\\ 2x_1+x_2+x_3=-7\\ 2x_1-x_2-3x_3=5\end{cases}.$$

Решение. Найдем определитель системы уравнений, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=1\cdot 1\cdot(-3)+(-3)\cdot 1\cdot 2+2\cdot(-1)\cdot(-1)-(-1)\cdot 1\cdot 2-$$

$$-2\cdot(-3)\cdot(-3)-(-1)\cdot 1\cdot 1=-3-6+2+2-18+1=-22\neq 0.$$

Замечаем, что определитель отличен от нуля, т.е. $\Delta\neq 0$, а следовательно, система уравнений имеет единственное решение.

Вычислим определитель Δ_{x_1}. Получим его из определителя Δ путем замены столбца при переменной x_j столбцом свободных членов:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -7 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-3) + (-3)\cdot 1\cdot 5 + (-7)\cdot(-1)\cdot(-1) -$$

$$-(-1)\cdot 1\cdot 5 - (-7)\cdot(-3)\cdot(-3) - 1\cdot(-1)\cdot 1 = -3 - 15 - 7 + 5 + 63 + 1 = 44$$

Аналогично найдем определители Δ_{x_2} и Δ_{x_3}.

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-7)\cdot(-3) + 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 5\cdot(-1) - (-1)\cdot(-7)\cdot 2 -$$

$$-2\cdot 1\cdot(-3) - 5\cdot 1\cdot 1 = 21 + 2 - 10 - 14 + 6 - 5 = 0;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 5 + (-3)\cdot(-7)\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2 -$$

$$-2\cdot(-3)\cdot 5 - 1\cdot(-7)\cdot(-1) = 5 + 42 - 2 - 2 + 30 - 7 = 66.$$

Решение системы уравнений найдем, используя правило Крамера, по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{44}{-22} = -2$$

$$x_2 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{-22} = 0$$

$$x_3 = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{66}{-22} = -3$$

Проверка.

$$\begin{cases} 1\cdot(-2) - 3\cdot 0 - 1\cdot(-3) = 1 \\ 2\cdot(-2) + 1\cdot 0 + 1\cdot(-3) = -7 \\ 2\cdot(-2) - 1\cdot 0 - 3\cdot(-3) = 5 \end{cases}$$

Итак, решение системы $(-2;0;-3)$.

Ответ: $(-2;0;-3)$.

б) Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -12 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}.$$

Решение. Рассмотрим матрицу A и расширенную матрицу C:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & -12 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -4 \end{array}\right).$$

Приведем матрицы A и C к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования матриц, и определим ранг этих матриц. Замечаем, что матрица A содержится в матрице C. Поэтому все преобразования проведем над матрицей C. Имеем,

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & -12 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 14 \\ 0 & -7 & 6 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 18 & -74 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 9 & -37 \end{array}\right)$$

Таким образом, ступенчатые матрицы для матриц A и C имеют соответственно вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}; \; C^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 9 & -37 \end{array}\right).$$

Так как число ненулевых строк матриц A^* и C^* равно трем, то ранги матриц A и C равны трем, т.е. $r(A) = 3$ и $r(C) = 3$. Так

как $r(A)=r(C)=3$, то согласно теореме Кронекера-Капелли данная система уравнений совместна и имеет единственное решение. Представим ступенчатую матрицу C^* в виде системы уравнений и найдем из нее решение исходной системы. Имеем:

$$\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3=-12 \\ 0x_1-3x_2+0x_3=14 \\ 0x_1+0x_2+9x_3=-37 \end{cases}.$$

Тогда $\begin{cases} x_1=-12-4x_2+2x_3 \\ x_2=-\dfrac{14}{3} \\ x_3=-\dfrac{37}{9} \end{cases} \sim \begin{cases} x_1=-\dfrac{2}{3} \\ x_2=-\dfrac{14}{3} \\ x_3=-\dfrac{37}{9} \end{cases}$

Ответ: $\left(-\dfrac{2}{3};\ -\dfrac{14}{3};\ -\dfrac{37}{3}\right)$.

Задание 6

Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(2;5)$, $B(14;-4)$, $C(18;18)$. Требуется найти:

1) длину и уравнение стороны BA;
2) длину и уравнение высоты CN;
3) медианы AM и BK, и точку их пересечения;
4) площадь треугольника ABC двумя способами;
5) сделать чертеж.

Решение.

1) Длину стороны BA треугольника ABC найдем по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Так как $x_1=14, y_1=-4, x_2=2, y_2=5$, то

$$|BA|=\sqrt{(2-14)^2+(5+4)^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15.$$

Уравнение прямой BA найдем по формуле:

(BA): $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Имеем,

$$(AB):\frac{x-14}{2-14}=\frac{y+4}{5+4}\Leftrightarrow\frac{x-14}{-12}=\frac{y+4}{9}\Rightarrow -12y-48=9x-126$$

$$\Rightarrow 12y=-9x+78\Rightarrow y=-\frac{9}{12}x+\frac{78}{12};$$

$$(AB): y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{2}$$

$$(AB): 3x+4y-26=0.$$

Угловой коэффициент прямой BA равен: $k_{BA}=-\dfrac{3}{4}$.

2) Найдем уравнение высоты CN:

Так как $CN\perp BA$, то $K_{CN}=-\dfrac{1}{K_{BA}}=-\dfrac{1}{-\frac{3}{4}}=\dfrac{4}{3}$, где K_{CN}, K_{BA} - угловые коэффициенты прямых CN и BA соответственно. В общем виде уравнение CN имеет вид: $y=\dfrac{4}{3}x+b$. Чтобы найти b, подставим координаты точки С в уравнение CN:

$$18=\frac{4}{3}\cdot 18+b\Rightarrow b=-6$$

Итак, уравнение (CN): $y=\dfrac{4}{3}x-6$ или 4x-3y-18=0.

Длину высоты CN найдем как расстояние от точки C до прямой BA по формуле:

$|CN|=\dfrac{|A\cdot x+B\cdot y+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, где A, B, C - коэффициенты прямой BA, x и y - координаты точки C. Имеем,

$$|CN|=\frac{|3\cdot 18+4\cdot 18-26|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|54+72-26|}{\sqrt{25}}=\frac{100}{5}=20.$$

3) Медианы AM и BK треугольника ABC пересекаются в точке F. Для того чтобы найти координаты этой точки, решив совместно систему уравнений этих медиан. Найдем уравнения медиан AM и BK. Так как AM медиана, то точка M делит сторону BC пополам. Тогда координаты точки M найдем по формуле: $x_M = \frac{x_B + x_C}{2}; y_M = \frac{y_B + y_C}{2}$.

Подставив координаты точек B и C в эти формулы, получим $x_M = \frac{14+18}{2} = 16; y_M = \frac{-4+18}{2} = 7$. Итак, $M(16;7)$.

Так как BK медиана, то точка K делит сторону AC пополам, то ее координаты равны:

$x_E = \frac{2+18}{2} = 10; y_E = \frac{5+18}{2} = 11.5$. Итак, $K(10;11.5)$.

Воспользовавшись формулой $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, найдем уравнения медиан AM и BK.

