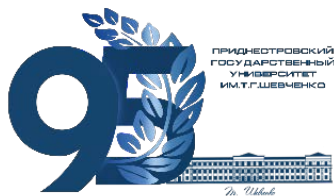


ГОУ «ПРИДНЕСТРОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т. Г. ШЕВЧЕНКО»

Бендерский политехнический филиал
*Кафедра транспортно-технологических
машин и комплексов*



ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА

Сборник практических работ

Бендеры

*Издательство
Приднестровского
университета*

2025

УДК 621.8
ББК 34.44
Т11

Составители:

А. Н. Котомчин, доц.

Е. Ю. Ляхов, доц.

Рецензенты:

Н. И. Корнейчук, проф. каф. эксплуатации и ремонта машинно-тракторного парка

В. Н. Радченко, доц. каф. транспортно-технологических машин и комплексов

Теоретическая механика. Кинематика и динамика : сборник практических работ [Электронный ресурс] / составители : А. Н. Котомчин, Е. Ю. Ляхов ; ГОУ «Приднестровский государственный университет им Т. Г. Шевченко» ; Бендерский политехнический филиал. – Бендеры : Изд-во Приднестр. ун-та, 2025. – 100 с.

Системные требования: CPU (Intel/AMD) 1,5 ГГц / ОЗУ 2 Гб / HDD 450 Мб / 1024*768 / Windows 10 и новее / Microsoft Edge / Adobe Acrobat Reader 6 и новее.

Сборник практических работ предназначен для выполнения практических занятий по дисциплине Б1.О.13 «Теоретическая механика» раздела «Кинематика и динамика». В издании приведена тематика, объем, структура и последовательность выполнения практических занятий согласно рабочей программе по дисциплине Б1.О.13 «Теоретическая механика» раздела «Кинематика и динамика», даны основные формулы и методика решения, представлены задания для контрольной работы № 2.

Сборник практических работ разработан на основании Государственного образовательного стандарта по специальности высшего образования 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», специализация: «Автомобильная техника в транспортных технологиях».

Адресуется студентам дневной и заочной формы обучения специальности «Наземные транспортно-технологические средства», специализации «Автомобильная техника в транспортных технологиях».

**УДК 621.8
ББК 34.44**

Рекомендовано к изданию Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – это наука, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Механическим движением называется изменение с течением времени взаимного положения материальных тел в пространстве.

Механическим взаимодействием называется такое взаимодействие материальных тел, которое изменяет или стремится изменить характер их механического движения.

В теоретической механике при рассмотрении того или иного явления в нем выделяют главное, определяющее, а от остального абстрагируются. В результате вместо реального явления или объекта рассматривают некоторую его модель, вводя такие понятия как:

материальная точка – материальное тело, размеры которого в рассматриваемых конкретных условиях можно не учитывать;

абсолютное твердое тело – тело, расстояние, между любыми точками которого остаются неизменными;

сплошная изменяемая среда – пренебрегают молекулярной структурой среды.

По характеру рассматриваемых задач теоретическую механику принято разделять на статику, кинематику и динамику. В статике излагается учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил. В кинематике рассматриваются движение тел с геометрической стороны, без учета сил, вызывающих это движение. В динамике изучается движение материальных тел под действием сил.

Теоретическая механика является базой для многих общепрофессиональных дисциплин: сопротивление материалов, теория механизмов и машин, гидравлика и др.

Раздел I. КИНЕМАТИКА

1.1. Основные понятия кинематики

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

Для определения положения движущегося тела (или точки) в разные моменты времени с телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают систему координат, образующую вместе с этим телом систему отсчета. В дальнейшем будем говорить о движении тела (или точки) по отношению к данной системе отсчета, подразумевая под этим движение по отношению к тому телу, с которым эта система отсчета связана.

Движение тел совершается в пространстве с течением времени. Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т. д.) рассматриваются как изменяющиеся с течением времени, т. е. как функций времени t .

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано). Задать движение или закон движения тела (точки) – значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы, зная закон движения точки (тела), установить

методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета, называется траекторией точки. Если траекторией является прямая, движение точки называется прямолинейным, а если кривая – криволинейным.

Кинематика точки

Существует три способа задания движения точки:

- векторный;
- координатный;
- естественный.

Векторный способ задания движения точки

Положение точки в пространстве однозначно определяется заданием радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из некоторого неподвижного центра O в данную точку M .

Для определения движения точки должна быть задана вектор-функция r аргумента t :

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Данное равенство определяет закон движения точки в векторной форме. Геометрическое место концов вектора $\vec{r}$ определяет траекторию движения движущейся точки.

Скорость – это векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета.

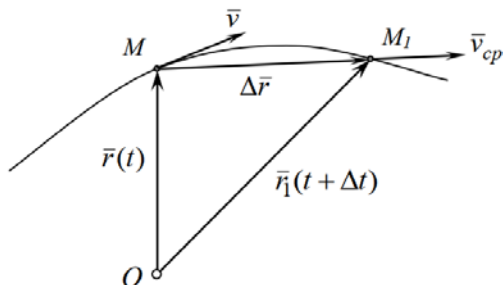


Рис. 1.1. Скорость точки

Вектор средней скорости определяется как:

$$\overline{V}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (1.1)$$

где $\Delta \vec{r}$ – приращение радиуса-вектора за промежуток времени Δt

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{V}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиуса-вектора точки по времени и направлен по касательной к траектории в сторону движения.

Ускорение точки характеризует быстроту изменения модуля и направления скорости точки.

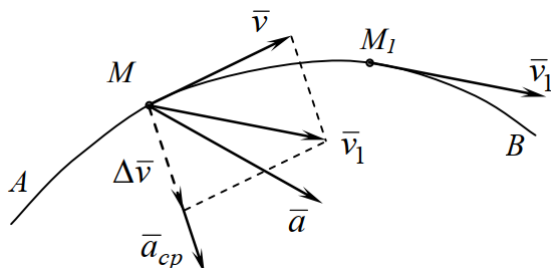


Рис. 1.2. Ускорение точки

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Вектор ускорения точки равен первой производной от скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени. Вектор ускорения точки расположен в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой (AB).

Координатный способ задания движения точки

Положение точки M в системе отсчета $Oxuz$ определяется тремя декартовыми координатами:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$$

Эти уравнения называются уравнениями движения точки в декартовых координатах.

Движение точки M в одной плоскости определяется двумя уравнениями движения:

$$x = f_1(t), y = f_2(t)$$

Записав радиус-вектор через декартовы координаты:
 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Найдем скорость и ускорение точки M :

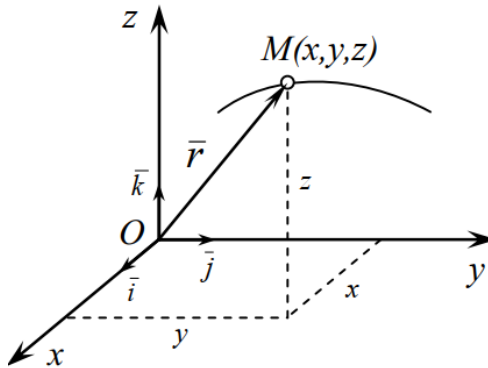


Рис. 1.3. Координатный способ

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Естественный способ задания движения точки

Данный способ задания движения точки применяется, если известны: – траектория точки (AB),

– начало (т. O) и направление отсчета дуговой координаты s ($+$ –), – уравнение движения $s = f(t)$.

Естественными координатными осями (рис. 1.4.) называются три взаимно перпендикулярные оси; касательная, направленная в сторону возрастания дуговой координаты, главная нормаль, направленная в сторону вогнутости кривой, и бинормаль, направленная по отношению к касательной и главной нормали по правилу буравчика. Единичные векторы-орты этих осей обозначаются соответственно $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$.

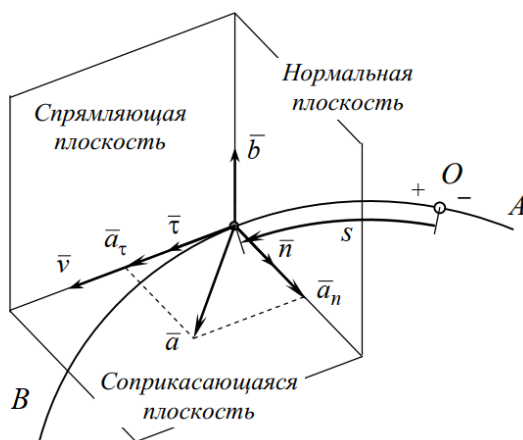


Рис. 1.4. Естественный способ

Вектор скорости точки M :

$$\bar{V} = d\bar{r} / dt, \text{ полагая } \bar{r} = \bar{r}(s).$$

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \text{ так как } \frac{d\bar{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \text{ и } \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = 1$$

$$\bar{V} = \tau \frac{ds}{dt}$$

Числовое значение скорости (алгебраическое) $V = ds / dt$.

Если $V = 0$ точка движется в сторону увеличения S и направление $\bar{V}$ совпадает с направлением орта $\bar{\tau}$.

Если $V < 0$ то в этот момент функция S убывает и направление скорости $\bar{V}$ противоположно направлению орта $\bar{\tau}$.

Вектор ускорения точки M :

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{dt} \cdot \frac{dS}{dt} + \tau \frac{d^2S}{dt^2} = \left[\frac{d\bar{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \right] \frac{dS}{dt} + \tau \frac{d^2S}{dt^2}, \text{ так как}$$

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \bar{n} \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$\bar{a} = \bar{n} \frac{V^2}{\rho} + \tau \frac{d^2S}{dt^2} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

где $a_n = \frac{V^2}{\rho}$ – нормальное ускорение точки

$a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d\bar{V}}{dt}$ – касательное ускорение точки,

a – модуль ускорения точки M .

Если $\bar{V}$ и $\bar{a}_\tau$ имеют одинаковые знаки, то точка движется ускоренно. Если имеют различные знаки, то и направления $\bar{V}$ и $\bar{a}_\tau$ противоположны, т. е. точка движется замедленно.

Классификация движения точки

1. $\bar{a}_n = 0$ $\bar{a}_\tau = 0$ точка движется равномерно-прямолинейно.
2. $\bar{a}_n \neq 0$ $\bar{a}_\tau = 0$ точка движется равномерно-криволинейно.
3. $\bar{a}_n = 0$ $\bar{a}_\tau \neq 0$ точка движется по прямой неравномерно.
4. $\bar{a}_n \neq 0$ $\bar{a}_\tau \neq 0$ точка движется неравномерно-криволинейно.

Если $\bar{a}_\tau = \text{const}$, движение является равнопеременным.

Закон этого движения, считая, что при $t = 0$, $S = S_0$, $V = V_0$.

$$V = V_0 + a_\tau t, S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}$$

Различают пять видов движения твердого тела:

- 1) поступательное;
- 2) вращательное;
- 3) плоское или плоскопараллельное;
- 4) сферическое;
- 5) общий случай движения твердого тела.

Поступательное и вращательное движения являются простейшими движениями твердого тела.

1.2. Поступательное движение

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во все время движения тела параллельной своему начальному положению.

Теорема: *при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.*

Поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки. Изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки.

1.3. Вращательное движение твердого тела вокруг оси

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором все точки, принадлежащие некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными. Эта прямая называется осью вращения тела.

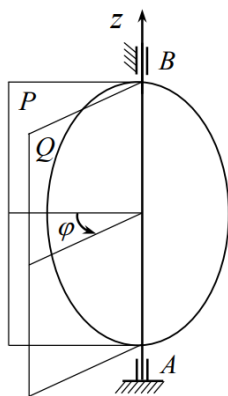


Рис. 1.5. Вращательное движение твёрдого тела вокруг оси

Угол φ отсчитываемый от неподвижной полуплоскости P к подвижной полуплоскости Q , называется углом поворота тела.

Угол φ считается положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки.

Угол поворота в радианах соответствующий N оборотам

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot n$$

При вращении тела угол поворота φ меняется в зависимости от времени, т. е. является функцией времени t :

$$\varphi = f(t)$$

Это уравнение вращательного движения твердого тела.

Угловая скорость тела – величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота φ с течением времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Если $\omega > 0$, то угол поворота увеличивается, т. е. вращение тела происходит в положительном направлении отсчета угла поворота.

Если $\omega < 0$, то φ уменьшается, т. е. тело вращается в обратную сторону.

Угловое ускорение тела – числовая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

Если $\varepsilon > 0$ – тело вращается ускоренно.

Если $\varepsilon < 0$ вращение происходит замедленно.

Равномерное вращение тела – вращение тела с постоянной угловой скоростью $\omega = d\varphi/dt = \text{const}$, принимая при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, получаем уравнение равномерного вращения тела:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

Частота вращения – число оборотов, совершаемых вращающимся телом за единицу времени, обозначается n (об/мин).

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$$

Равнопеременное вращением тела – вращение с посто-

янным угловым ускорением. Интегрируя $\varepsilon = d\omega/dt = \text{const}$, где при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$, получаем уравнения равнопеременного вращения тела:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$$

Изобразим траекторию произвольной точки M тела. Положение точки M определяется дуговой координатой $s = s(t) = R\omega$. Тогда скорость точки M :

$$V = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R \cdot \omega$$

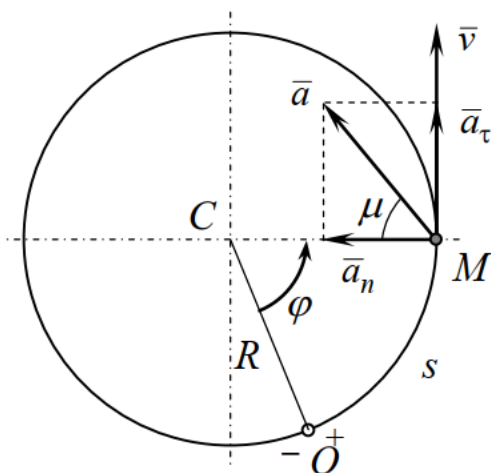


Рис. 1.6. Вращательное движение точки вокруг центра окружности

Касательная и нормальная составляющие ускорения:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon, \quad a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R \cdot \omega^2$$

Полное ускорение точки M :

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Направление ускорения точки: $\operatorname{tg} \mu = a_\tau / a_n = R\varepsilon / R\omega^2 = \varepsilon / \omega^2$

Угол μ , составленный ускорением точки вращающегося тела с отрезком, соединяющим точку с центром окружности, не зависит от положения точки в теле.

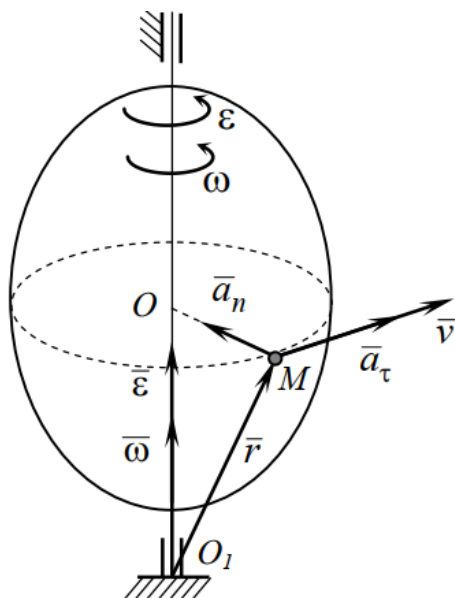


Рис. 1.7. Вращение тела

Вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ и углового ускорения ϵ показывают: вокруг какой оси вращается твердое тело и в какую сторону оно вращается.

Векторные выражения для $\bar{V}$ и $\bar{a}$:

$$\bar{V} = \bar{\omega} \cdot \bar{r}, \bar{V} \perp \text{плоскости } O_1OM$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d(\bar{\omega} \cdot \bar{r})}{dt} = \epsilon \cdot \bar{r} + \bar{\omega} \cdot \bar{V} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau, \text{ т. е.}$$

$$a_n = \bar{\omega} \cdot \bar{V} = \bar{\omega} \cdot (\bar{\omega} \cdot \bar{r})$$

1.4. Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости Π .

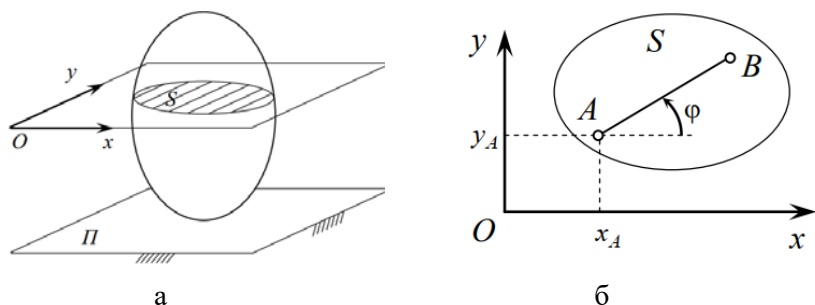


Рис. 1.8. Плоскопараллельное движение твёрдого тела:
 а – тело с плоскопараллельным движением,
 б – графическое изображение плоскопараллельного движения

Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскостью Oxy , параллельной плоскости Π . Для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости Oxy сечение S этого тела. Положение сечения S в плоскости Oxy определяется положением какой-нибудь проведенной в этой фигуре отрезка AB . В свою очередь положение отрезка AB можно определить, зная координаты x_A , y_A и φ . Точку A , выбранную для определения положения фигуры S , будем называть полюсом.

Тогда уравнения движения плоской фигуры в ее плоскости:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t)$$

Они же являются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

При $\varphi = \text{const}$ движение поступательное.

При $x_A = \text{const}$, $y_A = \text{const}$ движение вращательное вокруг полюса A .

Движение плоской фигуры может рассматриваться как сумма поступательного движения и вращательного движения вокруг полюса.

Теорема о скоростях точек плоской фигуры: *скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в ее вращении вместе с плоской.*

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{AB} \text{ или, } \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \cdot \vec{r}_{AB}$$

где $\bar{V}_A$ – скорость полюса (считается известной),

$\bar{V}_{AB}$ – вращательная скорость точки B вокруг полюса A ,

ω – угловая скорость тела,

$\bar{r}_{AB}$ – радиус-вектор.

В аналитической форме скорость точки B :

$$\bar{V}_{Bx} = \bar{V}_{Ax} + \bar{V}_{ABx}, \bar{V}_{By} = \bar{V}_{Ay} + \bar{V}_{ABy} \rightarrow V_B = \sqrt{V_{Bx}^2 + V_{By}^2}$$

фигурой вокруг полюса

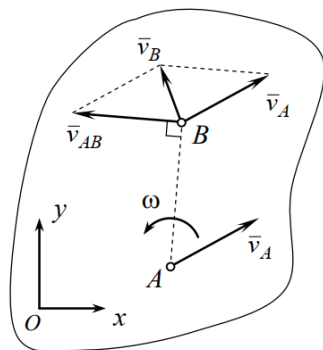


Рис. 1.9. Теорема о скоростях точек плоской фигуры

Следствие теоремы: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.

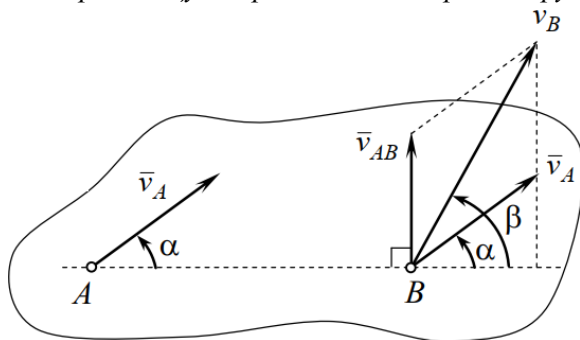


Рис. 1.10. Следствие теоремы о скоростях плоской фигуры

$$V_A \cdot \cos \alpha = V_B \cdot \cos \beta$$

Теорема о существовании мгновенного центра скоростей: В каждый момент времени существует точка, неизменно связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю. Эту точку называют мгновенным центром скоростей (МЦС).

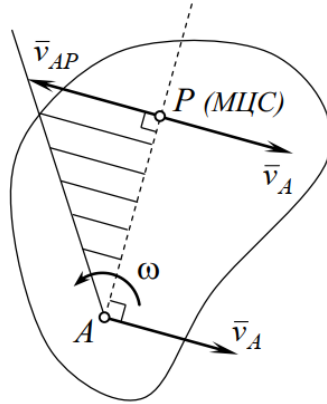


Рис. 1.11. Теорема о существовании мгновенного центра скоростей

Пусть известны V_A и ω в некоторый момент времени. Точку A примем за полюс. Восстановим в точке A перпендикуляр к направлению скорости V_A . Найдем на перпендикуляре такую точку P , вращательная скорость которой равна по модулю скорости полюса, т. е. $V_{AP} = V_A$.

Тогда $\vec{V}_{AP} = -\vec{V}_A$ и $\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{AP} = 0$, следовательно, точка P в рассматриваемый момент времени является мгновенным центром скоростей.

$$V_{AP} = \omega \cdot AP = V_A \quad AP = V_A / \omega$$

Способы нахождения МЦС:

Известны скорости V_A и V_B , причем они не параллельны.

Мгновенный центр скоростей определяется V_B как точка

пересечения перпендикуляров к этим скоростям. Через МЦС проходит мгновенная ось вращения тела.

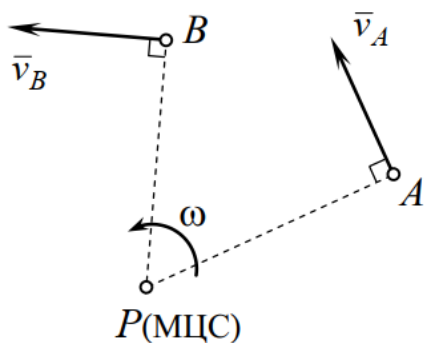


Рис. 1.12. МЦС с мгновенной осью

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}$$

2. Известны скорости V_A и V_B , причем они параллельны.

