

ГОУ «ПГУ им. Т.Г. Шевченко»

**Физико-технический институт
Физико-математический факультет**

*Кафедра фундаментальной физики,
электроники и систем связи*

МЕХАНИКА МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

*Учебное пособие
для нефизических направлений подготовки*

Тирасполь

*Издательство
Приднестровского
Университета*

2024

УДК 531/534:539.19(075.8)

ББК В2_я73+В36_я73

М55

Составители:

Е.И. Брусенская, канд. физ.-мат. наук, доц.

Р.А. Хамидуллин, канд. физ.-мат. наук, доц.

В.Н. Чебан, канд. физ.-мат. наук, доц.

Рецензенты:

К.Д. Ляхомская, канд. физ.-мат. наук, доц., начальник Управления научной деятельности ГОУ «ПГУ им. Т.Г. Шевченко»

С.М. Соковнич, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры фундаментальной физики, электроники и систем связи ФМФ, ФТИ, ГОУ «ПГУ им. Т.Г. Шевченко»

Механика. Молекулярная физика: учебное пособие для нефизических направлений подготовки / ГОУ «Приднестр. гос. ун-т им. Т.Г. Шевченко», физ. – тех. институт, физ.-мат. фак.; сост.: Е.И. Брусенская, Р.А. Хамидуллин, В.Н. Чебан. – Тирасполь: Изд-во Приднестр. ун-та, 2024. – 128 с. – (электронное издание).

Изложены основные положения, законы и выводы, а также приведены основные формулы по всем изучаемым темам разделов «механика» и «молекулярная физика» в более сжатой и компактной форме. Данное пособие должно помочь студентам в подготовке к соответствующим формам контроля и является тем минимумом, который необходим для успешного освоения указанных разделов физики.

Адресовано студентам нефизических направлений подготовки.

УДК 531/534:539.19(075.8)

ББК В2_я73+В36_я73

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

© Брусенская Е.И., Хамидуллин Р.А., Чебан В.Н., составление, 2024

Учебное издание

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Учебное пособие для нефизических направлений подготовки

ИЛ № 06150. Сер. АЮ от 21.02.02.

Подписано в печать 20.02.24. Формат 60 × 90/16.

Усл. печ. л. 8,0. Электронное издание. Заказ № .

Изд-во Приднестр. ун-та. 3300, г. Тирасполь, ул. Мира, 18.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Физика как наука о природе. Взаимодействия в физике.....	4
2. Основные понятия кинематики. Кинематика поступательного движения тела.....	8
3. Кинематика вращательного движения тела.....	14
4. Динамика. Основные законы динамики в инерциальных и неинерциальных системах отсчета.....	18
5. Механические силы.....	25
6. Законы сохранения и изменения импульса и энергии в механике.....	37
7. Динамика вращательного движения. Законы изменения и сохранения момента импульса.....	43
8. Движение в центральном поле сил. Приведенная масса системы двух тел.....	54
9. Преобразования Галилея и Лоренца. Элементы специальной теории относительности (СТО).....	58
10. Колебательное движение.....	68
11. Основы гидродинамики.....	74
12. Молекулярная физика. Газовые законы.....	82
13. Термодинамическая работа. Первое начало термодинамики. Теплоемкости газа.....	91
14. Адиабатический процесс. Политропный процесс. Второе начало термодинамики.....	96
15. Классические и квантовые статистики в молекулярной физике...	102
16. Фазовые равновесия и превращения вещества.....	111
17. Явления переноса в молекулярной физике.....	118
Приложения.....	124
<i>Приложение 1</i>	124
<i>Приложение 2</i>	126
<i>Приложение 3</i>	127
Рекомендуемая литература.....	128

1. ФИЗИКА КАК НАУКА О ПРИРОДЕ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ФИЗИКЕ

Физика изучает наиболее общие закономерности протекания тех или иных процессов и явлений в окружающем нас мире, а также наиболее простые **формы движения** материи. Весь окружающий нас мир материален, поэтому **материя** в физике является основным объектом изучения. В настоящее время выделяют три вида материи:

1. **физические тела.** К ним относятся все одноатомные и многоатомные объекты микромира, а также объекты макро-, и мегамира, существующие в природе;

2. **физические поля.** Они представляют собой особый вид материи, о существовании которой мы можем судить по ее воздействию на определенные физические объекты (например, о существовании электрического поля мы можем судить по его воздействию на заряженные тела, а о существовании магнитного – по возникающей в физическом теле намагниченности и т.д.);

3. **элементарные частицы.** Это объекты, размеры которых очень малы (порядка 1Фм (10^{-13} см)) и, которые при этом являются либо бесструктурными (лептоны и кварки), либо имеют простую структуру (адроны). Адроны состоят из двух-трех кварков, которые и определяют их свойства. Этот вид материи не может быть отнесен к физическим телам, так как элементарные частицы обладают рядом особых свойств, которые не могут быть изучены в рамках классической физики.

Реальный объект не может существовать обособлено, в абсолютной пустоте. Существование всякого объекта должно быть связано с определенным физическим пространством и временем, а также объектом, относительно которого ведется наблюдение. Поэтому пространство и время являются основными формами существования физической материи во всех ее проявлениях.

Физическое пространство моделируется геометрическим множеством точек и обладает следующими свойствами:

- 1) непрерывность,
- 2) однородность,
- 3) изотропность,
- 4) односвязность,
- 5) трехмерность (евклидовость).

Аналогично пространству моделируется и **физическое время**. Оно является:

- 1) непрерывным,
- 2) однородным,
- 3) однонаправленным.
- 4) одномерным.

Некоторые вышеперечисленные свойства пространства и времени приводят к универсальным законам сохранения, а другие являются априорными. Так, например, **однородность времени** (равноправие всех моментов времени) приводит к закону сохранения энергии; **однородность пространства** (равноправие всех точек пространства) – к закону сохранения импульса; **изотропность пространства** (равноправие всех направлений) – к закону сохранения момента импульса. О **непрерывности пространства и времени** свидетельствуют экспериментальные данные по измерениям размеров объектов и промежутков времени. **Односвязность пространства** исходит из его евклидовости и указывает на то, что между двумя точками физического пространства можно провести одну единственную прямую, при этом отрезок ограниченный этими точками будет являться кратчайшим расстоянием между ними.

Между всеми реальными объектами в природе могут возникать те или иные виды взаимодействия. Каждое из взаимодействий имеет свою специфику и радиус действия. Основной мерой взаимодействия является сила. В настоящее время выделяют **четыре фундаментальных вида взаимодействия**:

1) **гравитационное** – возникает между телами, обладающими массой или импульсами. Радиус действия такого взаимодействия стремится к бесконечности. Это самые слабые по интенсивности взаимодействия. Силы, характеризующие такого рода взаимодействия, называют гравитационными. Гравитационные силы являются силами притяжения. Простейшим примером гравитационных сил являются силы в законе Всемирного тяготения. Закон Всемирного тяготения описывает взаимодействие между телами, обладающими массами:

а) в векторной форме:

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}; \quad (1.1)$$

б) в скалярной форме

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.2)$$

где m_1 и m_2 - массы взаимодействующих тел, r - расстояние между ними, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{H \cdot M^2}{Kz^2}$ - гравитационная постоянная.

2) **электромагнитное** – возникает между заряженными телами, токами, а также электрическими и магнитными полями, которые они создают. Радиус действия такого взаимодействия стремится к бесконечности. Это вторые по интенсивности взаимодействия в природе. Им могут соответствовать как силы притяжения, так и силы отталкивания. Сила взаимодействия между точечными электростатическими зарядами описывается законом Кулона:

а) в векторной форме:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}; \quad (2.1)$$

б) в скалярной форме

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2.2)$$

где q_1 и q_2 - заряды взаимодействующих тел, r - расстояние между ними, $k = 9 \cdot 10^9 \frac{H \cdot M^2}{Kл^2}$ - электрическая постоянная, которая связана

с постоянной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{M}$:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

3) **слабое** – ответственно за распад элементарных частиц, а также за некоторые виды радиоактивного распада (β -распад). Это третье по интенсивности взаимодействие. Радиус его действия очень мал $\sim 10^{-18}$ м.

4) **сильное** – ответственно за устойчивость атомных ядер и элементарных частиц. Радиус действия больше чем у слабого и составляет $\sim 10^{-15}$ м. Это самое интенсивное взаимодействие, которое обеспечивает устойчивое состояние вещества.

Каждое фундаментальное взаимодействие может быть описано с помощью определенной **физической модели**. В физике выделяют **три модели взаимодействия**:

- 1) механическая (классическая);
- 2) полевая;
- 3) квантово-релятивистская.

Охарактеризуем каждую из них в отдельности.

Механическая модель используется в основном в механике и молекулярной физике для описания взаимодействия физических объектов. Данная модель основана на теории дальнего действия. С точки зрения этой теории, тела взаимодействуют друг с другом без посредников (например, полей) и взаимодействие передается мгновенно. Это возможно, когда скорости передачи взаимодействий намного больше скоростей взаимодействующих тел.

Полевая модель в основном используется для описания системы заряженных тел и электромагнитных полей. Эта модель основана на теории ближнего действия, с точки зрения которой тела взаимодействуют с участием посредников - полей и взаимодействие распространяется с конечной скоростью. Эта модель хорошо описывает объекты, скорости которых соизмеримы со скоростью передачи взаимодействия. Чаще всего скорости передачи взаимодействия имеют значения близкие к скорости света.

Квантово-релятивистская модель используется для описания объектов микромира, которые обладают достаточно высокой (релятивистской) энергией. С точки зрения этой модели объекты взаимодействуют с помощью частиц – переносчиков взаимодействия. В результате взаимодействия объекты могут изменять не только состояние движения, но и претерпевают взаимные превращения. Каждое взаимодействие имеет определенную частицу – переносчика взаимодействия. Так, для гравитационного взаимодействия – это гравитон, для электромагнитного – фотон, для слабого – Z и W^{\pm} бозоны, для сильного – глюоны, π -мезоны.

Выбор модели описания взаимодействия между физическими объектами существенным образом зависит от постановки физической задачи. В некоторых случаях возможно комбинированное использование нескольких моделей, что позволяет получить наиболее точное представление о том, или ином взаимодействии и изменении состояния объектов.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Главным объектом изучения механики является **механическое движение** макротел без учета их внутренней структуры.

В механике для описания простых форм движения материи в основном используется механическая модель взаимодействия. Данная модель основана на теории дальнего действия. Согласно этой теории, взаимодействие тел друг с другом осуществляется без посредников (например, полей) и передается мгновенно. Это возможно, когда скорости передачи взаимодействий намного больше скоростей, взаимодействующих тел.

Механическое движение характеризует изменение положения тела с течением времени в заданном физическом пространстве относительно других тел с учетом или без учета влияния внешних сил.

Существует три основных **вида** механического движения:

1). **Поступательное** – это такое движение, при котором всякая жестко закрепленная с телом прямая перемещается параллельно самой себе. Этому движению соответствует **параллельный перенос** всех точек тела на заданный вектор перемещения.

2). **Вращательное** – движение, при котором все точки тела описывают окружности в плоскостях перпендикулярных мгновенным осям вращения. Этому движению соответствует **поворот** всех точек тела на один и тот же угол относительно некоторого центра или оси вращения.

3). **Колебательное** – движение, при котором тело совершает периодическое движение около своего положения устойчивого равновесия под действием внутренней возвратной силы, будучи в начальный момент времени выведенным из него.

Механика включает в себя три следующих **подраздела**:

1) **кинематика** – изучает механическое движение без учета воздействия внешних сил;

2) **динамика** – изучает механическое движение с учетом воздействия внешних сил;

3) **статика** – изучает условия устойчивого и неустойчивого равновесия механических систем.

Зафиксировать положение тела в пространстве можно, задав некоторую систему отсчета. Система отсчета представляет

совокупность системы координат (например декартовой), прибора для измерения времени (часов) и начала отсчета (тела отсчета). Под **идеальной системой** отсчета понимают такую систему, у которой начало координат и оси с течением времени не меняют своего положения в пространстве. Для процессов, протекающих на Земле в качестве такой системы можно рассматривать **гелиоцентрическую систему отсчета**. Началом этой системы отсчета является Солнце.

Все существующие системы отсчета являются либо **инерциальными** (ИСО), либо **неинерциальными** (НИСО) относительно идеальной системы.

ИСО – это система отсчета, которая движется прямолинейно с постоянной скоростью или неподвижна относительно идеальной системы отсчета.

НИСО – это система отсчета, которая движется ускоренно относительно идеальной системы отсчета. Наша Земля по отношению к гелиоцентрической системе отсчета является **неинерциальной**.

Основные понятия кинематики:

1) **материальная точка** – это тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи. За материальную точку при решении физических задач принимают центр масс тела;

2) **траектория** – линия в трехмерном пространстве или на плоскости, вдоль которой движется физическое тело (см. рис. 1);

3) **пройденный путь** – длина траектории $AB = \Delta s$;

4) **перемещение** вектор, соединяющий начальное положение тела и его конечное положение (см. рис. 1);

5) **расстояние** – длина вектора перемещения;

6) **радиус-вектор** – направленный отрезок (вектор), проведенный из начала отсчета к точке на траектории, фиксирующей положение тела в данный момент времени (см. рис. 1)

7) **скорость** – это вектор, характеризующий расстояние, пройденное телом за единицу времени (см. рис. 1);

8) **ускорение** – это векторная величина, определяющая быстроту изменения вектора скорости, как по модульному значению, так и по направлению.

При описании движения физического тела используют мгновенную и среднюю линейную скорость. **Средняя линейная скорость** равна отношению полного перемещения $\Delta \vec{r}$ к промежутку времени Δt , за которое оно совершено:

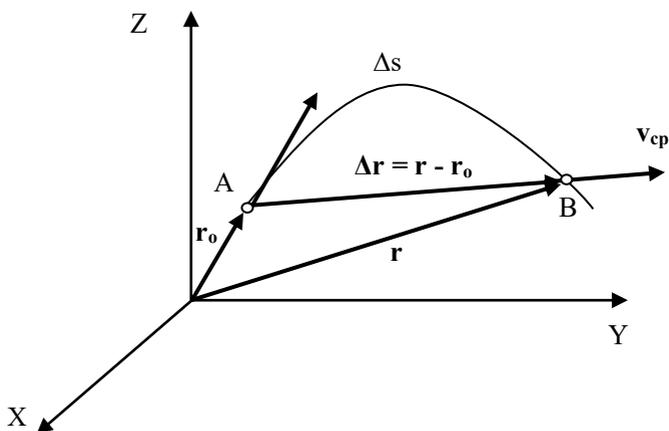


Рис. 1

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (3)$$

Как видно из (3) направление вектора средней скорости совпадает с направлением вектора полного перемещения, соединяющего начальное и конечное положение тела на траектории.

Под **мгновенной линейной скоростью** понимают скорость в данной точке траектории, которая математически определяется как первая производная от радиус - вектора в данной точке (см. рис. 1):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4)$$

Исходя из соотношения (4) вектор **мгновенной скорости** расположен вдоль касательной к траектории в заданной ее точке.

Линейное ускорение по аналогии со скоростью тоже может быть **мгновенным** и **средним**.

Среднее линейное ускорение определяется отношением полного изменения скорости $\Delta \vec{v}$, в течение рассматриваемого промежутка времени Δt , к данному промежутку (рис. 2).

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (5)$$

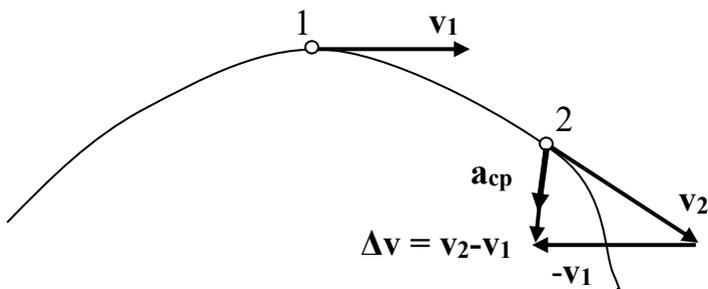


Рис. 2

Направление вектора среднего ускорения определяется с помощью годограф скорости. **Годограф скорости** представляет кривую, которую образуют концы мгновенных векторов скоростей вдоль всей рассматриваемой траектории, если их начала совместить параллельным переносом в одну точку. В этом случае, направление вектора среднего ускорения будет совпадать с направлением вектора соединяющего конец вектора начальной и конечной скорости на годографе.