Имеем,

$$(AM): \frac{x-2}{16-2} = \frac{y-5}{7-5} \Leftrightarrow \frac{x-2}{14} = \frac{y-5}{2} \Leftrightarrow 2(x-2) = 14(y-5) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 7y + 33 = 0;$$

$$(BK): \frac{x-14}{10-14} = \frac{y+4}{11.5+4} \Leftrightarrow \frac{x-14}{-4} = \frac{y+4}{15.5} \Leftrightarrow 31(x-14) = -8(y+4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 31x + 8y - 402 = 0$$

Найдем координаты точки F, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 7y + 33 = 0 \\ 31x + 8y - 402 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y - 33 \\ 31(7y - 33) + 8y - 402 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 7y - 33 \\ 217y - 1023 + 8y - 402 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 7y - 33 \\ 225y = 1425 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{19}{3} \\ x = 7 \cdot \dfrac{19}{3} - 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{34}{3} \\ y = \dfrac{19}{3}. \end{cases}$$

Итак, $F(\frac{34}{3};\frac{19}{3})$.

4) Из курса высшей математики известно, что площадь треугольника ABC можно найти по формуле $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BA| \cdot |CN|$. Так как $|BA| = 15$ и $|CN| = 20$, то $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150(кв.ед.)$. С другой стороны, площадь треугольника ABC можно определить, пользуясь понятием определителя, т.е. формулой:

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, где A(x_1;y_1), B(x_2;y_2), C(x_3;y_3).$$

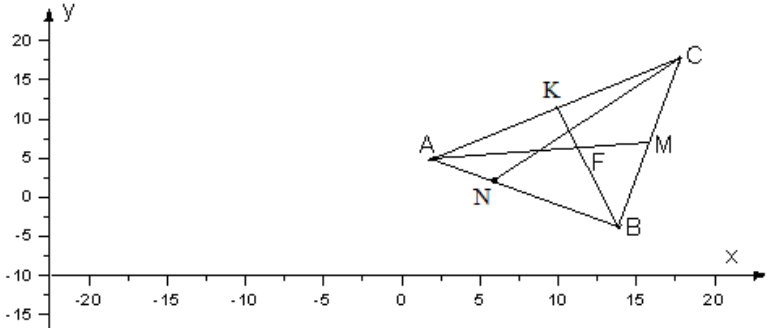
Имеем,

$$S_{ACB} = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 14 & -4 & 1 \\ 18 & 18 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{mod}(2 \cdot (-4) \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 18 + 14 \cdot 18 \cdot 1 -$$

$$-18 \cdot (-4) \cdot 1 - 5 \cdot 14 \cdot 1 - 2 \cdot 18 \cdot 1) = \frac{1}{2}\mathrm{mod}(-8 + 90 + 252 + 72 - 70 - 36) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{mod}(300) = \frac{1}{2} \cdot 300 = 150(кв.ед.)$$

5) Построим треугольник ABC и все прямые и точки на одной координатной плоскости:



Ответ: 1) $|BA| = 15$; $(AB): 3x + 4y - 26 = 0$;

2) $(CN): 4x - 3y - 18 = 0$; $|CN| = 20$;

3) $(AM): x - 7y + 33 = 0$; $(BK): 31x + 8y - 402 = 0$; $F(\frac{34}{3}; \frac{19}{3})$;

4) $S_{ACB} = 150(кв.ед.)$.

Задание 7

Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 5x - 3}$; б) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 5x - 3}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x^2 + x - 2}{x^3 + 1}$;

г) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{\sqrt{5 - 2x} - 3}{2 + x}$; д) $\lim\limits_{x \to 0} 8x ctg 3x$

Решение:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 5x - 3}$.

Для того чтобы взять предел необходимо первоначально вместо неизвестной x подставить предельное значение, в нашем случае это число 1. Если в результате получится число, то это будет ответ.

Имеем, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{1^2 - 9}{2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 3} = \frac{1 - 9}{2 - 5 - 3} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2x^2-5x-3}$.

При x=3 и знаменатель, и числитель функции $f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2x^2-5x-3}$ обращаются в нуль: $3^2-9=0$ и $2\cdot 3^2-5\cdot 3-3=0$, откуда получаем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители. Найдем корни числителя:

$$x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right. \Rightarrow x^2-9=(x-3)(x+3)$$

и знаменателя:

$$2x^2-5x-3=0;$$

$$D=25+4\cdot 6=49;$$

$$x_1=\frac{5-7}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2};$$

$$x_2=\frac{5+7}{4}=\frac{12}{4}=3;$$

$$2x^2-5x-3=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)=(2x+1)(x-3);$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(2x+1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{2x+1}=\frac{3+3}{2\cdot 3+1}=$$

$$=\frac{6}{6+1}=\frac{6}{7};$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x-2}{x^3+1}$;

Подставляя $x=\infty$ в функцию $f(x)=\dfrac{7x^2+x-2}{x^3+1}$, получаем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы ее раскрыть, вынесем за

скобки в числителе и знаменателе многочлены наивысшей степени. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+x-2}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(7+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{7+0-0}{\infty(1+0)}=$$

$=\frac{7}{\infty}=0,$ так как при $x\to\infty$ $\frac{1}{x};\frac{2}{x^2};\frac{1}{x^3}$ - бесконечно малы.

г) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{5-2x}-3}{2+x}$

При x=–2 числитель и знаменатель функции $f(x)=\frac{\sqrt{5-2x}-3}{2+x}$ обращается в нуль. Имеем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $(\sqrt{5-2x}+3)$. В числителе получаем формулу разности квадратов, которая избавляет от квадратного корня. Проводя необходимые преобразования, получим:

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{5-2x}-3}{2+x}=\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{5-2x}-3\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}{(2+x)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{5-2x-9}{(2+x)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{-4-2x}{(2+x)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{-2(2+x)}{(2+x)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{-2}{\sqrt{5-2x}+3}=$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{5-2(-2)}+3}=\frac{-2}{\sqrt{9}+3}=\frac{-2}{3+3}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

д) $\lim\limits_{x\to0}8xctg3x$;

Под знаком предела при $x\to0$ имеем неопределенность $(0\cdot\infty)$. Преобразуем функцию $f(x)=8xctg\,3x$ так, чтобы

можно было использовать первый замечательный предел: $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$.

$$\lim_{x\to 0}8x\cdot\frac{\cos 3x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\cos 3x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{8x}{\sin 3x}=\cos 0\cdot\lim_{x\to 0}\frac{8\cdot 3x}{3\cdot\sin 3x}=$$

$$1\cdot\frac{8}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=1\cdot\frac{8}{3}\cdot 1=\frac{8}{3}.$$

Ответ: а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{6}{7}$; в) 0; г) $-\frac{1}{3}$; д) $\frac{8}{3}$.

Задание 8

Найти производные заданных функций:

а) $y=5\left(3x^2-\frac{5x}{\sqrt{2x+1}}+3\arcsin 8x\right)^{\frac{1}{5}}$;

б) $y=\left(7x^2+2x\right)\ln\left(x^2+2x-1\right)$;

в) $y\sin 2x+\ln\frac{y}{x}=2$.