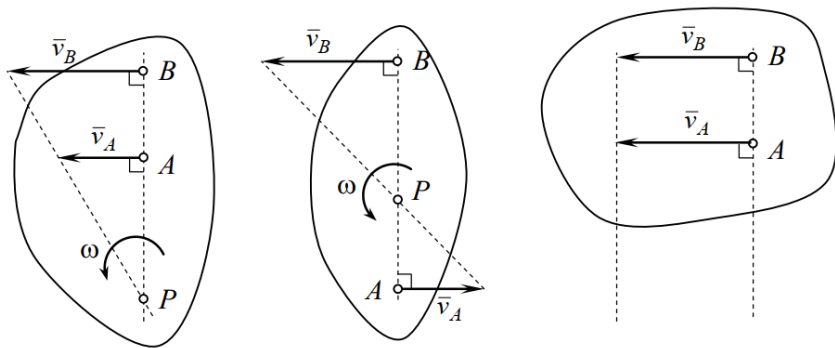


Рис. 1.13. Тело движется поступательно

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{\infty} = 0$$

3. Движение плоской фигуры, при котором она катится без скольжения по некоторой неподвижной линии. В этом случае МЦС находится в точке соприкосновения с линией.

Если скорость точки C колеса известна, то можно найти скорость любой точки колеса используя МЦС.

Угловая скорость колеса:

$$\omega = \frac{V_C}{PC} = \frac{V_C}{R}$$

Тогда, например, в точке A :

$$V_A = \omega \cdot AP = \frac{V_C}{R} \cdot AP$$

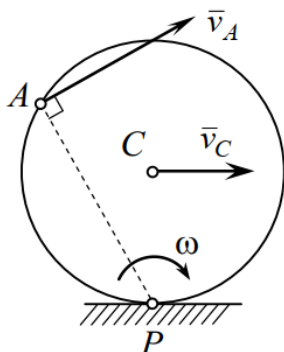


Рис. 1.14. МЦС с качением без скольжения

Теорема об ускорениях точек плоской фигуры: ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса.

Пусть известны ускорение полюса $\bar{a}_A$ и величины угловой скорости ω и углового ускорения ε в данный момент времени. Тогда ускорение любой точки B плоской фигуры определяется как:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB} \text{ или } \bar{a}_B = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AB}^{\tau} + \bar{a}_{AB}^n$$

где $\bar{a}_A^{\tau}$, $\bar{a}_A^n$ – касательное и нормальное ускорение полюса A ;

$\bar{a}_{AB}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB$, $\bar{a}_{AB}^n = \omega^2 \cdot AB$ – касательное и нормальное ускорение точки B во вращении вокруг полюса A .

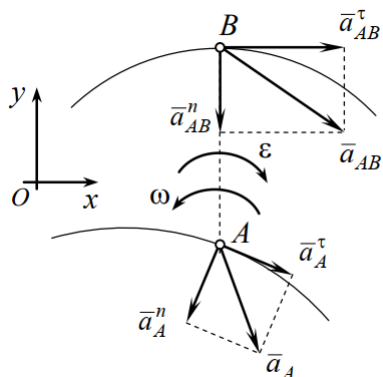


Рис. 1.15. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры

В аналитической форме в проекциях на оси:

$$\bar{a}_{Bx} = \bar{a}_{Ax}^{\tau} + \bar{a}_{Ax}^n + \bar{a}_{ABx}^{\tau} + \bar{a}_{ABx}^n,$$

$$\bar{a}_{By} = \bar{a}_{Ay}^{\tau} + \bar{a}_{Ay}^n + \bar{a}_{ABy}^{\tau} + \bar{a}_{ABy}^n \rightarrow a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}$$

1.5. Сложное движение точки

В ряде случаев при решении задач механики оказывается целесообразным разложить сложное движение точки или тела на более простые путем введения дополнительной (подвижной) системы отсчета.

Сложное движение точки (тела) – это такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или нескольких движениях.

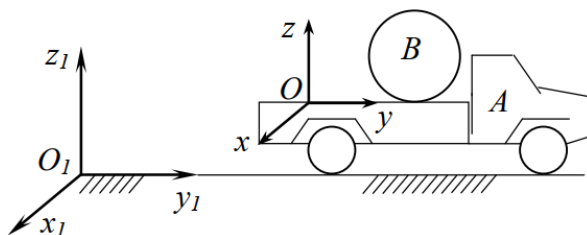


Рис. 1.16. Сложное движение точки

Движение, совершаемое телом B относительно грузовика A , т. е. по отношению к подвижной системе отсчета (к осям $Oxyz$) называется относительным движением. Скорость и ускорение тела B относительно грузовика A обозначаются $\vec{V}_{от}$, $\vec{V}_r$ (relative – относительный) и $\vec{a}_{от}$, $\vec{a}_r$

Движение грузовика A ($Oxyz$) по отношению Земле (неподвижной системе $O_1 x_1 y_1 z_1$) является для тела B переносным движением. Скорость тела B называется переносной скоростью $\vec{V}_{пер}$, $\vec{V}_e$ (emporter – увлекать), ускорение этой точки переносным ускорением $\vec{a}_{пер}$, $\vec{a}_e$.

Движение, совершаемое телом B по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1 x_1 y_1 z_1$ называется абсолютным или сложным. Скорость – абсолютной скоростью $\vec{V}_{абс}$ или $\vec{V}$, ускорение – абсолютным ускорением $\vec{a}_{абс}$ или $\vec{a}$.

Теорема: При сложном движении точки абсолютная скорость равна сумме ее относительной и переносной скоростей.

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

Теорема Кориолиса: При непоступательном переносном движении абсолютное ускорение точки находится как сумма трех ускорений: относительного, переносного и ускорения Кориолиса.

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

где $\vec{a}_c = 2(\omega_e \cdot \vec{V}_r)$ – ускорение Кориолиса и ее модуль $\vec{a}_c = 2\omega_e \cdot \vec{V}_r \cdot \sin(\omega_e, \vec{V}_r)$

Кориолисово ускорение характеризует:

- 1) изменение модуля и направления переносной скорости $\vec{V}_e$ точки вследствие вращательного движения ω_e ;
- 2) изменение направления относительной скорости $\vec{V}_r$ точки вследствие вращательного переносного движения ω_e .

Правило Жуковского: чтобы найти направление Кориолисова ускорения, следует спроецировать относительную ско-

рость точки на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию в той же плоскости на 90° в сторону переносного вращения.

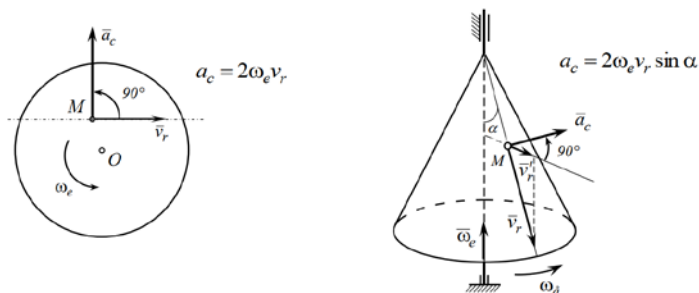


Рис. 1.17. Ускорение Кориолиса

Ускорение Кориолиса $a_c = 0$ в трех случаях:

1. если $\omega_e = 0$, т. е. в случае поступательного переносного движения,
2. если $\vec{V}_r = 0$, т. е. в случае относительного покоя точки,
3. если $\sin(\omega_e, \vec{V}_r) = 0$, т. е. когда $\omega_e \parallel \vec{V}_r$

Примеры решения задач по темам раздела I «Кинематика» Кинематика точки Траектория и уравнения движения точки

Пример 1. По заданным уравнениям движения точки M :

$$x = 2t \text{ (см)}, \quad y = 4t^2 - 2 \text{ (см)} \quad (1)$$

установить вид ее траектории и для момента времени $t = 1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Решение.

1. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1). Получаем $y = x^2 - 2$, траекторией точки является парабола (рис. 1.18).

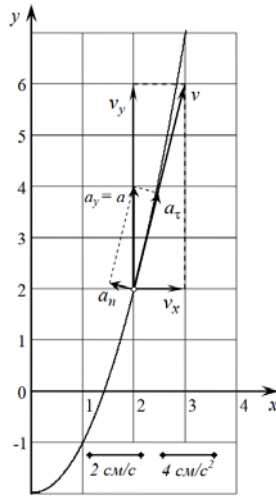


Рис. 1.18. Траектория движения точки

2. Подставляя в уравнения (1) $t = 1$ с, получим координаты точки x, y в данный момент времени: $x = 2$ см, $y = 2$ см

3. Вектор скорости и ускорения точки:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j}, \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

Из уравнений (1) найдем проекции скорости и ускорения точки на оси координат:

$$V_x = \dot{x} = 2 \text{ см/с}, V_y = \dot{y} = 8t \text{ см/с}$$

$$a_x = \ddot{x} = 0 \text{ см/с}^2, a_y = \ddot{y} = 8 \text{ см/с}^2.$$

4. Модуль скорости и ускорения точки:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$V|_{t=1\text{с}} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 8,25 \text{ м/с}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, a|_{t=1\text{с}} = 8 \text{ см/с}^2$$

5. Касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$$

$$a_\tau \big|_{t=1\text{ c}} = \frac{64}{\sqrt{68}} = 7,76 \text{ м/с}^2$$

Положительное значение касательного ускорения означает, что движение точки ускоренное, направления a_τ и V совпадают.

6. Нормальное ускорение точки можно вычислить из формулы:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$\text{Тогда } a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}, \quad a_n \big|_{t=1\text{ c}} = \sqrt{8^2 - \frac{64^2}{68}} = 1,06 \text{ см/с}^2$$

7. Радиус кривизны траектории находится из формулы:

$$a_n = V^2 / \rho$$

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{68}{1,06} = 64,15 \text{ см, в момент времени } t = 1 \text{ с.}$$

Для самостоятельного решения необходимые данные приведены в таблице (см. Приложение Б).

Вращательное движение твердого тела

Пример 2. Вращение маховика в период пуска определяется уравнением $\varphi = 1/t^3$, где t – в с, φ – в рад. Определить модуль и направление ускорения точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии 50 см, в тот момент, когда ее скорость равна 8 м/с (рис. 1.19).

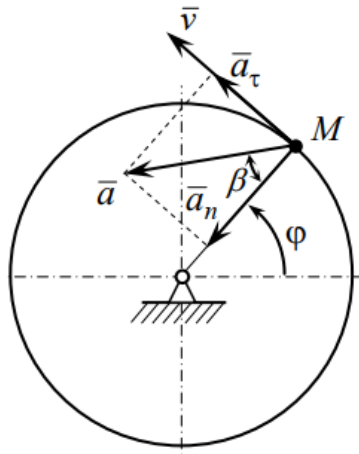


Рис. 1.19. Вращательное движение маховика

Решение.

1. По уравнению вращения маховика находим его угловые скорость и ускорение:

$$\omega = \dot{\varphi} = t^2, \quad \varepsilon = \ddot{\varphi} = 2t$$

2. Находим момент времени t , когда скорость точки M равна 8 м/с:

$$V = \omega \cdot R; \quad \omega = V / R = 8 / 0,5 = 16 \text{ с}^{-1} \rightarrow t^2 = 16, \quad t = 4 \text{ с.}$$

3. Вычислим модули нормального, касательного и полного ускорения точки M в этот момент времени:

$$\varepsilon = 2 \cdot 4 = 8 \text{ рад/с}^2; \quad a_\tau = \varepsilon \cdot R = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = \omega^2 \cdot R = 16^2 \cdot 0,5 = 128 \text{ м/с}^2; \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 128,06 \text{ м/с}^2.$$

4. Направление ускорения точки определяется углом β :

$$a_\tau = a_n \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad \operatorname{tg} \beta = \varepsilon / \omega^2 = 8 / 16^2 = 1 / 32; \quad \beta = \operatorname{arctg}(1 / 32) = 1,8^\circ$$

Пример 3. Определить скорость, ускорение точки B и груза G при $t = 1$ с, если скорость в точке A ведущего колеса 1: $V_A = 3t^2 - t$ см/с. Радиусы колес: $R_1 = 5$ см, $r_1 = 4$ см, $R_2 = 10$ см, $r_2 = 6$ см (рис. 1.20).

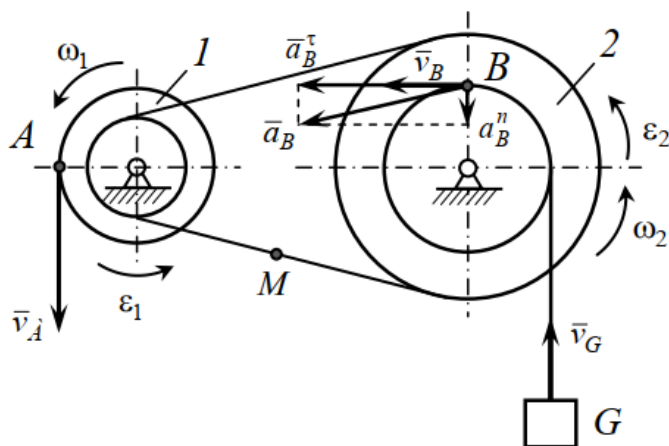


Рис. 1.20. Определение скорости и ускорения

Решение

1. Угловая скорость и угловое ускорение колеса 1:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{R_1} = (3t^2 - t)/R_1, \varepsilon_1 = \frac{a_A^\tau}{R_1} = \frac{\dot{v}_A}{R_1} = (6t - 1)/R_1$$

2. Скорость любой точки ремня:

$$V_M = \omega \cdot r = \omega_2 \cdot R_2$$

Тогда угловая скорость и угловое ускорение колеса 2:

$$\omega_2 = \omega \cdot r/R_2, \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot r/R_2$$

3. Найдём скорость, ускорение точки B и груза G :

$$V_B = V_G = \omega_2 \cdot r_2 = (\omega_1 \cdot r_1) \cdot r_2/R_2 = (3t^2 - t) \cdot r_1 \cdot r_2/(R_1 \cdot R_2)$$

$$\Big|_{t=1\text{ с}} = (3 - 1) \cdot 4 \cdot 6/(5 \cdot 10)$$

$$a_B^\tau = a_G = \varepsilon_2 \cdot r_2 = (\varepsilon_1 \cdot r_1) \cdot r_2/R_2 = (6t - 1) \cdot r_1 \cdot r_2/(R_1 \cdot R_2)$$

$$\Big|_{t=1\text{ с}} = (6 - 1) \cdot 4 \cdot 6/(5 \cdot 10)$$

$$a_B^n = \frac{v_B^2}{r_2} = \frac{0,96^2}{6} = 0,1536 \text{ см/с}^2.$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = 2,4049$$

Плоскопараллельное движение

Пример 4. Колесо радиусом $R = 1\text{ м}$ катится без скольжения по прямому рельсу. Скорость и ускорение центра колеса в рассматриваемый момент времени равны соответственно $V_C = 2\text{ м/с}$, $a_C = 4\text{ м/с}^2$. Определить скорость и ускорение точек A , B , D и E колеса, расположенных на концах взаимно перпендикулярных диаметров (рис. 1.21, а).

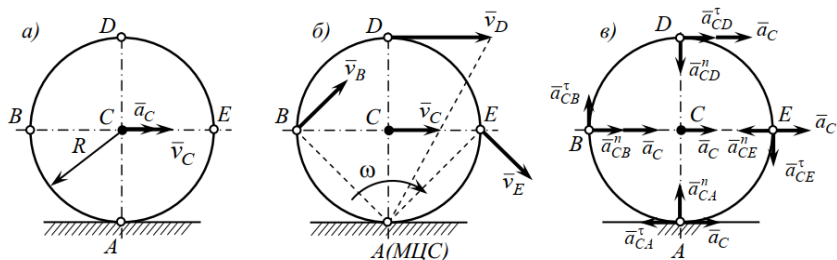


Рис. 1.21. Плоскопараллельное движение

Решение.

1. Точка A (рис. 1.21, б) является мгновенным центром скоростей (МЦС), т.к. колесо катится без скольжения, поэтому скорость точки касания A колеса с рельсом равна нулю: $V_A = 0$. Примем эту точку за полюс, тогда скорости всех точек колеса определяются как вращательные скорости вокруг МЦС.

$$\omega = \frac{V_C}{AC} = \frac{V_D}{AD} \text{ или } \omega = \frac{V_C}{R} = \frac{V_D}{2R} \rightarrow V_D = 2V_C = 4 \text{ м/с } \omega = 2 \text{ с}^{-1}$$
$$V_B = \omega \cdot AB = \frac{V_C}{R} \cdot R\sqrt{2} = V_C\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ м/с, } V_B = V_A = 2\sqrt{2} \text{ м/с}$$

2. Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры ускорение любой точки плоской фигуры, например точки B (рис. 1.21, в), определяется как

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{CB} = \bar{a}_C + \bar{a}^{\tau}_{CB} + \bar{a}^n_{CB}$$

По условию $a_C = 4 \text{ м/с}^2$ — ускорение полюса C .

Найдем угловое ускорение колеса: $\varepsilon = a_C / AC = a_C / R = 4 \text{ с}^{-2}$.

Касательное и нормальное ускорение т. B во вращении вокруг полюса C :

$$\bar{a}^{\tau}_{CB} = \varepsilon \cdot CB = \frac{a_C}{R} \cdot R = a_C = 4 \text{ м/с}^2; \bar{a}^{\tau}_{CB} = \bar{a}^{\tau}_{CD} = \bar{a}^{\tau}_{CE} = \bar{a}^{\tau}_{CA}$$

$$\bar{a}^n_{CB} = \omega^2 \cdot CB = \left(\frac{V_C}{R}\right)^2 \cdot R = \frac{V_C^2}{R} = 4 \text{ м/с}^2;$$

$$\bar{a}^{\tau}_{CB} = \bar{a}^{\tau}_{CD} = \bar{a}^{\tau}_{CE} = \bar{a}^{\tau}_{CA}$$

3. Ускорение каждой точки определяется диагональю прямоугольника, сторонами которого являются сумма двух векторов $\bar{a}_C + \bar{a}_{CB}$, оказавшихся на одной прямой, и третий вектор $\bar{a}^{\tau}_{CB}$, перпендикулярный им:

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{(a_C + a_{CB}^n)^2 + (a_{CB}^{\tau})^2} = \sqrt{80} \text{ м/с}^2$$

Ускорения остальных точек находим аналогично.

Пример 5. Кривошип $OA = 3$ см, вращающийся вокруг оси O , приводит в движение шатун $AB = 4$ см. В положении, изображенном на рис. 1.22, а, кривошип имеет угловую скорость $\omega_{OA} = 2 \text{ с}^{-1}$ и угло-

вое ускорение $\varepsilon_{OA} = 5 \text{ с}^2$. Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна AB , а также скорость и ускорение ползуна B (рис. 1.22).

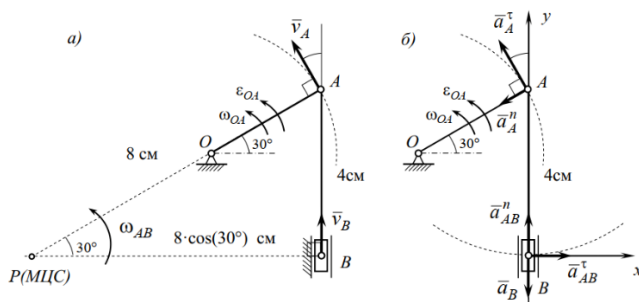


Рис. 1.22. Вращение вокруг оси

Решение

1. Находим ω_{AB} и V_B .

Скорость точки A : $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 6 \text{ см/с}$ (V_A направлен в сторону ω_{AB}). Стержень AB совершает плоское движение. Находим положение мгновенного центра скоростей P (МЦС) проведя перпендикуляры к скоростям в точках A и B . Тогда угловая скорость стержня AB :

$$\omega = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A}{AP} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ с}^{-1} \quad (1)$$

Скорость точки B из соотношения (1):

$$V_B = \frac{V_A}{AP} \cdot BP = \frac{6}{8} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ см/с}$$

Скорость V_B можно определить иначе, спроецировав векторы скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ на ось AB : $\vec{V}_B = V_A \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{3} \text{ см/с}$

2. Находим a_B (рис. 1.22, б).

Ускорение точки B определяется как $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}$ или расписывая:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{AB}^{\tau} + \vec{a}_{AB}^n \quad (2)$$

Касательное и нормальное ускорение точки A (полюса) находим из начальных данных:

$$a_A = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 5 \cdot 3 = 15 \text{ см/с}^2, a_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2^2 \cdot 3 = 12 \text{ см/с}^2.$$

Нормальное ускорение точки B во вращений вокруг полюса A :

$$a_{AB}^n = \omega^2 \cdot AB = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 4 = \frac{9}{4} \text{ см/с}^2$$

Касательное ускорение $\bar{a}_{AB}^{\tau}$ точки B во вращений вокруг полюса A определим из соотношения (2) предварительно спроецировав его на ось x :

$$0 = -\bar{a}_A^{\tau} \sin 30^\circ - \bar{a}_A^n \cos 30^\circ + \tau_{AB},$$

$$\bar{a}_{AB}^{\tau} = \bar{a}_A^{\tau} \cdot \sin 30^\circ + \bar{a}_A^n \cos 30^\circ = 15 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17,89 \text{ см/с}^2$$

Угловое ускорение ε_{AB} стержня AB найдем из соотношения:

$$\bar{a}_{AB}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\bar{a}_{AB}^{\tau}}{AB} = \frac{17,89}{4} = 4,47 \text{ с}^{-2}$$

Ускорение ползунка B найдем спроецировав соотношения (2) на ось y :

$$-a_B = a_A^{\tau} \cdot \cos 30^\circ - \bar{a}_A^n \sin 30^\circ + \bar{a}_{AB}^n,$$

$$a_B = -15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 12 \cdot \frac{1}{2} - \frac{9}{4} = -9,24 \text{ см/с}^2$$

Пример 6. Кривошип OA кривошипного механизма вращается вокруг оси O с угловой скоростью $\omega_{OA} = 10 \text{ рад/с}$. Принимая $OA = 1 \text{ м}$ и $AB = 2 \text{ м}$, определить угловую скорость шатуна AB и скорость ползунка B механизма в трех случаях, когда $\varphi = 0, 30, 90^\circ$ (рис. 1.23, а).