Мгновенное линейное ускорение есть первая производная от мгновенной скорости тела в данной точке.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (6)$$

Вектор мгновенного ускорения всегда направлен внутрь кривизны траектории относительно некоторой ее точки и по касательной к советующей точке на годографе. Полное мгновенное ускорение можно разложить на две составляющие: **тангенциальную** или **касательную** a_τ (направленную по касательной к траектории в данной точке) и **центростремительную** или **нормальную** a_n (направленную по радиусу от данной точки к центру кривизны). Каждая составляющая имеет свой физический смысл. Тангенциальная составляющая отвечает за изменение модуля скорости, нормальная - за изменение направления вектора скорости в пространстве. Составляющие связаны с мгновенным ускорением соотношением:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (7)$$

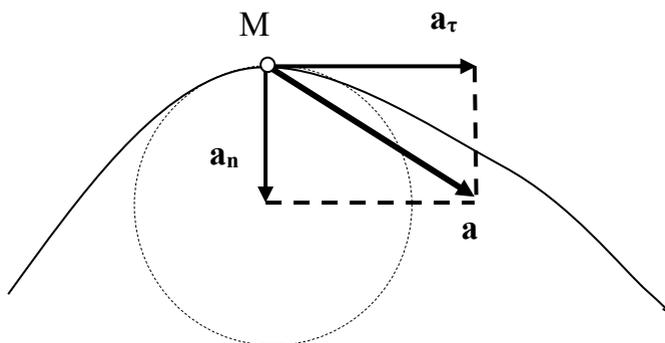


Рис. 3

Геометрическая связь показана на рисунке (см. рис. 3).

При этом тангенциальная компонента ускорения определяется изменением модуля скорости в данной точке по формуле:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} \quad (8);$$

а нормальная – изменением направления вектора мгновенной скорости:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (9),$$

где R - радиус кривизны траектории.

В общем случае уравнения движения могут быть достаточно сложными. Однако, при определенных условиях их можно свести к простым. Например, если тангенциальная компонента полного ускорения равна нулю ($a_{\tau} = 0$), то рассматриваемое движение является равномерным движением по окружности. В случае, когда нормальная компонента обращается в ноль ($a_n = 0$) – прямолинейным.

Рассмотрим прямолинейное движение тела и найдем уравнения движения для рассмотренных выше случаев. Выделяют два вида такого движения: **равномерное** и **неравномерное**.

Равномерное – это такое движение, при котором тело за равные промежутки времени проходит одинаковые расстояния. В этом случае $v = const$ и $ds = |d\vec{r}|$. Тогда:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = vdt \Rightarrow \int_{s_0}^s ds' = v \int_0^t dt' \Rightarrow s = s_0 + vt \quad (10)$$

Выражение (10) есть уравнение равномерного прямолинейного движения.

Простейшим неравномерным движением является **равноускоренное** движение. Это такое движение, при котором скорость тела за равные промежутки времени изменяется на равную величину. При равноускоренном движении $a = const$, причем $a_n = 0$, $a = a_\tau$. Тогда:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv' = a \int_0^t dt' \Rightarrow v = v_0 + at \quad (11)$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = vdt \Rightarrow \int_{s_0}^s ds' = \int_0^t (v_0 + at') dt' \Rightarrow$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (12)$$

Соотношения (11) и (12) представляют собой уравнения прямолинейного равноускоренного движения. Если движение является **равнозамедленным**, то в данных соотношениях перед ускорением следует поставить знак минус.

3. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Рассмотрим равномерное движение тела по окружности. Скорость тела при этом не будет изменяться по модулю $a_t = 0$, а будет меняться только направление вектора этой скорости $a = a_n$. При этом $a_n = const$.

Пусть тело из точки А на окружности (рис. 4) совершает вдоль дуги равномерное перемещение в точку В.

При этом вектор скорости повернется на центральный угол, на который опирается данная дуга. При этом $\triangle AOB$ и $\triangle CDB$ будут подобны, как треугольники, построенные на взаимно перпендикулярных прямых. Из подобия треугольников следует соотношение пропорции:

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\vec{v}} = \frac{\vec{AB}}{\vec{R}}$$

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}}{R} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (13)$$

где $\vec{AB} = \Delta \vec{r}$ - вектор перемещения тела.

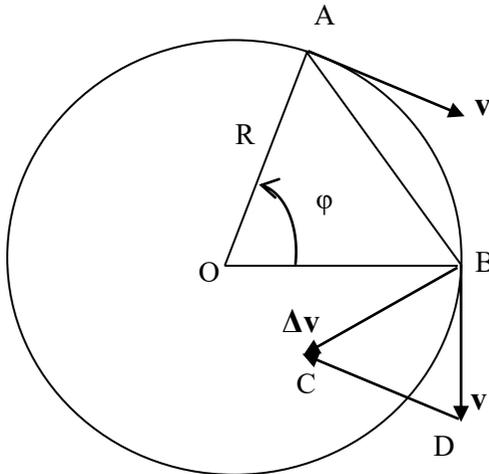


Рис. 4

Так как $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то в соотношении (13):

$$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} \quad (14)$$

где \vec{n} - единичный вектор, направленный вдоль радиуса от центра окружности.

При описании вращательного движения, при котором изменяется не только направление вектора мгновенной скорости, но и ее модульное значение, удобно пользоваться не линейными величинами, а угловыми. В этом случае необходимо будет заменить в соотношениях (3)–(12) вектор перемещения \vec{r} на угол поворота $\vec{\varphi}$, линейную скорость \vec{v} на угловую $\vec{\omega}$, тангенциальную составляющую \vec{a}_t на угловое ускорение $\vec{\beta}$. Угловые кинематические величины определяются таким же образом, как и линейные. Выделяют среднюю и мгновенную угловую скорость, а также среднее и мгновенное угловое ускорение.

Средняя угловая скорость равна отношению полного угла поворота за рассматриваемый промежуток времени к этому промежутку:

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} \quad (15)$$

Мгновенная угловая скорость определяется как предел отношения (15) при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (16)$$

Среднее угловое ускорение равно отношению полного изменения угловой скорости за фиксированный промежуток времени к этому промежутку:

$$\langle \vec{\beta} \rangle = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} \quad (17)$$

Мгновенное угловое ускорение определяется как предел отношения (17) при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (18)$$

Вектора мгновенных и средних угловых скорости и ускорения при элементарном повороте вокруг некоторой мгновенной оси расположены вдоль этой оси, а их направление определяется по правилу правого винта.

Равномерное вращательное движение будет описываться уравнением:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (19)$$

Уравнения же равноускоренного движения по окружности $a_\tau \neq 0$ будут иметь вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2} \quad \text{и} \quad \omega = \omega_0 + \beta t \quad (20)$$

Введение угловых величин упрощает решение кинематических уравнений, так как при вращательном движении вектора угловой скорости и ускорения не изменяют своего направления в пространстве и лежат на оси вращения. Направления этих величин определяется по **правилу правого винта**: если, вращающуюся часть буравчика направить по направлению линейной скорости или ускорения a_τ , то его поступательно движущаяся часть будет указывать на направление вектора угловой скорости или ускорения.

Между линейными и угловыми величинами существует аналитическая связь. Связь между линейной и угловой скоростью имеет вид:

$$\vec{v} = [\vec{r}, \vec{\omega}] \quad (21)$$

где \vec{r} - радиус вектор, проведенный из точки наблюдения к точке на траектории, из которой проведен вектор мгновенной скорости \vec{v} (он всегда направлен по касательной к траектории)

Связь между тангенциальной составляющей линейного ускорения и угловым ускорением определяется аналогично:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{r}, \vec{\beta}] \quad (22)$$

Мгновенная скорость \vec{v} сонаправлена с тангенциальным ускорением a_τ . Нормальная компонента ускорения не определяет значение углового ускорения. Она связана со значением угловой скорости.

В общем случае соотношение (14) при подстановке (21) с учетом, что $R = r \sin \alpha$, где α угол между векторами \vec{r} и \vec{v} примет вид:

$$\vec{a}_n = [[\vec{r}, \vec{\omega}], \vec{\omega}] = -\omega^2 \cdot R \cdot \vec{n} \quad (23)$$

В случае сложного криволинейного движения линейное ускорение тела определяется из соотношения:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d[\vec{r}, \vec{\omega}]}{dt} = \left[\vec{r}, \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right] + \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{\omega} \right] = \\ &= [\vec{r}, \vec{\beta}] + [[\vec{r}, \vec{\omega}], \vec{\omega}] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \end{aligned} \quad (24)$$

Как видно из формулы (24) мгновенное линейное ускорение есть векторная сумма нормального и тангенциального ускорений.

4. ДИНАМИКА. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ В ИНЕРЦИАЛЬНЫХ И НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Механическое движение изучается не только в кинематике, но и динамике. Однако в этом подразделе учитываются все действующие на объект силы. Переход от кинематических величин к динамическим связан с введением понятия массы тела. Существуют три основных закона динамики материальной точки. Их называют еще **законами Ньютона**. В классической механике эти законы в полной совокупности выполняются только в инерциальной системе отсчета.

Первый закон Ньютона называют законом инерции. Он гласит, что всякое тело в ИСО будет покоиться или двигаться с постоянной скоростью, если на него не действуют другие тела или действие других тел скомпенсировано.

Второй закон Ньютона представляет собой уравнение движения тела с учетом воздействующих на него сил и определяется следующим соотношением:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (25),$$

где \vec{F} - равнодействующая всех сил действующих на тело:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \quad (26).$$

Второй закон Ньютона формулируется следующим образом:

Равнодействующая всех сил, действующих на тело, сообщает ему ускорение в зависимости от его массы, если она не равна нулю. В соотношении (25) m - масса тела, которая связывает силу, как динамическую величину, и ускорение, которое является кинематической величиной. Сила в этом случае выступает как **причина**, а ускорение как **следствие** ее воздействия. **Масса тела** есть мера инертности тела или гравитационного взаимодействия. **Инертность** – это свойство тела сохранять свою скорость постоянной по значению и направлению, если на него не действуют другие тела или действие их скомпенсировано. Масса

является скалярной, аддитивной величиной. **Аддитивность физической величины**, характеризующей объект, означает, что она может быть представлена в виде алгебраической суммы тех же физических величин, характеризующих все части этого объекта.

В дифференциальной форме **второй закон Ньютона** (25) с учетом соотношения (6) будет иметь вид:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (27),$$

где $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ - импульс тела

Если сила, приложенная к телу массой m , постоянна во времени, то уравнение (27) можно переписать в интегральной форме:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F} \cdot (t_2 - t_1) = \vec{F} \cdot \Delta t \quad (28)$$

где $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ - изменение импульса тела за время движения Δt .

Если сила в (27) зависит от времени, то изменение импульса будет определяться соотношением:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \quad (29)$$

Соотношения (28) и (29) являются также законами изменения импульса.

Третий закон Ньютона есть закон противодействия. Согласно ему тела действуют друг на друга независимо с силами равными по модулю и противоположными по направлению.

В математической форме этот закон записывается следующим образом:

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| ; \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (30).$$

Например, вес тела в состоянии покоя \vec{P} и сила реакции опоры \vec{N} подчиняются третьему закону Ньютона (см. рис. 5):

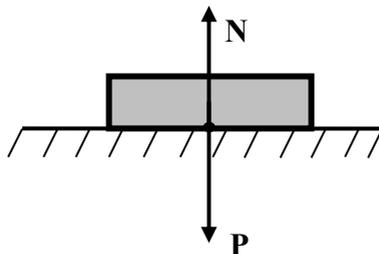


Рис. 5

Для выполнения третьего закон Ньютона в ИСО необходимы **следующие условия:**

- 1) **тела** имеют непосредственный **контакт** друг с другом;
- 2) **тела** расположены **на фиксированном расстоянии** друг от друга и **неподвижны** в пространстве;
- 3) **тела совершают перемещение** относительно друг друга с **малыми (нерелятивистскими) скоростями**.

Нарушение третьего закона Ньютона проявляется в релятивистской механике, так как объекты движутся со скоростями близкими к скорости света (релятивистскими) Рассмотрим случай, когда одно тело неподвижно, а другое движется с постоянной релятивистской скоростью. При резкой остановке второго тела, через некоторое время нарушение третьего закона прекращается. Нарушение закона объясняется тем, что скорость перемещения тела сравнима со скоростью распространения взаимодействия. Поэтому неподвижное тело не сразу отреагирует на изменение положения движущегося.

В неинерциальной системе отсчета законы Ньютона не выполняются. Однако можно во второй закон Ньютона ввести понятие сил особого рода - **сил инерции**, чтобы его можно было использовать в неинерциальных системах отсчета. Эти силы связаны со свойствами самой ИИСО. С учетом сил инерции второй закон Ньютона имеет вид:

$$\vec{F} + \vec{F}_{in} = m \cdot \vec{a} \quad (31),$$

где \vec{F} - равнодействующая всех сил относительно некоторой ИСО; \vec{F}_{in} - сила инерции, которая связана с ускорением ИИСО относительно выбранной ИСО; \vec{a} - ускорение тела относительно

этой НИСО. Основной особенностью сил инерции является их пропорциональность массе тела. На этом основано доказательство Принципа эквивалентности в классической механике. Он показывает, что инертная и гравитационная массы тела одинаковы.

Неинерциальные системы могут быть как поступательными, так и вращательными (например, Земля). Тогда, кроме центробежных сил инерции, для тела, движущегося относительно вращающейся НИСО с отличной от нуля скоростью в направлении, не совпадающем с мгновенной осью вращения, возникает дополнительная сила инерции – сила Кориолиса (см. рис. 6).

Она зависит как от свойств НИСО – угловая скорость вращения $\vec{\omega}$, так и от скорости частицы относительно этой НИСО - \vec{v}' :

$$\vec{F}_k = -2m [\vec{v}', \vec{\omega}] \quad (32)$$

Скорость частицы относительно НИСО - \vec{v}' связана с ее скоростью в ИСО \vec{v} по закону сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \quad (33),$$

где \vec{v}_0 - переносная скорость НИСО по отношению к рассматриваемой ИСО. Для равномерно вращающейся системы отсчета эта скорость определяется соотношением $v_0 = -\omega^2 R$, где ω - угловая скорость вращения НИСО, связанная с ее периодом по формуле $\omega = \frac{2\pi}{T}$, а R - радиус окружности по которой движется тело в НИСО.

Сила Кориолиса имеет большое значение в геофизике, в военном деле и других областях. Сила Кориолиса оказывает

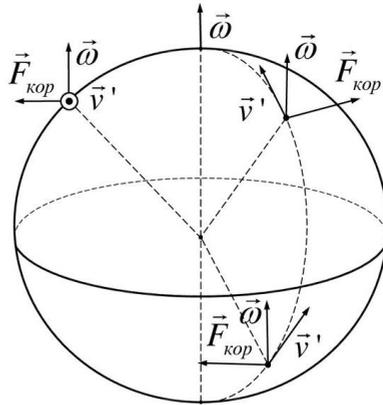


Рис. 6

огромное влияние на погоду на Земле. Именно она закручивает циклоны и антициклоны, а ещё влияет на направление пассатов и морских течений. Влияние силы Кориолиса приводит к тому, что в Северном полушарии сильнее омываются правые берега рек и изнашиваются правые рельсы железнодорожных путей. В Южном полушарии при этом наоборот. Если произвести выстрел вдоль экватора с запада на восток, то сила Кориолиса будет приподнимать снаряд над Землей, а в обратном направлении прижимать к Земле. Действие силы Кориолиса положено в основу принципа действия маятника Фуко, который позволил с высокой точностью определить период суточного вращения Земли. Плоскость колебания математического маятника на очень длинной нити за период вращения Земли совершает полный оборот.

Рассмотрим соотношение (27) в случае, когда масса тела не является постоянной во времени и при движении монотонно уменьшается по определенному закону. В этом случае говорят, что тело совершает реактивное движение. Реактивное движение могут совершать как технические устройства (например, космические ракеты при запуске), так и живые организмы (например, кальмар, осьминог, медуза, крымский огурец).

Уравнение, которое описывает движение тел с переменной массой называют уравнением Мещерского. Рассмотрим, например, движение космической ракеты (см. рис. 7). Ее движение можно считать реактивным, так как она перемещается за счет вырывающихся в пространство газов, в направлении противоположном направлению газовой струи. Пусть m - масса ракеты в какой-то момент времени, \vec{v} - ее скорость, dm' - масса выделяющихся за единицу времени газов со скоростью \vec{u} , направленной противоположно скорости ракеты. При выбросе газов ракета получает дополнительную скорость в противоположном направлении ($d\vec{v}$). Закон сохранения импульса для данного случая движения имеет вид:

$$(m + dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u} \cdot dm' = m \cdot \vec{v} \quad (34),$$

где dm - масса, которую теряет ракета при выделении газов. По закону сохранения массы $dm' + dm = 0$ и $dm < 0$.