г) $y=(\sin 2x)^{x^3+2x}$

Решение:

а) $y=5\left(3x^2-\frac{5x}{\sqrt{2x+1}}+3\arcsin 8x\right)^{\frac{1}{5}}$;

$$y'=5\cdot\frac{1}{5}\left(3x^2-\frac{5x}{\sqrt{2x+1}}+3\arcsin 8x\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\left(3x^2-\frac{5x}{\sqrt{2x+1}}+3\arcsin 8x\right)'=$$

$$=\left(3x^2-\frac{5x}{\sqrt{2x+1}}+3\arcsin 8x\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\left(\left(3x^2\right)'-\left(\frac{5x}{\sqrt{2x+1}}\right)'+\left(3\arcsin 8x\right)'\right)=$$

$$=\left(3x^2-\frac{5x}{\sqrt{2x+1}}+3\arcsin 8x\right)^{-\frac{4}{5}}\times$$

$$\times\left[6x-\frac{(5x')\sqrt{2x+1}-5x\left(\sqrt{2x+1}\right)'}{2x+1}+3\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(8x)^2}}\cdot(8x)'\right]=$$

$$=\left(3x^2-\frac{5x}{\sqrt{2x+1}}+3\arcsin 8x\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\left(6x-\frac{5\sqrt{2x+1}-\frac{5x\cdot 2}{2\sqrt{2x+1}}}{2x+1}+\frac{24}{\sqrt{1-64x^2}}\right)=$$

$$=\left(3x^2-\frac{5x}{\sqrt{2x+1}}+3\arcsin 8x\right)^{-\frac{4}{5}}\times$$

$$\times\left(6x-\frac{5(2x+1)-5x}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}+\frac{24}{\sqrt{1-64x^2}}\right)=$$

$$=\left(3x^2-\frac{5x}{\sqrt{2x+1}}+3\arcsin 8x\right)^{-\frac{4}{5}}\times$$

$$\times\left(6x-\frac{5(x+1)}{\sqrt{(2x+1)^3}}+\frac{24}{\sqrt{1-64x^2}}\right)$$

При решении применяли формулы: $(c)'=0$; $(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$;

$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; $\quad(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\quad\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

б) $y=(7x^2+2x)\ln(x^2+2x-1)$;

$$y'=\left((7x^2+2x)\cdot\ln(x^2+2x-1)\right)'=(7x^2+2x)'\ln(x^2+2x-1)+$$

$$+(7x^2+2x)\left(\ln(x^2+2x-1)\right)'=(14x+2)\ln(x^2+2x-1)+(7x^2+2x)\times$$

$$\times\frac{1}{x^2+2x-1}(x^2+2x-1)'=2(7x+1)\ln(x^2+2x-1)+$$

$$+\frac{(7x^2+2x)(2x+2)}{x^2+2x-1}==2(7x+1)\ln(x^2+2x-1)+\frac{2x(7x^2+9x+2)}{x^2+2x-1}.$$

Применили формулы: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$; $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$.

в) $y \sin 2x + \ln \dfrac{y}{x} = 2$.

В данном примере функция задана неявно. Возьмем производную от обеих частей равенства по переменной *x*, считая, что переменная *y* есть функция переменной *x*:

$$(y \sin 2x + \ln \frac{y}{x})' = (2)';$$

$$(y \sin 2x)' + (\ln \frac{y}{x})' = 0;$$

$$y' \sin 2x + y(\sin 2x)' + \frac{1}{\frac{y}{x}} \left(\frac{y}{x} \right)' = 0;$$

$$y' \sin 2x + 2y \cos 2x + \frac{x}{y} \left(\frac{y'x - yx'}{x^2} \right) = 0;$$

$$y' \sin 2x + 2y \cos 2x + \frac{x}{y} \cdot \frac{xy' - y}{x^2} = 0;$$

$$y' \sin 2x + 2y \cos 2x + \frac{x}{y} \cdot \frac{xy'}{x^2} - \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x^2} = 0;$$

$$y' \sin 2x + 2y \cos 2x + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x} = 0;$$

$$y' \sin 2x + \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - 2y \cos 2x;$$

$$y' \cdot \left(\frac{y \sin 2x + 1}{yx} \right) = \frac{1 - 2xy \cos 2x}{x}$$

$$y' = \frac{y(1 - 2xy \cos 2x)}{x(y \sin 2x + 1)}.$$

Применили формулы: $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

$(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

г) $y = (\sin 2x)^{x^3+2x}$

Данная функция является степенно-показательной. Поэтому прологарифмируем обе части равенства, применяя свойства логарифма, а затем продифференцируем по переменной *x*, считая, что переменная *y* есть функция переменной *x*.

$$\ln y = \ln(\sin 2x)^{x^3+2x}$$

$$\ln y = (x^3 + 2x)\ln(\sin 2x)$$

$$(\ln y)' = ((x^3 + 2x)\ln(\sin 2x))'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 3x^2 \cdot \ln(\sin 2x) + (x^3 + 2x) \cdot \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2$$

$$y' = (\sin 2x)^{x^3+2x}[3x^2 \ln(\sin 2x) + 2(x^3 + 2x)ctg\, 2x]$$

Применили формулы: $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

$(uv)' = u'v + uv'$; $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$.

Ответ:

а) $\left(3x^2 - \dfrac{5x}{\sqrt{2x+1}} + 3\arcsin 8x\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \left(6x - \dfrac{5(x+1)}{\sqrt{(2x+1)^3}} + \dfrac{24}{\sqrt{1-64x^2}}\right)$;

б) $2(7x+1)\ln\left(x^2 + 2x - 1\right) + \dfrac{2x\left(7x^2 + 9x + 2\right)}{x^2 + 2x - 1}$;

в) $\dfrac{y(1 - 2xy\cos 2x)}{x(y\sin 2x + 1)}$;

г) $(\sin 2x)^{x^3+2x}[3x^2 \ln(\sin 2x) + 2(x^3 + 2x)ctg\, 2x]$.

Задание 9

Заменяя полное приращение функции ее дифференциалом, найдите приближенное значение функции y=f(x) в точке $x=x_2$, исходя из ее точного значения в точке $x=x_1$:

1) $y=\sqrt[5]{7x^5+4x^3-5x-3}, x_1=2, x_2=2.45;$

2) $y=\sin x, x_1=0°, x_2=3°.$

Решение.

Приближенное значение функции в точке $x=x_2$ найдем, воспользовавшись формулой: $y(x_2)\approx y(x_1)+y'(x_1)\Delta x$, где $\Delta x=x_2-x_1$.

1) $y=\sqrt[5]{7x^5+4x^3-5x-3}, x_1=2, x_2=2.45.$

Вычислим значение функции в точке $x_1=2$:

$$y(2)=\sqrt[5]{7\cdot 2^5+4\cdot 2^3-5\cdot 2-3}=\sqrt[5]{7\cdot 32+4\cdot 8-10-3}=\sqrt[5]{224+32-13}=$$
$$=\sqrt[5]{243}=3.$$

Найдем производную функции $y=\sqrt[5]{7x^5+4x^3-5x-3}$ и вычислим ее значение в точке x_1:

$$y'(x)=((7x^5+4x^3-5x-3)^{\frac{1}{5}})'=$$

$$y'(2)=\frac{1}{5}(35\cdot 2^4+12\cdot 2^2-5)(7\cdot 2^5+4\cdot 2^3-5\cdot 2-3)^{-\frac{4}{5}}=$$

$$=\frac{1}{5}(560+48-5)(224+32-10-3)^{-\frac{4}{5}}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 603\cdot 243^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5}\cdot 603\cdot\frac{1}{81}=\frac{67}{45}.$$

Тогда $y(2.45)\approx y(2)+y'(2)(2.45-2)=3+\frac{67}{45}\cdot 0.45=\frac{300+67}{100}=$

$$=\frac{367}{100}=3{,}67.$$

2) $y=\sin x, x_1=0°, x_2=3°.$

Вычислим значение функции в точке $x_1=0°$: $y(0°)=\sin 0°=0$.