Решение.

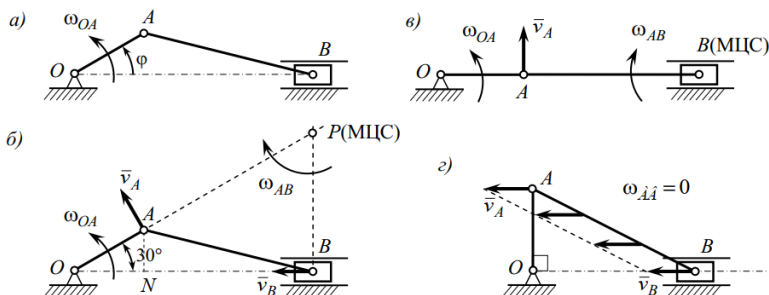


Рис. 1.23. Кривошипный механизм

1. Скорость пальца A : $V_A = OA \cdot \omega_{OA} = 10$ м/с.

2. Проводим перпендикуляры к скоростям в точках A и B . Точка пересечения этих перпендикуляров определяет положение МЦС P шатуна AB .

$$ON = OA \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2, \quad BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{4 - 0,25}, \\ OB = ON + NB = 2,8 \text{ м}$$

$$OP = OB / \cos 30^\circ = 2 \cdot 2,8 / \sqrt{3} = 3,2 \text{ м}, \rightarrow AP = OP - OA = 2,2 \text{ м}. \\ PB = OB \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 1,6 \text{ м}$$

3. Угловая скорость шатуна AB : $\omega_{AB} = V_A / AP = 4,5$ рад/с. Тогда скорость ползуна B : $V_B = \omega_{AB} \cdot PB = 4,5 \cdot 1,6 = 7,2$ м/с.

4. При $\varphi = 0$ МЦС шатуна совпадает с точкой B ($V_B = 0$) и скорости всех точек шатуна являются вращательными вокруг точки B (рис. 1.23, в). Угловая скорость шатуна $\omega_{AB} = V_A / AB = 5$ рад/с/

5. При $\varphi = 90^\circ$ скорость пальца кривошипа A и ползунка B параллельны, поэтому МЦС шатуна AB находится в бесконечности (рис. 1.23, г). В этот момент все точки шатуна AB имеют одинаковые скорости, равные $\vec{V}_A$, $\omega_{AB} = 0$.

Сложное движение точки

Пример 7. Точка M движется с относительной скоростью $V_r = t^2 - t$ м/с по хорде диска, вращающегося вокруг оси O , перпендикулярной плоскости диска, с угловой скоростью $\omega_e = 0,5t^2$ с⁻¹. Определить абсолютное ускорение точки M при $t = 2$ с, если расстояние $OM = 1$ м (рис. 1.24, а).

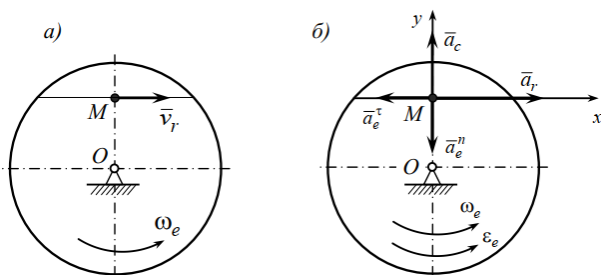


Рис. 1.24. Сложное движение точки

Решение.

1. Абсолютное ускорение определяется по формуле:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c$$

2. Заморозим вращение диска (переносное движение точки). Точка M движется относительно диска прямолинейно, тогда относительное ее ускорение:

$$a_r = \dot{V}_r = 2t-1 \Big|_{t=1c} = 3 \text{ м/с}^2$$

3. Заморозим движение точки по хорде (относительное движение точки), тогда точка будет совершать только переносное движение. Переносное движение будет вращательным вокруг центра O , т. е. переносное ускорение будет иметь две составляющие:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^n$$

4. Переносное касательное ускорение

$$\bar{a}_e^{\tau} = \varepsilon_e \cdot OM = \dot{\omega}_e \cdot OM = t \cdot 1 \Big|_{t=2c} = 2 \text{ м/с}^2$$

5. Переносное нормальное ускорение

$$\bar{a}_e^n = \omega_e^2 \cdot OM = 0,25 \cdot t^4 \cdot 1 \Big|_{t=2c} = 4 \text{ м/с}^2$$

6. Направление ускорения Кориолиса $\bar{a}_c$ определяется по правилу Жуковского, поворотом вектора относительной скорости $\bar{V}_r$ в сторону переносного вращения на 90° и обозначением как $\bar{a}_c$ (рис. 1.25, б). Модуль $\bar{a}_c$:

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin \alpha = 2 \cdot (0,5t^2) \cdot (t^2 - t) \cdot \sin 90^\circ \Big|_{t=2c} = 8 \text{ м/с}^2,$$

где α – угол между векторами $\bar{\omega}_e$ и $\bar{V}_r$. Вектор угловой скорости $\bar{\omega}_e$ направлен на нас (по правилу буравчика), т.к. диск вращается против хода часовой стрелки.

7. Проецируя все составляющие абсолютного ускорения на оси x и y , получаем:

$$a_x = -a_e^{\tau} + a_r = -2 + 3 = 1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = a_c - a_e^n = 8 - 4 = 4 \text{ м/с}^2.$$

7. Абсолютное ускорение точки M при $t = 2 \text{ с}$:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{17} \text{ м/с}^2.$$

Пример 8. Точка M , находящаяся в начальном момент в вершине кругового конуса, движется равномерно по образующей конуса к основанию с относительной скоростью $V_r = 24$ см/с. Конус вращается вокруг своей оси согласно уравнению $\varphi = 0,125t^2$ (рис. 1.25, а). Определить абсолютные скорость и ускорение точки в конце 4-й секунды, если $\alpha = 30^\circ$.

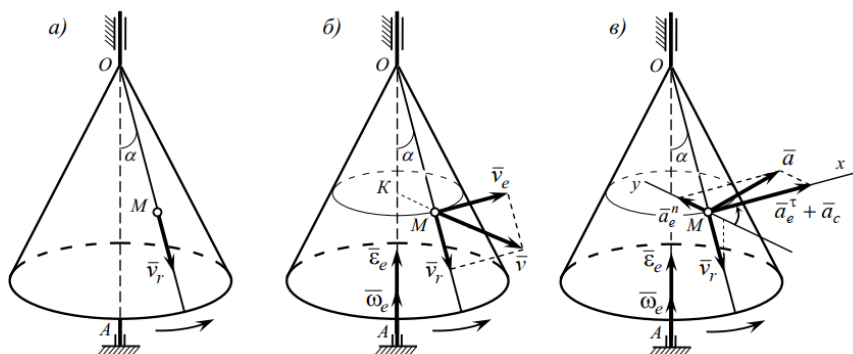


Рис. 1.25. Вращение вокруг конуса

Решение.

1. Движение точки M относительно конуса вдоль его образующей является относительным, а движение точки M вместе с конусом, вращающимся вокруг оси OA – переносным.

2. Найдем положение точки M в конце 4-й секунды:

$$OM = V_r t = 24 \cdot 4 = 96 \text{ см}; \quad MK = OM$$

$$\sin \alpha = 96 \cdot 0,5 = 48 \text{ см.}$$

2. Определим алгебраические величины переносной угловой скорости и переносного углового ускорения при $t = 4$ с:

$$\omega_e = \dot{\varphi} = 0,25 \cdot 4 = 1 \text{ рад/с} > 0; \quad \epsilon_e = \ddot{\varphi} = 0,25 \text{ рад/с}^2 > 0$$

Знаки ω_e и ϵ_e совпадают, следовательно, конус вращается ускоренно. Векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{\epsilon}_e$ направлены по оси вращения конуса вверх.

3. Определяем абсолютную скорость точки M .

Абсолютная скорость точки M определяется как векторная сумма двух скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$.

Переносная скорость $\vec{V}_e$ направлена по касательной к окружности радиуса MK , а ее модуль $V_e = \omega_e \cdot MK = 1 \cdot 48 = 48 \text{ см/с}$. Относительная скорость $\vec{V}_r$ направлена вдоль образующей конуса, а ее модуль $V_r = 24 \text{ см/с}$. Так как составляющие скорости взаимно перпендикулярны, то (рис. 1.25, б)

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{48^2 + 24^2} = 53,64 \text{ м/с}$$

4. Определяем абсолютное ускорение точки M . Абсолютное ускорение точки M при вращательном переносном движении:

$$\vec{a} = \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^n + \vec{a}_c$$

5. Определим составляющие абсолютного ускорения точки M (рис. 1.25, в).

Переносное касательное ускорение: $\vec{a}_e^{\tau}$ направлено по касательной к окружности радиусом MK в соответствии с направлением углового ускорения, а его модуль $a_e^{\tau} = MK \cdot \epsilon_e = 48 \cdot 0,25 = 12 \text{ см/с}^2$.

Переносное нормальное ускорение $\vec{a}_e^n$ направлено к центру K окружности радиусом MK , а его модуль:

$$a_e^n = MK \cdot \omega_e = 48 \cdot 1 = 48 \text{ см/с}^2.$$

Так как относительное движение точки прямолинейное и равномерное, то

$$a_r^n = V_r^2/\rho = V_r^2/\infty = 0 \text{ и } a_r^{\tau} = \dot{V}_r = 0$$

6. Направление Кориолисова ускорения $\vec{a}_c$ определяется по правилу Жуковского; оно совпадает с направлением $\vec{a}_e^{\tau}$, а его модуль:

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin \alpha = 2 \cdot 1 \cdot 24 \cdot 0,5 = 24 \text{ м/с}^2$$

7. Проецируя все составляющие абсолютного ускорения на оси x и y , получаем:

$$a_x = a_e^{\tau} + a_c = 12 + 14 = 36 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_e^n = 48 \text{ м/с}^2.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{36^2 + 48^2} = 60 \text{ см/с}^2.$$

Раздел II. ДИНАМИКА

2.1. Законы динамики

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под действием сил.

В основе динамики лежат законы, впервые сформулированные Ньютоном. Закон инерции (первый закон). Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока какая-нибудь сила не выведет ее из этого состояния.

Если $\vec{F} = 0$, то $\vec{V} = \text{const}$

Закон пропорциональности силы и ускорения (второй закон — основной закон динамики). Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление (рис. 2.1), т. е.

$$M \cdot a = \vec{F}$$

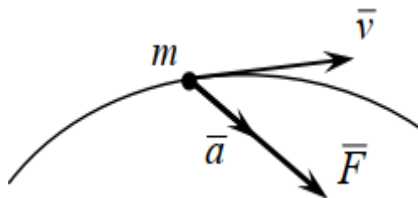


Рис. 2.1. Ускорение материальной точки

где m — коэффициент пропорциональности, характеризует инертные свойства материальной точки и называется массой точки.

Закон равенства действия и противодействия (третий закон). Всякому действию соответствует равное и противополо-

ложно направленное противодействие, т. е.

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$$

Закон независимости действия сил (четвертый закон). Ускорение, полученное точкой под действием системы сил, равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил, т. е.

$$m \cdot \bar{a} = \sum \bar{F}_k$$

2.2. Дифференциальные уравнения

движения точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах:

$$m \cdot \ddot{x} = \sum F_{kx} = F_x, m \cdot \ddot{y} = \sum F_{ky} = F_y, m \cdot \ddot{z} = \sum F_{kz} = F_z$$

В проекциях на естественные оси – касательную, главную нормаль и бинормаль, получаем дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника:

$$m d^2 s / dt^2 = F_\tau, m V^2 \rho = F_n, 0 = F_b$$

где $V = |V_\tau|$, $V_\tau = ds/dt$, s – дуговая координата, ρ – радиус кривизны траектории.

Задачи динамики

- 1) Зная закон движения точки массой m определить действующую на нее силу (первая задача динамики).
- 2) Зная силы, действующие на материальную точку, ее массу m , а также начальные условия движения, определить закон движения точки (вторая задача динамики).

2.3. Движение тела по заданной траектории

Пусть точка M массой m движется по закону:
 $x = a \cos kt$, $y = b \sin kt$.

Требуется определить равнодействующую приложенных к точке сил (1-я задача динамики).

Решение. Исключая время t из уравнений движения, найдем уравнение траектории точки: $\cos kt = x/a$, $\sin kt = y/b$, так как $\cos^2 kt + \sin^2 kt = 1$, тогда

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

Траекторией является эллипс с полуосями a и b (рис. 2.2).

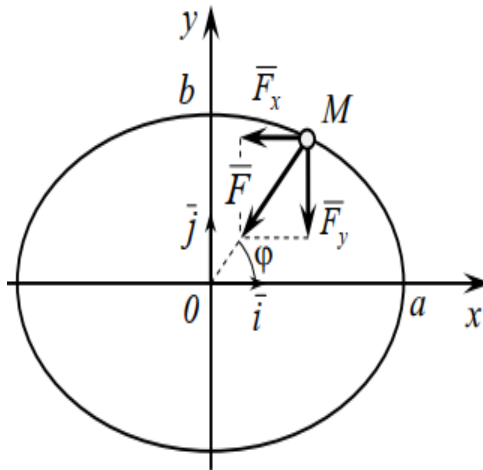


Рис. 2.2. Траектория точки

Определим проекции ускорения точки на оси координат:

$$\dot{x} = -a \cdot k \sin kt, \ddot{x} = -a \cdot k^2 \cos kt = -k^2 x$$

$$\dot{y} = -b \cdot k \cos kt, \ddot{y} = -b \cdot k^2 \sin kt = -k^2 y$$

Находим проекции равнодействующей силы:

$$F_x = m \cdot \ddot{x} = -mk^2 x,$$

$$F_y = m \cdot \ddot{y} = -mk^2 y$$

Определяем модуль и направление силы:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m \cdot k^2 \sqrt{x^2 + y^2} = m \cdot k^2 \cdot r,$$

$$\cos(\bar{F}, i) = \cos \varphi = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}, \cos(\bar{F}, j) = \sin \varphi = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}$$

2.4. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, без учета сопротивления воздуха

Определим движение тела M , брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0 , пренебрегая сопротивлением воздуха и принимая тело за материальную точку (2-я задача динамики) (рис. 2.3).

Совместим начало координат O с точкой вылета тела. Начальные условия движения: при $t = 0$:

$$x_0 = 0, y_0 = 0; \dot{x}_0 = V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha; \dot{y}_0 = V_{0y} = V_0 \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

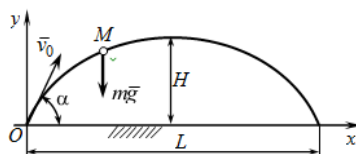


Рис. 2.3. Движение тела под углом к горизонту

Дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{kx} = 0 \\ m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \quad (1)$$

Интегрируя дважды по t , получаем:

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4 \end{cases} \quad (2)$$

Определим постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 по начальным условиям. Подставив (1) в (2), получаем:

$$\dot{x}_0 = C_1, x_0 = C_1 \cdot 0 + C_2, \dot{y}_0 = -g \cdot 0 + C_3; y_0 = -g \cdot 0^2 / 2 + C_3 \cdot 0 + C_4$$

Откуда $C_1 = V_0 \cos \alpha, C_2 = 0, C_3 = V_0 \sin \alpha, C_4 = 0$.

Закон изменения скорости и движения тела с учетом найденных констант:

$$\begin{cases} \dot{x} = V_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = -gt + V_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = V_0 t \cos \alpha \\ y = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t \sin \alpha \end{cases}$$

Исключив время t из закона движения, получим уравнение траектории тела:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2 \cdot V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Скорость тела в любой точке траектории:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(V_0 \cdot \cos \alpha)^2 + (-gt + V_0 \sin \alpha)^2}$$

Определим дальность и продолжительность полета тела. В точке падения тела $y = 0$. Продолжительность полета определим из уравнения (2) при $y = 0$:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t \sin \alpha = 0 \Rightarrow t \cdot \left(-\frac{gt}{2} + V_0 \sin \alpha \right) = 0$$

откуда находим $t_1 = 0$ и $t_2 = 2 \cdot V_0 \cdot \sin \alpha / g$ – время в момент вылета и падения соответственно. Дальность полета определим подставив t_2 в $x = V_0 t \cos \alpha$:

$$L = V_0 \cos \alpha \cdot 2 \cdot V_0 \cdot \sin \alpha / g = V_0^2 \cdot \sin 2\alpha / g$$

Наибольшую высоту подъема тела определим из условия, что в наивысшей точке вертикальная скорость равна нулю:

$$\dot{y} = -gt + V_0 \sin \alpha = 0, \text{ откуда } t = V_0 \cdot \sin \alpha / g$$

Подставляя найденное t в закон движения тела по оси y (2), получаем наибольшую высоту подъема тела: $H = y = V_0^2 \cdot \sin \alpha / (2g)$.

2.5. Общие теоремы динамики материальной точки

2.5.1. Теорема об изменении количества движения точки

Полным импульсом силы $\vec{F}$ действующей на материальную точку в течение времени t , называется вектор:

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F} dt$$

Проекции полного импульса силы $\bar{F}$ на оси декартовых координат:

$$S_x = \int_0^t F_x dt, S_y = \int_0^t F_y dt, S_z = \int_0^t F_z dt.$$

Модуль и направление полного импульса $\bar{S}$ определяются по проекциям:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}; \cos(\bar{S}, \bar{i}) = \frac{S_x}{S};$$

$$\cos(\bar{S}, \bar{j}) = \frac{S_y}{S}; \cos(\bar{S}, \bar{k}) = \frac{S_z}{S}.$$

Количеством движения материальной точки называется векторная величина $m\bar{V}$, равная произведению массы точки m на ее скорость $\bar{V}$.

Запишем ДУ движения материальной точки M в виде $m d\bar{V}/dt = \bar{F}$ или, так как $m = \text{const}$, $d(m\bar{V})/dt = \bar{F}$

Данное уравнение выражает теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме. Перепишем последнее выражение в виде:

$d(m\bar{V})/dt = d\bar{F}$ и проинтегрируем ДУ в пределах от 0 до t :

$$\int_{\bar{V}_0}^{\bar{V}} d(m\bar{V}) = \int_0^t \bar{F} dt$$

$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \bar{S}$$

где $\bar{V}$ и $\bar{V}_0$ – скорость точки в текущий и начальный моменты времени соответственно (рис. 2.4);

$\bar{S}$ – полный импульс равнодействующей силы за время t .

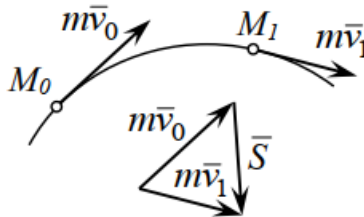


Рис. 2.4. Изменение количества движения точки

Теорема об изменении количества движения точки в интегральной форме: изменение количества движения точки за промежуток времени от 0 до t равно полному импульсу равнодействующей силы, действующей на точку, за тот же промежуток времени. В проекциях на оси:

$$\begin{aligned} m \cdot V_x - m \cdot V_{0x} &= S_x; \quad m \cdot V_y - m \cdot V_{0y} = S_y; \\ m \cdot V_z - m \cdot V_{0z} &= S_z. \end{aligned}$$

2.5.2. Теорема об изменении момента количества движения точки

Моментом количества движения материальной точки (рис. 2.5) относительно некоторого центра O называется векторная величина:

$$\bar{L}_0 = L_x \cdot \bar{i} + L_y \cdot \bar{j} + L_z \cdot \bar{k} = \bar{m}_0(m\bar{V}) = \bar{r} \cdot m\bar{V}$$

$$L_x = m(yV_z - zV_y); \quad L_y = m(zV_x - xV_z); \quad L_z = m(xV_y - yV_x).$$

где r – радиус-вектор движущейся точки. $L_x > 0$, если смотря навстречу оси x , движение точки происходит против хода часовой стрелки. Когда $L_x < 0$ – наоборот.

$$\text{Модуль вектора } \bar{L}_0 \text{ равен } \bar{L}_0 = mVh = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$$

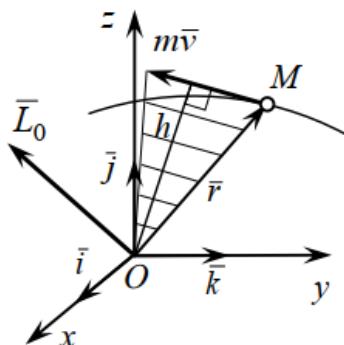


Рис. 2.5. Момент количества движения материальной точки

Запишем уравнение движения материальной точки

$$\begin{aligned}
 M d\frac{\bar{v}}{dt} &= \bar{F} \Rightarrow \bar{r} \cdot m d\bar{v}/dt = \bar{r} \cdot \bar{F} \Rightarrow d/dt (\bar{r} \cdot m \bar{v}) = \\
 &= \bar{r} \cdot \frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0
 \end{aligned}$$

Теорема об изменении момента количества движения точки: *первая производная по времени от момента количества движения точки относительно центра O равна моменту равнодействующей силы относительно того же центра O . В проекциях на оси координат:*

$$dL_x/dt = M_x, dL_y/dt = M_y, dL_z/dt = M_z$$

2.5.3. Работа силы

Пусть точка приложения силы $\bar{F}$ перемещается по криволинейной траектории из положения M_0 в положение M_1 . Разобьем перемещение точки M по дуге M_0M_1 на бесконечно малые перемещения ds и определим работу на каждом таком перемещении.