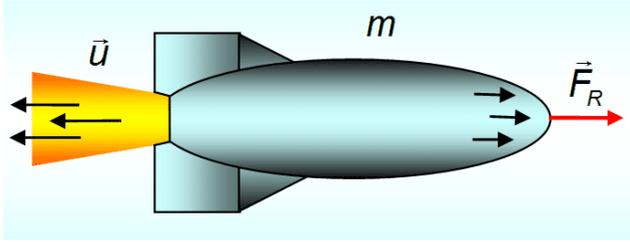


Рис. 7

Раскрываем скобки в (34), пренебрегая членами второго порядка малости ($dm \cdot d\vec{v}$) и учитывая закон сохранения массы, и получаем:

$$dm \cdot \vec{v} + m \cdot d\vec{v} - \vec{u} \cdot dm = 0 \quad (35)$$

Продифференцируем обе части по времени и получим соотношение:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u} \cdot \frac{dm}{dt} - \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{dm}{dt} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{u}' \quad (36),$$

где \vec{u}' - скорость газов относительно ракеты ($\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$ - закон сложения скоростей в нерелятивистской механике).

Уравнение (36) является уравнением Мещерского без учета действия сил внешнего потенциального поля, в котором может находиться ракета. Учет таких сил приводит к следующему выражению:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \cdot \vec{u}' \quad (37).$$

Если не учитывать второе слагаемое в соотношении (37), связанное с изменением массы тела при движении, то оно будет являться вторым законом Ньютона в дифференциальной форме.

Для реактивного движения, когда скорость истечения газов является постоянной и потенциальное поле отсутствует, легко можно найти закон изменения массы ракеты с помощью дифференциального уравнения (36):

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt} \cdot u'$$

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{u'}$$

$$m = m_0 \exp\left(-\frac{v-v_0}{u'}\right) \quad (38).$$

Соотношение (38) представляет собой формулу Циолковского. Следует отметить, что при разработке ракет необходимо при относительно малом изменении ее массы добиваться достаточно больших скоростей движения. Это возможно только за счет увеличения скорости выброса газов, которая также ограничена в силу различных причин, связанных как со свойствами газов, так и с особенностью конструкции ракет.

5. МЕХАНИЧЕСКИЕ СИЛЫ

Все силы, встречающиеся в классической механике, являются **механическими**. К механическим силам можно отнести следующие:

- упругости
- трения
- тяжести
- центробежные (центростремительные).

Деформация тела является приводит к возникновению **сил упругости**, которые имеют электромагнитную природу. При деформации тела электронные оболочки его атомов также испытывают деформацию и искажаются. При этом происходит перераспределение заряда в атоме, приводящее к потере им электронной нейтральности. В этом случае атомы ведут себя как заряженные частицы и между ними возникают электромагнитные силы, стремящиеся вернуть их в прежнее электронейтральное состояние. Результатирующая этих сил и есть сила упругости.

Под **деформацией** понимают изменение формы и размеров тела при внешнем воздействии на него.

В этом отношении можно выделить следующие деформации:

1) **упругая** деформация имеет место тогда, когда после снятия внешнего воздействия на тело тело принимает прежнюю форму и размеры;

2) **пластическая** деформация проявляется в том, что тело не принимает прежней формы и размеров при устранении воздействия;

3) приводящая к **разрыву молекулярных связей**.

К **видам** деформации относятся растяжение (сжатие), изгиб (кручение), сдвиг. Растяжение и сжатие являются линейными деформациями. так как происходит изменение линейных размеров тел, сдвиг является угловой деформацией. Изгиб и кручение - более сложные виды.

В случае упругих линейных деформаций (деформации сжатия и растяжения), сила упругости определяется по формуле:

$$\vec{F}_{упр} = -k\vec{x} \quad (39)$$

где \vec{x} - абсолютная величина деформации тела при внешнем воздействии; k - коэффициент жесткости, который зависит от

природы материала, из которого изготовлено тело, а также от размеров этого тела. Для коэффициента жесткости приводятся табличные значения в зависимости от природы материала, подвергнутого деформации.

Соотношение (39) представляет собой математическое выражение **закона Гука** и показывает, что сила упругости пропорциональна величине деформации и направлена против нее (рис. 8).

Как видно из рисунка 8, сила упругости по III закону Ньютона равна по модулю и противоположна по направлению внешней деформирующей силе. Поэтому деформацию можно характеризовать через величину этой силы. В частности, пользуются понятием механического напряжения. **Механическое напряжение** - это величина равная деформирующей силе приходящейся на единицу поверхности, к которой она приложена. Выделяют два вида механического напряжения - **тангенциальное τ** и **нормальное σ** . **Тангенциальное механическое напряжение** возникает тогда, когда деформирующая сила направлена по касательной к поверхности, а **нормальное** - по нормали к поверхности. При равномерном распределении деформирующих сил в теле и малых величинах деформации, деформацию растяжения (сжатия) характеризуют нормальным напряжением, а деформацию сдвига тангенциальным напряжением.

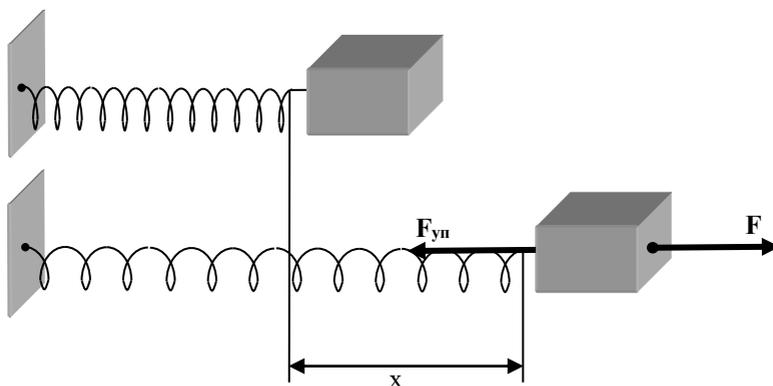


Рис. 8

По определению нормальное и тангенциальное напряжения определяются соотношениями:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (40.1)$$

$$\tau = \frac{F \tau}{S} \quad (40.2)$$

Экспериментально установлено, что нормальное напряжение пропорционально относительному удлинению физического объекта при его деформации:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad (41),$$

где E - модуль Юнга, характеризующий способность материала к деформации в зависимости от его природы (чем больше модуль Юнга при фиксированном воздействии, тем меньше величина относительной деформации), $\varepsilon = \frac{x}{l}$ - относительное удлинение тела, полученное при деформации, а l - длина тела в отсутствии деформации.

Сопоставляя соотношения (40) и (41) можно найти деформирующую силу и сравнить ее с (39) в силу III закона Ньютона:

$$F = \frac{E \cdot S}{l} x \quad (42)$$

Как видно, коэффициент жесткости действительно зависит от размеров объекта и природы его материала:

$$k = \frac{E \cdot S}{l} \quad (43)$$

Сила трения также, как и сила упругости, имеет электромагнитную природу и причиной ее возникновения является непосредственное соприкосновение двух тел. В области контакта

приповерхностные атомы теряют свою электронейтральность за счет искажения электронной оболочки и между ними возникает электромагнитное взаимодействие, которое препятствует свободному перемещению одного тела вдоль другого.

Выделяют **четыре вида сил трения**:

- трение покоя
- трение скольжения
- трение качения
- вязкое трение.

Трение покоя возникает при относительном покое соприкасающихся тел и сохраняется до тех пор, пока одно тело не станет перемещаться вдоль поверхности другого. Сила трения покоя будет непрерывно меняться в зависимости от приложенной к телу тяговой силы, которая по III закону Ньютона должна ее уравновешивать. Минимальное значение тяговой силы, при котором тело еще находится в состоянии покоя, зависит от силы реакции опоры, действующей на тело. Под силой реакции опоры понимают силу, с которой опора или подвес действуют на тело. Эта сила обозначается \vec{N} . Значение минимальной тяговой силы $F_{\text{тяги}}$ пропорциональна значению силы реакции опоры и определяется соотношением:

$$F_{\text{тяги}} = \mu \cdot N \quad (44),$$

где μ - коэффициент трения покоя. Поэтому, в силу третьего закона Ньютона, максимальное значение силы трения покоя имеет также значение:

$$F_{\text{тр покоя}} = \mu \cdot N \quad (45),$$

В зависимости от величины тяговой силы, которая еще не способна вывести тело из положения равновесия сила трения, равная ей, может принимать значения в диапазоне:

$$0 \leq F_{\text{тр покоя}} \leq \mu \cdot N.$$

Экспериментально доказано, что сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения примыкающих поверхностей тел.

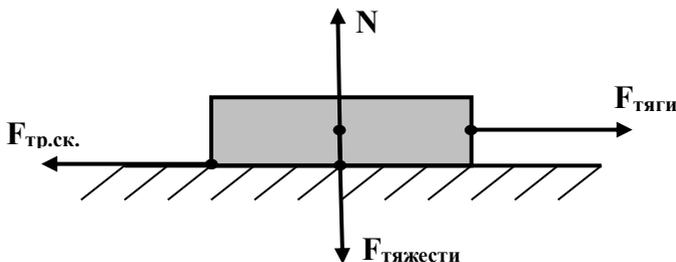


Рис. 9

Сила **трения скольжения** (рис. 9) не зависит от скорости перемещающегося тела и площади соприкосновения взаимодействующих тел, а зависит только от силы реакции опоры (нормального давления на поверхность):

$$F_{тр\ ск} = \mu' N \quad (46)$$

Силы трения покоя и скольжения приложены к поверхности контактирующих тел и направлены против их возможного или реального перемещения относительно друг друга.

Для уменьшения значений силы трения скольжения между соприкасающимися телами можно поместить вращающиеся механизмы: валы, оси, подшипники и т.д. В отличие от сил трения скольжения и покоя, силы **трения качения** зависят еще от радиуса вращающегося механизма (рис. 10):

$$F_{тр\ кач} = \mu' N \quad (47).$$

Центростремительная сила появляется в случае движения тела по окружности при наличии реальной связи (например, резиновый шнур) между центром окружности и телом как реакция этой связи на удаление тела от центра. Вектор этой силы приложен к телу и направлен к центру вдоль связи. Центростремительная сила является причиной возникновения у тела центростремительного ускорения:

$$\vec{F}_{цс} = m\vec{a}_n \quad (48)$$

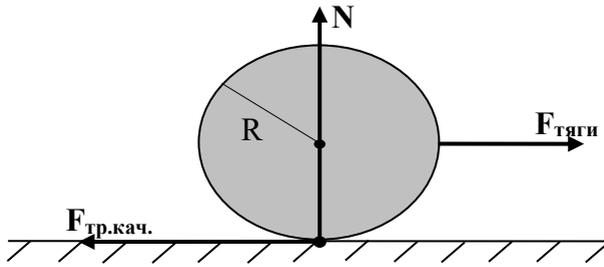


Рис. 10

С учетом (9) и соотношения $\vec{v} = [\vec{r}, \vec{\omega}]$ связывающего линейную скорость \vec{v} с угловой скоростью $\vec{\omega}$ через радиус окружности \vec{r} , по которой вращается тело, получаем, что:

$$\vec{F}_{\text{иc}} = -m\omega^2\vec{r} \quad (49).$$

В случае наличия реальной связи, она играет роль упругой силы и имеет электромагнитную природу. Если же реальная связь между центром окружности и телом отсутствует, то центробежная сила выступает как сила инерции, являющаяся свойством самой вращающейся системы.

Центробежная сила – это сила, которая действует со стороны тела на связь и противоположна по направлению центробежной силе. По третьему закону Ньютона она ее уравновешивает:

$$\vec{F}_{\text{иc}} = -\vec{F}_{\text{иб}} \quad (50).$$

Сила тяжести возникает вследствие притяжения тела Землей и действует на него со стороны Земли. Сила тяжести имеет гравитационную природу и может быть получена из общего закона гравитации для тел, обладающих массами:

$$F_{\text{сп}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (51),$$

где G - гравитационная постоянная, m_1 и m_2 - массы взаимодействующих тел, r - расстояние между ними.

Если за расстояние принять радиус Земли, а за m_1 массу Земли M и m_2 массу тела m , находящегося на поверхности планеты, то соотношение (51) можно переписать в виде:

$$F_{sp} = G \frac{M \cdot m}{R_3^2} \quad (52),$$

где $g = G \frac{M}{R_3^2}$ - константа, имеющая размерность ускорения. Она была названа ускорением свободного падения тела у поверхности Земли. Таким образом, сила тяжести у поверхности Земли определяется соотношением:

$$\vec{F}_{тяж} = m\vec{g} \quad (53).$$

Вес тела – это сила, с которой тело действует на опору или подвес. В отличие от силы тяжести вес тела создается самим телом и зависит от ускоренного движения тела вверх или вниз, и от географической широты земного шара. Вес тела приложен к области соприкосновения тела с опорой или подвесом, а сила тяжести к центру масс тела. Сила тяжести направлена вдоль земного радиуса к центру Земли, направление же веса тела зависит от широты земного шара и составляет некоторый малый угол (угол отвеса) с направлением силы тяжести (рис. 11).

В состоянии покоя вес тела на горизонтальной поверхности определяется соотношением:

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad (54).$$

Если тело находится на наклонной плоскости с углом наклона α , то согласно третьему закону Ньютона, его вес должен уравновешиваться силой реакцией опоры, перпендикулярной самой плоскости. При этом вес тела составляет лишь часть силы тяжести, которая направлена строго вниз и определяется соотношением:

$$P = mg \cos \alpha$$

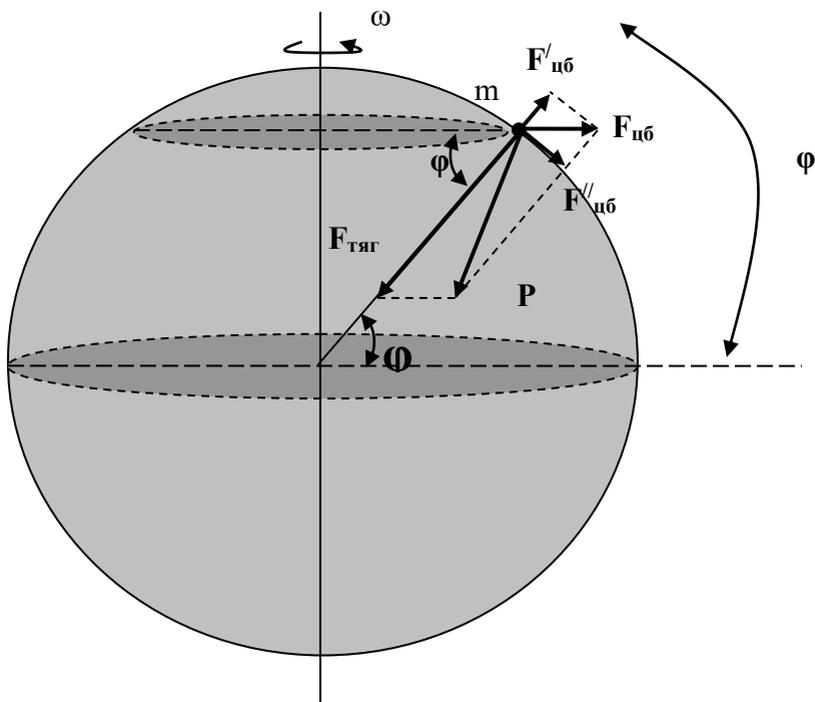


Рис. 11.

Если тело совершает ускоренное движение вверх или вниз, то оно способно испытывать либо перегрузки (увеличение веса за счет ускоренного движения вверх), либо легкость (уменьшение веса при ускоренном движении вниз).

В случае перегрузки:

$$P = m(a + g) \quad (55.1),$$

в состоянии легкости:

$$P = m(a - g) \quad (55.2).$$

Если $a = g$, то тело испытывает состояние невесомости ($P=0$).

При учете вращательного движения Земли вес тела может быть выражен следующей формулой:

$$\vec{P} = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{цб},$$

где $\vec{F}_{цб}$ - центробежная сила инерции, действующая на всякое тело, находящееся на поверхности Земли и, следовательно, вращающиеся вместе с ней. Эту силу можно разложить на две составляющие:

$$\vec{F}_{цб} = \vec{F}'_{цб} + \vec{F}''_{цб},$$

где $\vec{F}'_{цб} = R_3 \omega^2 \cos^2(\varphi)$ - составляющая центробежной силы инерции, направленная вдоль радиуса Земли; $\vec{F}''_{цб}$ - составляющая центробежной силы инерции, направленная перпендикулярно радиусу Земли, и поэтому ее проекция на это направление равна нулю.

Зависимость веса от широты земного шара в пренебрежении малым углом отвеса (угол отвеса – угол между направлением силы тяжести и направлением вектора веса тела) задается формулой:

$$P = m \left(G \frac{M}{R_3^2} - R_3 \omega^2 \cos^2(\varphi) \right) \quad (56),$$

где ω - циклическая частота вращения земного шара, φ - угол широты земного шара. Из рисунка и соотношения (56) видно, что на полюсах вес тела максимальный, а на экваторе минимальный.