Найдем производную функции $y = \sin x$ и вычислим ее значение в точке x_1:

$y'(x) = (\sin x)' = \cos x$; $y'(0°) = \cos 0° = 1$;

$\Delta x = (3-0)° \cdot \dfrac{\pi}{180°} = \dfrac{\pi}{60}$.

Итак, $y(3°) \approx y(0°) + y'(0°)\Delta x = 0 + 1 \cdot \dfrac{\pi}{60} = \dfrac{\pi}{60} \approx 0{,}0524$.

Ответ: 1) 3,67; 2) 0,0524.

Задание 10

Найти неопределенные интегралы, результаты проверить дифференцированием.

а) $\int \dfrac{(5x-2)dx}{(4x-1)(x+1)}$; б) $\int \dfrac{4dx}{1+\sqrt[3]{x-2}}$; в) $\int 3\ln(x-3)dx$;

Решение:

а) $\int \dfrac{(5x-2)dx}{(4x-1)(x+1)}$;

Разложим дробь $\dfrac{5x-2}{(4x-1)(x+1)}$ на сумму простейших дробей

$$\frac{5x-2}{(4x-1)(x+1)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Умножая обе части этого равенства на $(4x-1)\cdot(x+1)$, получаем

$5x-2 = A(x+1) + B(4x-1)$;

$5x-2 = Ax + A + 4Bx - B$;

$5x-2 = (A+4B)x + (A-B)$.

Два многочлена равны, когда равны коэффициенты при соответствующих степенях:

$$\begin{cases} A+4B=5 \\ A-B=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5B=7 \\ A=B-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1.4 \\ A=-0.6. \end{cases}$$

Учитывая эти преобразования, получим

$$\int \frac{(5x-2)dx}{(4x-1)(x+1)} = \int \left(\frac{-0,6}{4x-1} + \frac{1,4}{x+1} \right) dx = -0,6 \int \frac{dx}{4x-1} + 1,4 \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -0.6 \cdot \frac{1}{4} \ln|4x-1| + 1.4 \ln|x+1| + C = -0.15 \ln|4x-1| + 1.4 \ln|x+1| + C.$$

Проверка:

$$(-0,15 \ln|4x-1| + 1,4 \ln|x+1| + C)' = -0,15 \left(\ln|4x-1|\right)' +$$

$$+ 1,4 \left(\ln|x+1|\right)' + (C)' = -0,15 \cdot \frac{4}{4x-1} + 1,4 \frac{1}{x+1} + 0 =$$

$$= -\frac{0,6}{4x-1} + \frac{1,4}{x+1} = \frac{-0,6(x+1) + 1,4(4x-1)}{(4x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{-0,6x - 0,6 + 5,6x - 1,4}{(4x-1)(x+1)} = \frac{5x-2}{(4x-1)(x+1)}.$$

б) $\int \frac{4dx}{1+\sqrt[3]{x-2}}$;

Вычислим интеграл, используя метод подстановки:

$$\int \frac{4dx}{1+\sqrt[3]{x-2}} = \left| \begin{matrix} x-2 = t^3, dx = 3t^2 dt \\ x = t^3 + 2, \end{matrix} \right| = \int \frac{4 \cdot 3t^2 dt}{1+t} = 12 \int \frac{t^2 dt}{1+t} =$$

$$12 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{1+t} dt = 12 \int \frac{t^2 - 1}{1+t} dt + 12 \int \frac{dt}{1+t} = 12 \int (t-1) dt + 12 \ln|1+t| =$$

$$12 \cdot \frac{t^2}{2} - 12t + 12 \ln|1+t| + C = 6t^2 - 12t + 12 \ln|1+t| + C =$$

$$= 6\sqrt[3]{(x-2)^2} - 12\sqrt[3]{x-2} + 12 \ln\left|1+\sqrt[3]{x-2}\right| + C.$$

Проверка:

$$\left(6\sqrt[3]{(x-2)^2} - 12\sqrt[3]{x-2} + 12 \ln\left|1+\sqrt[3]{x-2}\right| + C \right)' =$$

$$= \left(6\sqrt[3]{(x-2)^2} \right)' - \left(12\sqrt[3]{x-2} \right)' + \left(12 \ln\left|1+\sqrt[3]{x-2}\right| \right) + \left(C \right)'. =$$

$$= 6 \cdot (x-2)^{\frac{2}{3}-1} \cdot \frac{2}{3} - 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot (x-2)^{\frac{1}{3}-1} + 12 \cdot \frac{1}{1+\sqrt[3]{x-2}} \cdot \left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)' =$$

$$= 4\cdot(x-2)^{-\frac{1}{3}} - 4\cdot(x-2)^{-\frac{2}{3}} + 12\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{x-2}}\cdot\frac{1}{3}\cdot(x-2)^{\frac{1}{3}-1} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt[3]{x-2}} - \frac{4}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} + \frac{4}{\left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}} =$$

$$= 4\cdot\frac{\sqrt[3]{x-2}\left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)-\left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)+1}{\left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}} = 4\cdot\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\left(1+\sqrt[3]{x-2}\right)\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \frac{4}{1+\sqrt[3]{x-2}}.$$

в) $\int 3\ln(x-3)dx;$

Вычислим интеграл, используя метод интегрирования по частям:

$$\int 3\ln(x-3)dx = 3\int\ln(x-3)dx = \left|\begin{matrix} u=\ln(x-3), du=\dfrac{dx}{x-3} \\ dv=dx, \quad v=x \end{matrix}\right| =$$

$$= 3x\ln(x-3) - 3\int\frac{(x-3)+3}{x-3}dx = 3x\ln(x-3) - 3\int\left(1+\frac{3}{x-3}\right)dx =$$

$$= 3x\ln(x-3) - 3x - 9\ln|x-3| + C = \ln|x-3|\cdot(3x-9) - 3x + C$$

Проверка:

$$\left(\ln|x-3|\cdot(3x-9)-3x+C\right)' = \left(\ln|x-3|\cdot(3x-9)\right)' - (3x)' + (C)' =$$

$$= \left(\ln|x-3|\right)'\cdot(3x-9) + \ln|x-3|\cdot(3x-9)' - 3 + 0 = \frac{1}{x-3}\cdot(3x-9) +$$

$$+ 3\ln|x-3| - 3 == 3 + 3\ln(x-3) - 3 = 3\ln(x-3).$$

Ответ:

а) $\int\frac{(5x-2)dx}{(4x-1)(x+1)} = -0.15\ln|4x-1| + 1.4\ln|x+1| + C;$

б) $\int\frac{4\mathrm{dx}}{1+\sqrt[3]{\mathrm{x}-2}} = 6\sqrt[3]{(\mathrm{x}-2)^2} - 12\sqrt[3]{\mathrm{x}-2} + 12\ln\left|1+\sqrt[3]{\mathrm{x}-2}\right| + \mathrm{C};$

в) $\int 3\ln(\mathrm{x}-3)\mathrm{dx} = 3(\mathrm{x}-3)\ln|\mathrm{x}-3| - 3\mathrm{x} + \mathrm{C};$

Задание 11

Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = -x^2 + x + 12$ и $y = x^2 + 3x$. Сделать чертеж.