Элементарной работой силы F (рис. 2.6), приложенной в точке M , называется скалярная величина равная произведению элементарного перемещения на проекцию силы на это перемещение.

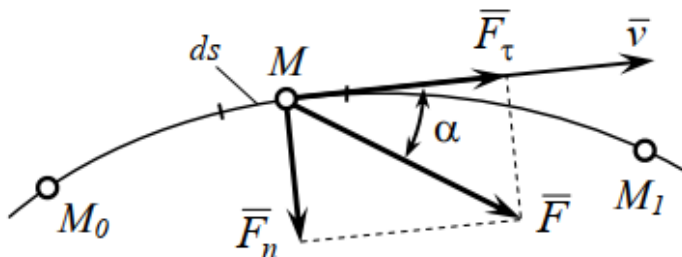


Рис. 2.6. Элементарная работа силы

$$dA = F_{\tau} ds = F \cos \alpha ds,$$

Поскольку $ds = |d\vec{r}|$,

$$\text{тогда } dA|\vec{F}|\cos\alpha|d\vec{r}| = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Полную работу силы $\vec{F}$ на перемещении точки из положения M_0 в положение M_1 определяют как предел интегральной суммы соответствующих элементарных работ:

$$A = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{M_0}^{M_1} F_{\tau} ds = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Работа силы тяжести:

$$A = \pm mgh,$$

h – перемещение по вертикали, «+» перемещение вниз, «-» перемещение вверх.

Работа силы упругости:

$$A = \pm c\lambda^2/2,$$

c – коэффициент жесткости пружины,

λ – удлинение пружины, «+» деформация пружины уменьшается, «-» деформация увеличивается.

2.5.4. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $mV^2/2$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости. Движение точки массой m под действием силы $\vec{F}$ определяется уравнением $m d\vec{V}/dt = \vec{F}$, которое также можно записать в виде:

$$m d\vec{V} = \vec{F} dt \Rightarrow m \vec{V} d\vec{V} = \vec{F} \cdot \vec{V} dt \Rightarrow d(mV^2/2) = dA$$

Получили теорему об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме: дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.

Интегрируя обе части уравнения от M_0 до M_1 , получаем:

$$mV_1^2/2 - mV_0^2/2 = A \text{ или } T_1 - T_0 = A$$

Теорема об изменении кинетической энергии точки в интегральной форме: *изменение кинетической энергии точки на любом перемещении равно работе силы, действующей на точку, на том же перемещении.*

2.6. Относительное движение материальной точки

Пусть точка M под действием некоторых сил $\vec{F}_k$ совершает сложное движение. Основное уравнение динамики точки относительно инерциальной (неподвижной) системы отсчета $Oxyz$:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k, \Rightarrow m(\vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c) = \sum \vec{F}_k \Rightarrow m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c),$$

где $-m\vec{a}_e = \vec{F}_e^i$ — переносная сила инерции;

$-m\vec{a}_c = \vec{F}_c^i$ — кориолисова сила инерции.

Таким образом, основное уравнение динамики для относительного движения запишется:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + \vec{F}_e^i + \vec{F}_c^i$$

Относительное движение материальной точки можно рассматривать как абсолютное, если действующим на точку силам прибавить переносную и кориолисову силы инерции.

2.7. Теорема о движении центра масс

Системой материальных точек (или механической системой) (рис. 2.7) называют такую совокупность материальных точек, в которой положение или движение каждой точки зависит от положения и движения всех остальных.

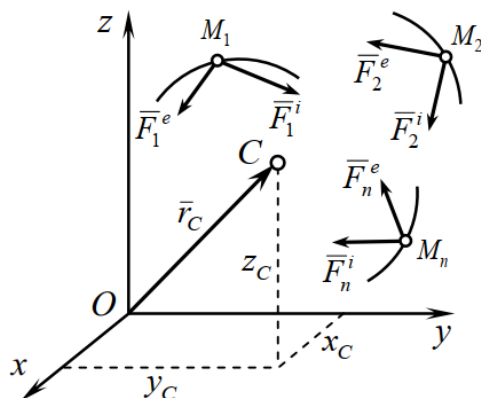


Рис. 2.7. Система материальных точек

Все действующие на механическую систему задаваемые (активные) силы $\bar{F}_k$ и реакции связей N_k , разделяют на внешние F_k^e и $\bar{F}_k^e$ внутренние $\bar{F}_k^i$.

Внешними называют силы, действующие на точки системы со стороны материальных точек, не входящих в состав данной системы.

Внутренними называют силы, с которыми точки данной системы действуют друг на друга.

Центром масс системы называется геометрическая точка C , радиус-вектор которой вектор которой $\bar{r}_C = \sum m_k \bar{r}_k / M$,

$M = \sum m_k$ – масса системы.

Координаты центра масс системы:

$$x_c = \sum m_k x_k / M, y_c = \sum m_k y_k / M, z_c = \sum m_k z_k / M$$

Уравнение движения системы материальных точек можно записать:

$$M \bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^e$$

Теорема о движении центра масс системы: центр масс механической системы движется как материальная точка массой, равной массе всей системы, к которой приложены все

внешние силы, действующие на систему. В проекциях на координатные оси, получим:

$$Mx_c = \sum \bar{F}_{kx}^e, My_c = \sum \bar{F}_{ky}^e, Mz_c = \sum \bar{F}_{kz}^e$$

Закон сохранения движения центра масс системы (следствия теоремы).

1. Если $\sum \bar{F}_k^e = 0$, то из теоремы следует, что $\bar{a}_c = 0$, откуда $\bar{V}_c = \bar{V}_{c0}$ и если $\bar{V}_{c0} = 0$, $\bar{V}_c = 0 \Rightarrow \bar{r}_c = \bar{r}_{c0}$

Таким образом, если геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс системы движется прямолинейно и равномерно или находится в покое.

3. Если $\sum \bar{F}_{kx}^e = 0$, $\dot{x}_c = \dot{x}_{c0}$. И если $\dot{x}_{c0} = 0$, то $x_c = const$ или $x_c = x_{c0}$

2.8. Теорема об изменении количества движения системы

Количеством движения механической системы называют вектор: $\bar{K} = \sum m_k \cdot \bar{V}_k = M \cdot \bar{V}_c$, равный геометрической сумме количеств движения точек системы или определяется как произведение массы всей системы на скорость ее центра масс.

Запишем теорему о движении центра масс механической системы в виде:

$$M \cdot \bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^e = \bar{F}^e \Rightarrow d \cdot (M \cdot \bar{V}_c) dt = \bar{F}^e \Rightarrow d\bar{K}/dt = \bar{F}^e \quad (3)$$

Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме: производная по времени от количества движения механической системы геометрически равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему.

В проекциях на оси координат имеем:

$$d\bar{K}_x/dt = \bar{F}_x^e, d\bar{K}_y/dt = \bar{F}_y^e, d\bar{K}_z/dt = \bar{F}_z^e$$

Проинтегрируем уравнение (3) за время перехода системы из какого-нибудь одного положения в другое:

$$\bar{K} - \bar{K}_0 = \bar{S}^e,$$

где $\bar{S}^e = \sum \bar{S}_k^e$ – полный импульс главного вектора внешних сил.

Теорема об изменении количества движения механической системы в интегральной форме: *изменение количества движения механической системы а некоторый промежуток времени равно полному импульсу внешних сил, приложенных к системе, за тот же промежуток времени.* В проекциях на оси координат:

$$K_x - K_{0x} = S_x^e, K_y - K_{0y} = S_y^e, K_z - K_{0z} = S_z^e$$

Закон сохранения количества движения системы (следствия теоремы).

1. Если $\bar{F}^e = \sum \bar{F}_k^e = 0$, то из (3) следует, что $\bar{K} = const$

Таким образом, *если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.*

2. Если $\bar{F}_x^e = \sum \bar{F}_{kx}^e = 0$, то $\bar{K}_x = const$ или $\sum m_k \cdot V_{kx} = const$

2.9. Теорема об изменении

кинетического момента системы

Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси Oz называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси:

$$J_z = \sum m_k \cdot h_k^2.$$

Моменты инерции:

– однородного стержня относительно центр масс стержня:

$$J_z = M \cdot l^2 / 12;$$

– тонкой цилиндрической оболочки относительно ее оси:

$$J_z = M \cdot R^2;$$

– круглого однородного цилиндра относительно его оси:

$$J_z = M \cdot R^2/2;$$

Теорема Гюйгенса: момент инерции тела относительно некоторой оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями, т. е. $J_{z1} = J_z + Md^2$.

Так, например, момент инерции относительно конца стержня:

$$J_z = M \cdot l^2/12 + Md^2 = M \cdot l^2/12 + M \cdot (l/2)^2 = M \cdot l^2/3$$

Главным моментом количеств движения, или кинетическим моментом механической системы, относительно центра O называют геометрическую сумму векторов моментов количеств движения материальных точек системы относительно того же центра O :

$$\bar{L}_0 = L_x \cdot \bar{i} + L_y \cdot \bar{j} + L_z \cdot \bar{k} = \sum \bar{L}_{0k} = \sum \bar{r}_k \cdot m_k \cdot V_k$$

Теорема об изменении главного момента количества движения механической системы: производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра равна главному моменту внешних сил, относительно того же центра:

$$d\bar{L}_0/dt = \bar{M}_0^e$$

В проекциях на оси:

$$dL_x/dt = M_x^e, dL_y/dt = M_y^e, dL_z/dt = M_z^e$$

Закон сохранения кинетического момента механической системы.

1. Если главный момент внешних сил системы относительно центра O равен нулю, т. е. $\bar{M}_0^e = 0$, тогда $d\bar{L}_0/dt = 0$ и $\bar{L}_0 = const$

2. Если $\bar{M}_x^e = 0$, тогда $dL_z/dt = 0$ и $L_z = const$

2.10. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия механической системы называется скалярная величина T , равная сумме кинетических энергии всех точек системы:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} \text{ или } T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \sum \frac{m_k V_{kr}^2}{2}$$

Теорема Кенига: кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии центра масс системы и кинетической энергии этой системы в ее движении относительно центра масс.

Для твердого тела при плоском движении теорема Кенига примет вид:

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \cdot \omega^2,$$

J_{Cz} – момент инерции тела относительно оси Cz ,

ω – угловая скорость тела.

Применим к движению каждой точки системы теорему об изменении кинетической энергии и просуммируем составленные n равенства:

$$T_2 - T_1 = \sum A_k^e + \sum A_k^i,$$

T_2, T_1 – кинетическая энергия системы в первом и во втором положениях соответственно. Для твердого тела $\sum A_k^i = 0$, тогда

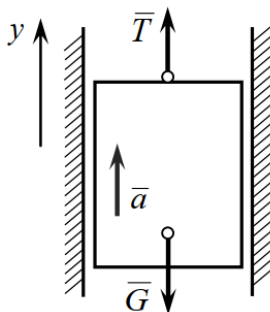
$$T_2 - T_1 = \sum A_k^e$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме для твердого тела: изменение кинетической энергии твердого тела на некотором перемещении равно сумме работ внешних сил, действующих на тело на этом перемещении.

Примеры решения задач по темам раздела II «Динамика».

Составление дифференциальных уравнений движения точки

Пример 1. Лифт массой m начинает подниматься с ускорением a . Определить натяжение троса.



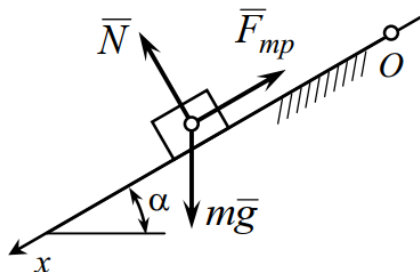
Решение. На лифт действуют сила тяжести $\bar{G}$ и реакция троса T . Составим уравнение движения лифта вдоль оси y :

$$ma_y = \sum F_{ky} \Rightarrow ma_y = T - G \Rightarrow T = G + ma_y = m(g + a).$$

Если лифт опускается вниз с таким же ускорением, то натяжение троса:

$$-ma_y = T - G \Rightarrow T = G - ma_y = m(g - a).$$

Пример 2. Груз спускается вниз по негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, двигаясь согласно уравнению $x = at^2$, где a – постоянный коэффициент. Определить модуль силы трения скольжения груза о плоскость.



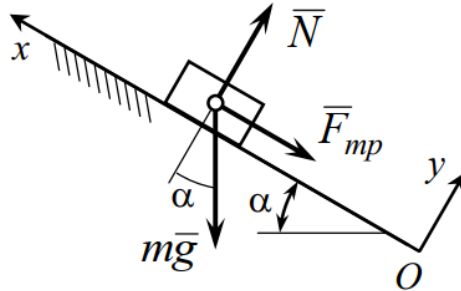
Решение. Показываем приложенные к грузу силы.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x : $m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{mp}$. (1)

Учитывая, что $x = at^2$, откуда $\dot{x} = 2at$ и $\ddot{x} = 2a$.

Тогда из (1): $F_{mp} = mg \sin \alpha - m\ddot{x} = m(g \sin \alpha - 2a)$.

Пример 3. Груз в результате полученного толчка начал скользить вверх с начальной скоростью $V_0 = 3$ м/с по негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Определить путь S , пройденный грузом до остановки, если коэффициент трения скольжения равен $f = 0,4$.



Решение. Направим ось x в сторону движения груза, вверх, вдоль наклонной плоскости. Дифференциальное уравнение движения груза вдоль x :

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - F_{mp}, \quad F_{mp} = fN = fmg \cos \alpha$$

$$\ddot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) = -gb$$

Проинтегрируем полученное ДУ:

$$\frac{dV_x}{dt} = -gb \Rightarrow \int_{V_0}^{V_x} dV_x = -gb \int_0^t dt = V_x - V_0 = -gbt. \quad (1)$$

Из (1) найдем время движения груза до остановки

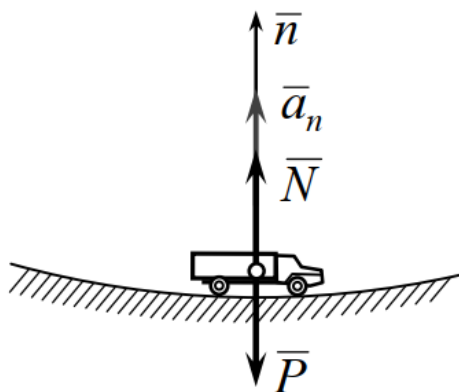
$$V_x = 0: t = V_0/gb. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -gbt + V_0 \Rightarrow \int_0^S dx = \int_0^t (-gbt + V_0)dt \Rightarrow S = \\ &= -\frac{1}{2}gbt^2 + V_0t. \end{aligned}$$

Подставляя найденное время t (2), определим путь S пройденный грузом:

$$S = \frac{v_0^2}{2gb} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 0,542 \text{ м}$$

Пример 4. Автомобиль массой $m = 1000$ кг движется по дну оврага с постоянной по модулю скоростью $V = 90$ км/ч. Определить давление автомобиля на дно оврага в наименьшей точке. Радиус кривизны траектории ρ в этой точке равен 50 м. Силой сопротивления движению пренебречь.



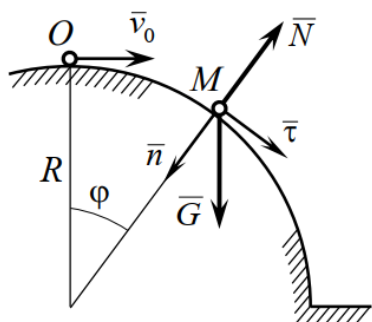
Решение. Дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на главную нормаль:

$$ma_n = \sum F_{kt} \Rightarrow m \frac{v^2}{\rho} = N - P$$

$$\text{Отсюда } N = m \frac{v^2}{\rho} + mg = 1000(25^2/50 + 9,81) = 22310 \text{ кг}$$

Сила давления автомобиля на дно оврага равна по модулю N и направлена вниз.

Пример 5. Шарику, находившемуся в вершине гладкой шаровой поверхности радиусом $R = 1$ м, сообщена скорость $V_0 = 1$ м/с. Определить, в какой точке шарик отделится от поверхности и начнет двигаться свободно.



Решение. Шарик движется по гладкой шаровой поверхности под действием двух сил: силы тяжести $\vec{G}$ и реакции поверхности $\vec{N}$. Уравнения движения шарика в естественных координатах:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = G \cdot \sin \varphi, m \frac{v^2}{R} = G \cos \varphi - N$$

Шарик отделяется от поверхности, когда реакция поверхности N равна нулю. Из второго уравнения при $N = 0$, получаем:

$$m \frac{v^2}{R} = G \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{v^2}{gR} \quad (1)$$

Для определения скорости в точке отрыва V воспользуемся первым уравнением. Начальное положение шарика примем за начало отсчета O дуговой координаты S . Тогда $S = OM = R\varphi$ и распишем:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = R \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = R\omega \frac{d\omega}{d\varphi}$$

Подставляя в первое уравнение и интегрируя, получаем:

$$R \frac{d\omega}{d\varphi} = g \sin \varphi \Rightarrow R\omega d\omega = g \sin \varphi d\varphi \Rightarrow R \frac{\omega^2}{2} = -g \cos \varphi + C$$

Учитывая, что $\omega = \frac{v}{R}$, имеем $\frac{v^2}{2R} = -g \cos \varphi + C$. Константу определим по начальным условиям: $V = V_0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$. Откуда $C = V_0^2/2R + g$

$$\frac{v^2}{2R} = -g \cos \varphi + \frac{V_0^2}{2R} + g \Rightarrow v^2 = V_0^2 + 2gR(1 - \cos \varphi).$$

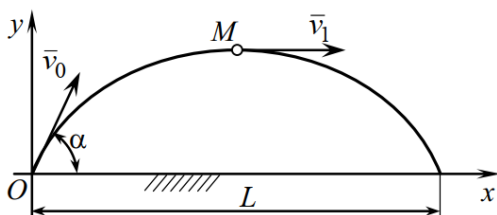
Подставляя найденное V^2 в уравнение (1), получаем:

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{V_0^2 + 2gR(1 - \cos\varphi)}{gR} \text{ или } \cos\varphi = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{V_0^2}{gR} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(2 + \frac{1}{9,81} \right) = 0,701\end{aligned}$$

Таким образом, шарик отделится от поверхности при угле $\varphi = 45,52^\circ$.

Применение общих теорем динамики материальной точки

Пример 6. Найти импульс равнодействующей всех сил, действующих на снаряд за время, когда снаряд из начального положения O переходит в наивысшее положение M . Известно: $V_0 = 500\text{ м/с}$; $\alpha = 60^\circ$; $V_1 = 200\text{ м/с}$; масса снаряда 100 кг .



Решение. По теореме об изменении количества движения точки:

$$\begin{cases} m \cdot V_{1x} - m \cdot V_{0x} = S_x \\ m \cdot V_{1y} - m \cdot V_{0y} = S_y \end{cases}$$

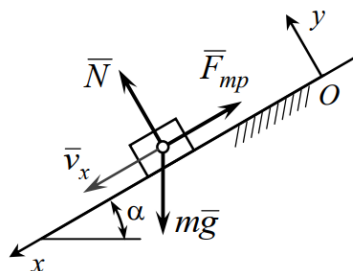
Применительно рисунку, имеем:

$$\begin{cases} m \cdot V_1 - m \cdot V_0 \cos\alpha = S_x \\ 0 - m \cdot V_0 \sin\alpha = S_y \end{cases}$$

Подставляя числовые значения, находим:

$$\begin{aligned}S_x &= m(V_1 - V_0 \cos\alpha) = -5000\text{ Н}\cdot\text{с}, \\ S_y &= -V_0 \cdot m \cdot \sin\alpha = -43301\text{ Н}\cdot\text{с}\end{aligned}$$

Пример 7. По шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$, спускается тело без начальной скорости. Определить, в течение какого времени t тело пройдет путь длины $l = 40\text{ м}$, если коэффициент трения $f = 0,1$.



Решение. Теорема об изменении количества движения вдоль оси x и y :

$$\begin{cases} m \cdot V_x - m \cdot V_{0x} = \sum F_{kx} \cdot t \\ m \cdot V_y - m \cdot V_{0y} = \sum F_{ky} \cdot t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \cdot V_x = (m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_{\text{тр}}) \cdot t \\ 0 = (N - m \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot V_x = (m \cdot g \cdot \sin \alpha - N \cdot f) \cdot t \\ N = m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

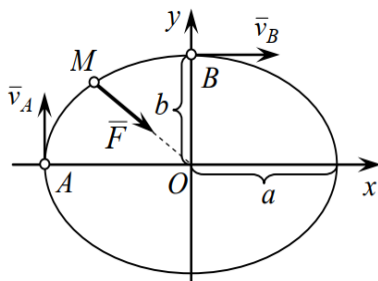
Подставляя N в первое уравнение системы и сокращая на m , находим закон изменения скорости:

$$V_x = g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \cdot t$$

$$x = g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \cdot t^2 / 2$$

Отсюда $t = \sqrt{2l/g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)} \approx 4,95 \text{ с.}$

Пример 8. Материальная точка массы m движется по эллиптической траектории вокруг неподвижного центра под действием центральной силы. Найти скорость в точке A , если скорость в точке B равна $V_B = 30 \text{ м/с}$, а малая полуось эллипса $b = 5a$.