Учитывая, что в состоянии покоя на любой широте вес тела определяется формулой (54) и сопоставляя ее с (56) можно получить зависимости ускорения свободного падения от этой широты:

$$g = G \frac{M}{R_3^2} - R_3 \omega^2 \cos^2(\varphi) \quad (57)$$

Всякую силу по виду математической формулы, задающей ее и описательного характера можно отнести к центральным, однород-

ным, неоднородным, стационарным, нестационарным, консервативным и неконсервативным силам, которым соответствуют физические поля того же вида.

Физическим полем называют совокупность векторов сил одного рода в замкнутой области физического пространства. Вид физического поля существенно зависит от симметрии сил и их математической формы записи. С этой точки зрения все поля и силы можно отнести к центральным и нецентральным, однородным и неоднородным, стационарным и нестационарным, консервативным и неконсервативным, потенциальным и не потенциальным.

Центральными называют такие поля силы, которых зависят от расстояния между взаимодействующими объектами и направлены радиально от силового центра. Силовым центром называют объект, создающий данное центральное поле. Например, силовым центром электростатического поля является один из взаимодействующих точечных зарядов по отношению к другому. К центральным полям и силам можно отнести кулоновские, гравитационные, центростремительные силы и т.д.:

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad - \text{центральная сила, создающая центральное}$$

поле. Силовым центром является одно из взаимодействующих тел. Вектора сил из Закона Всемирного тяготения направлены радиально от силового центра

Они все зависят от расстояния между объектами и направлены вдоль линии, соединяющей воздействующий объект (силовой центр) и объект, на который это воздействие, оказывается. Особенностью центральных сил, является то, что все они на одинаковом расстоянии от силового центра имеют одинаковые значения для идентичных объектов.

Если для полей и образующих их сил не выполняется условие центральности, то они являются **нецентральными**.

Однородными называют такие поля силы, которых имеют одно и тоже значение и направление в любой точке пространства, в любой момент времени. Например, к ним можно отнести силу тяжести вблизи поверхности Земли, если область рассматриваемого пространства не велика:

$\vec{F} = m\vec{g}$ - направление векторов этой силы одинаково и соответствует направлению g - ускорению свободного падения.

При рассмотрении больших областей пространства нужно учитывать, что сила тяжести направлена строго к центру земли, и поэтому в различных точках такого пространства вектора сил могут быть не коллинеарными.

Если для полей и образующих их сил не выполняется условие однородности, то они являются **неоднородными**.

Стационарными называют такие поля, силы которых не зависят от времени. Например, сила вида: $F = \alpha \cdot t$ не может являться стационарной, так как линейно зависит от времени и картина поля сил меняется с течением времени.

Если условие стационарности не выполняется, то поля и силы называют **нестационарными**.

Однородные и центральные силы, если они являются стационарными всегда можно назвать **консервативными**, то есть их работа по замкнутой траектории равна нулю, а в случае не замкнутой траектории зависит от исходного и конечного положения тела:

$A = \oint (\vec{F}(s), d\vec{s}) = 0$ - условие консервативности (работа неоднородной силы по замкнутой траектории равна нулю).

Консервативными также называют и поля этих сил.

Если условие консервативности не выполняется, то поля и соответствующие им силы называют **неконсервативными**.

Кроме того, консервативные силы являются **потенциальными**. Потенциальность означает, что между силой и потенциальной энергией (потенциалом) существует градиентная связь.

Потенциальная сила определяется соотношением:

$$\vec{F} = -\nabla U(x, y, z) = \nabla \Pi(x, y, z) \quad (58)$$

где $U(x, y, z)$ - потенциальная энергия тела в соответствующем поле сил, а $\Pi(x, y, z)$ - соответствующий ей потенциал;

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \text{ оператор набла или градиент в ПДСК.}$$

Градиентом называют вектор, в направлении которого скалярная функция монотонно возрастает. В нашем случае скалярной функцией является потенциал, а вектором – потенциальная сила. Физический смысл соотношения (60) заключается в том, что силовые линии, касательными к которым являются вектора потен-

циальных сил перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Эквипотенциальные поверхности представляют собой - совокупность точек в физическом пространстве, в которых значения потенциала (потенциальной энергии) одинаковы.

Если условие потенциальности (58) не выполняются, то силы и соответствующие им поля являются **не потенциальными**.

6. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ В МЕХАНИКЕ

В природе существуют такие **законы сохранения**, которые связаны со свойствами физического пространства и времени. Эти законы называются **универсальными** и играют важную роль при решении физических задач и описании различных явлений. Эти законы сохранения выполняются для замкнутых систем.

Если тела системы взаимодействуют только друг с другом и не взаимодействуют с телами, не входящими в систему или воздействие на них других тел скомпенсировано, то система тел является **замкнутой**.

Если на систему взаимодействующих тел воздействуют внешние объекты и их действие не скомпенсировано, то система является **незамкнутой**.

Рассмотрим более подробно **законы сохранения и изменения импульса** тела. Импульс тела есть векторная величина, совпадающая по направлению со скоростью тела и равная произведению этой скорости на массу:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (59)$$

По второму закону Ньютона изменение скорости тела при постоянной его массе возможно тогда, когда на него действуют внешней силой:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$\vec{F}dt = m d\vec{v} \Rightarrow \vec{F}dt = d\vec{p},$$

где $\vec{F}dt$ - импульс внешней силы, действующей на тело в течение некоторого времени t .

В случае действия постоянной силы (равноускоренное движение) импульс внешней силы будет определяться соотношением:

$$\vec{F}t = m\vec{v} - m\vec{v}_0 \quad (60)$$

Соотношение (60) представляет собой **закон изменения импульса**: импульс тела или системы тел изменяется, если в течение некоторого времени на них действовала отличная от нуля сила.

В случае замкнутой системы двух тел воздействие внешних сил отсутствует и закон сохранения импульса может быть представлено в виде:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \quad (61),$$

где m_1, m_2 - массы взаимодействующих тел; \vec{v}_1, \vec{v}_2 - скорости тел до столкновения; \vec{v}'_1, \vec{v}'_2 - скорости тел после столкновения.

Соотношение (61) является законом сохранения для двух тел. Он показывает, что геометрическая сумма импульсов до взаимодействия равна геометрической сумме импульсов тел после взаимодействия.

Для замкнутой системы многих тел закон сохранения импульса можно представить в виде:

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \vec{p} = const \quad (62),$$

где \vec{p}_i - импульс i -го тела системы, \vec{p} - полный импульс системы, N - число всех тел в системе.

В этом случае **закон сохранения импульса** можно сформулировать следующим образом: геометрическая сумма импульсов всех тел замкнутой системы является величиной постоянной и не зависит от их взаимодействия и последующего перемещения. Закон сохранения импульса связан однородностью физического пространства.

Еще одним универсальным законом сохранения является **закон сохранения энергии**. Он связан с **однородностью физического времени**. Под **энергией** понимают скалярную физическую величину, которая характеризует конкретное состояние тела или системы тел. Поэтому ее называют их **функцией состояния**. Для того чтобы тело перешло из одного состояния в другое над ним надо совершить работу. **Работа** также, как и энергия, является скалярной физической величиной. Однако в отличие

от энергии она представляет собой **функцию процесса**, описывающую переход тела из одного состояния в другое с изменением его полной энергии:

$$A = W - W_0 \quad (63),$$

где W , W_0 - полная энергия тела или системы тел в начальном и конечном состоянии.

Полная механическая энергия является суммой кинетической и потенциальной энергии тела или системы в данном состоянии:

$$W = T + U \quad (64)$$

Кинетическая энергия – это энергия движения тела (системы). Ее значение зависит от скорости: $T = \frac{mv^2}{2}$. **Потенциальная энергия** – это энергия взаимодействия тел в системе или энергия, соответствующая полю консервативных сил, в котором находится тело или система. Ее вид зависит от рода взаимодействия. Так, например, потенциальная энергия тела в поле сил тяжести имеет вид: $U = mgh$ (h - высота тела над Землей); потенциальная энергия

упругодеформированного тела: $U = \frac{kx^2}{2}$ - где x - абсолютная величина упругой деформации.

Математически **механическая работа** определяется соотношением:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(s) d\vec{s} \quad (65),$$

где $\vec{F}(s)$ - неоднородная сила, действующая на тело вдоль всего пути от s_1 до s_2 . Если сила \vec{F} - однородна на всем пути, то соотношение для работы упрощается:

$$A = (\vec{F} \cdot \vec{s}) \quad (66).$$

Геометрический смысл работы состоит в том, что она численно равна значению площади на декартовой плоскости FOs , которая ограничена функцией силы $F(s)$ и вертикальными отрезками, проведенными через значения начальных s_1 и конечных координат пути s_2 .

Из соотношения (63) видно, что полная механическая энергия будет сохраняться, если работа нулю ($A=0$). Это возможно при отсутствии диссипации в системе или при условии, что внешние силы, действующие на систему, консервативны.

Диссипация – это рассеяние механической энергии. Примером такого явления может служить частичное или полное преобразование кинетической энергии в тепловую при наличии сил трения, которые являются неконсервативными.

Консервативными называют силы, работа которых по замкнутой траектории равна нулю или, в случае незамкнутой траектории, зависит только от начального и конечного положения тела. При этом потенциальные и кинетические энергии тел, составляющих замкнутую систему, по мере их взаимодействия, могут изменяться. В этом случае закон сохранения полной механической энергии может быть записан в виде:

$$\sum_{i=1}^N T_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N U_{ij} + U_{\text{конс}} = W = \text{const} \quad (67).$$

где $U_{\text{конс}}$ - потенциальная энергия поля внешних консервативных сил.

Соотношение (67) представляет собой **закон сохранения полной механической энергии** замкнутой системы тел в поле консервативных сил.

Его можно сформулировать следующим образом: **полная механическая энергия системы тел** есть величина постоянная при любых взаимодействиях тел друг с другом и внешними консервативными полями и любом их взаимном движении. Ее можно представить в виде алгебраической суммы всех кинетических и потенциальных энергий объектов, составляющих систему.

С понятием работы связано понятие мощности. **Мощность** - это скорость совершения работы. Она определяется по формуле:

$$P = \frac{dA}{dt} \quad (68).$$

Подставляя (66) в (68) можно получить еще одно соотношение для мощности:

$$P = (\vec{F}, \vec{v}) \quad (69).$$

Особый интерес в механике представляют задачи на **соударения двух тел**. Существует два предельных случая соударения: абсолютно упругое и абсолютно неупругое. Используя законы сохранения импульса и энергии для упругих и неупругих соударений всегда можно рассчитать значения энергий и импульсов взаимодействующих объектов, и указать направление этих импульсов по начальным данным.

Если при соударении тел выполняются как закон сохранения импульса, так и закон сохранения полной механической энергии, то удар **называется абсолютно упругим**. При таком ударе тела не испытывают деформацию и не образуются новые тела. Из системы уравнений, включающей закон сохранения импульса и полной механической энергии можно получить конечные скорости взаимодействующих тел, которые определяются соотношениями:

$$\vec{v}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_{10} + 2m_2\vec{v}_{20}}{m_1 + m_2} \quad (70.1),$$

$$\vec{v}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_{10} + (m_2 - m_1)\vec{v}_{20}}{m_1 + m_2} \quad (70.2).$$

Абсолютно неупругим ударом называют такой удар, при котором выполняются только закон сохранения импульса, а закон сохранения полной механической энергии нарушается. Нарушение закона сохранения полной механической энергии связано с тем, что вследствие деформации тел часть энергии превращается во внутреннюю (тепловую). Неупругий удар может приводить к образованию новых тел или из нескольких тел образуется одно.

Конечная скорость **при неупругом соударении** двух тел можно вычислить по формуле:

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20}}{m_1 + m_2} \quad (71).$$

Формула (71) получена из закона сохранения импульса для неупругого удара.

Центральным ударом называют удар, при котором тела (например, однородные шары) до удара движутся вдоль прямой, соединяющей их центры масс (геометрические центры).

7. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Рассмотрим еще одну величину, которая сохраняется в замкнутых системах - **момент количества движения** (момент импульса). Эта величина связана с **изотропией физического пространства**. Она определяет способность всякого тела к вращению относительно оси или некоторого центра. Пусть точка М совершает поворот относительно центра вращения О (рис. 12).

Проведем радиус-вектор \vec{r} от точки О к М. Точка М, при этом, обладает импульсом \vec{p} , вектор которого проведен из точки М и составляет угол α с радиус-вектором. В этом случае момент количества движения (момент импульса) можно определить соотношением:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] \quad (72.1)$$

Из соотношения (72.1) видно, что момент импульса это вектор, перпендикулярный плоскости векторов \vec{r} и \vec{p} , направление которого можно определить по **правилу буравчика**: вращающаяся часть буравчика направляют по импульсу, а его поступательная часть движется по направлению вектора \vec{L} . Площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{r} и \vec{p} , равна модулю вектора \vec{L} (рис. 13).

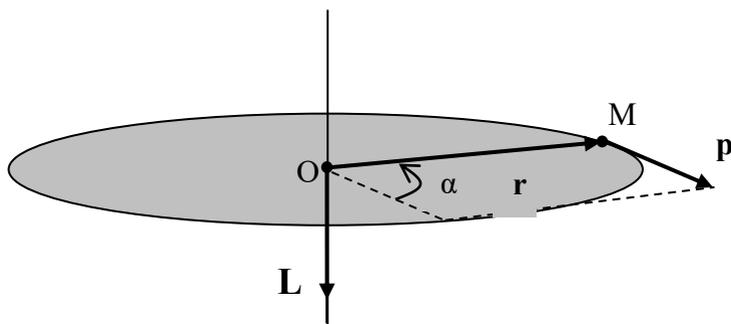


Рис. 12

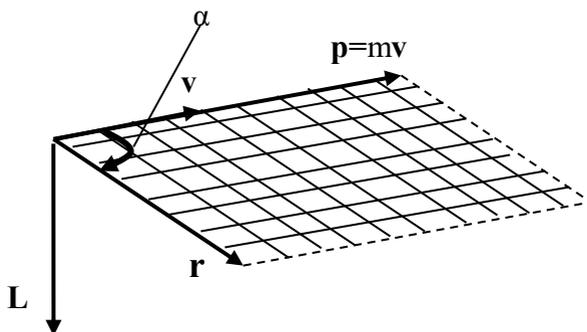


Рис. 13

Если через центр вращения провести некоторую ось, то моментом импульса относительно этой оси (OZ), проведенной через центр вращения, будет являться проекция момента импульса (72) на эту ось:

$$L_z = [\vec{r} \cdot \vec{p}]_z \quad (72.2)$$

При равномерном вращении момент импульса тела не изменяется. Поэтому в замкнутой системе тел **закон сохранения момента импульса** можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i] = \vec{L} = const \quad (73)$$

Согласно формуле (73) полный момент импульса системы относительно центра вращения является величиной постоянной при любых взаимодействиях и движениях тел и равен векторной сумме моментов импульса всех тел, образующих замкнутую систему, в каждый момент времени. Аналогичный результат получается для проекции на неподвижную ось вращения:

$$\sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i]_z = L_z = const \quad (74)$$

Таким образом, в механике действуют три универсальных закона сохранения физических величин, которые являются аддитивными и образуют аддитивные интегралы движения.

Закон изменения момента импульса выполняется для не замкнутой системы тел, когда на нее действует внешняя вращающая сила (это сила, которая вызывает неравномерное вращение системы жестко связанных тел). Этот закон в дифференциальной форме имеет вид:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (75),$$

В соотношении (75) \vec{M} - момент вращающей силы \vec{F} относительно центра вращения (точки O), который определяется по формуле:

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}] \quad (76.1)$$

Он определяет способность этой силы приводить тело или систему тел в неравномерное вращение (при равномерном вращении по окружности момент импульса постояен, момент силы равен нулю). Направление вектора \vec{M} можно определить по правилу буравчика, как и направление \vec{L} (рис. 14).

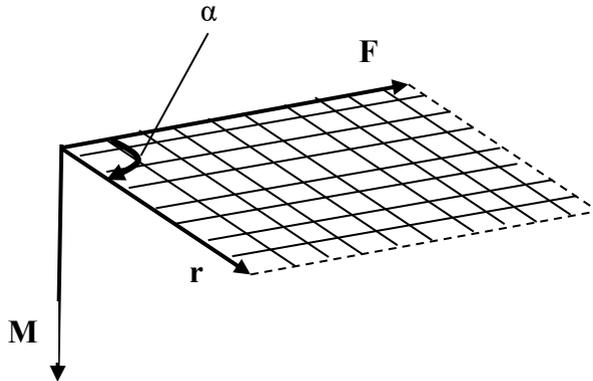


Рис. 14

Момент вращающей силы относительно оси OZ, проходящей через точку O есть проекция момента силы относительно этой точки на данную ось:

$$M_z = \left[\vec{r} \cdot \vec{F} \right]_z. \quad (76.2)$$

В случае если на систему тел действовала постоянная вращающая сила в течение времени t , то соотношение (76) можно переписать в виде:

$$\vec{M} \cdot t = \vec{L} - \vec{L}_0 \quad (77),$$

где \vec{L} и \vec{L}_0 - конечный и начальный полные моменты системы.