Решение.

Построим на одной координатной плоскости данные параболы. Для того чтобы построить параболу необходимо найти координаты ее вершины и точки пересечения с осями координат.

Рассмотрим параболу $y = -x^2 + x + 12$. Ее вершину найдем по формулам: $x_в = -\frac{b}{2a}$, $y_в = y(x_в)$. Имеем, $x_в = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$, тогда $y_в = -(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} + 12 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 12 = 12{,}25$

Таким образом, вершина параболы имеет координаты (0,5;12,25)

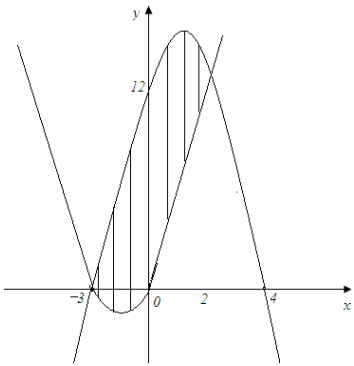
Найдем точки пересечения с осью О*x*. Для этого решим уравнение $-x^2 + x + 12 = 0$. Найдем дискриминант $D = b^2\text{-}4ac = 1^2 + 48 = 49$. Тогда корни его равны $x_1 = \frac{-1-7}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$; $x_2 = \frac{-1+7}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$. Имеем, две точки (-3;0) и (4;0).

Найдем точки пересечения с осью О*y*. Для этого в уравнение параболы подставим вместо переменной *x* нуль. Имеем, $y(0) = 0 + 0 + 12 = 12$. Имеем, точку (0;12).

Аналогично рассмотрим параболу $y = x^2 + 3x$. Ее вершина имеет координаты (-1,5;-2,25), т.к. $x_в = -\frac{3}{2} = -1{,}5$,

$y_в = (-\frac{3}{2})^2 + 3 \cdot (-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -2{,}25$.

Найдем точки пересечения с осью Оx. Для этого решим уравнение $x^2+3x=0$. Вынесем x за скобки и получим два корня 0 и -3. Тогда имеем две точки (0;0) и (-3;0). При этом замечаем, что точка (0;0) является также точкой пересечения параболы с осью Оy. Найдем абсциссы точек пересечения этих парабол, которые будут являться пределами интегрирования. Для этого решим уравнение $-x^2+x+12=x^2+3x$. Имеем,



$$-x^2+x+12-x^2-3x=0 \Rightarrow$$

$$2x^2+2x-12=0 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Тогда площадь заштрихованной области равна:

$$\mathrm{S}=\int_{-3}^{2}(-x^2+x+12-x^2-3x)dx=\int_{-3}^{2}(-2x^2-2x+12)dx=$$

$$=(-\frac{2}{3}x^3-x^2+12x)\Big|_{-3}^{2}=-\frac{2}{3}\cdot 8-4+24-\frac{2}{3}\cdot 27+9+12\cdot 3=$$

$$=-\frac{16}{3}+20-18+9+36=47-\frac{16}{3}=41\frac{2}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

Ответ: $41\frac{2}{3}$ кв.ед.

Задание 12

Дана функция $z=6x-x^2-xy-y^2-4$. Требуется: а) исследовать эту функцию на экстремум; б) найти условный экстремум при условии $5x-2y=10$ двумя способами.

Решение.

а) Исследуем функцию на экстремум.

1) Найдём частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, приравнивая их к нулю, решим систему уравнений:

$$\begin{matrix} \frac{\partial z}{\partial x} = 6 - 2x - y; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y; \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} 6 + 3y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} y = -2; \\ x = 4. \end{cases}$$

Следовательно, данная функция имеет только одну стационарную точку $P_0(4;-2)$.

2) Найдём частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и вычислим их значения в стационарной точке.

Положим, что $A = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{P_0}$, $B = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]_{P_0}$, $C = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_{P_0}$.

Имеем: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$

Как видно, частные производные второго порядка не содержат *x*, они постоянны в любой точке и, в частности, в точке $P_0(4;-2)$. В нашей задаче $A = -2, B = -1, C = -2$

3) Составим и вычислим определитель второго порядка

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \Rightarrow D = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Так как D>0 и A<0, то в точке $P_0(4;-2)$ заданная функция имеет максимум:

$$z_{\max} = z(4;-2) = 24 - 1 + 8 - 4 - 4 = 8.$$

б) Найдем условный экстремум данной функции при условии $5x-2y=10$ двумя способами.

<u>*1 способ*</u>. Из условия $5x-2y=10$ выразим переменную y и подставим ее выражение в функцию $z=6x-x^2-xy-y^2-4$.

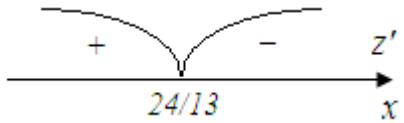
Имеем, $y=-5+\frac{5}{2}x$, тогда

$$z=6x-x^2-x(-5+\frac{5}{2}x)-(-5+\frac{5}{2}x)^2-4=6x-x^2+5x-\frac{5}{2}x^2-25+$$

$$+25x-\frac{25}{4}x^2-4==-\frac{39}{4}x^2+36x-29.$$ Получили функцию одной переменной x. Для нахождения ее экстремума, необходимо найти ее производную и найти стационарные точки, т.е. решить уравнение $z'(x)=0$. Имеем,

$$z'(x)=-\frac{39}{2}x+36 \Rightarrow z'(x)=0 \Rightarrow -\frac{39}{2}x+36=0 \Rightarrow x=\frac{24}{13}.$$

Отметим точку $x=\frac{24}{13}$ на числовой оси и выясним знак производной на каждом получившимся промежутке.



Замечаем, что, проходя через точку $x=\frac{24}{13}$, производная меняет знак с «+» на «-», следовательно, эта точка является точкой условного максимума. Подставим эту точку в условие $y=-5+\frac{5}{2}x$ и найдем значение y:

$y=-5+\frac{5}{2}\cdot\frac{24}{13}=-5+\frac{60}{13}=-\frac{5}{13}$. Итак, условный минимум имеет координаты $(\frac{24}{13};-\frac{5}{13})$.

<u>*2 способ*</u>. Составим функцию Лагранжа:
$L(x,y,\lambda) = 6x - x^2 - xy - y^2 - 4 + \lambda(5x - 2y - 10)$ и найдем частные производные по каждой переменной:
$L'_x = 6 - 2x - y + 5\lambda$; $\quad L'_y = -x - 2y - 2\lambda$;
$L'_\lambda = 5x - 2y - 10$.