Решение. Согласно теореме об изменении момента количества движения точки $dL_z/dt = 0$, в нашем случае $M_z = 0$, так как сила центральная (линия действия силы проходит через центр O). Следовательно, $L_z = \text{const}$ или $L_{zA} = L_{zB}$, отсюда:

$$mV_A a = mV_B b \Rightarrow VA = V_B b/a = 600 \text{ м/с.}$$

Пример 9. Вагон весом 16 т наталкивается со скоростью 1 м/с на два упорных буфера. Определить наибольшее сжатие буферов при ударе вагона, если известно, что пружина буфера сжимается на 1см под действием силы в 5 т.

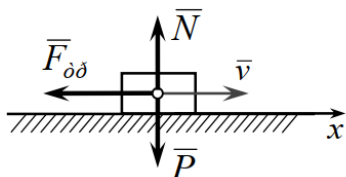
Решение. В момент соприкосновения вагона и буферов на вагон начинают действовать две силы $F = cx$, где $c = 5 \text{ т/см}$. Применим теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -F_x dx = -2 \cdot 5x dx = -10x dx.$$

Интегрируем слева по V от $V_0 = 100 \text{ см/с}$ до нуля, а справа по x от нуля до какого-то предельного сжатия λ . Масса вагона $m = 16/g = 16/981$.

$$\begin{aligned} \int_{100}^0 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) &= -10 \int_0^\lambda x dx \Rightarrow -m \frac{100^2}{2} = -10 \frac{\lambda^2}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{16 \cdot 100^2}{981 \cdot 2} = 5\lambda^2 \Rightarrow \lambda = 4,04 \text{ см} \end{aligned}$$

Пример 10. Телу весом P , лежащему на горизонтальной плоскости, сообщают начальную горизонтальную скорость V_0 . Требуется определить, через сколько времени тело остановится и какой путь оно пройдет до остановки, если коэффициент трения тела о плоскость равен f .



Решение. По теореме об изменении количества движения точки:

$$mV_x - mV_{0x} = F_{np}t,$$

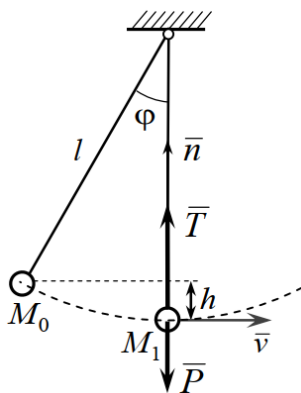
где $F_{np} = Nf = mgf$. Поскольку $V_x = V_0$ и $V_{0x} = 0$, отсюда находим искомое время: $t = V_0 / fg$. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$mV^2/2 - mV_0^2/2 = F_{тр}S.$$

Учитывая $V = 0$, тогда: $mV_0^2/2 = mgfS$

Отсюда путь, пройденный телом до остановки: $S = V_0^2/2fg$

Пример 11. Груз весом P , подвешенный на нити длиной l , отклоняют от вертикали на угол φ в положение M_0 и отпускают без начальной скорости. Определить натяжение нити в момент, когда груз дойдет до наинизшего положения M_1 .



Решение. Дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на главную нормаль:

$$\frac{mV_1^2}{l} = T - P \Rightarrow T = \frac{mV_1^2}{l} + P, \quad (1)$$

где V — скорость груза в положении M_1 . Для определения mV_1^2 воспользуемся уравнением:

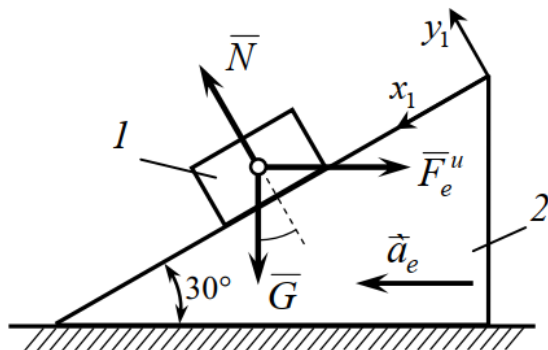
$$mV_1^2/2 - mV_0^2/2 = A,$$

где $A = Ph = Pl(1 - \cos \varphi)$ — работа силы тяжести на M_1M_0 .

Учитывая условие задачи $V_0 = 0$, из последнего находим:
 $mV_1^2 = 2Pl(1 - \cos \varphi)$, подставляя найденное в (1), имеем:
 $T = P(3 - 2 \cos \varphi)$.

Относительное движение материальной точки

Пример 12. Тело 1 массой $m_1 = 0.5$ кг удерживается в состоянии относительного покоя на гладкой поверхности призмы 2. Определить ускорение призмы 2, обеспечивающее относительный покой тела 1.



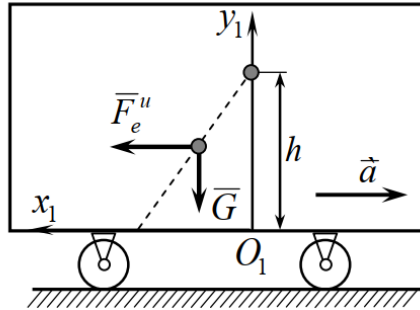
Решение. На тело 1 действуют сила тяжести $\vec{G}$, нормальная реакция $\vec{N}$ и переносная сила инерции $\vec{F}_e^u$, направленная противоположно переносному ускорению призмы $\vec{a}_e$ ($\vec{F}_e^u = m\vec{a}_e$). Введем оси x_1 и y_1 , связанные с движущейся призмой. Запишем дифференциальное уравнение относительного движения тела 1 в проекциях на ось x_1 :

$$0 = G \cdot \sin 30^\circ - \vec{F}_e^u \cdot \cos 30^\circ \text{ или } \\ 0 = m \cdot g \cdot \sin 30^\circ - m \cdot a_e \cdot \cos 30^\circ.$$

Отсюда находим ускорение призмы 2:

$$a_e = g \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 5,66 \text{ м/с}^2.$$

Пример 13. Вагон трогается с постоянным ускорением a . Определить траекторию движения тела M , упавшего с полки высотой h , относительно вагона.



Решение. Вводим оси, связанные с вагоном. Указываем действующие на тело M силы: $\vec{G}$ – сила тяжести и $\vec{F}_e^u$ – переносная сила инерции, направленная противоположно переносному ускорению вагона $\vec{a}$.

Дифференциальные уравнения относительного движения:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}_1 = \bar{F}_e^u \\ m \cdot \ddot{y}_1 = -G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = a \\ \ddot{y}_1 = -g \end{cases}$$

Интегрируя, получаем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a \cdot t + C_1 \\ \dot{y}_1 = -g \cdot t + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a \cdot t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_3 \\ y_1 = -\frac{g \cdot t^2}{2} + C_2 \cdot t + C_4 \end{cases}$$

Используя начальные условия при $t = 0$:

$$x_1 = 0, y_1 = h, \dot{x}_1 = 0, \dot{y}_1 = 0,$$

найдем постоянные интегрирования:

$$C_1 = C_3 = C_2 = 0, \quad C_4 = h.$$

Уравнения движения примут вид:

$$x_1 = \frac{a \cdot t^2}{2}, y_1 = h - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

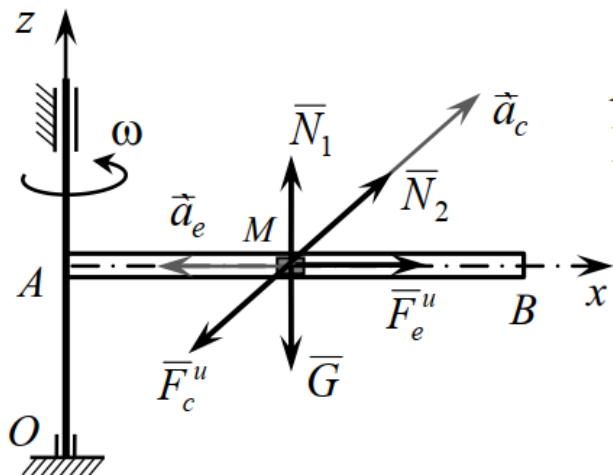
Траекторию движения получим, исключив параметр t :

$$y_1 = h - gx_1/a - \text{уравнение прямой.}$$

Тело M упадет на пол вагона на расстоянии $S = ah/g$ от края полки (при $y_1 = 0, x_1 = S$).

Если вагон будет двигаться равномерно ($a = 0$), то $S = 0$. Наблюдатель увидит траекторию – вертикальную прямую, такую же, как и при неподвижном вагоне.

Пример 14. Горизонтальная трубка длиной L м равномерно вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω рад/с. Внутри трубки находится тело M . Определить скорость тела относительно трубки в момент его вылета, если в начальный момент относительная скорость $V|_{x=x_0} = 0$. Трением пренебречь.



Решение. На тело помимо силы тяжести $\bar{G}$ и реакции от нее $\bar{N}_1$ будут действовать кориолисова сила инерции $\bar{F}_c^и$ ее реакция $\bar{N}_2$ и переносная сила инерции $\bar{F}_e^и$. По теореме об изменении кинетической энергии точки в относительном движении:

$$mV_1^2/2 - mV_0^2/2 = \sum A_k + A(\bar{F}_e^и),$$

где V_0 и V_1 – значения относительных скоростей,

A – работа на относительном перемещении.

В нашем случае $\sum A_k = 0$

$$A(\bar{F}_e^и) = \int_{x_0}^L m \cdot a_e dx = m \cdot \omega^2 \int_{x_0}^L x dx = \frac{m \cdot \omega^2}{2} \cdot (L^2 - x_0^2).$$

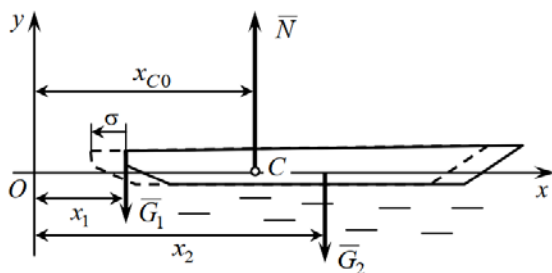
$$m \cdot V_1^2/2 = A(\bar{F}_e^и)$$

Откуда скорость тела в момент вылета:

$$V_B = \omega \sqrt{L^2 - x_0^2}$$

Применение законов сохранения механической системы

Пример 15. Человек массой m_1 стоит на корме лодки массой m_2 длиной l , находящейся в покое в стоящей воде. Определить, пренебрегая сопротивлением воды, расстояние σ , на которое переместится лодка, если человек перейдет на нос лодки.



Решение. Система лодка-человек находится в покое под действием трех внешних вертикальных сил: веса человека $\bar{G}_1$, веса лодки $\bar{G}_2$ и реакции воды N . Пусть x_1 и x_2 начальные координаты человека и лодки.

Поскольку $\sum F_{kx}^e = 0$ и начальная скорость лодки равна нулю $x_{C0} = 0$, то по второму закону сохранения $x_C = \text{const}$ или $x_{C0} = x_C$, где x_{C0} и x_C — координаты центра масс системы до перемещения и после перемещения человека по лодке соответственно. Определим их по формуле (2.1):

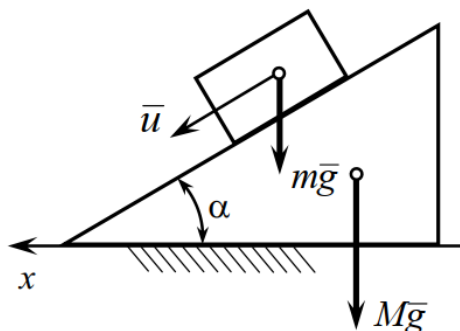
$$x_{C0} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}, x_C = \frac{m_1 \cdot (x_1 + l - \sigma) + m_2 (x_2 - \sigma)}{m_1 + m_2}.$$

Приравниваем координаты центра масс до и после перемещения человека

$$m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 = m_1 \cdot (x_1 + l - \sigma) + m_2 (x_2 - \sigma).$$

$$\text{Откуда находим перемещение лодки: } \sigma = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}$$

Пример 16. По грани клина 1 массой M , поставленной на гладкой горизонтальной плоскости, опускается с относительной скоростью u тело 2 массой m . Определить скорость клина.



Решение. Поскольку проекция главного вектора внешних сил на ось x равна нулю, согласно второму закону сохранения количества движения системы:

$$K_x = \sum m_k V_{kx} = \text{const} \text{ или } \sum m_{k0} V_{kx0} = \sum m_k V_{kx}$$

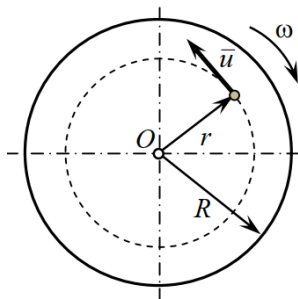
В начале движения количество движения системы равно нулю $\sum m_{k0} V_{kx0} = 0$, так как т.к. система была неподвижна. В последующий момент клин начнет двигаться с некоторой скоростью $V_{1x} = -V$ влево, а тело 2 будет иметь абсолютную скорость $V_{2x} = -V + u \cdot \cos \alpha$. Тогда количество движения системы в последующий момент:

$$\sum m_k V_{kx} = -mV + (-V + u \cdot \cos \alpha),$$

отсюда $V = m \cdot u \cdot \cos \alpha / (M + m)$

Пример 17. Круглая горизонтальная платформа может вращаться без трения вокруг неподвижной оси Oz , проходящей через ее центр O ; по платформе на неизменном расстоянии от оси Oz , равном r , идет с постоянной относительной скоростью u человек, масса которого равна m . С какой угловой скоростью ω будет при этом вращаться платформа вокруг оси, если ее масса M равномерно распределена по площади круга радиуса R . В начальный момент платформа и человек имели нулевые скорости.

Решение. Платформа и человек образуют систему. Кинетический момент этой системы относительно вертикальной оси Oz есть константа, поскольку внешние силы не создают момент относительно этой оси (2-й закон сохранения): $L_z = \text{const}$ или $L_z = L_{z0}$. Кинетический момент системы в начальный момент времени $L_{z0} = 0$, т.к. платформа и человек имели нулевые скорости.



В последующий момент, человек идет по платформе:

$$L_z = L_{\text{платф.}} + L_{\text{чел.}} = J \cdot \omega + m \cdot v_{\text{чел.}} \cdot r,$$

где ω – угловая скорость платформы,

$v_{\text{чел.}}$ – абсолютная скорость человека.

Тогда $J \cdot \omega + m \cdot (\omega r - v_{\text{чел.}}) \cdot r = 0$.

Учитывая, что момент инерции платформы относительно оси $J = MR^2/2$, находим $\omega = 2m \cdot u \cdot r \cdot (M \cdot R^2 + 2 \cdot m \cdot r^2)$

Общие теоремы динамики системы

Пример 18. Груз B массы m_1 поднимается с посредством каната, навитого на барабан A радиуса r и массы m_2 . К барабану приложен вращающий момент $m_{\text{вр}} = at$, где a – постоянная. Определить угловую скорость барабана, считая его сплошным цилиндром. В начальный момент барабан и груз находились в покое.

Решение. Применим теорему об изменении кинетического момента относительно оси Oz (проходит через точку O перпендикулярно плоскости):

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e$$

Сумма моментов внешних сил относительно оси Oz :

$$M_z^e = \sum m_z(\vec{F}_k^e) = m_{\text{вп}} - m_1 \cdot g \cdot r.$$

Кинетический момент системы относительно оси Oz :

$$L_z = L_{\text{бар}} + L_{\text{гр}} = J_A \cdot \omega + m_1 \cdot V_B \cdot r = (J_A + m_1 \cdot r^2) \cdot \omega$$

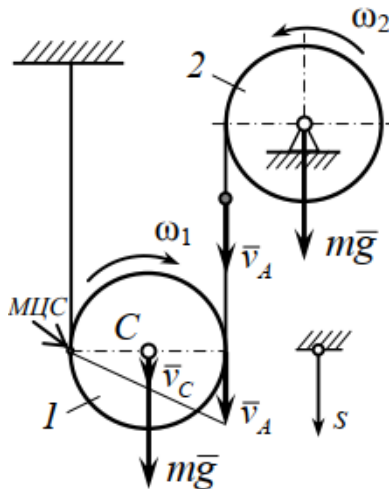
$$(J_A + m_1 \cdot r^2) \frac{d\omega}{dt} = m_{\text{вп}} - m_1 \cdot g \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (J_A + m_1 \cdot r^2) \int_0^\omega d\omega = \int_0^t (a \cdot t - m_1 \cdot g \cdot r) dt$$

$$\text{Так как } J_A = \frac{m_2 \cdot r^2}{2}, \left(\frac{m_2 \cdot r^2}{2} + m_1 \cdot r^2 \right) \omega = \frac{a \cdot t^2}{2} - m_1 \cdot g \cdot r \cdot t,$$

$$\text{откуда } \omega = \frac{a \cdot t^2 - 2m_1 \cdot g \cdot r \cdot t}{m_2 \cdot r^2 + 2m_1 \cdot r^2}$$

Пример 19. Одинаковые блоки 1 и 2 массой и радиусами, представляющие собой однородные диски, начинают движение (вращение) из состояния покоя под действием силы тяжести. Определить скорость центра C блока 1 после того, как он опустится вниз на расстояние $S = 1$ м.



Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e, \text{ где } T_0 = 0 \text{ по условию.}$$

Запишем кинетическую энергию системы: $T = T_1 + T_2$

Кинетическая энергия диска 1:

$$T_1 = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_1\omega_1^2}{2},$$

где $J_1 = \frac{mr^2}{2}$ и $\omega_1 = \frac{V_c}{r}$, то

$$T_1 = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \frac{V_c^2}{r^2} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{mV_c^2}{4} = \frac{3mV_c^2}{4}.$$

Кинетическая энергия диска 2:

$$T_2 = \frac{J_2\omega_2^2}{2},$$

где $J_2 = \frac{mr^2}{2}$ и $\omega_2 = \frac{V_A}{r} = \frac{2V_c}{r}$, то $T_2 = \frac{J_2\omega_2^2}{2} = mV_c^2$

Окончательно, кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{3mV_c^2}{4} + mV_c^2 = \frac{7mV_c^2}{4}.$$

При движении системы работу совершает только сила тяжести блока 2:

$$\sum A_k^e = A_{mg} = mgS$$

Подставляя полученные выражения для T и $\sum A_k^e$, находим скорость центра C блока 1:

$$\frac{7mV_c^2}{4} = mgS \Rightarrow V_c = \sqrt{\frac{4g}{7}} = 2,368 \text{ м/с}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: учебник. – 15-изд., стер. – М.: КНОРУС, 2010. – 608 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2006. – 416 с.
3. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики: учебник для вузов /под общ. ред. К.С. Колесникова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.- 760 с.
4. Митюшов Е.А., Берестова С.А. Теоретическая механика: Статика. Кинематика. Динамика. – М.:Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 176 с.
5. Сахарный Н.Ф. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1964. – 844 с.
6. Новожилов А.И. Краткий курс теоретической механики: учеб.пособие / А.И.Новожилов; под ред. В.Н. Филимонова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Владимир: Изд-во Владим.гос.ун-та, 2006. – 240 с.
7. Кепе О.Э., Виба Я.А. и др. Сборник коротких задач по теоретической механике: учеб. пособие для втузов / под ред. Кепе О.Э. – М.: Высшая школа, 1989. – 368 с.; или 2-е стереотипное изд. СПб.: Лань, 2008. – 368 с.
8. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. – Изд. 51-е, стереот. – СПб.: Лань, 2012. – 448 с.
9. Березова О.А., Друшляк Г.Е., Солодовников Р.В. Теоретическая механика. Сборник задач: учеб. пособие для втузов. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1980. – 400 с.

10. Бать М.И., Джанилидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – Т.2. – изд. 11-е, стереот. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.

11. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1968. – 420 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Образец оформления титульного листа отчёта по практическим работам

Государственное образовательное учреждение
Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко
Бендерский политехнический филиал

ОТЧЕТЫ

по практическим работам
по дисциплине «Теоретическая механика. Кинематика и динамика»

Выполнил:
студент (ка) 2 курса группы 213
Иванов И.И.

Проверил: доцент Котомчин А.Н.

Бендеры, 2025 г.