Формула (77) есть математическая форма записи **закона изменения момента импульса**.

В динамике абсолютно твердого тела вместо массы, используется скалярная физическая величина, которую называют **момент инерции тела I** . Как и масса, она является мерой инертности тела и обладает свойством аддитивности. Момент инерции тела характеризует распределение его массы относительно оси или центра вращения. Поэтому численное значение момента инерции зависит от выбора оси вращения тела. Если тело можно считать материальной точкой, то момент инерции его относительно некоторой оси, не проходящей через тело, определяется соотношением:

$$I = mr^2 \quad (78)$$

где r - расстояние от точки до оси вращения, m - инертная масса материальной точки.

Если тело нельзя представить в виде материальной точки, то его мысленно разбивают на элементарные массы (предельно малые элементы) и находят момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр масс по формуле:

$$I = \sum_{\alpha=1}^N I_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} r_{\alpha}^2 \quad (79),$$

где α - номер элементарной массы, на которые мысленно разбивается тело; r_α - радиус-вектор проведенный от данной элементарной массы до центра вращения.

В случае однородного тела момент инерции, проходящий через центр масс можно определить по формуле:

$$I = \int_V \rho \cdot r^2 dV \quad (80),$$

где ρ - плотность тела, а V - его объем.

По формуле (80) можно вычислить моменты инерции некоторых однородных тел относительно осей, проходящих через их центр масс и являющихся осями симметрии:

Момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости диска:

$$I = \frac{mR_0^2}{2} \quad (81.1)$$

где R_0 - радиус диска. Соотношение (81.1) также является моментом инерции цилиндра при любом отношении его высоты к радиусу R_0 .

Момент инерции диска относительно оси, совпадающей с диаметром диска $D = 2R_0$:

$$I = \frac{mR_0^2}{4} \quad (81.2)$$

Момент инерции шара радиуса R :

$$I = \frac{2mR^2}{5} \quad (81.3)$$

Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр:

$$I = \frac{ml^2}{12} \quad (81.4)$$

где l - длина стержня.

Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец:

$$I = \frac{ml^2}{3} \quad (81.5)$$

Если ось вращения проходит через центр масс тела и сохраняет свое направление в пространстве при вращении относительно нее тела, то ее называют **свободной осью**. Три взаимно-перпендикулярные свободные оси, которые являются осями симметрии, называют **главными осями инерции**.

Вращение будет **устойчивым** только относительно тех главных осей, **моменты инерции** которых является **минимальными** или **максимальными** по численному значению **в отсутствии** **какого-либо воздействия**.

При наличии **внешнего воздействия** **устойчивым** будет только вращение тела относительно той главной оси, у которой **момент инерции** имеет **максимальное значение**. Так, например, диск будет вращаться относительно оси инерции, которая перпендикулярна его плоскости и проходит через его центр вращения, стержень – относительно оси инерции, которая проходит через центр масс и является перпендикулярной стержню.

Все тела, совершающие вращение относительно различных главных осей инерции, называют волчками. Среди однородных тел выделяют три вида волчков, в зависимости от их симметрии и значений моментов инерций относительно главных осей: шаровой волчок, симметричный и антисимметричный волчки. При равных главных моментах инерции однородное тело будет является **шаровым волчком**. Примерами шаровых волчков являются шар, куб, через центры граней которого проведены три взаимно-перпендикулярные оси.

При наличии осевой симметрии у однородного тела, при которой два главных момента инерции одинаковы, оно является **симметричным волчком**. К симметричным волчкам относятся такие однородные тела как прямой конус, цилиндр и т. д.

Однородное тело, у которого все три главных момента различны рассматривается как **асимметричный волчок**. Асимметричным волчком является, например, прямоугольный параллелепипед.

Если ось вращения не проходит через центр масс твердого тела, то его момент инерции (см. рис. 15) можно рассчитать по **теореме Штейнера**: момент инерции I , относительно оси, не проходящей через центр масс, равен сумме момента инерции I_c относительно воображаемой оси, проходящей через центр масс параллельно данной оси и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями. **Теорема Штейнера** в математической форме имеет вид:

$$I = I_c + md^2 \quad (82)$$

Момент инерции относительно воображаемой оси, проходящей через центр масс можно рассчитать с помощью формул (80) для непрерывных тел или с помощью (79) для любых тел. Для однородных тел плотность материала из которого изготовлено тело является величиной постоянной и ее можно вынести за знак интеграла.

Материальная точка, в силу определения может совершать только **поступательное движение**. Движение всякого твердого тела является более сложным. **Абсолютно твердым телом** называют тело, расстояние между любыми двумя точками которого остается неизменными при любых его движениях и взаимодействиях.

Аналогом второго закона Ньютона в динамике абсолютно твердого тела является основной закон динамики вращательного движения. Результирующая сила и линейное ускорение в нем заменяются соответственно на результирующий момент вращающей силы и угловое ускорение, а масса на момент инерции, который также характеризует инертность тела при вращении. Получим основной закон динамики вращательного движения,

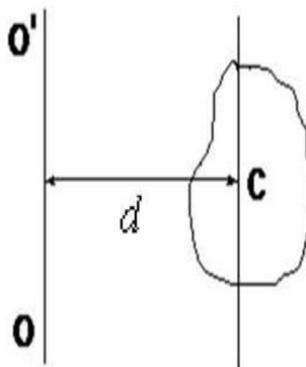


Рис. 15

используя метод математической индукции. Для этого представим тело состоящим из N элементарных масс.

Момент вращающей силы, действующей на элементарную массу тела, описывается соотношением:

$$\vec{M}_\alpha = [\vec{r}_\alpha \cdot \vec{F}_\alpha] \quad (83)$$

где $\vec{F}_\alpha = m_\alpha \vec{a}_{\alpha\tau} = m_\alpha [\vec{\beta} \cdot \vec{r}_\alpha]$ - это вращающая сила, действующая на каждую элементарную массу; $\vec{\beta}$ - это угловое ускорение каждой элементарной массы твердого тела. Из соотношения (83) получаем:

$$\vec{M}_\alpha = m_\alpha [\vec{r}_\alpha \cdot [\vec{\beta} \cdot \vec{r}_\alpha]] \quad (84),$$

где двойное векторное произведение можно представить в виде:

$$[\vec{r}_\alpha \cdot [\vec{\beta} \cdot \vec{r}_\alpha]] = [\vec{\beta} \cdot (\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha)] + [\vec{r}_\alpha \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{r}_\alpha)].$$

Если $\vec{\beta} \perp \vec{r}_\alpha$, то второе слагаемое в последнем выражении равно нулю и соотношение (84) можно записать как:

$$\vec{M}_\alpha = m_\alpha r_\alpha^2 \vec{\beta} \quad (85)$$

Просуммировав по всем элементарным массам и учитывая аддитивность момента инерции (79) получаем полный момент силы, действующий на твердое тело, относительно неподвижной оси:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\beta} \quad (86).$$

Соотношение (86) представляет собой основной закон динамики вращательного движения. **Основной закон динамики вращательного движения** связывает суммарный момент внешних сил \vec{M} , действующих на абсолютно твердое тело, с угловым ускорением. Они связаны через момент инерции тела относительно заданной оси вращения. **В векторной форме** этот закон выпол-

няется только при вращении тела **относительно главных осей инерции**. **Проекция суммарного момента внешних сил на ось M_z** , совпадающую с реальной фиксированной осью вращения, равна произведению момента инерции относительно этой оси на величину углового ускорения. Это утверждение выполняется относительно любых осей и тел. В математической форме оно имеет вид:

$$M_z = I \cdot \beta \quad (87)$$

Основной закон динамики вращательного движения является аналогом второго закона Ньютона. Учитывая соотношение (75) и определение мгновенного углового ускорения, можно перейти от моментов сил в (86) и (87) к моментам импульса.

Проекция момента импульса на ось OZ - L_z , совпадающую с некоторой фиксированной осью вращения, проходящей через твердое тело равна произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость, которая совпадает с этой осью. Это справедливо для любого тела. **Проекция момента импульса тела на направление фиксированной оси вращения определяется соотношением:**

$$L_z = I \cdot \omega \quad (88)$$

Вектор момент импульса \vec{L} равен произведению момента инерции тела относительно некоторой оси вращения на вектор угловой скорости. Это утверждение верно лишь в случае, когда тело вращается вокруг оси симметрии или несимметричное тело вращается относительно одной из главных осей инерции. **Момент импульса тела в векторной форме имеет вид:**

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad (89)$$

В динамике абсолютно твердого тела существуют свои формулы, используемые для расчета кинетической энергии и работы. Они могут быть получены из известных соотношений для поступательного движения материальной точки при замене линейных величин на угловые.

В этом случае кинетическая энергия абсолютно твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси определяется соотношением:

$$T_{ep} = \frac{I\omega^2}{2} \quad (90)$$

Соотношение (90) можно получить из формулы для кинетической энергии материальной точки, разбив мысленно вращающееся тело на элементарные массы и заменив линейные величины на угловые.

Механическая работа внешних сил при вращательном движении абсолютно твердого тела обусловлена его поворотом, если вектор угла поворота не перпендикулярен моменту внешних сил. **Элементарная работа суммарного момента внешних сил** имеет вид:

$$dA = (\vec{\omega}, \vec{M}) dt = M_{\omega} d\varphi \quad (91)$$

Формула для элементарной механической работы внешних вращающих сил над абсолютно твердым телом, может быть получена из формулы для элементарной работы, совершаемой над материальной точкой при использовании тех же методов, которые используются для получения формулы кинетической энергии абсолютно твердого тела.

Общий вид соотношений для кинематических и динамических величин в динамике поступательного и вращательного движения имеет некоторое сходство (Приложение 1)

Любое движение твердого тела может быть представлено как наложение простейших видов механического движения - **поступательного и вращательного**. В зависимости от взаимного направления линейной скорости поступательного движения и угловой скорости выделяют два типа сложного движения твердого тела: **плоское и неплоское**.

Плоское – это такое движение, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. В случае плоского движения скорость поступательного движения всех точек \vec{v}_0 одинакова и перпендикулярна угловой скорости $\vec{\omega}$. Поэтому **плоское**

движение можно рассматривать как **ряд последовательных элементарных вращений** относительно **мгновенных осей**.

Мгновенная ось вращения – это ось, относительно которой тело совершает элементарный поворот в данный момент времени.

В случае **неплоского движения** элементарное перемещение тела можно представить как поворот относительно мгновенной оси только в том случае, если $\vec{\omega} \perp \vec{v}_0$. Когда указанное условие не выполняется, то всякое элементарное перемещение есть наложение двух движений в каждый момент времени: вращения относительно этой оси и поступательного вдоль нее.

Центр масс тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу сил.

Кинетическая энергия тела при плоском движении складывается из энергии поступательного движения, со скоростью равной скорости центра масс \vec{v}_c , и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс тела.

Кинетическая энергия тела при плоском движении имеет вид:

$$T = \frac{I_c \omega^2}{2} + \frac{m v_c^2}{2} \quad (92)$$

где v_c - скорость центра масс тела, а I_c - момент инерции относительно оси проходящей через центр масс.

Центр масс – это точка, в которой сосредоточена вся масса тела. Ее положение определяется с помощью радиус вектора

центра масс: $\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$, где m_i - i -я элементарная масса, на кото-

рые мысленно разбивается твердое тело, \vec{r}_i - радиус – вектор этой массы.

8. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ. ПРИВЕДЕННАЯ МАССА СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ

Особый интерес также представляет **движение тела (частицы) в центральном поле сил**. Такое движение совершают, например, электроны в атоме, планеты по своим орбитам и т.д.

Как известно, центральные силы всегда направлены вдоль радиус-вектора, соединяющего центр взаимодействия с телом (частицей). То есть центральные силы являются радиальными. Следовательно, **момент этих сил должен быть равен нулю**. Это означает, что **момент импульса**, согласно закону сохранения, должен быть **постоянным**. При движении тела в центральном поле сил радиус-вектор и импульс лежат в одной плоскости и тело (частица) совершает в этой плоскости движение. Это **движение является плоским**. Вектор момента импульса при этом перпендикулярен плоскости движения и не изменяется в течение времени и определяется соотношением:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = const \quad (93)$$

Соотношение (93) можно представить в виде:

$$\vec{L} = m[\vec{r}, \vec{v}] \quad (94)$$

В полярной системе координат вектор скорости на плоскости траектории можно представить в общем случае как векторную сумму радиальной и перпендикулярной ей полярной составляющей:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi \quad (95)$$

Подставим (95) в (94) и получим:

$$\vec{L} = m[\vec{r}, \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi] = m[\vec{r}, \vec{v}_r] + m[\vec{r}, \vec{v}_\varphi] \quad (96)$$

Первое слагаемое в (81) равно нулю, так как вектора в данном векторном произведении сонаправлены. Во втором произведении они взаимно перпендикулярны. Следовательно, дают результирующий вектор, направленный вдоль оси OZ:

$$\vec{L} = m[\vec{r}, \vec{v}_\varphi]$$

$$L_z = mr^2\omega = mr^2\dot{\varphi} \quad (97)$$

Помимо момента импульса при движении в центральном поле сил выполняется и **закон сохранения энергии**, и **закон сохранения секторальной скорости**. Секторальной скоростью называют скалярную величину равную площади, заметаемой радиус-вектором, за единицу времени на плоскости траектории тела при его перемещении в центральном поле сил. Она определяется соотношением:

$$dS = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}]dt = \frac{1}{2 \cdot m}[[\vec{r}, \vec{p}]]dt = \frac{L}{2 \cdot m}dt \quad (98)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}[[\vec{r}, \vec{v}]] = \frac{L}{2 \cdot m} = const \quad (99)$$

Полная энергия частицы есть сумма кинетической и потенциальной в соответствующем поле сил. Найдем кинетическую энергию:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\vec{v}_r + \vec{v}_\varphi)^2}{2} = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_\varphi^2}{2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} \quad (100),$$

где $(\vec{v}_r, \vec{v}_\varphi) = 0$ - так как векторы взаимно перпендикулярны.

Центральные силы являются потенциальными. Следовательно, для них должно выполняться условие потенциальности:

$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} \quad (101)$$

Следовательно, имеем:

$$U(r) = -\int F(r)dr \quad (102)$$

Часто центральные силы обратно пропорциональны квадрату расстояния и на больших расстояниях стремятся к нулю. Их можно задать общим уравнением:

$$F(r) = \frac{\alpha}{r^2} \quad (103),$$

где α - константа взаимодействия.

Подставим (103) в (102) и получим:

$$U(r) = -\int \frac{\alpha}{r^2} dr = \frac{\alpha}{r} + C \quad (104),$$

где C - постоянная интегрирования, которая определяется из условия, что потенциальная энергия на бесконечности стремиться к нулю. Это означает, что и константа $C=0$ и (104) примет окончательный вид:

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} \quad (105)$$

Тогда полная энергия будет равна:

$$E = U + T = \frac{mr^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\alpha}{r} = const \quad (106)$$

Из уравнений (97) и (106) можно составить систему дифференциальных уравнений для энергии и импульса частицы в центральном поле сил с учетом выполнения для них законов сохранения. Эта система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} mr^2\dot{\varphi} = L_z = const \\ mr^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{2\alpha}{r} = 2E = const \end{cases} \quad (107)$$

Знак константы взаимодействия α указывает на характер силы. Если $\alpha < 0$ - то имеет место силы притяжения, при $\alpha > 0$

действуют силы отталкивания; $\dot{\phi}$ - мгновенная угловая скорость; \dot{r} - мгновенная линейная скорость; r - расстояние от центра поля (притяжения или отталкивания) до частицы в поле центральных сил.

Решение системы дифференциальных уравнений (107) приводит к следующим траекториям для частиц:

1. при наличии сил **отталкивания** ($\alpha > 0$) траекторией частицы может являться только **гипербола**, а **полная энергия всегда больше нуля**;

2. в случае **притяжения** ($\alpha < 0$) частицы к центру взаимодействия, вид траектории определяется **знаком полной энергии E** (рис. 16). Если кинетическая энергия больше по модулю потенциальной, то $E > 0$ и траекторией частицы является **гипербола**; если потенциальная энергия больше по модулю кинетической, то $E < 0$ и траекторией будет **эллипс** (в частном случае - **окружность**); при равенстве потенциально и кинетической энергии $E = 0$ и траекторией будет **парабола**.