Приравняем производные к нулю и решим систему уравнений, решением которой и будет условный экстремум. Имеем,

$$\begin{cases} 6 - 2x - y + 5\lambda = 0 \\ -x - 2y - 2\lambda = 0 \\ 5x - 2y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 - 4x - 2y + 10\lambda = 0 \\ -5x - 10y - 10\lambda = 0 \\ 5x - 2y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -9x - 12y + 12 = 0 \\ 5x - 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 12y = 12 \\ 30x - 12y = 60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 39x = 72 \\ 30x - 12y = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{72}{39} \\ 30x - 12y = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{24}{13} \\ 30 \cdot \dfrac{24}{13} x - 12y = 60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{24}{13} \\ -12y = \dfrac{60}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{24}{13} \\ y = -\dfrac{5}{13} \end{cases}$$

Таким образом, условный экстремум имеет вид: $(\frac{24}{13}; -\frac{5}{13})$

Ответ: а) $z_{\max} = z(4;-2) = 8$**;** б) $(\frac{24}{13}; -\frac{5}{13})$

Задание 13

Найдите общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y' + \frac{3}{x} \cdot y = 1 - \frac{1}{x}$:

Решение.

$y' + \frac{3}{x} \cdot y = 1 - \frac{1}{x}$. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Решаем его подстановкой $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$.

Получаем: $u'v + uv' + \frac{3}{x}uv = 1 - \frac{1}{x}$;

$u'v + u(v' + \frac{3}{x}v) = 1 - \frac{1}{x}$.

Приравниваем нулю выражение в скобке и составим систему:

$$\begin{cases} v' + \frac{3}{x}v = 0 \\ u'v = 1 - \frac{1}{x} \end{cases}.$$

Решаем сначала первое уравнение этой системы:

$v' + \frac{3}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{3}{x}v$.

Разделим переменные: $\frac{dv}{v} = -\frac{3}{x}dx \Rightarrow \ln|v| = -3\ln|x| \Rightarrow v = x^{-3}$.

Найденное значение $v = x^{-3}$, подставим во второе уравнение системы: $u' \cdot x^{-3} = 1 - \frac{1}{x}$ или

$\frac{du}{dx} = (1 - \frac{1}{x}) \cdot x^3$, разделим переменные:

$du = (x^3 - x^2)dx$ возьмём интеграл от обеих частей равенства:

$\int du = \int (x^3 - x^2)dx$, что даёт: $u = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c$. Найдём искомую функцию $y = uv$

$y = (\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c) \cdot x^{-3} = \frac{x}{4} - \frac{1}{3} + \frac{c}{x^3}$.

Окончательно имеем общее решение уравнения:

$$y = \frac{x}{4} - \frac{1}{3} + \frac{c}{x^3}.$$

Ответ: $y = \frac{x}{4} - \frac{1}{3} + \frac{c}{x^3}$

Задание 14

Найдите частное решение дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 2y' - 3y = 0$, используя начальные условия $y(0) = 0$; $y'(0) = -4$.

Решение. Данное дифференциальное уравнение является однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 + 2k - 3 = 0$, его корни $k_1 = -3$, $k_2 = 1$. Тогда общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид: $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$ или $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x}$.

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, определим значения c_1 и c_2.

Так как $y(0) = 0$, то, $c_1 + c_2 = 0$. Из того, что $y' = -3c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x}$ и $y'(0) = -4$, имеем, $-3c_1 + c_2 = -4$. Решая систему уравнений, найдем c_1 и

$$c_2 . \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -3c_1 + c_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 4c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}.$$

Таким образом, частное решение имеет вид: $y = e^{-3x} - e^{x}$.

Ответ: $y = e^{-3x} - e^{x}$.

Задание 15

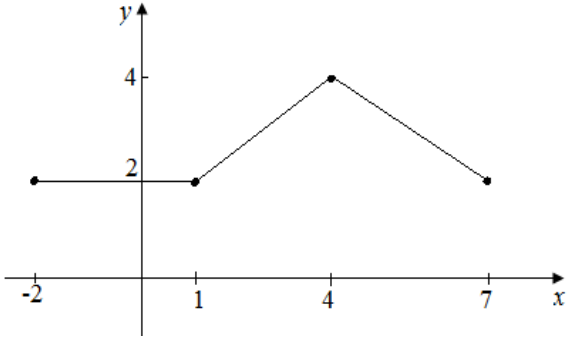
Дано распределение признака X:

x_i	-2	1	4	7
n_i	2	2	4	2

Требуется: 1) построить полигон частот; 2) найти $\bar{x}$, D, σ, Mo, Me, V.

Решение.

1) На декартовой системе координат строим точки $(x_i;n_i)$ и соединяем их ломаной.



2) Объем совокупности равен $n = 2 + 2 + 4 + 2 = 10$

Среднее значение найдем по формуле: $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i n_i}{n}$.

Имеем,

$$\bar{x} = \frac{-2\cdot 2 + 1\cdot 2 + 4\cdot 4 + 7\cdot 2}{10} = \frac{-4+2+16+14}{10} = \frac{28}{10} = 2{,}8$$

Дисперсию найдем по формуле: $D = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{4\cdot 2 + 1\cdot 2 + 16\cdot 4 + 49\cdot 2}{10} = \frac{8+2+64+98}{10} =$$

$$= \frac{172}{10} = 17{,}2$$

Тогда $D = 17{,}2 - 2{,}8^2 = 17{,}2 - 7{,}84 = 9{,}36$

Среднеквадратическое отклонение равно корню квадратному из дисперсии, т.е. $\sigma = \sqrt{D}$. Имеем, $\sigma = \sqrt{9{,}36} = 3{,}059$.

Коэффициент корреляции равен $V = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \dfrac{3{,}059}{2{,}8} \cdot 100\% = 109{,}25\%$. Так как коэффициент корреляции больше 100%, то значения признака X неоднородные.

Мода - это варианта, у которой самая большая частота. Из таблицы замечаем, что Мо=4.
Медиана - это варианта, которая делит вариационный ряд пополам. Делим объем совокупности 10 пополам и отсчитываем 5 частот слева направо и справа налево в таблице распределения признака X. Замечаем, что Ме=4.
Ответ: 17,2; 9,36; 3,059; 109,25; 4; 4.

Задание 16

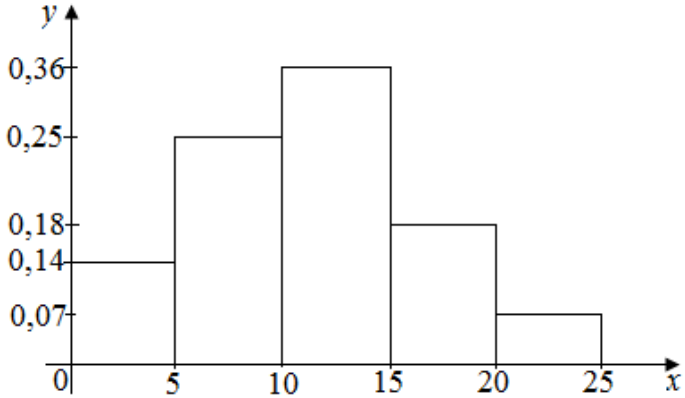
Признак X дан в виде распределения частичных интервалов. Требуется: а) построить гистограмму частот; б) найти $\overline{x}$, D, σ.