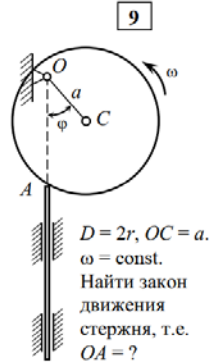
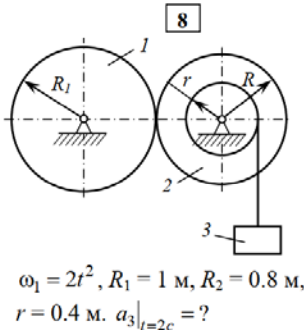
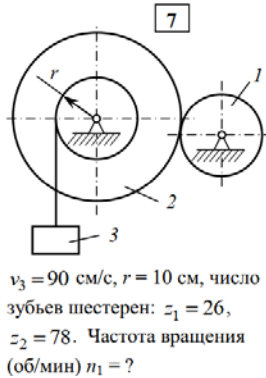
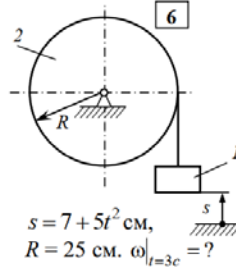
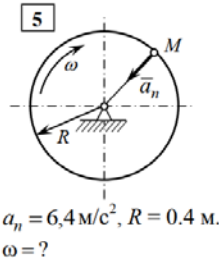
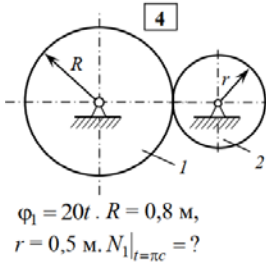
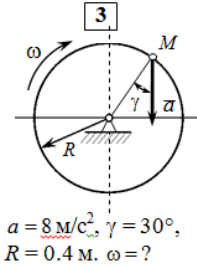
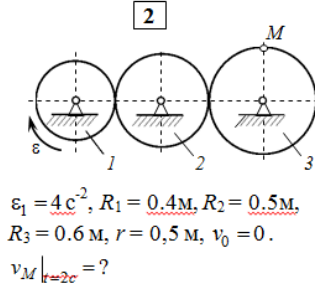
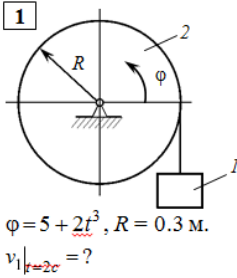
Приложение Б

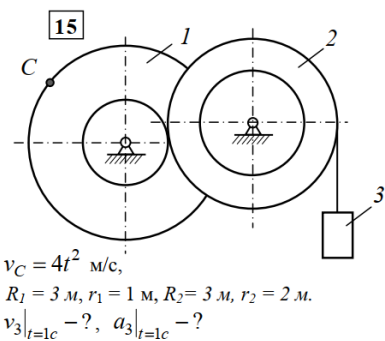
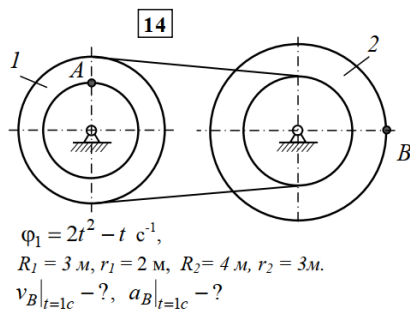
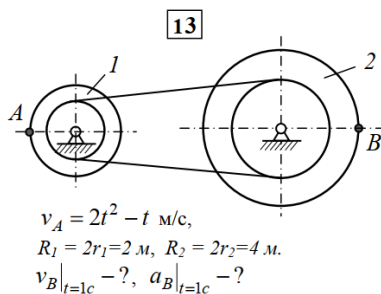
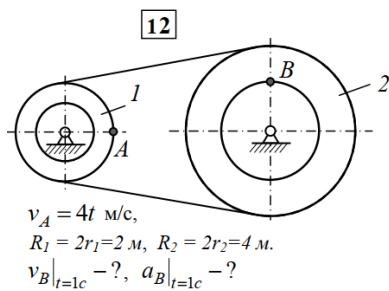
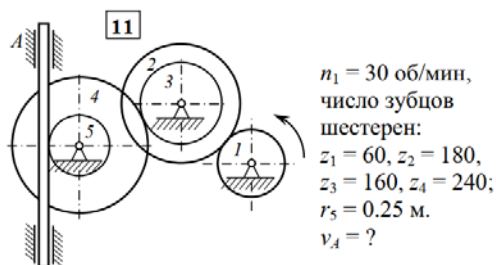
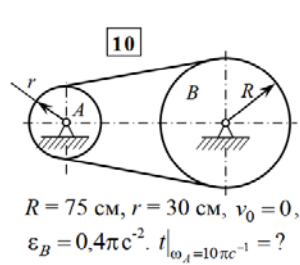
Задание по вариантам по теме «Траектория и уравнение движения точки»

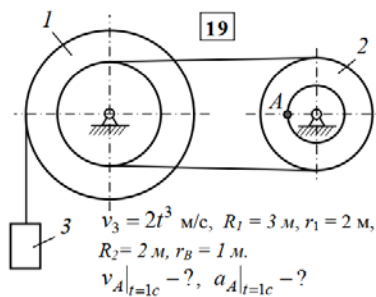
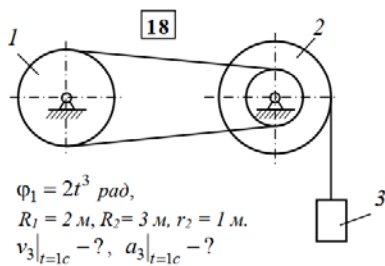
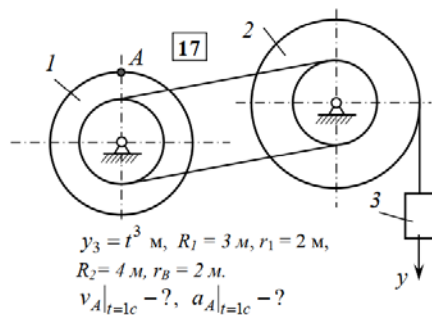
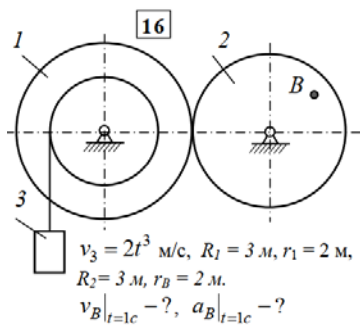
Номер задачи	Уравнения движения		
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	t , с
1	$2t^2 + 3$	$- 5t$	1
2	$3t^2 + 2$	$2t$	1
3	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 2$	1
4	$- 4t^2 + 1$	$8 - 3t$	1
5	$2t + 2$	$2/(t + 1)$	1
6	$3t$	$4t^2 + 1$	1
7	$- 5t^2 - 4$	$3t$	1
8	$7t^2 - 3$	$5t$	1
9	$- 3/(t + 2)$	$3t + 6$	1
10	$4t + 4$	$- 4/(t + 1)$	1
11	$4\cos(\pi t / 3)$	$- 3\sin(\pi t / 3)$	1
12	$5\cos(\pi t^2 / 3)$	$- 5\sin(\pi t^2 / 3)$	1
13	$5\sin^2(\pi t / 6)$	$- 5\cos^2(\pi t / 6) - 3$	1
14	$7\sin^2(\pi t / 6) - 5$	$- 7\cos^2(\pi t / 6)$	1
15	$1 + 3\cos(\pi t^2 / 3)$	$3\sin(\pi t^2 / 3) + 3$	1
16	$6\sin(\pi t^2 / 6) - 2$	$6 \cos(\pi t^2 / 6) + 3$	1
17	$- 4\cos(\pi t / 3)$	$- 2\sin(\pi t / 3) - 3$	1

Номер задачи	Уравнения движения		
	$x = x(t), \text{ см}$	$y = y(t), \text{ см}$	$t, \text{ с}$
18	$7\sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7\cos(\pi t^2/6)$	1
19	$2\sin(\pi t / 3)$	$- 3\cos(\pi t / 3) + 4$	1
20	$3 - \cos(\pi t^2/3)$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1
21	$4\cos^2(\pi t / 3) + 2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
22	$- 4\cos(\pi t / 3) - 1$	$- 4\sin(\pi t/3)$	1
23	$- 6t$	$- 2t^2 - 4$	1
24	$8\cos^2(\pi t / 6) + 2$	$- 8\sin^2(\pi t/6) - 7$	1
25	$9\sin(\pi t^2/6) + 3$	$- 5 + 9\cos(\pi t^2/6) + 3$	1
26	$- 4t^2 + 1$	$- 3t$	1
27	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
28	$2\cos(\pi t^2 / 3) - 2$	$- 2\sin(\pi t^2/3) + 3$	1
29	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0
30	$2\cos^2(\pi t / 4)$	$3\sin^2(\pi t/4)$	1

Задания по вариантам по теме
«Вращательное движение твердого тела»

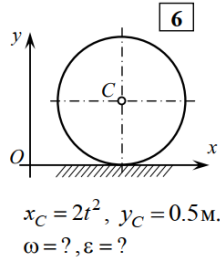
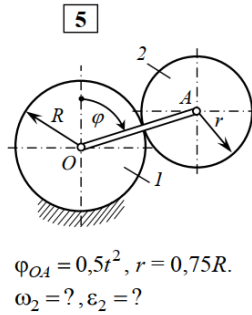
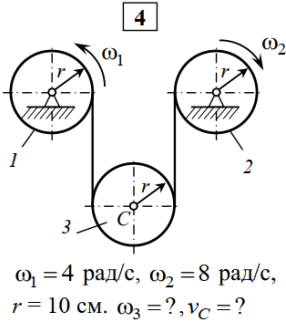
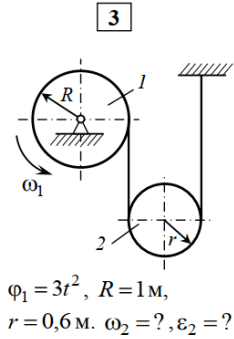
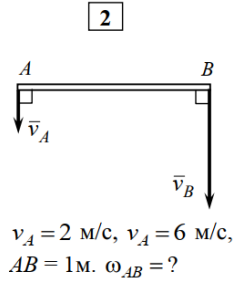
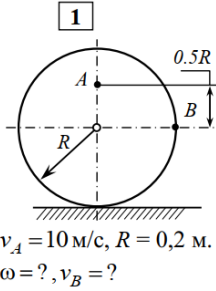




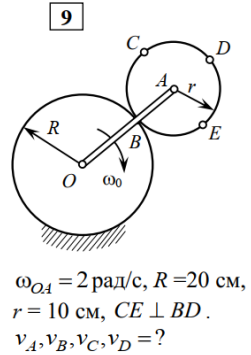
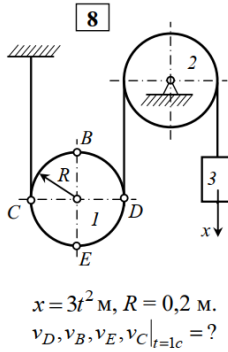
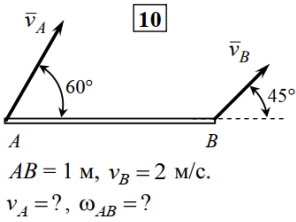
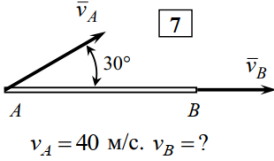


Задания по теме

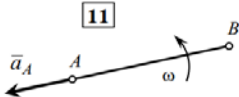
«Угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры»



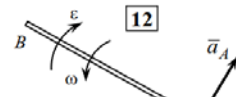
Задания по теме «Скорость точек плоской фигуры»



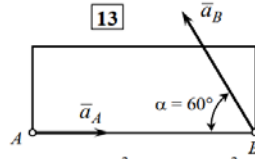
Задания по теме «Ускорения точек плоской фигуры»



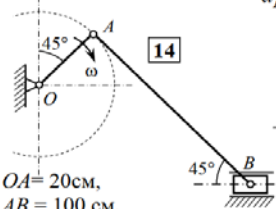
11 $\omega_{AB} = 1 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_{AB} = 0$,
 $AB = 2 \text{ м}$, $a_A = 1 \text{ м/с}^2$.
 $a_B = ?$



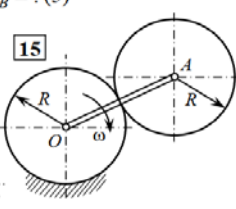
12 $\omega_{AB} = 2 \text{ рад/с}$,
 $\varepsilon_{AB} = 2 \text{ рад/с}^2$,
 $a_A = 1 \text{ м/с}^2$, $AB = 1 \text{ м}$,
 $a_B = ? (5)$



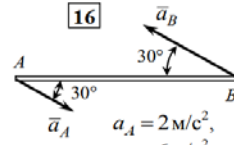
13 $a_A = 1 \text{ м/с}^2$, $a_B = 6 \text{ м/с}^2$,
 $AB = 1 \text{ м}$. $\omega = ? (2)$



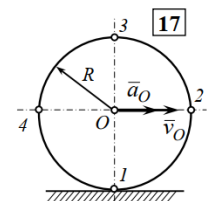
14 $OA = 20 \text{ см}$,
 $AB = 100 \text{ см}$,
 $\omega_{OA} = 10 \text{ рад/с} = \text{const}$,
 $a_B = ?$, $\omega_{AB} = ?$, $\varepsilon_{AB} = ?$
 $(565,6; 2; 16)$



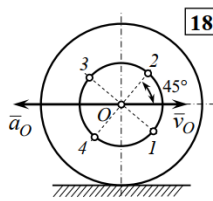
15 $\omega_{OA} = 1 \text{ с}^{-1} = \text{const}$, $R = 0,1 \text{ м}$,
 P – МЦС подвижного колеса.
 $a_P = ? (0,2)$



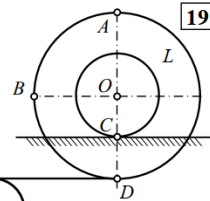
16 $a_A = 2 \text{ м/с}^2$,
 $a_B = 6 \text{ м/с}^2$,
 $AB = 40 \text{ см}$.
 $\varepsilon_{AB} = ? (10)$



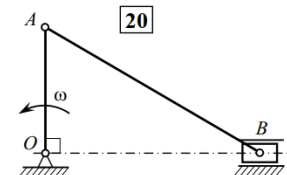
17 $v_O = 1 \text{ м/с}$, $R = 0,5 \text{ м}$,
 $a_O = 3 \text{ м/с}^2$.
 $a_1, a_2, a_3, a_4 = ?$



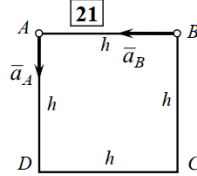
18 $v_O = 1 \text{ м/с}$, $a_O = 2 \text{ м/с}^2$,
 $R = 0,5 \text{ м}$, $r = 0,25 \text{ м}$.
 $a_1, a_2, a_3, a_4 = ?$



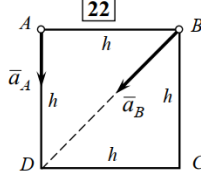
19 $x_K = t^2 \text{ м}$,
 $OD = 2OC = 0,2 \text{ м}$.
 $a_A, a_B, a_D|_{t=0,5 \text{ с}} = ?$
 $(20,9; 22,4; 20,1)$



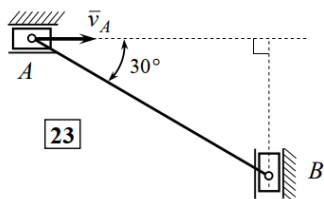
20 $\omega_{OA} = 1 \text{ рад/с} = \text{const}$, $A = 0,3 \text{ м}$,
 $AB = 0,5 \text{ м}$. $a_B = ? (0,225)$



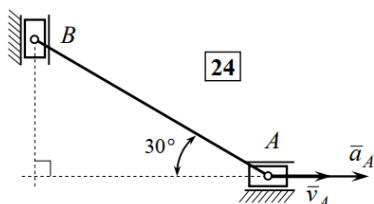
21 $a_A = a_B = 10 \text{ м/с}^2$.
 $a_C, a_D = ? (10)$



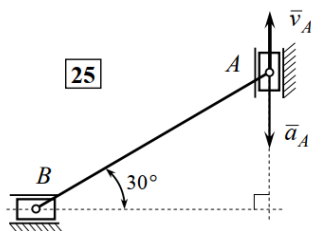
22 $a_A = a_B = 10 \text{ м/с}^2$.
 $\omega, \varepsilon = ?$, $a_C = ? (\sqrt{2}; 1; 6)$



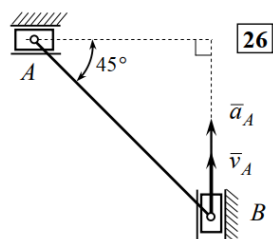
23
 $v_A = 1 \text{ m/c}, a_A = 0, AB = 2 \text{ m}.$
 $v_B, a_B = ?; \omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



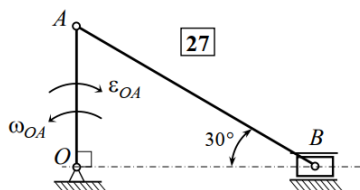
24
 $v_A = 1 \text{ m/c}, a_A = 2 \text{ m/c}^2, AB = 2 \text{ m}.$
 $v_B, a_B = ?; \omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



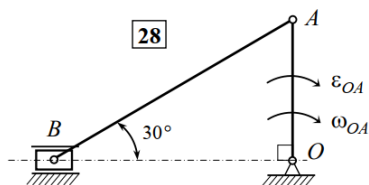
25
 $v_A = 1 \text{ m/c}, a_A = 1 \text{ m/c}^2, AB = 2 \text{ m}.$
 $v_B, a_B = ?; \omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



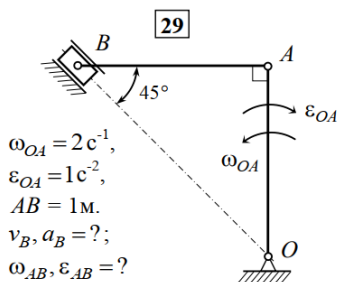
26
 $v_A = 1 \text{ m/c}, a_A = 2 \text{ m/c}^2, AB = 2 \text{ m}.$
 $v_B, a_B = ?; \omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



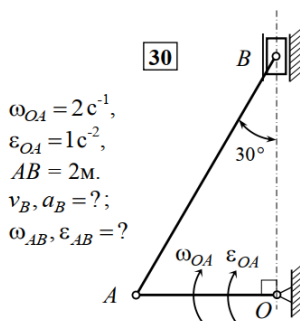
27
 $\omega_{OA} = 2 \text{ c}^{-1}, \varepsilon_{OA} = 1 \text{ c}^{-2}, AB = 2 \text{ m}.$
 $v_B, a_B = ?; \omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



28
 $\omega_{OA} = 1 \text{ c}^{-1}, \varepsilon_{OA} = 1 \text{ c}^{-2}, AB = 2 \text{ m}.$
 $v_B, a_B = ?; \omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



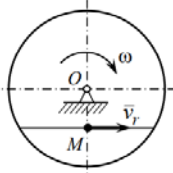
29
 $\omega_{OA} = 2 \text{ c}^{-1},$
 $\varepsilon_{OA} = 1 \text{ c}^{-2},$
 $AB = 1 \text{ m}.$
 $v_B, a_B = ?;$
 $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$



30
 $\omega_{OA} = 2 \text{ c}^{-1},$
 $\varepsilon_{OA} = 1 \text{ c}^{-2},$
 $AB = 2 \text{ m}.$
 $v_B, a_B = ?;$
 $\omega_{AB}, \varepsilon_{AB} = ?$

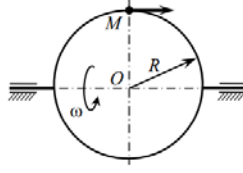
Задания по теме «Определение абсолютного ускорения точки»

1



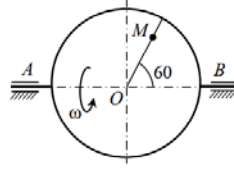
$v_r = 0.5t \text{ м/с}$, $\omega = 0.5 \text{ с}^{-1}$,
 $OM = 0.02 \text{ м}$. $a_M|_{t=2\text{с}} = ?$

2



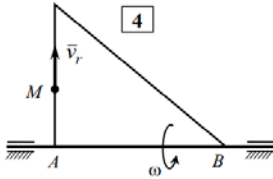
$v_r = 2 \text{ м/с}$, $R = 0.5 \text{ м}$,
 $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$. $a_M = ?$

3



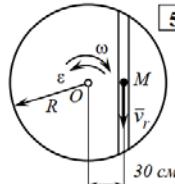
$AM = 4t^2 \text{ см}$, $\omega = 2t \text{ с}^{-1}$.
 $a_M|_{t=1\text{с}} = ?$ (35.55)

4



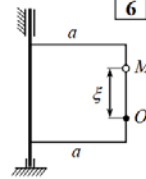
$AM = 3t^2 \text{ м/с}$, $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$.
 $a_M|_{t=2\text{с}} = ?$

5



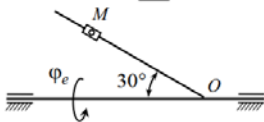
$v_r = 1.2 \text{ м/с}$, $\omega = 3 \text{ с}^{-1}$,
 $\varepsilon = 8 \text{ с}^{-2}$. $a_M|_{t=2\text{с}} = ?$ (10.19)

6



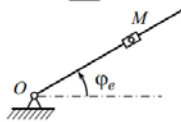
$\xi = a \sin(\pi/2)t \text{ м}$,
 $\omega = \pi/2 \text{ с}^{-1}$. $a_M|_{t=1\text{с}} = ?$
 $(a\pi^2/4\sqrt{2})$

7



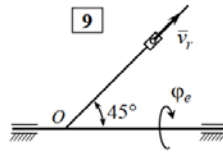
$OM = t^2 \text{ м}$, $\phi_e = t^3 \text{ рад}$.
 $a_M|_{t=1\text{с}} = ?$

8



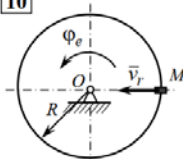
$OM = t^2 \text{ м}$, $\phi_e = t^3 \text{ рад}$.
 $a_M|_{t=1\text{с}} = ?$

9



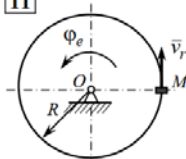
$v_r = t \text{ м/с}$, $\phi_e = t^3 \text{ рад}$.
 $OM = \sqrt{2} \text{ м}$. $a_M|_{t=1\text{с}} = ?$

10



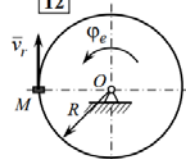
$v_r = 2t \text{ м/с}$, $\phi_e = 3t^2 \text{ рад}$,
 $R = 1 \text{ м}$. $a_M|_{t=1\text{с}} = ?$

11

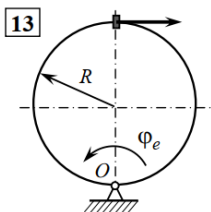


$v_r = t^2 \text{ м/с}$, $\phi_e = t^2 \text{ рад}$,
 $R = 1 \text{ м}$. $a_M|_{t=1\text{с}} = ?$