Движение по гиперболе и параболе является **инфинитным** (бесконечным), а по эллипсу или окружности - **финитным** (конечным).

Важную роль в физике также играет **задача двух тел**. Система двух тел является замкнутой, поэтому они могут взаимодействовать только друг с другом. Задача двух тел сводится к задаче о движении одной частицы в центральном поле сил. Под частицей, в этом случае, понимают **центр масс системы двух тел**, масса которой равна **приведенной массе** этих тел:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (108)$$

Обе частицы движутся относительно центра масс по подобным траекториям, причем прямая, соединяющая частицы все время проходит через него.

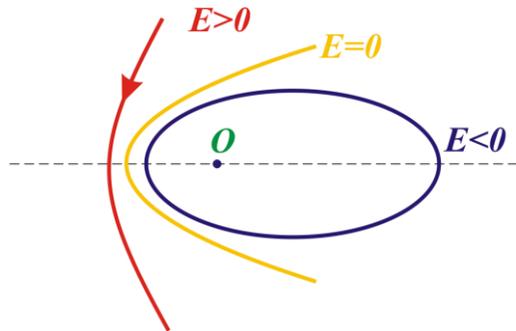


Рис. 16

9. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ И ЛОРЕНЦА. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

Нерелятивистской (классической, ньютоновской) механикой называют механику, которая изучает движение тел со скоростями намного меньшими скорости света. При анализе движения любого объекта необходимо выбрать наиболее удобную систему отсчета. Рассмотрим, как можно перейти от одной инерциальной системы отсчета к другой. Пусть имеются две инерциальные системы отсчета (ИСО) K и K' , соответствующие оси которых параллельны. Система K при этом неподвижна, а K' - движется прямолинейно и поступательно относительно K вдоль оси OX со скоростью V_0 (см. рис. 17).

Тогда точка P в системе K имеет координаты $P(x, y, z)$, а в K' - $P(x', y', z')$. Свяжем эти координаты друг с другом, учитывая, что физическое пространство является трехмерным евклидовым и к нему применима соответствующая геометрия:

$$\begin{cases} x = x' + v_0 t' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (109),$$

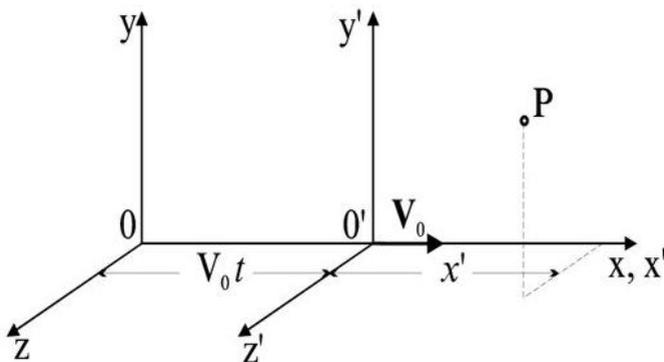


Рис. 17

Тогда обратное ему преобразование будет иметь вид:

$$\begin{cases} x' = x - v_0 t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (110)$$

Преобразования координат (109) и (110) в физике называют преобразованием Галилея. Из этих преобразований легко получить закон сложения скоростей в классической механике. Для этого нужно продифференцировать все уравнения системы (109) по времени. В результате получим:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v_0 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v'_x + v_0 \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases} \quad (111)$$

Из системы (111) легко получить закон сложения скоростей в векторной форме:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \quad (112)$$

Используя преобразования Галилея легко можно доказать инвариантность (одинаковость) длин, промежутков времени, ускорений в классической механике. Для примера докажем инвариантность ускорений, а, следовательно, и результирующего воздействия в различных ИСО.

Продифференцируем соотношение (112) по времени еще раз и учтем, что скорость $v_0 = const$:

$$\begin{cases} a_x = a'_x \\ a_y = a'_y \\ a_z = a'_z \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}' \quad (113)$$

Соотношение (113) представляет собой математическую форму записи принципа относительности Галилея в классической механике. Этот принцип относительности показывает, что все механические явления и процессы протекают совершенно одинаково в различных инерциальных системах отсчета. Из данного принципа можно сделать вывод, что все физические уравнения, которые описывают различные процессы и явления в природе, не изменяют своего вида относительно преобразования координат и времени в инерциальных системах отсчета, то есть инвариантны к этим преобразованиям.

Преобразования Галилея не могут быть использованы для объектов, которые движутся со скоростями соизмеримыми со скоростью света (релятивистских объектов). В частности, не выполняется закон сложения скоростей. Согласно этому закону при векторном сложении по формуле (112) релятивистских скоростей может получиться скорость большая скорости света, что будет противоречить экспериментальным данным.

Чтобы учесть ограничение по скорости света для релятивистских объектов в преобразованиях координат и времени, Эйнштейн ввел два постулата, которые легли в основу специальной теории относительности:

1. Принцип постоянства скорости света: скорость света в вакууме одинакова во всех ИСО и не зависит от движения источников и приемников света.

2. Принцип относительности Эйнштейна: все законы природы одинаковы во всех ИСО, а уравнения, выражающие эти законы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени при переходе от одной ИСО к другой.

Таким образом, принцип относительности Эйнштейна по сравнению с принципом относительности Галилея является наиболее общим и относится ко всем физическим явлениям и процессам и ко всем объектам (релятивистским и нерелятивистским). Этот принцип в совокупности с принципом постоянства скорости света приводит к понятию **четырёхмерного пространства**, в котором физическое время и пространство взаимосвязаны. В классической механике время и пространство являются абсолютными и не выражаются друг через друга, что видно из прямых и обратных преобразований Галилея (109) и (110). В четырёхмерном пространстве **событию** отвечает точка с координатами $(x, y, z, c \cdot t)$.

Такую **точку** называют **мировой**. Объекту же в четырехмерном пространстве соответствует **мировая линия**. Даже если объект неподвижен в обычном трехмерном пространстве, в четырехмерном пространстве ему соответствует линия параллельная оси $c \cdot t$. Четырехмерное пространство называют пространством Минковского, оно является псевдоевклидовым и квадрат расстояния между двумя точками в нем задается по формуле:

$$\Delta s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \quad (114)$$

Расстояние между двумя событиями в релятивистской механике называют **интервалом**. Он является одним из важных физических инвариантов в релятивистской механике и отражает взаимосвязанность между физическим пространством и временем. Физическим **инвариантом** называют неизменность основных соотношений для физических величин при переходе от одной инерциальной системе отсчета к другой.

В релятивистской механике выделяют два типа интервалов **времени-** и **пространственноподобные**. Тип интервала определяется знаком выражения (114). Охарактеризуем в целом каждый из таких интервалов:

Интервал является вещественным в случае, когда $\Delta s^2 > 0$. Как видно из соотношения (114), может существовать предельный случай, когда начальное и конечное события оказываются пространственно совмещенными ($x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$). Тогда события разделены времениподобным интервалом. Поэтому, все вещественные события называют **времениподобными** и являются причинно связанными друг с другом. К ним относятся, например, события, происходящие с одной и той же частицей (объектом).

Если выполняется условие $\Delta s^2 < 0$, то релятивистский интервал является **мнимым**. В этом случае, согласно (114), может существовать предельный случай, когда оба события оказываются совмещенными по времени ($t_1=t_2$). Тогда события разделены пространственноподобным интервалом. Поэтому, все мнимые события называют **пространственноподобными**. К ним можно отнести события, которые не оказывают влияние друг на друга, то есть не являются причинно связанными.

Преобразования координат в релятивистской механике в предельном случае ($v \ll c$) должны сводиться к преобразованиям Галилея. Для того, чтобы получить искомые преобразования координат в релятивистской механике нужно исходить из свойств однородности физического пространства и времени. Это означает, что искомые уравнения должны являться линейными по этим величинам, например:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + \alpha_4 t' + \alpha_5 \text{ и т.д.}$$

После ряда несложных математических операций, основанных на физических законах и при определенном выборе ориентации координатных осей (рис 17), Лоренцем были получены следующие прямые и обратные **преобразования для координат и времени в релятивистской механике** (случай движения системы отсчета K' в направлении оси OX):

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{v_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} \end{array} \right. \quad (115);$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} \end{array} \right. \quad (116)$$

Закон сложения скоростей может быть получен при дифференцировании соотношений (115) и (116) по времени в соответствующей системе отсчета, как и в классической механике. В координатном представлении он будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2}} \\ v_{y,z} = \frac{v'_{y,z} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_0 v'_x}{c^2}} \end{array} \right. \quad (117)$$

Для получения обратных преобразований необходимо в (117) заменить знак у v_0 на противоположный.

Очень важное значение при описании движения тел со скоростями соизмеримыми со скоростью света играют **следствия** из преобразований Лоренца.

1. Одновременность событий в разных системах отсчета.

Пусть в системе К в различных точках пространства по оси ОХ происходят одновременно ($t_1 = t_2 = t$) два события (не связанных причинно). Следовательно, в инерциальной системе К' этим событиям соответствуют моменты времени:

$$t'_1 = \frac{t - (v_0/c^2)x_1}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} \quad \text{и} \quad t'_2 = \frac{t - (v_0/c^2)x_2}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}.$$

Из данных соотношений видно, что если эти события в К пространственно разделены ($x_1 \neq x_2$), то они не могут являться одновременными в К' ($t'_1 \neq t'_2$).

2. Лоренцево сокращение длины.

Пусть некий стержень расположен вдоль оси ОХ и в некоторый момент времени ($t_1 = t_2 = t$) в системе К было зафиксировано положение его концов (x_1, x_2). Тогда, его концы в движущейся с ним инерциальной системе отсчета К' будут иметь координаты:

$$x'_1 = \frac{x_1 - v_0 t}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} \quad \text{и} \quad x'_2 = \frac{x_2 - v_0 t}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}.$$

Отсюда, при $x_2 - x_1 = l$ и $x'_2 - x'_1 = l_0$, получаем:

$$l = l_0 \sqrt{1 - (v_0/c)^2} \quad (118),$$

где l_0 -собственная длина стержня (длина стержня в системе отсчета относительно которой он неподвижен (K')), а l - длина в движущейся относительно тела системе отсчета K .

3. Релятивистское увеличение промежутков времени.

Пусть в одной и той же точке системы K' происходят в одной и той же точке пространства два события ($x'_1 = x'_2 = x'$) в различные моменты времени. Тогда в системе K это время тоже будет разным в соответствии с преобразованиями Лоренца:

$$t_1 = \frac{t'_1 + (v_0/c^2)x'}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{t'_2 + (v_0/c^2)x'}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}.$$

Тогда, обозначив промежутки времени в обеих системах как: $t_2 - t_1 = \Delta t$ и $t'_2 - t'_1 = \Delta \tau$, получим:

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} \quad (119),$$

где $\Delta \tau$ - собственное время в системе K' , а Δt - время в движущейся относительно объекта системе K .

В релятивистской механике в связи с действующими постулатами видоизменяются практически все соотношения, имеющие место в классической механике, таким образом, чтобы сохранялась их инвариантность относительно преобразований Лоренца. Так, например, второй закон Ньютона выполняется только в дифференциальной форме (27). Соотношение (25) не будет выполняться из-за особенностей четырехмерного пространства Минковского. При переходе к рассмотрению релятивистских объектов изменятся известные соотношения для импульса и энергии. Так релятивистское соотношение для импульса в векторной форме будет иметь вид:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} \quad (120),$$

где \vec{v} - скорость частицы, а m - ее масса.

В релятивистской механике появляется понятие **энергии покоя** частицы. Она пропорциональна ее массе и определяется соотношением, полученным Эйнштейном:

$$E_0 = mc^2 \quad (121).$$

Такая энергия представляет собой внутреннюю энергию частицы (объекта). **Полная энергия** частицы в отсутствии поля внешних потенциальных сил есть сумма ее кинетической энергии и энергии покоя и равна:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} \quad (122).$$

Отсюда легко можно определить релятивистское выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} - mc^2 \quad (123).$$

При классических скоростях движения соотношение (123) можно легко привести к ньютоновскому выражению для кинетической энергии.

Из выражений для полной энергии и импульса можно образовать инвариант **энергии-импульса** относительно преобразований Лоренца. Этот инвариант будет иметь следующий вид:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 = inv \quad (124).$$

Следует отметить, что инвариантность этой величины подтверждена экспериментально при проведении опытов над быстрыми частицами.

10. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Колебательное движение - это такое движение, при котором тело, выведенное из положения устойчивого равновесия, стремится вернуться в него, совершая относительно этого положения периодическое движение под действием внутренней возвратной силы. Колебания делятся на **свободные, вынужденные и параметрические** по способам воздействия на систему, которые приводят к ее отклонению от положения устойчивого равновесия. Кроме того, колебания могут быть **затухающими, незатухающими и резонансными** в зависимости от того как их амплитуда изменяется со временем. В общем курсе физики в основном изучают **малые колебания**, которые являются **гармоническими** и описываются простейшими тригонометрическими законами.

Малые колебания представляют собой такие колебания, при которых углы отклонения или величины смещений колебательной системы, от положения устойчивого равновесия достаточно малы по сравнению с параметрами самой системы.

Для изучения колебательного движения в основном используют три модели: пружинный, математический и физический маятники. **Пружинный маятник** представляет собой вертикально подвешенную растянутую пружину с коэффициентом жесткости k и массой m . **Математический маятник** есть точечное тело, подвешенное на невесомой длиной нити с длиной l . **Физический маятник** – это любое твердое тело, находящееся на горизонтальной оси не проходящей через его центр тяжести.

Можно установить связь между периодом математического и физического маятников с помощью понятия приведенной длины. **Приведенной длиной** физического маятника называют длину такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника. Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется **центром качания** физического маятника. **Точка подвеса** и **центр качания** обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания.

Уравнение колебательного движения можно получить исходя из модели пружинного маятника (см рис. 18).

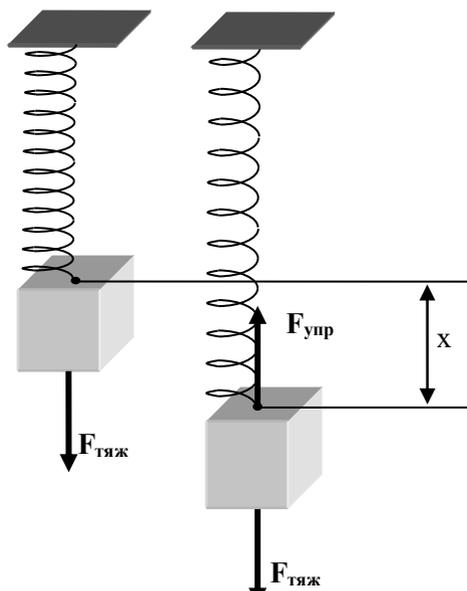


Рис. 18

Колебания такого маятника происходят из-за того, что силы упругости и тяжести, действующие на пружину, не скомпенсированы. Так как сила тяжести постоянна и зависит только от массы тела, то причиной колебания является изменение силы упругости.

Поэтому **второй закон Ньютона для колебательного движения** можно записать:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (125),$$

где x - смещение тела относительно положения равновесия, $\frac{d^2 x}{dt^2}$ - ускорение. Исходя из (125) получаем дифференциальное уравнение II-го порядка:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (126),$$

где $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, ω_0 - собственная циклическая частота колебаний идеальной системы. Решение уравнения (126) будет иметь вид:

$$x = A \sin (\omega_0 t + \varphi) \quad (127),$$

где A – **амплитуда** колебания, которая характеризует максимальное отклонение тела от положения равновесия, $\omega_0 t + \varphi$ - **фаза колебания**, определяющая положение тела в любой момент времени, φ - **начальная фаза колебания** равная отклонению тела от положения равновесия, зафиксированное в начальный момент времени.

Циклическая частота колебаний равная числу колебаний за 2π секунды связана с нормальной частотой ν по формуле:

$$\omega_0 = 2\pi\nu \quad (128),$$

где **нормальная частота колебаний** – это число полных колебаний в единицу времени. Эта величина связана с периодом T :

$\nu = \frac{1}{T}$. **Период** – это время, за которое совершается одно полное колебание.

Найдем **скорость** и **ускорение** маятника в любой момент времени:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (129)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi + \pi) \quad (130)$$

Из соотношений (127), (129), (130) видно, что в положении равновесия при начальной фазе $\varphi = 0$ скорость колеблющегося тела является максимальной, а ускорение равно нулю. В положении максимального отклонения, при такой же начальной фазе, скорость равна нулю (тело останавливается), а ускорение имеет максимальное значение. Причем оно направлено против смещения, так как причиной его возникновения является возвратная сила, роль которой для пружинного маятника играет сила упругости (рис. 19).