частичный интервал	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
частота интервала, n_i	4	7	10	5	2

Решение.
а) Замечаем, что длина каждого частичного интервала равна 5. Тогда разделив каждую частоту на эту длину, т.е. на 5, получим плотности частот $\frac{n_i}{h}$. Строим таблицу, на основе которой строим гистограмму частот.

частичный интервал	частота интервала, n_i	плотность частоты, $\frac{n_i}{h}$
0-5	4	0,14
5-10	7	0,25
10-15	10	0,36
15-20	5	0,18
20-25	2	0,07

На декартовой системе координат строим гистограмму, которая состоит из прямоугольников, основаниями которых являются интервалы длины *h*, *а* высоты – плотности частот $\frac{n_i}{h}$.



б) Представим распределение признака X в виде распределения средних значений каждого частичного интервала, которым будут соответствовать частоты рассматриваемых интервалов. Имеем,

$x_{i_{cp}}$	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5
n_i	4	7	10	2	5

Объем совокупности равен $n = 4 + 7 + 10 + 2 + 5 = 28$

Среднее значение найдем по формуле: $\bar{x} = \dfrac{\sum x_{i_{cp}} n_i}{n}$.

Имеем,

$$\bar{x} = \frac{2{,}5 \cdot 4 + 7{,}5 \cdot 7 + 12{,}5 \cdot 10 + 17{,}5 \cdot 2 + 22{,}5 \cdot 5}{28} =$$

$$= \frac{10 + 52{,}5 + 125 + 35 + 112{,}5}{28} = \frac{335}{28} = 11{,}96$$

Дисперсию найдем по формуле: $D = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x_{i\ cp}^2 n_i}{n} = \frac{6{,}25 \cdot 4 + 56{,}25 \cdot 7 + 156{,}25 \cdot 10 + 306{,}25 \cdot 2 +}{28}$$

$$\frac{+506{,}25 \cdot 5}{} = \frac{25 + 393{,}75 + 1562{,}5 + 612{,}5 + 2531{,}25}{28} =$$

$$\frac{5125}{28} = 183{,}0357 \cdot$$

Тогда $D = 183{,}0357 - 11{,}96^2 = 183{,}0357 - 143{,}0416 = 39{,}9941$

Среднеквадратическое отклонение равно корню квадратному из дисперсии, т.е. $\sigma = \sqrt{D}$. Имеем, $\sigma = \sqrt{39{,}9941} = 6{,}32$.

Ответ: $\overline{x} = 11{,}96;\ D = 39{,}9941;\ \sigma = 6{,}32$

ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЗАЧЕТУ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. Найти произведение и сложение матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ с помощью алгебраических дополнений.

3. Решить систему уравнений методом Гаусса
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;4)$ параллельно прямой $2x\text{-}3y\text{-}7 = 0$.

5. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 6x}{5x^2}$

6. Найти производную функции $y = \left(5^{ctg\,3x} + \dfrac{4}{\sin 3x}\right)^3$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 5x^2 + 3x - 8$ и осью Оx.

8. Найти условный экстремум функции $z = x^2 - y^2 + 4x - 4y$ методом Лагранжа при условии $2x + 3y = 6$

9. Найти среднее значение признака X, который принимает следующие значения 5,5,7,3,7,4,1,6,1,1.

Вариант 2

1. Найти произведение и сложение матриц $A=\begin{pmatrix}3 & -7\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу обратную данной $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ с помощью таблицы Гаусса.

3. Решить систему уравнений методом определителей $\begin{cases}-5x_1+3x_2=-2\\ 6x_1-3x_2=3\end{cases}$

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;-5)$ перпендикулярно прямой $4x\text{-}5y+1=0$.

5. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x+3}{2x-2}$

6. Найти производную функции $y=\dfrac{3x+8}{\sqrt{x^2+2}}$

7. Найти неопределенный интеграл $\int\dfrac{3x-4}{(x-5)(x+1)}dx$

8. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y'-\dfrac{y}{x}=x^4$.

9. Найти дисперсию признака X, который принимает следующие значения 8,7,7,3,4,3,1,1,9,3.

Вариант 3

1. Найти произведение и сложение матриц $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 6 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу обратную данной $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ с помощью алгебраических дополнений.

3. Решить систему уравнений методом Гаусса
$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=2\\ -x_1+x_2-x_3=-1\\ 2x_1+x_2-3x_3=0\end{cases}$$

4. Найти уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-1;4)$ и $M_2(3;6)$.

5. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}{x-4}$

6. Найти производную функции $y=(arctg2x)^{\sin x}$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-3x^2-2x+5$ и осью Ох.

8. Найти экстремум функции $z=x^2+xy+y^2+x-y+4$.

9. Найти среднее значение признака X, который принимает следующие значения 6,5,8,2,8,4,1,6,1,1.

Вариант 4

1. Найти произведение и сложение матриц $A=\begin{pmatrix}3 & -7\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу обратную матрице $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ с помощью таблиц Гаусса.

3. Решить систему уравнений методом определителей
$$\begin{cases}-x_1+2x_2=1\\ 2x_1-3x_2=-1\end{cases}$$

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;7)$, образующей угол 135° с осью Оx.

5. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-1}{3x^2+4x+1}$

6. Найти производную функции $y=\ln\left(\arcsin\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)\right)$

7. Найти неопределенный интеграл $\int x^2\ln x dx$

8. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка $y''-10y'+16y=0$; y(0)=0; $y'(0)=1$.

9. Найти дисперсию признака X, который принимает следующие значения 8,5,5,3,3,2,1,2,8,3.

Вариант 5

1. Найти произведение и сложение матриц $A=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 8 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу обратную матрице $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ с помощью алгебраических дополнений.

3. Решить систему уравнений методом Гаусса
$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4\\ x_1-x_2-2x_3=-2\\ 3x_1-2x_2+x_3=2\end{cases}$$

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;5)$ параллельно прямой $3x\text{-}2y\text{-}5=0$.

5. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{7x^2}$

6. Найти производную функции $y=\left(2^{tg3x}+\dfrac{6}{\cos 3x}\right)^3$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 8x^2 - 3x - 5$ и осью Оx.

8. Найти условный экстремум функции $z = x^2 + y^2 - 4x + 4y - 3$ методом Лагранжа при условии $4x + 3y = 12$.

9. Найти среднее значение признака X, который принимает следующие значения 2,5,6,3,6,4,2,7,1,1.

Вариант 6

1. Найти произведение и сложение матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу обратную данной $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ с помощью таблицы Гаусса.

3. Решить систему уравнений методом определителей $\begin{cases} -4x_1 + x_2 = -3 \\ 5x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases}$

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(7;-2)$ перпендикулярно прямой $3x\text{-}4y + 5 = 0$.

5. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{5x - 5}$

6. Найти производную функции $y = \dfrac{4x + 3}{\sqrt{x^2 + 4}}$

7. Найти неопределенный интеграл $\int \dfrac{5x - 4}{(x - 3)(x + 2)} dx$

8. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y' - \dfrac{y}{x} = 3x^3$.

9. Найти дисперсию признака X, который принимает следующие значения 8,1,7,3,2,3,1,4,8,3.

Вариант 7

1. Найти произведение и сложение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу обратную данной $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ с помощью алгебраических дополнений.