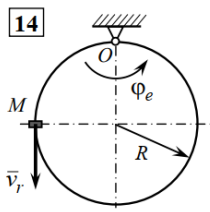
12



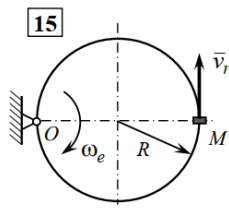
$v_r = 2t^2 \text{ м/с}$, $\phi_e = 2t^2 \text{ рад}$,
 $R = 1 \text{ м}$. $a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



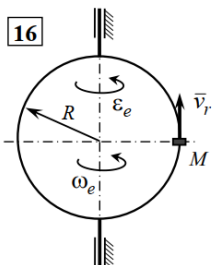
$v_r = 4t \text{ м/с}, \varphi_e = t^2 \text{ рад},$
 $R = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



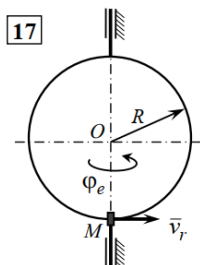
$v_r = 1 \text{ м/с}, \varphi_e = t^2 \text{ рад},$
 $R = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



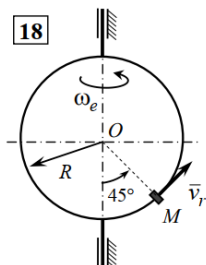
$v_r = t \text{ м/с}, \omega_e = t^2 \text{ с}^{-1},$
 $R = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



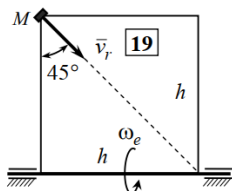
$\omega_e = 1 \text{ с}^{-1}, \varepsilon_e = 1 \text{ с}^{-2}, R = 1 \text{ м}.$
 $v_r = t \text{ м/с}, a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



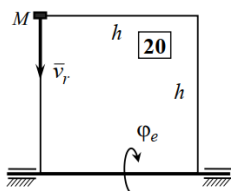
$v_r = 4t \text{ м/с}, \varphi_e = 2t^2 \text{ рад},$
 $R = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



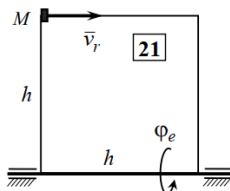
$v_r = 5t \text{ м/с}, \omega_e = t^2 \text{ с}^{-1},$
 $R = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



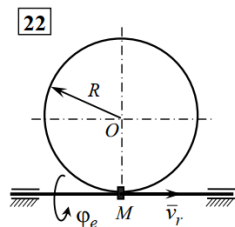
$v_r = t \text{ м/с}, \omega_e = t^2 \text{ рад/с},$
 $h = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



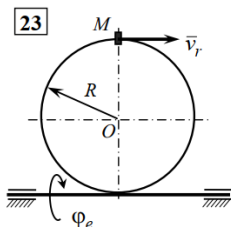
$v_r = t \text{ м/с}, \varphi_e = t \text{ рад},$
 $h = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



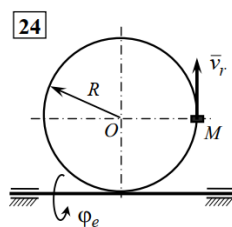
$v_r = t \text{ м/с}, \varphi_e = t^3 \text{ рад},$
 $h = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



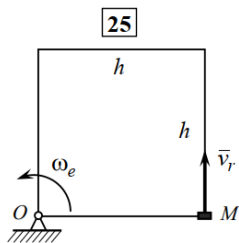
$v_r = t \text{ м/с}, \varphi_e = t^2 \text{ рад},$
 $R = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



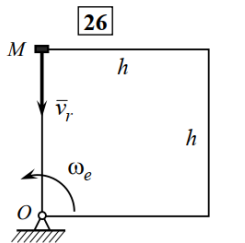
$v_r = 1 \text{ м/с}, \varphi_e = t^2 \text{ рад},$
 $R = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



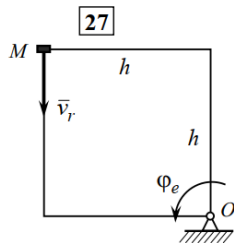
$v_r = t \text{ м/с}, \varphi_e = t^2 \text{ рад},$
 $R = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



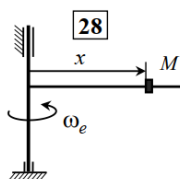
$v_r = t \text{ м/с}, \omega_e = t \text{ рад/с},$
 $h = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



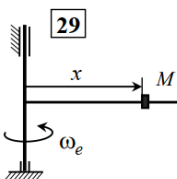
$v_r = t \text{ м/с}, \omega_e = t^2 \text{ рад/с},$
 $h = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



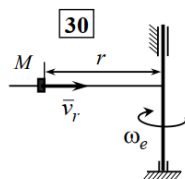
$v_r = t \text{ м/с}, \varphi_e = t \text{ рад},$
 $h = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



$x = t \text{ м}, \omega_e = t^2 \text{ рад/с}.$
 $a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



$x = t^2 \text{ м}, \omega_e = 1 \text{ рад/с}.$
 $a_M|_{t=1\text{с}} = ?$



$v_r = t \text{ м/с}, \omega_e = t \text{ рад/с}.$
 $r = 1 \text{ м}. a_M|_{t=1\text{с}} = ?$

Задачи по вариантам по теме «Составление дифференциальных уравнений движения точки»

1) Материальная точка весом 49 Н движется по прямой согласно уравнению $x = 8\sin 2t$ см. Найти силу, действующую на точку в моменты времени, когда ее координата $x = -5$ см.

2) Определить давление человека весом 0.85 кН на площадку лифта в начале подъема и перед остановкой, если ускорение (замедление) равно $0.4g$.

3) Материальная точка весом 49 Н движется по горизонтальной окружности радиуса 9 см согласно уравнению $S = 8t^3$ см. Определить величину и направление силы F , действующей на эту точку в момент $t = 1$ с.

4) Материальная точка массой 300 г движется согласно уравнению: $x = 3\cos\pi t$ см, $y = 3\sin\pi t$, $z = 5t$ см. Найти силу, действующую на эту точку.

5) Определить максимальную скорость велосипедиста на закруглении дороги радиуса 50 м, если коэффициент поперечного трения между шинами велосипеда и асфальтом $f = 0,4$. Определить, на какой угол отклонилась плоскость велосипеда от вертикальной плоскости. Полотно дороги расположено в горизонтальной плоскости.

6) На криволинейных участках автодороги возвышают наружную сторону над внутренней для того, чтобы сила давления проезжающего автомобиля была перпендикулярна дороге. Определить угол наклона полотна дороги, если радиус закругления 1000 м, максимальная скорость автомобиля 120 км/ч.

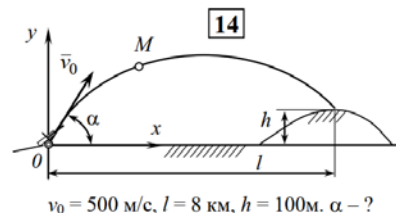
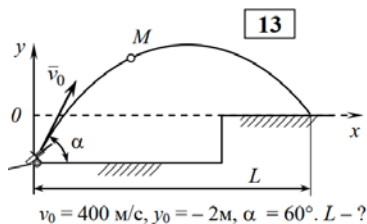
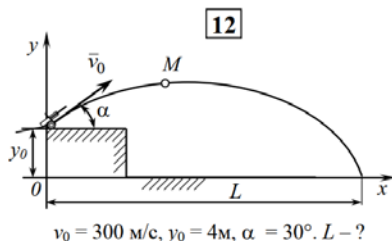
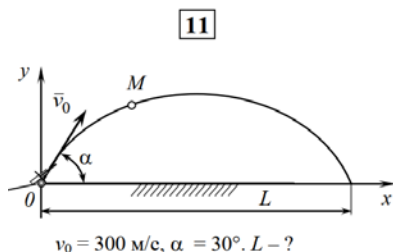
7) Грузная вагонетка массы 700 кг опускается по канатной железной дороге с уклоном $\alpha = 15^\circ$, имея скорость

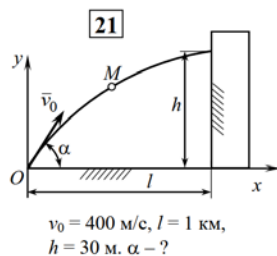
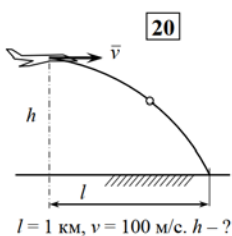
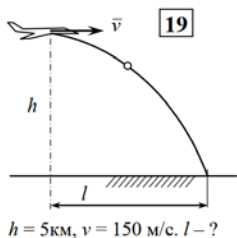
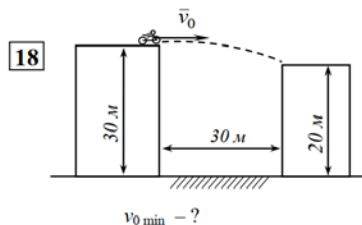
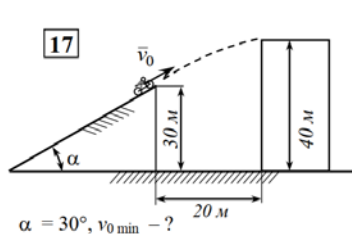
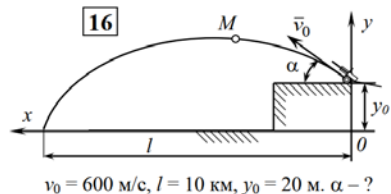
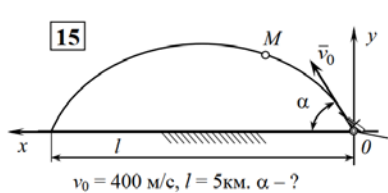
$V = 1,6$ м/с. Определить натяжение каната при равномерном спуске и при торможении вагонетки. Время торможения $t = 4$ с, общий коэффициент сопротивления движению $f = 0,015$. При торможении вагонетка движется равнозамедленно.

8) На материальную точку массой 200 г, движущуюся вдоль горизонтальной оси Ox , действует постоянная сила $F = 2$ Н. В начальный момент $x = 3$ м, $V_0 = 4$ м/с. Найти уравнение движения точки. ($x = 5t^2 + 4t + 3$).

9) Хоккеист сообщает шайбе прямолинейное движение по ледяному полю. Чему была равна начальная скорость шайбы, если она прошла до остановки 50 м? За какое время шайба прошла это расстояние, если коэффициент трения шайбы о лед $f = 0,05$? Сопротивлением воздуха пренебречь.

10) Коэффициент трения лыж о снег при движении лыжника по склону горы вниз $f = 0,1$. Угол склона 60° , а его длина 100 м. Определить время спуска и скорость лыжника в конце склона, если в начале спуска она была равна нулю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

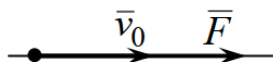




**Задачи по вариантам по теме
«Применение общих теорем динамики материальной точки»**

1) Модуль постоянной по направлению силы изменяется по закону $F = 8t^2 + 4t + 3$. Найти модуль импульса этой силы за промежуток времени $\tau = t_2 - t_1$, где $t_2 = 2$ с, $t_1 = 0$.

2) На материальную точку массой 10 кг действует сила постоянного направления, значение которой изменяется по закону $F = 5t^3$. Определить скорость этой точки в момент $t = 2$ с, если $V_0 = 3$ м/с.

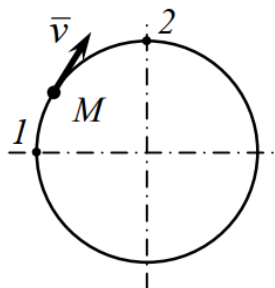


3) Материальная точка массой 5 кг движется по прямой под действием постоянной силы F (схема предыдущей задачи). Скорость точки за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, где $t_2 = 10$ с, $t_1 = 0$ изменилась от $V_1 = 5$ м/с до $V_2 = 15$ м/с. Определить модуль силы $\bar{F}$.

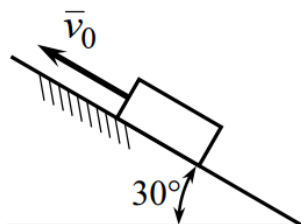
4) С какой начальной скоростью брошен камень под углом 30° к горизонту, если до падения его на землю прошло 2.5 с? Чему равна минимальная скорость камня во время его движения? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5) Тело, которому сообщили начальную скорость $V_0 = 6$ м/с, скользило по шероховатой горизонтальной плоскости и остановилось через 3 с. Найти коэффициент трения скольжения.

6) Материальная точка M массой $m = 1$ кг равномерно движется по окружности со скоростью $V = 4$ м/с. Определить модуль импульса равнодействующей всех сил, действующих на эту точку за время ее движения из положения 1 в положение 2.

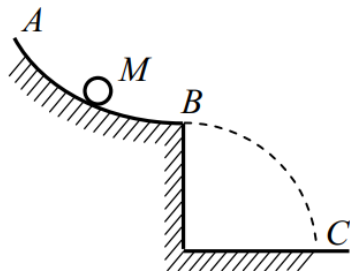


7) Телу, которое скользит по гладким наклонным направляющим, сообщили начальную скорость $V_0 = 9,81$ м/с. Определить, через какое время тело достигнет максимальной высоты подъема. (2 с).

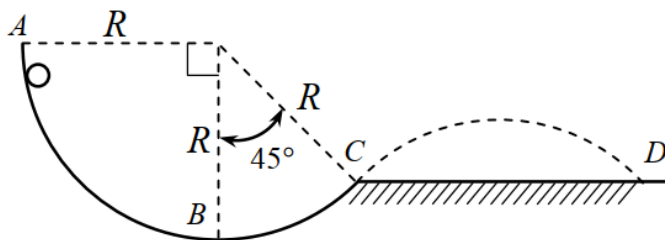


8) Какой должен быть коэффициент трения f колес заторможенного автомобиля о дорогу, если при скорости езды $V = 30$ м/с он останавливается через 10 с после начала торможения.

9) Тело M , размерами которого можно пренебречь, в конце участка AB приобрело скорость 15 м/с, направленную горизонтально. Участок свободного движения BC оно прошло за 2,04 с. Определить величину скорости тела в конце участка BC .



10) Шарик M , размером которого можно пренебречь, движется без начальной скорости по дуге ABC окружности радиуса R . Затем шарик движется свободно. Пренебрегая трением, определить, на каком расстоянии CD от точки C шарик коснется горизонтальной плоскости.



Задачи по вариантам по теме
«Применение законов сохранения»

1

$m_1 = 100 \text{ кг}, l_1 = 4 \text{ м}, m_2 = 80 \text{ кг}, l_2 = 2 \text{ м}.$
 $M = 100 \text{ кг}, \sigma_{\text{лодки}} - ?$ (перемещение)

2

$m_1 = 90 \text{ кг}, l_1 = 4 \text{ м}, m_2 = 80 \text{ кг}, l_2 = 2 \text{ м}.$
 $M = 100 \text{ кг}, \sigma_{\text{лодки}} - ?$

3

$m_1 = 110 \text{ кг}, l_1 = 4 \text{ м}, m_2 = 80 \text{ кг}, M = 100 \text{ кг},$
 $l_2 = ? \text{ м}$ при условии перемещение $\sigma_{\text{лодки}} = 0$

4

$m_1 = 100 \text{ кг}, m_2 = 80 \text{ кг}, M = 100 \text{ кг},$
 $l_1 = l_2 = ? \text{ м}$ чтобы перемещение $\sigma_{\text{лодки}} = 2 \text{ м}$

5

$m_1 = 1 \text{ т}, l_1 = 10 \text{ м}, m_2 = 0,5 \text{ т}, l_2 = 8 \text{ м},$
 $m_3 = 0,2 \text{ т}, l_3 = 5 \text{ м}, M = 5 \text{ т}.$ $\sigma_{\text{платформы}} = ?$

6

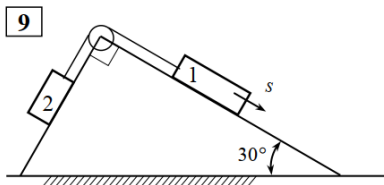
$m_1 = 1 \text{ т}, l_1 = 10 \text{ м}, m_2 = 0,5 \text{ т}, l_2 = 8 \text{ м},$
 $m_3 = 5 \text{ т}, l_3 = 5 \text{ м}, M = 5 \text{ т}.$ $\sigma_{\text{платформы}} = ?$

7

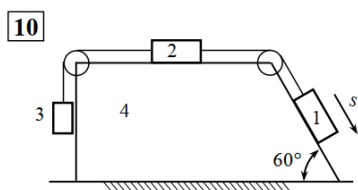
$m_1 = 1 \text{ т}, l_1 = 10 \text{ м}, m_2 = 0,5 \text{ т}, l_2 = 8 \text{ м},$
 $m_3 = 0,2 \text{ т}, l_3 = 5 \text{ м}, M = 5 \text{ т}.$ $\sigma_{\text{платформы}} = ?$

8

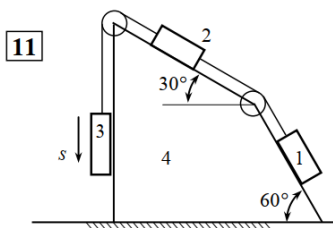
$m_1 = 1 \text{ т}, l_1 = 10 \text{ м}, m_2 = 0,5 \text{ т}, l_2 = 8 \text{ м},$
 $m_3 = 2 \text{ т}, l_3 = 2 \text{ м}, M = 5 \text{ т}.$ $\sigma_{\text{платформы}} = ?$



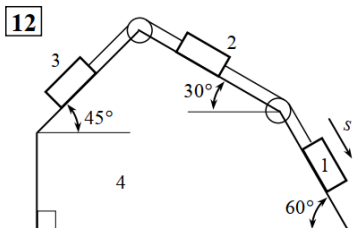
$m_1 = 10 \text{ кг}, m_2 = 5 \text{ кг}, s = 1 \text{ М},$
 $M_{\text{призмы}} = 5 \text{ кг}. \sigma_{\text{призмы}} = ?$



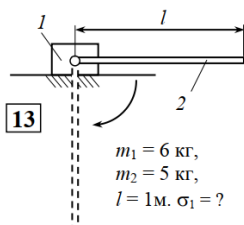
$m_1 = 6 \text{ кг}, m_2 = 5 \text{ кг}, m_3 = 4 \text{ кг},$
 $m_4 = 5 \text{ кг}, s = 1 \text{ М}. \sigma_4 = ?$



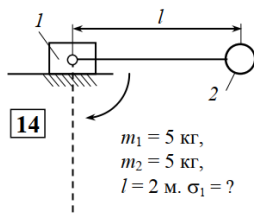
$m_1 = 6 \text{ кг}, m_2 = 5 \text{ кг}, m_3 = 4 \text{ кг},$
 $m_4 = 10 \text{ кг}, s = 1 \text{ М}. \sigma_4 = ?$



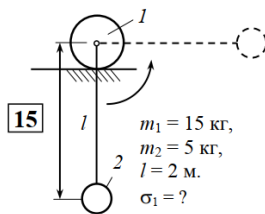
$m_1 = 6 \text{ кг}, m_2 = 5 \text{ кг}, m_3 = 4 \text{ кг},$
 $m_4 = 5 \text{ кг}, s = 1 \text{ М}. \sigma_4 = ?$



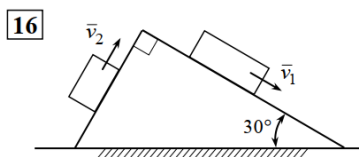
$m_1 = 6 \text{ кг},$
 $m_2 = 5 \text{ кг},$
 $l = 1 \text{ М}. \sigma_1 = ?$



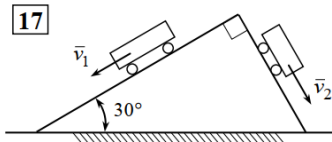
$m_1 = 5 \text{ кг},$
 $m_2 = 5 \text{ кг},$
 $l = 2 \text{ М}. \sigma_1 = ?$



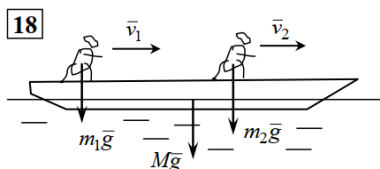
$m_1 = 15 \text{ кг},$
 $m_2 = 5 \text{ кг},$
 $l = 2 \text{ М}. \sigma_1 = ?$



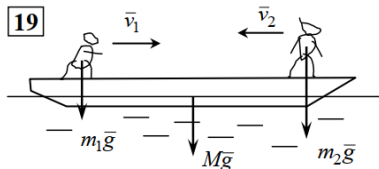
$m_1 = 10 \text{ кг}, v_1 = 0,5 \text{ М/с}, m_2 = 5 \text{ кг},$
 $v_2 = 1 \text{ М/с}, M_{\text{призмы}} = 5 \text{ кг}. V_{\text{призмы}} = ?$



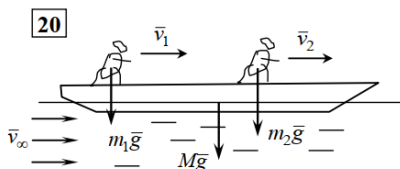
$m_1 = 8 \text{ кг}, v_1 = 0,5 \text{ М/с}, m_2 = 5 \text{ кг},$
 $v_2 = 1 \text{ М/с}, M_{\text{призмы}} = 5 \text{ кг}. V_{\text{призмы}} = ?$



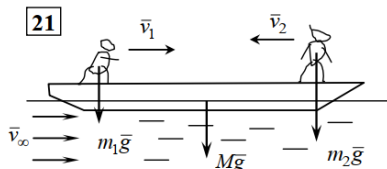
$m_1 = 90 \text{ кг}$, $v_1 = 4 \text{ м/с}$, $M = 100 \text{ кг}$,
 $m_2 = 80 \text{ кг}$, $v_2 = 2 \text{ м/с}$. $v_{\text{лодки}} - ?$