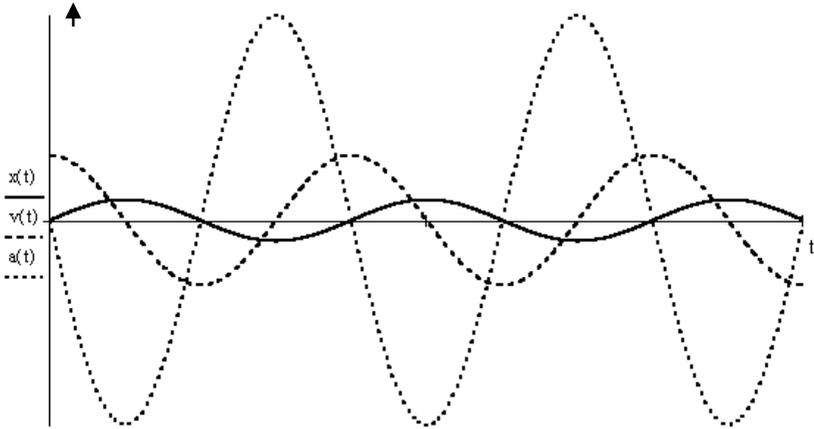


Рис. 19

Полную механическую энергию колебательного движения можно представить как сумму кинетической и потенциальной энергии упругой силы в отсутствие затухания. Эта энергия должна оставаться неизменной так как в идеальной системе нет затухания, вызванного трением (нет диссипации энергии).

Кинетическая энергия по определению равна:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} \quad (131),$$

а потенциальная энергия:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} \quad (132),$$

Учитывая, что $k = m\omega_0^2$ соотношение (132) можно переписать в виде:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} \quad (133).$$

По закону сохранения полной механической энергии: $E = T + U = const$, следовательно:

$$E = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = const \quad (134).$$

Это справедливо, так как амплитуда незатухающего колебания и частота постоянны во времени. Таким образом, полная механическая энергия колебательного движения зависит только от квадрата частоты колебания, квадрата его амплитуды и массы колеблющегося тела.

Если колебательная система является идеальной, то ее колебания являются **незатухающими**. Это означает, что их амплитуда не изменяется с течением времени. Если амплитуда с течением времени убывает, то колебание является **затухающим**. В случае свободных колебаний затухание является экспоненциальным и обусловлено наличием сил вязкого трения, окружающей колебательный источник, среды: $F_{\text{вяз.тр.}} = -2b \frac{dx}{dt}$. Уравнением движения свободных затухающих колебаний является уравнение:

$$F = F_{\text{вяз.тр.}} + F_{\text{упр.}}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -2b \frac{dx}{dt} - kx \quad (135)$$

Уравнение (120) - дифференциальное уравнение II го порядка:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (136),$$

где $\gamma = \frac{b}{m}$, b - коэффициент вязкого трения. Решением уравнения (136) является решение вида:

$$x = A \exp(-\gamma t) \sin(\omega t + \varphi) \quad (137).$$

Частота затухающих колебаний уменьшается по отношению к собственной частоте колебания на величину параметра затухания системы и определяется соотношением:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (138)$$

Амплитудой колебания в данном случае является:

$$B = A \exp(-\gamma t) \quad (139)$$

Графическая зависимость амплитуды от времени представлена на рис. 20.

Период затухающих колебаний, также и как их амплитуда, зависит от параметра затухания и определяется соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (140).$$

Как видно из (140) период увеличивается по сравнению с собственным периодом из-за затухания колебаний.

В технике для характеристики затухающих колебаний используют такие понятия как декремент затухания, логарифмический декремент затухания и добротность колебательной системы.

Декремент затухания есть отношение амплитуд затухающего колебания, соответствующих моментам времени, отличающимся на период колебания. Он определяется следующим соотношением:

$$e^{\gamma T} = \frac{B(t)}{B(t+T)} \quad (141)$$

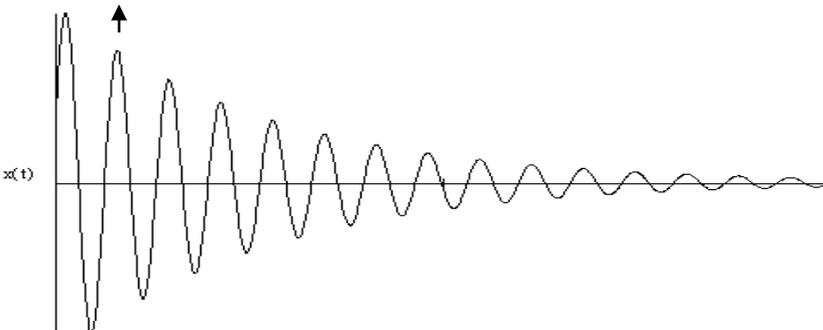


Рис. 20

При расчетах колебательных систем удобнее использовать **логарифмический декремент затухания**, который можно рассчитать по формуле:

$$\lambda = \ln \frac{B(t)}{B(t+T)} = \gamma T \quad (142)$$

Добротность колебательной системы пропорциональна числу колебаний системы за время, в течение которого амплитуда уменьшится в e раз. Добротность является величиной обратной **декременту затухания** и может быть найдена по формуле:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e \quad (143)$$

Колебания бывают свободными и вынужденными.

Свободными называют такие колебания, которые после внешнего кратковременного воздействия, вызвавшего начальное отклонение тела, продолжают под действием внутренней возвратной силы, имеющей упругую природу. Такие колебания в реальных условиях являются затухающими. Эти колебания происходят с частотой ω , определяемой соотношением (138) и удовлетворяют решению (137).

Вынужденными называют колебания, которые происходят не только под действием внутренней возвратной силы, но и под действием внешней вынуждающей периодической силы: $F_B = F_0 \sin(\omega t)$. Частота этих колебаний совпадает с частотой вынуждающей силы ω .

Второй закон Ньютона для вынужденных колебаний с учетом всех сил, действующих на систему, примет вид:

$$F = F_{\text{вяз.тр.}} + F_{\text{упр.}} + F_B$$

Этот закон можно переписать в соответствующей дифференциальной форме:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -2b \frac{dx}{dt} - kx + F_0 \sin \omega t \quad (144)$$

Соотношение (144) есть неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка из-за наличия вынуждающей силы. Решением такого уравнения является решение вида:

$$x = a \cos (\omega t - \varphi) \quad (145)$$

где амплитуда колебания:

$$a = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad (146)$$

а начальная фаза:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (147)$$

Особую роль в физике играет явление резонанса. Под **резонансом** механических колебаний понимают резкое возрастание их амплитуды при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте. Без учета затухания собственная частота колебаний должна совпадать с частотой вынуждающей силы. Для того чтобы найти амплитуду и резонансную частоту необходимо взять от соотношения (146) производную по ω и приравнять полученное выражение к нулю (то есть найти экстремум функции). В этом случае можно получить следующие выражения:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (147)$$

$$a = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (148)$$

Соотношения (147) и (148) соответствуют резонансным частоте и амплитуде. Видно, что при $\gamma \rightarrow 0$ резонансная частота внешней вынуждающей силы будет совпадать с собственной частотой, а амплитуда будет стремиться к бесконечности, то физически не возможно. Это означает, что в реальных колебательных системах затухание (потери) всегда присутствует и ограничивает резонансную амплитуду. При конструировании колебательных систем выбирают такие технические решения, которые позволяют добиться высокой добротности колебательной системы.

11. ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ

В гидродинамике (механике сплошных сред) рассматриваются явления, связанные с течением жидкостей и особенностями движения твердых тел в них. Течение жидкости можно описать двумя способами: Лагранжа (координатный) и Эйлера (скоростной).

Согласно способу Лагранжа, можно задать **координаты** всех молекул как функции от времени. Для этого необходимо расположение всех молекул жидкости определять через заданные промежутки времени в некотором продольном сечении. Затем, по известным функциям координат от времени, можно определить направления скоростей и рассчитать их значения для заданного времени.

По способу Эйлера изначально должны быть известны временные зависимости для **скоростей** всех молекул данной трубки жидкости, которые прошли через поперечное сечение. Для этого через определенные промежутки времени фиксируется значение и направление скоростей молекул в заданной точке поперечного сечения трубки, а затем по полученным зависимостям находят их распределение по координатам.

Любая сплошная среда (например, жидкость) может быть задана в пространстве с помощью силовых линий. Совокупность этих линий в заданной области пространства образует трубку тока жидкости. **Трубкой тока жидкости** называют поверхность, ограничивающую силовые линии тока жидкости. **Силовыми линиями тока** жидкости, есть такие линии в пространстве, касательными к которым являются вектора скоростей молекул в каждом отдельном слое жидкости (см. рис. 21).

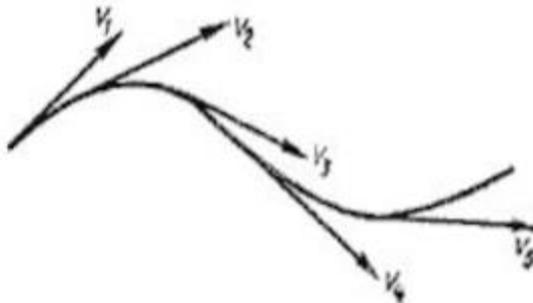


Рис. 21

Жидкости бывают **сжимаемые** и **несжимаемые**, **идеальные** и **вязкие**, а струя жидкости может являться как **непрерывной**, так и **прерывистой**. При этом выделяют два типа течений **стационарное** (установившиеся) и **нестационарное**.

Жидкость является **сжимаемой**, если ее элементарный объем при малом внешнем сжатии (давлении) изменяется на достаточную величину. Если объем при малом внешнем воздействии практически не изменяется, то жидкость является **несжимаемой**.

Всякую трубку жидкости можно мысленно разделить на бесконечно тонкие отдельные слои, поверхности которых соприкасаются. Эти слои за счет особенностей сил молекулярного сцепления, могут либо связанными, либо оставаться независимыми. Если силы молекулярного сцепления достаточно большие, то слои и их движение сильно связаны друг с другом. Такая жидкость называется **вязкой**. Если эти силы очень малы и ими можно пренебречь, то связь между слоями отсутствует. Такие слои будут перемещаться независимо и жидкость будет считаться **идеальной**. Результирующей сил молекулярного сцепления является **сила вязкого трения**. Вязкие жидкости в зависимости от силы связи между молекулами внутри слоя делятся на **ньютоновские** и **неньютоновские**. В ньютоновских жидкостей эти силы малы по сравнению с силами между слоями или соизмеримы с ними, а для неньютоновских жидкостей они велики.

Когда картина скоростей молекул жидкости не изменяется с течением времени в любой области пространства, установившееся течение жидкости называют **стационарным**. При невыполнении этого условия, течение жидкости является **нестационарным**.

Непрерывная струя - это такая струя жидкости, для которой плотность представляет собой непрерывную функцию пространственных координат. Если функция плотность жидкости в заданной области пространства терпит разрыв, то ее струя является **прерывистой**.

К основным уравнениям гидродинамики относятся **уравнения Бернулли и неразрывности струи**.

Рассмотрим трубку тока несжимаемой, идеальной жидкости со стационарным течением (см. рис. 22). Так как жидкость несжимаема, то за одинаковый промежуток времени через разные сечения трубки должны протекать одинаковые объемы жидкости. Следовательно, средние скорости молекул в различных сечениях разные.

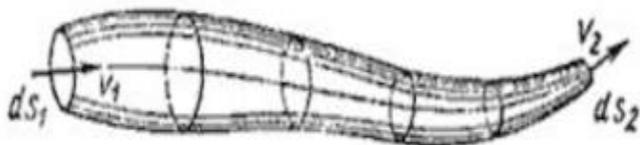


Рис. 22

Пусть за время t молекула, характеризуемая средней скоростью v_1 , прошла путь $l_1 = v_1 t$, который равен высоте цилиндра трубки с основанием S_1 . Тогда объем протекающей за данное время жидкости через сечение S_1 можно представить как:

$$V_1 = S_1 \cdot l_1 = S_1 \cdot v_1 \cdot t \quad (149)$$

Аналогично можно найти объем протекающей жидкости за время t в сечении S_2 :

$$V_2 = S_2 \cdot l_2 = S_2 \cdot v_2 \cdot t \quad (150)$$

Учитывая условие несжимаемости жидкости ($V_1 = V_2$) и сравнивая правые части соотношений (149) и (150), получаем:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \quad (151)$$

Выражение (151) является **уравнением неразрывности струи** и показывает, что в большем сечении трубки жидкости средняя скорость движения молекул всегда меньше чем в малом сечении.

Пусть имеется трубка тока несжимаемой, идеальной жидкости со стационарным течением, концы которой находятся на разных уровнях высоты по отношению к поверхности Земли, и охарактеризуем энергетическое состояние элементарных объемов, которые можно представить в виде точки соответствующей некоторой молекуле в центре заданного объема.

Полная механическая энергия в этом случае равна сумме кинетической и потенциальной в поле силы тяжести для объемов $V_1 = V_2$:

$$W_1 = mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} \quad (152.1)$$

$$W_2 = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2} \quad (152.2)$$

За счет разницы статических давлений на концах трубки жидкости (см. рис. 23) над ней совершается термодинамическая работа:

$$A = V_1 \cdot (P_1 - P_2) \quad (153)$$

Тогда в соответствии с определением работы получаем

$$A = W_2 - W_1 \quad (154)$$

$$V_1 \cdot (P_1 - P_2) = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2} - mgh_1 - \frac{mv_1^2}{2} \quad (155)$$

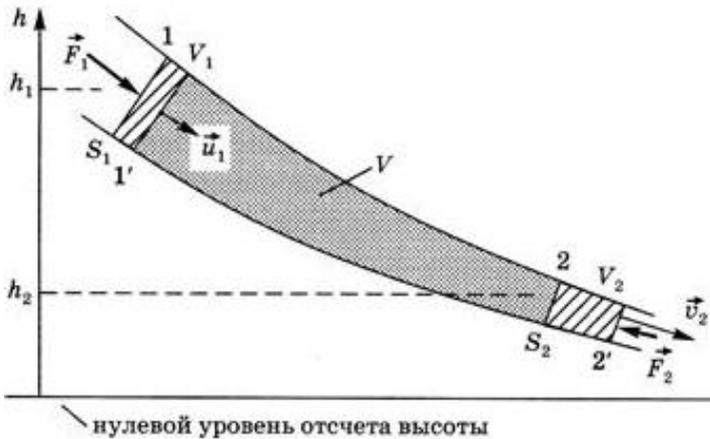


Рис. 23

Учитывая, что масса объемов равна: $m = \rho V_1$ (ρ - плотность жидкости) и подставляя это соотношение в (155), получаем:

$$P_1 - P_2 = \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} - \rho gh_1 - \frac{\rho v_1^2}{2} \quad (156)$$

В соотношении (156) необходимо разделить величины по состояниям:

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad (157)$$

Для произвольного сечения трубки выражение (157) можно переписать в виде:

$$P + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = const \quad (158)$$

Соотношения (157) и (158) являются **уравнениями Бернулли**. Первое слагаемое соотношения (158) представляет статическое давление, второе – гидравлическое, третье – динамическое. Алгебраическая сумма этих давлений есть величина постоянная.

Из соотношений (157) и (158) можно сделать вывод о связи величин, характеризующих состояние молекул в различных сечениях трубки тока жидкости: чем больше сечение трубки, тем меньше скорость молекул и больше статическое давление для одного и того же уровня трубки жидкости h над поверхностью Земли.

Частным случаем уравнения Бернулли является **формула Торричелли** для жидкости, истекающей из отверстия:

$$v = \sqrt{2gh} \quad (159)$$

Силы **вязкого трения** возникают тогда, когда между соприкасающимися телами вводят жидкую смазку. Эти силы существенным образом отличаются от других механических сил трения.

В ньютоновских жидкостях **силы вязкого (внутреннего) трения** зависят от площади соприкасающихся поверхностей и градиента скорости молекул. Силы вязкого трения определяются по формуле:

$$F_{mp} = \eta \left. \frac{dv}{dz} \right| S, \quad (160)$$

где η - динамическая вязкость жидкости, $\left| \frac{dv}{dz} \right|$ - градиент скорости в направлении оси перпендикулярной слоям ньютоновской жидкости, S - площадь соприкосновения слоев жидкости.

Течение жидкостей в зависимости от условий и их состава бывают **ламинарными** и **турбулентными**. Слои ламинарных жидкостей не перемешиваются и имеют четкие границы. Ламинарное течение всегда стационарно. При этом, картина скоростей в продольном сечении трубки имеет вид параболы. При турбулентном сечении слои интенсивно перемешиваются. Скорость по сечению распределена равномерно в центре, а по краям монотонно убывает до нуля (см. рис. 24).