3. Решить систему уравнений методом Гаусса
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

4. Найти уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-3;5)$ и $M_2(6;1)$.

5. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-3} - \sqrt{7-x}}{x-5}$

6. Найти производную функции $y = (arcctg 2x)^{\cos x}$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -5x^2 + 2x + 3$ и осью Ох.

8. Найти экстремум функции $z = x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y + 4$.

9. Найти среднее значение признака X, который принимает следующие значения 2,5,7,3,5,4,1,2,1,2.

Вариант 8

1. Найти произведение и сложение матриц $A=\begin{pmatrix}4 & -9\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}9 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу обратную матрице $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ с помощью таблиц Гаусса.

3. Решить систему уравнений методом определителей $\begin{cases}-x_1+3x_2=2\\ 5x_1-3x_2=2\end{cases}$

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;6)$, образующей угол 45° с осью О*x*.

5. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x-1}{5x^5+2x+1}$

6. Найти производную функции $y=\mathrm{t}g\left(\ln\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)\right)$

7. Найти неопределенный интеграл $\int x\ln x dx$

8. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка $y''-7y'+6y=0$; y(0)=0; $y'(0)=1$.

9. Найти дисперсию признака X, который принимает следующие значения 4,7,5,3,4,3,1,5,9,3.

СПИСОК ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Матрицы, действия над матрицами.
2. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга матрицы.
3. Транспонированная и обратная матрицы. Нахождение обратной матрицы.
4. Определители второго порядка, их свойства и вычисления.
5. Определители третьего порядка, их свойства и вычисления.
6. Миноры и алгебраические дополнения.
7. Теорема разложения определителя.
8. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛУ). Совместные, несовместные СЛУ. Определенные и неопределенные СЛУ.
9. Решение СЛУ методом определителей.
10. Метод Гаусса-решения систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
11. Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом.
12. Общее уравнение прямой.
13. Уравнение прямой, проходящей через две точки плоскости.
14. Уравнение пучка прямых.
15. Определение угла между двумя прямыми. Условие параллельности и условие перпендикулярности двух прямых.
16. Понятие функции. Область ее определения и способы ее задания.
17. Последовательность, ее предел.
18. Предел функции. Основные теоремы о пределах функций.
19. Односторонние пределы функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства.
20. Первый замечательный предел. Следствия.
21. Второй замечательный предел. Следствия.

22. Непрерывность функции. Точки разрыва, их классификация.
23. Производная. Геометрический и физический смысл производной.
24. Производная суммы, произведения, дроби.
25. Производная сложной функции. Производная неявной функции.
26. Логарифмическое дифференцирование.
27. Производные высших порядков. Физический смысл второй производной.
28. Дифференциал функции. Свойства дифференциала. Геометрический смысл дифференциала.
29. Возрастание и убывание функции. Необходимое и достаточное условия возрастания и убывания функции в интервале.
30. Экстремум функции. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции.
31. Наибольшее и наименьшее значение функции.
32. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точка перегиба.
33. Асимптоты графика функции, их виды.
34. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Геометрический смысл и основные свойства неопределенного интеграла.
35. Интегрирование методом подстановки и по частям в неопределенном интеграле.
36. Интегрирование простейших рациональных функций.
37. Интегрирование иррациональных функций.
38. Интегрирование тригонометрических функций.
39. Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница.
40. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур; вычисление объема тела вращения.

41. Функции нескольких переменных; геометрическое истолкование функции 2-х переменных. Предел и непрерывность функции 2-х переменных.

42. Частные производные первого и второго порядков. Полный дифференциал функции 2-х переменных.

43. Дифференцирование сложных и неявных функций 2-х переменных.

44. Экстремум функции 2-х переменных. Необходимое и достаточное условие существования экстремума.

45. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

46. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения.

47. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными.

48. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли.

49. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

50. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

51. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

52. Виды отбора. Понятие оценки, ее свойства.

53. Статистическое распределение. Эмпирическая функция распределения, ее свойства.

54. Полигон и гистограмма частот.

55. Точечные оценки параметров распределения: $\bar{x}_в, D_в, S^2, \sigma_в, S$. Теорема об общей дисперсии.

56. Эмпирические моменты. Коэффициент асимметрии и эксцесс, их смысл. Мода и медиана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н Сборник задач по курсу математического анализа — Спб: Изд-во «Лань», 2000.
2. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики— М.: АСТ 2005.
3. Ильин В.А., Познчк Э.Г. Линейная алгебра — М.: изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2005.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., Наука, 1971 г.
5. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. Учебник для студентов высших технических заведений – М.: Наука, 1966.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике — М.: изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2001.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1,2 — М.: ИНТЕГРАЛПРЕСС, 2004.
8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре – М.: БИНОМ, 2005
9. Шипачев В.С. Высшая математика — М.:Высшая школа, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица производных

x – независимая переменная c, k, b - постоянные величины	u – зависимая переменная c, k, b - постоянные величины
1. $(c)' = 0$	**1.** $(c)' = 0$
2. $(x)' = 1$	**2.** $(\mathrm{u})' = \mathrm{u}'$
3. $(kx+b)' = \mathrm{k}$	**3.** $(ku+b)' = \mathrm{k}\cdot\mathrm{u}'$
4. $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$	**4.** $(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	**5.** $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u'$
6. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	**6.** $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
7. $(e^x)' = \mathrm{e}^x$	**7.** $(e^u)' = \mathrm{e}^u\cdot u'$
8. $(a^x)' = a^x \ln a$	**8.** $(a^u)' = a^u \ln a\cdot u'$
9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	**9.** $(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$
10. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	**10.** $(\log_a u)' = \frac{1}{u\ln a}\cdot u'$
11. $(\sin x)' = cosx$	**11.** $(\sin u)' = cosu\cdot u'$
12. $(\cos x)' = -\sin x$	**12.** $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$
13. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	**13.** $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
14. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	**14.** $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$

15. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**15.** $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
16. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**16.** $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
17. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	**17.** $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
18. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	**18.** $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Приложение 2

Правила дифференцирования

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - дифференцированные функции

1. $(c)' = 0$, где c - постоянная величина

2. $(cf(x))' = cf'(x)$, где c - постоянная величина

3. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

4. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Приложение 3

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = c$	**12.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
2. $\int 1dx = x + c$	**13.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
3. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + c$	**14.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + c$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	**15.** $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$	**16.** $\int \frac{dx}{1+x^2} = -arcctgx + c$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	**17.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$
7. $\int e^x dx = e^x + c$	**18.** $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$
8. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	**19.** $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$
9. $\int \cos xdx = \sin x + c$	**20.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm m}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm m}\right\rvert + c$
10. $\int \sin xdx = -\cos x + c$	**21.** $\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \ln\lvert\varphi(x)\rvert + c$
11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$	

Учебно-практическое издание
Косюк Наталья Валерьевна
МАТАМАТИКА
Сборник контрольных материалов
Издаётся в авторской редакции
Подписано в печать __.___.2018 г.
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 4,8.
Заказ № . Тираж 20 экз.
Отпечатано с готового оригинал-макета
Типографией ООО «РВТ»
3200, г. Бендеры, ул. Московская, д. 30