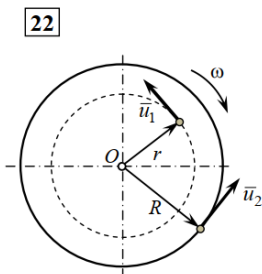
$m_1 = 100 \text{ кг}$, $v_1 = 4 \text{ м/с}$, $M = 100 \text{ кг}$,
 $m_2 = 80 \text{ кг}$, $v_2 = 2 \text{ м/с}$. $v_{\text{лодки}} - ?$



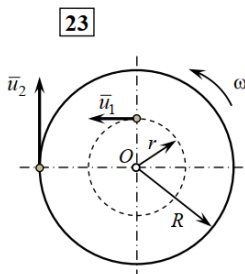
$m_1 = 90 \text{ кг}$, $v_1 = 4 \text{ м/с}$, $v_{\infty} = 2 \text{ м/с}$, $M = 100 \text{ кг}$,
 $m_2 = 100 \text{ кг}$, $v_2 = 5 \text{ м/с}$. $v_{\text{лодки}} - ?$



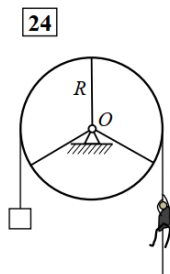
$m_1 = 50 \text{ кг}$, $v_1 = 4 \text{ м/с}$, $v_{\infty} = 4 \text{ м/с}$,
 $m_2 = 80 \text{ кг}$, $v_2 = 2 \text{ м/с}$, $M = 90 \text{ кг}$. $v_{\text{лодки}} - ?$



$m_1 = 90 \text{ кг}$, $u_1 \text{ отн.} = 4 \text{ м/с}$,
 $m_2 = 80 \text{ кг}$, $u_2 \text{ отн.} = 6 \text{ м/с}$,
 $r = 3 \text{ м}$, $R = 4 \text{ м}$,
 $M_{\text{диска}} = 100 \text{ кг}$,
 $\omega_{\text{диска}} - ?$



$m_1 = 50 \text{ кг}$, $u_1 \text{ отн.} = 5 \text{ м/с}$,
 $m_2 = 80 \text{ кг}$, $u_2 \text{ отн.} = 6 \text{ м/с}$,
 $r = 2 \text{ м}$, $R = 4 \text{ м}$,
 $M_{\text{диска}} = 50 \text{ кг}$,
 $\omega_{\text{диска}} - ?$

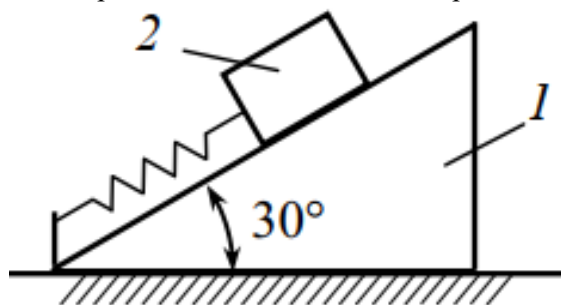


$m_{\text{тр.}} = 80 \text{ кг}$, $u_1 \text{ отн.} = 1 \text{ м/с}$,
 $m_{\text{чел.}} = 80 \text{ кг}$, $R = 2 \text{ м}$.
 $\omega_{\text{кольцо}} - ?$, $u_{\text{гр0}} = ?$
 $(M_{\text{кольцо}} = 0 \text{ кг.})$

25) На средней скамейке лодки, находившейся в покое, сидят два человека. Один из них, массы $m_1 = 50 \text{ кг}$, переместился вправо на нос лодки. На какое расстояние должен переместиться 2-й человек массы $m_2 = 70 \text{ кг}$ для того, чтобы лодка осталась в покое. Длина лодки 4 м . Сопротивлением воды движению лодки пренебречь.

26) Клин 1 весом 70 Н размещен на гладкой горизонтальной

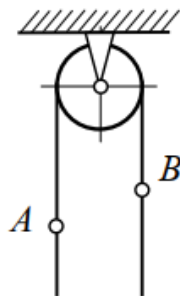
плоскости. Пружину сжали и тело 2 весом 30 Н отпустили из состояния покоя. Определить расстояние, на которое переместится клин, если тело 2 прошло 40 см по наклонной грани клина.



27) Лодку весом 1 кН вместе с человеком, вес которого 0,6 кН, несет течение реки. Человек стал переходить по дну лодки в направлении, противоположном движению реки, со скоростью 0,8 м/с относительно лодки. Пренебрегая сопротивлением воды, определить скорость лодки во время перемещения человека, если скорость течения равна 0,5 м/с.

28) В лодке весом 900 Н, которую несет течение реки, сидят два человека весом 500 Н и 700 Н. Чтобы поменяться местами, человек весом 500 Н переходит по лодке в направлении течения реки со скоростью 0,6 м/с относительно лодки, а второй в это же время движется в противоположном направлении с относительной скоростью 0,2 м/с. Пренебрегая сопротивлением воды, определить скорость лодки во время перемещения людей, если скорость течения 0,4 м/с.

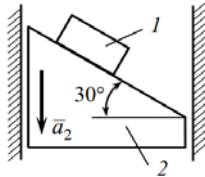
29) Через блок перекинут канат; за точку А каната ухватился человек, к точке В подвязан груз одинаковой массы с человеком. С какой скоростью будет двигаться груз, если человек станет подниматься по канату со скоростью u относительно каната. Масса блока в 4 раза меньше массы человека; считать, что масса равномерно распределена по его ободу.



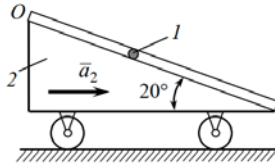
30) Груз M весом $P = 2,1$ кН удерживается на наклонной плоскости человеком весом $Q = 0,7$ кН, ухватившимся за веревку в точке A . Затем человек стал подниматься по веревке вверх со скоростью $u = 0,74$ м/с относительно веревки. Пренебрегая весом блока и трением, определить скорость движения груза M , если $\alpha = \arcsin \frac{5}{6}$, а радиусы блоков $r = 0,1$ м, $R = 0,25$ м.

**Задачи по вариантам по теме
«Относительное движение материальной точки»**

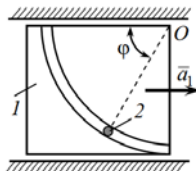
1) Груз 1 массой $m_1 = 1$ кг спускается вниз по наклонной плоскости тела 2. Тело 2 движется по вертикальным направляющим вниз с ускорением $a_2 = 2$ м/с². Определить силу давления груза 1 на тело 2.



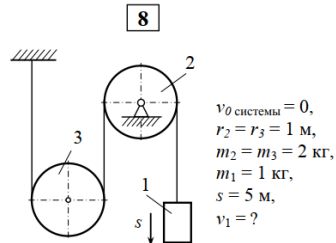
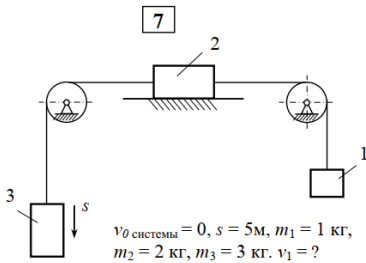
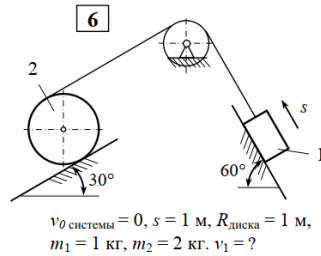
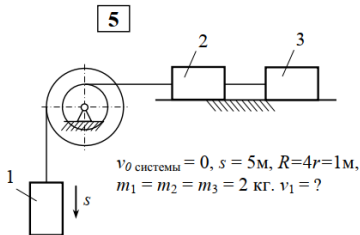
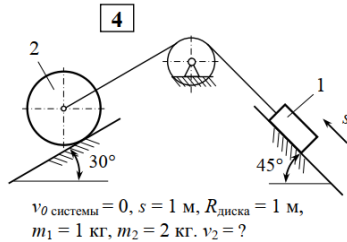
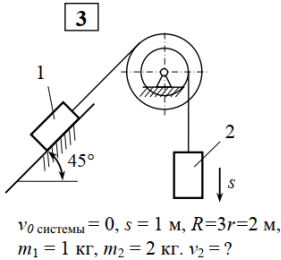
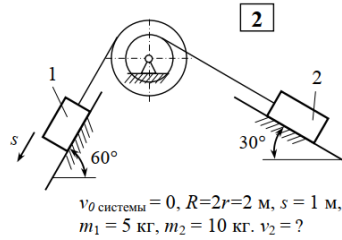
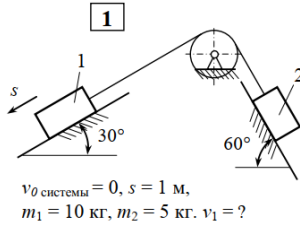
2) Шарик массой $m_1 = 0,2$ кг движется из состояния относительного покоя в точке O по гладкому цилиндрическому каналу тела 2. Тело 2 движется с постоянным ускорением $a_2 = 2$ м/с². Определить скорость относительного движения шарика в момент $t = 5$ с.

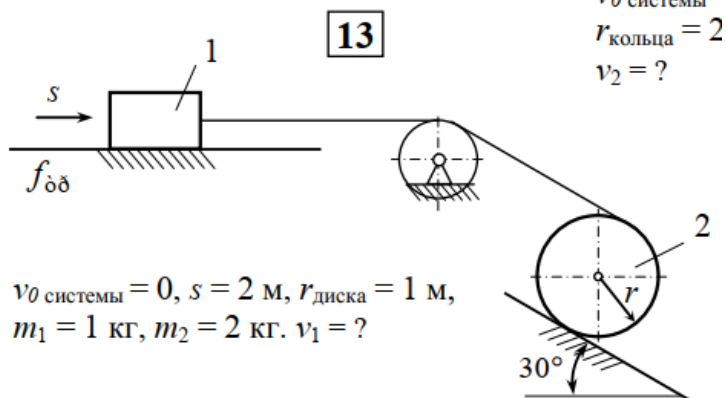
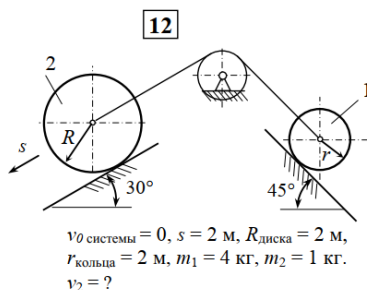
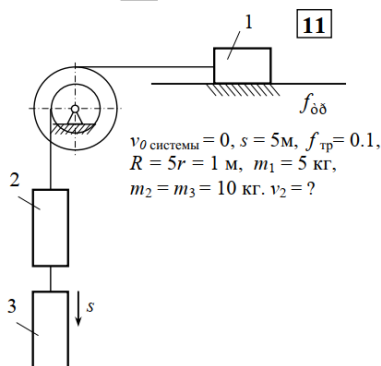
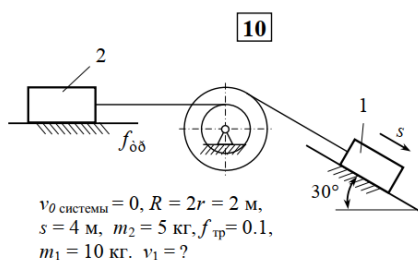
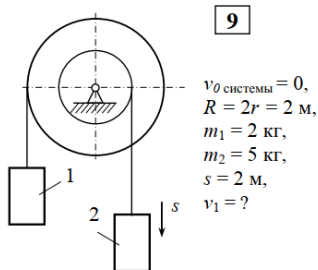


3) Тело 1 движется по прямолинейным направляющим. Внутри тела имеется канал в форме дуги окружности, по которому перемещается шарик 2 массой m . Определить ускорение a_1 тела 1, если при угле $\varphi = 60^\circ$ шарик находится в состоянии относительного покоя.



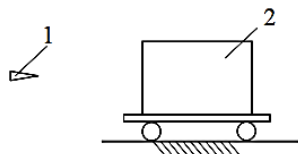
Задачи по вариантам по теме «Общие теоремы динамики системы»





Схемы, в вышеприведенных задачах (1–13), можно использовать при определении ускорения тел 1 и 2, применяя теорему об изменении кинетического момента системы или принцип Даламбера или общее уравнение динамики.

14



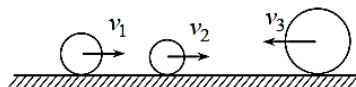
До попадания:

$$v_1 = 600 \text{ м/с}, m_1 = 10 \text{ кг},$$

$$v_2 = 0 \text{ м/с}, m_2 = 1000 \text{ кг}.$$

$$v_2 \text{ (после удара)} = ?$$

15



До столкновения:

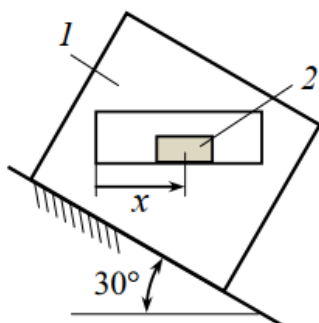
$$m_1 = 5 \text{ кг}, v_1 = 10 \text{ м/с},$$

$$m_2 = 2 \text{ кг}, v_2 = 8 \text{ м/с},$$

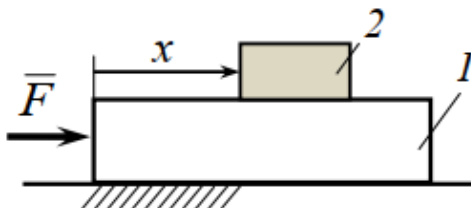
$$m_3 = 15 \text{ кг}, v_3 = 5 \text{ м/с}.$$

$$v_{\text{мел}} \text{ (после столкновения)} = ?$$

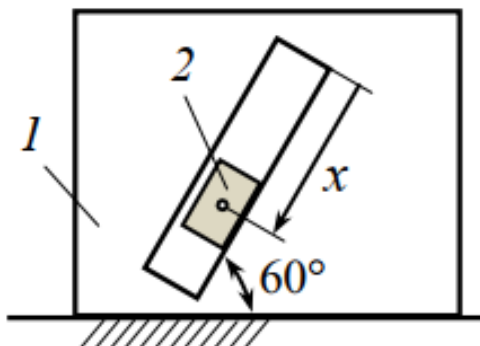
16) Определить ускорение тела 1, скользящего по гладкой наклонной плоскости, если по горизонтали относительно него под действием внутренних сил системы движется тело 2 согласно закону $x = t^2$. Массы тел: $m_1 = m_2 = 1 \text{ кг}$. Тела движутся поступательно.



17) На тело 1 действует постоянная сила $F = 10 \text{ Н}$. Определить ускорение этого тела в момент времени $t = 0,5 \text{ с}$, если относительно него движется тело 2 по закону $x = \cos \pi t$. Массы тел: $m_1 = 4 \text{ кг}, m_2 = 1 \text{ кг}$



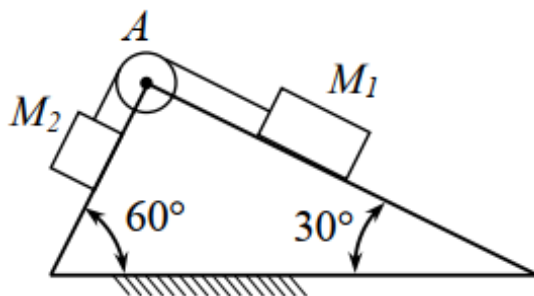
18) Тело 1 массой $m = 0,7 \text{ кг}$ может двигаться по горизонтальной направляющей. Определить модуль ускорения тела 1 в момент времени $t = 0,25 \text{ с}$, если относительно него движется тело 2 массой $m_2 = 0,1 \text{ кг}$ согласно уравнению $S = \sin 4t$.



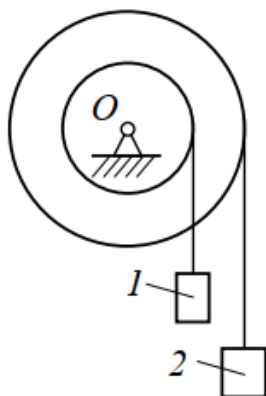
19) Через неподвижный блок весом $Q = 50 \text{ Н}$ переброшена веревка, к одному концу которой подвешен груз весом $P_1 = 500 \text{ Н}$, а за второй конец ухватился человек весом $P_2 = 700 \text{ Н}$, который, перебирая руками веревку, стал подниматься по ней с относительной скоростью $V = 0,7 \text{ м/с}$. Считая блок однородным диском, определить скорость груза через 3 с после начала движения человека.

20) Однородный горизонтальный диск радиуса $R = 10 \text{ см}$ и веса $P = 215 \text{ Н}$ вращался с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Определить, через сколько времени угловая скорость диска уменьшится в 10 раз, если к нему приложить момент сопротивления $M = -1,5\omega \text{ Н}\cdot\text{см}$.

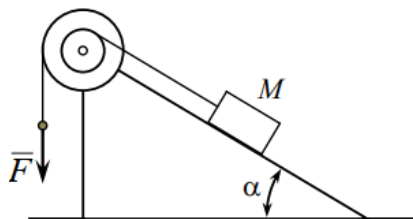
21) Через блок A весом Q переброшена невесомая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы M_1 и M_2 весом P_1 и P_2 соответственно. Грузы расположены на гладких плоскостях, отклоненных от горизонта на углы 30° и 60° . Считая блок однородным диском, определить ускорение грузов.



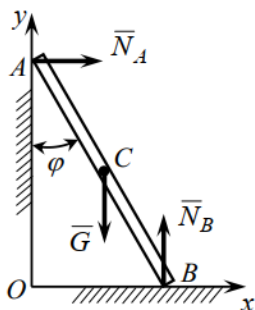
22) Грузы 1 и 2 весом P_1 и P_2 , разматывая нити, накрученные на блоки, жестко скрепленные между собой и насаженные на общую ось, приводят их во вращение. Пренебрегая весом нитей и считая блоки однородными дисками радиусов r и R , весом соответственно Q_1 и Q_2 , определить угловое ускорение блоков.



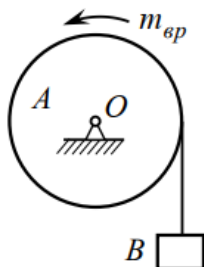
23) Два блока весом P_1 и P_2 и радиусов соответственно r_1 и r_2 жестко скреплены между собой и насажены на общую ось вращения. К концу одной веревки, намотанной на блок, прикреплен груз M весом Q , расположенный на плоскости, отклоненной от горизонта на угол α , к концу другой приложена сила F . Считая блоки однородными дисками и пренебрегая весом веревок и трением, определить угловое ускорение блоков.



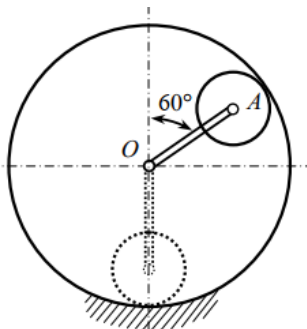
24) Стержень AB длиной 1 м и массой 2 кг, опирающийся на вертикальную гладкую стену по углом $\varphi = 30^\circ$, начинает скользить. Определить нормальную реакцию N_B в точке B , если проекция ускорения центра масс C на ось Oy имеет значение: $\ddot{y}_C = -1,84 \text{ м/с}^2$.



25) С помощью электромотора лебедки к валу барабана A радиуса r и массы M применен вращающий момент $m_{вр} = a\varphi$, где $a = \text{const}$. Определить скорость поднимаемого груза B массы m в зависимости от высоты его подъема h . Барабан A считать сплошным цилиндром, массой троса пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.



26) Механизм, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из однородного кривошипа OA весом P , шестерни A весом Q и радиуса r и неподвижной шестерни радиуса R . Кривошип OA отклонен от вертикали на угол 60° и отпущен из состояния покоя. Считая шестерню A однородным диском и пренебрегая трением, определить максимальную скорость конца A кривошипа.



27) Колесо катится без скольжения из состояния покоя по плоскости, составляющей с горизонтом угол α . Пренебрегая трением качения, определить скорость центра колеса в зависимости от пройденного пути s , если вес обода колеса равен Q , а каждой из шести спиц – P .

28) Однородный круглый диск радиуса r катится без скольжения по горизонтальному пути. Определить путь S , пройденный центром диска до остановки, если его начальная скорость равна V_0 , а коэффициент трения качения равен k .

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
-----------------------	----------

Раздел I. КИНЕМАТИКА

1.1. Основные понятия кинематики.....	4
1.2. Поступательное движение	10
1.3. Вращательное движение твердого тела вокруг оси	10
1.4. Плоскопараллельное движение твердого тела	13
1.5. Сложное движение точки	19

Раздел II. ДИНАМИКА

2.1. Законы динамики.....	33
2.2. Дифференциальные уравнения движения точки	34
2.3. Движение тела по заданной траектории.....	34
2.4. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, без учета сопротивления воздуха	36
2.5. Общие теоремы динамики материальной точки.....	37
2.6. Относительное движение материальной точки.....	42
2.7. Теорема о движении центра масс	42
2.8. Теорема об изменении количества движения системы.....	44

2.9. Теорема об изменении кинетического момента системы	45
2.10. Теорема об изменении кинетической энергии системы	47
Литература.....	64
Приложения.....	66

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА
Сборник практических работ

Составители:

Котомчин Алексей Николаевич
Ляхов Евгений Юрьевич

Издается в авторской редакции

Компьютерная верстка: *И. И. Головачук*

ИЛ № 06150. Сер. АЮ от 21.02.02

Подписано в печать 08.07.25. Формат 60х90/16.

Уч.-изд. л. 6,3. Электронное издание. Заказ № 600.

Опубликовано на Образовательном портале ПГУ им. Т. Г. Шевченко
moodle@spsu.ru