Критерием ламинарности течения является число Рейнольдса. Оно определяется следующим соотношением:

$$Re = \frac{\rho v r}{\eta} \text{ мм} \quad (161)$$

Из (161) видно, что это число зависит от плотности жидкости - ρ , средней скорости потока - v , коэффициента динамической вязкости жидкости - η и характерного для поперечного размера - r (например радиуса).

В некоторых случаях удобно использовать вместо динамической кинематическую вязкость ν . Они связаны по формуле:

$$\nu = \eta / \rho \quad (162)$$

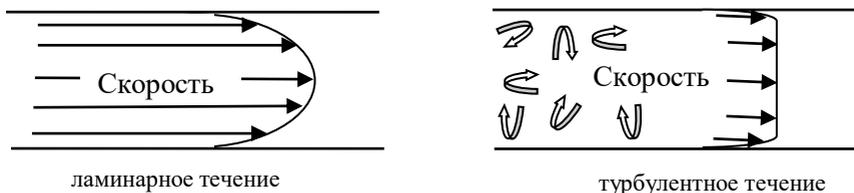


Рис. 24

В случае ламинарного течения имеет место **параболический закон** распределения скоростей относительно оси трубки. Для трубки с круглым поперечным сечением закон распределения будет иметь вид:

$$v = v_0 \left(1 - r^2/R^2\right) \quad (163)$$

где v_0 - скорость молекул жидкости на оси трубки, r расстояние от оси трубки до любой его точки, R - радиус трубки.

Когда течение является турбулентным скорость достаточно сильно изменяется вблизи стенок трубки, а в остальной части поперечного сечения она остается неизменной (оглабающая векторов скоростей образует плато). Динамическая вязкость у жидкостей уменьшается с ростом температуры. Это связано с тем, что силы молекулярного сцепления слоев уменьшаются. У газов динамическая вязкость наоборот растет.

Одной из важных характеристик жидкости является поток. В случае ламинарного течения можно найти величину **потока жидкости** Q которая соответствует ее объему, протекающему через поперечное сечение трубы за единицу времени. **Поток жидкости** пропорционален перепаду давления на единице длины трубки, четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален динамической вязкости и определяется соотношением:

$$Q = \frac{(p_1 - p_2) \pi R^4}{8\eta l} \quad (164)$$

где p_1, p_2 - давления на концах трубки.

Соотношение (164) называют формулой Пуазейля.

На всякое тело, движущееся в жидкости или газе, действует результирующая сила \vec{R} , которую можно представить в виде двух слагаемых: лобового сопротивления и подъемной силы (рис. 25).

Подъемная сила \vec{F} является составляющей результирующей силы, действующей на тело в жидкости. Она перпендикулярна направлению движения тела. **Лобовое сопротивление** \vec{Q} то же является составляющей силы \vec{R} . Она перпендикулярна подъемной силе и действует против этого движения.

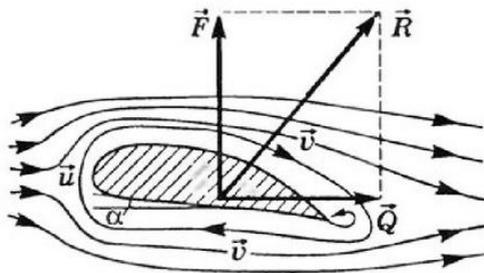


Рис. 25

При симметричной форме тела по отношению к направлению движения, подъемная сила обращается в ноль и на него действует только лобовое сопротивление. Лобовое сопротивление в свою очередь может быть представлено суммой двух сил – **сопротивления трения** (силы вязкого трения) и **сопротивления давления** (формы). **Наименьшее сопротивление давления** имеют тела с хорошо обтекаемой каплевидной формой.

В случае ламинарного течения сопротивление среды связано только с силами трения и описывается **формулой Стокса** для шарообразного тела, радиуса r_0 :

$$F = 6\pi\eta \cdot r_0 v \quad (165)$$

12. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

Молекулярная физика – это раздел физики, в котором макроскопические объекты и их системы, а также их физические свойства исследуются как с учетом их микроскопической структуры (особенности движения и взаимодействия групп молекул, составляющих вещество), так и с точки зрения изменения их термодинамических параметров и энергетических характеристик.

Объектом изучения молекулярной физики является **термодинамическая система** (ТДС). Любая термодинамическая система обладает определенной **атомной** или **молекулярной структурой**. С другой стороны, она характеризуется определенной **температурой, давлением** и занимаемым в физическом пространстве **объемом** (T, P, V). Эти параметры называются **термодинамическими** и полностью определяют состояние системы.

Для описания объектов и процессов в них протекающих в молекулярной физике применяют два метода **термодинамический** и **статистический**.

В случае **термодинамического метода** анализируют изменение или сохранение термодинамических параметров и потенциалов, характеризующих систему или объект. При этом совершенно не учитывается поведение каждой молекулы и групп молекул этого вещества.

В случае **статистического метода** состояние вещества и процессы, в нем протекающие рассматриваются на основе представлений о внутренней структуре вещества. При этом его состояние определяется поведением отдельных молекул или их групп.

Термодинамическая система называется **равновесной**, если термодинамические параметры в ней распределены равномерно по всему объему. При неравномерном распределении термодинамических параметров, система является **неравновесной**. Например, при смешивании воды при двух различных температурах, температура смеси в начальный момент будет разной в нижних и верхних слоях сосуда (неравновесное распределения температуры). Однако с течением времени температура во всех частях станет одинаковой, если на систему не оказывать внешнего воздействия. Это означает, что система перешла в термодинамическое равновесие. Переход системы из неравновесного в равновесное

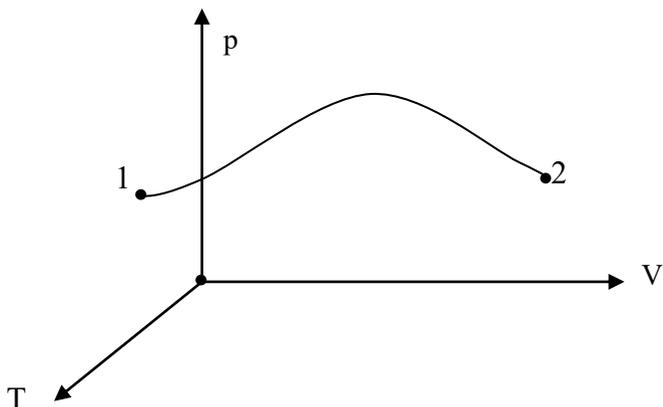


Рис. 26

состояние в отсутствие внешнего воздействия на нее называется **релаксацией**.

В термодинамике состояние системы и процессы, которые с ней происходят можно изобразить в пространстве (P, V, T) . Линии в этом пространстве будут соответствовать некий процесс, протекающий в системе (см. рис. 26). Процесс называется **обратимым**, если при переходе системы в пространстве (P, V, T) из состояния 1 в состояние 2 и обратно по той же линии, не возникают энергетические изменения в окружающей среде. Если переход из состояния 2 в 1 происходит по другой линии или приводит к энергетическим изменениям в окружающей среде, то процесс является **необратимым**. **Круговым** процессом называется такой процесс, в результате которого система, пройдя через ряд состояний в пространстве (P, V, T) , возвращается в исходное состояние.

Молекулярная физика строится на **основных положениях молекулярно-кинетической теории (МКТ)**:

1. Все физические тела состоят из молекул, молекулы из атомов. Атом в молекулярной физике рассматривается как неделимый. Современные приборы и устройства, имеющие большое разрешение (например, электронный микроскоп), позволяют видеть атомы и молекулы веществ размером порядка 10^{-10} м.

2. Все атомы и молекулы вещества могут, как взаимно притягиваться, так и взаимно отталкиваться. Силы отталкивания убы-

вают с расстоянием быстрее, что обеспечивает устойчивость физических тел в природе. Силы отталкивания берутся с положительным знаком, силы притяжения – с отрицательным. Результирующая сила взаимодействия $F_{рез}$ между молекулами представлена на рис. 27. В точке $r = r_0$ силы отталкивания уравновешиваются силами притяжения, что соответствует максимальному значению потенциала взаимодействия $V(r)$. В точке $r = r_1$ силы притяжения между молекулами достигают максимального значения. В области $r < r_0$ преобладают силы отталкивания, в области $r > r_0$ – силы притяжения.

3. Все атомы и молекулы совершают хаотическое движение. Примером такого движения является броуновское движение. Причем, чем выше температура вещества, тем больше скорость хаотического движения молекул.

Зависимость скорости молекул газа от давления была найдена Клаузиусом и получила название основного уравнения МКТ. При установлении данной зависимости Клаузиус использовал статистический подход. Этот подход учитывал микроскопическую структуру вещества и особенности движения его молекул или атомов. В результате было получено соотношение:

$$p = \frac{2}{3} n \bar{W} \quad (166),$$

где p - давление газа, \bar{W} - средняя кинетическая энергия молекул, n - число молекул в единице объема $n = \frac{N}{V}$.

Это соотношение показывает, что чем быстрее движутся молекулы газа, тем более интенсивно они взаимодействуют со стенками сосуда, то есть создают большее давление.

Как известно из механики: $\bar{W} = \frac{m\bar{u}^2}{2}$, где \bar{u} - среднеквадратичная скорость молекул, m - их масса. В этом случае, соотношение (166) можно переписать в виде:

$$p = \frac{1}{3} nm\bar{u}^2 \quad (167)$$

Формула (2) является следствием основного уравнения МКТ.

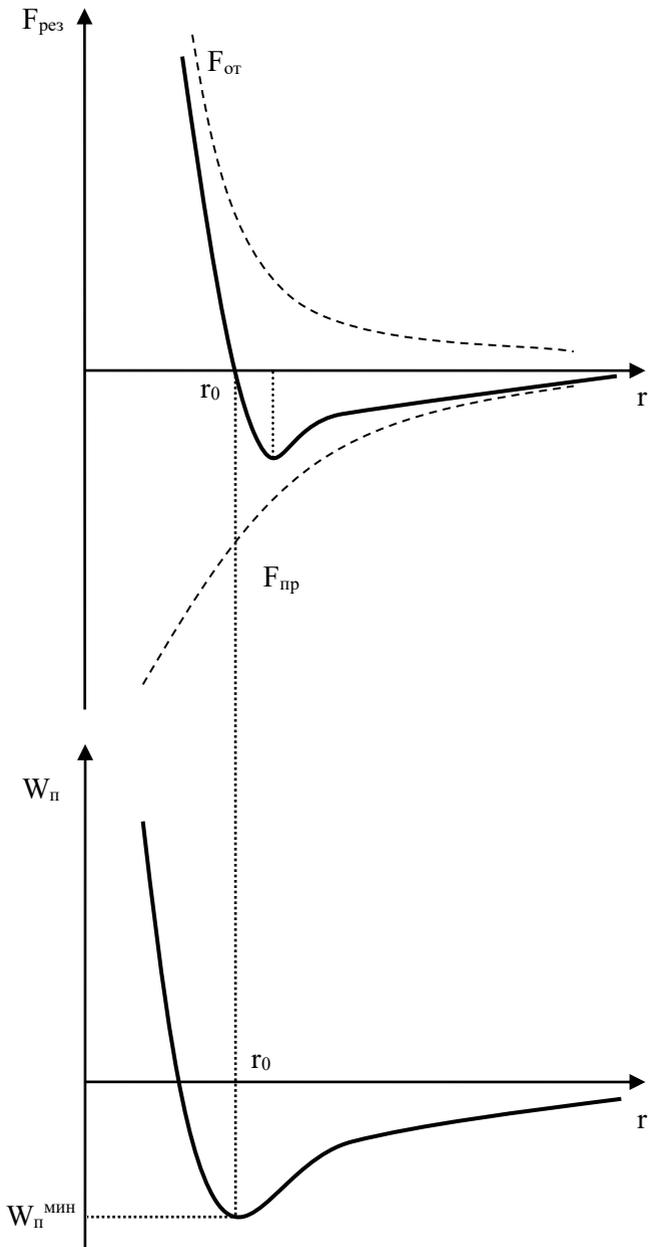


Рис. 27

Часто бывает так, что при определенных ТД процессах, сохраняется один из термодинамических параметров. Например, при нагревании газа фиксированной массы в закрытом сосуде объем остается постоянным, а температура и давление изменяется и т.д. Изменение параметров в этих процессах происходит в соответствии с газовыми законами. Эти законы были получены экспериментально.

Рассмотрим **закон Бойля – Мариотта**. Он соответствует изотермическому процессу, который протекает при неизменной температуре ($T = const$):

$$P_1V_1 = P_2V_2 \quad (168),$$

где P_1 и V_1 - давление и объем в начальном состоянии, а P_2 и V_2 - давление и объем в конечном состоянии. Этот процесс возможен, например, при сжатии газа в абсолютно теплопередающей системе. Соотношение (168) иначе можно записать, как:

$$PV = const \quad (169),$$

Из выражения (169) видно, что между объемом и давлением существует обратная зависимость, то есть при сжатии газа его давление увеличивается и наоборот (рис. 28).

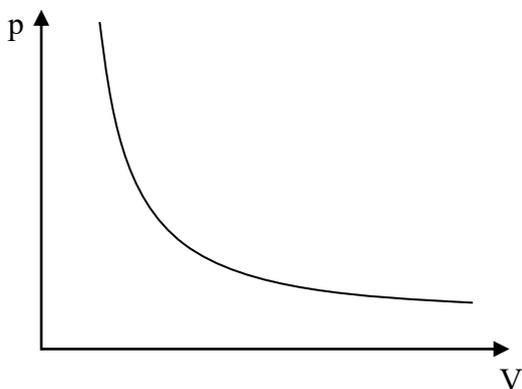


Рис. 28

Теперь рассмотрим **закон Шарля**. Он связан с **изохорным процессом**, при котором не изменяется объем системы ($V = const$). В этом случае между P и T существует линейная зависимость:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad \text{или} \quad P = P_0(1 + \alpha \cdot t) \quad (170),$$

где P_0 - давление газа при температуре нуля градусов по Цельсию, α - температурный коэффициент, t - температура по Цельсию (рис. 29).

Третьим газовым законом является **закон Гей-Люссака**. Он описывает **изобарный процесс**, при котором давление газа не изменяется ($P = const$). Данный процесс описывается соотношением, аналогичным (170).

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \text{или} \quad V = V_0(1 + \alpha \cdot t) \quad (171),$$

где V_0 - объем, занимаемый газом при температуре нуля градусов по Цельсию (рис. 30).

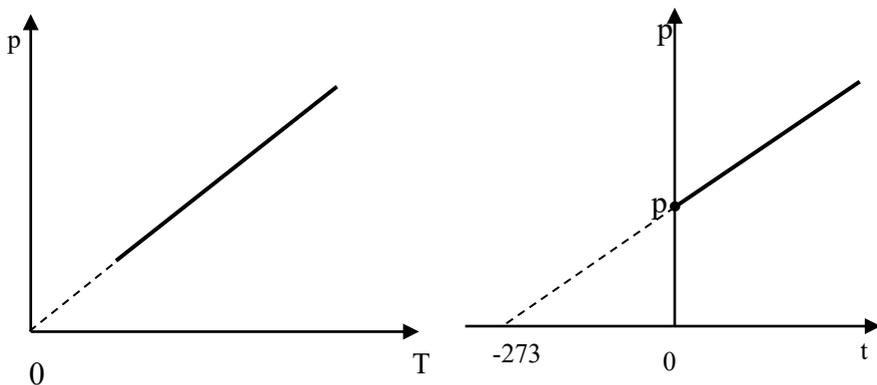


Рис. 29

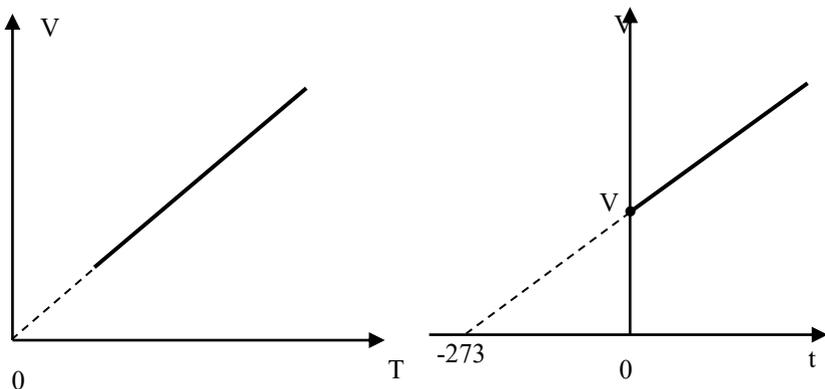


Рис. 30

Все вышеперечисленные газовые законы применимы только для идеальных газов. **Идеальным** называют газ, размерами и взаимодействием молекул которого можно пренебречь. Такой газ должен быть достаточно разреженным, то есть давление в нем должно быть минимально возможным и его возникновение обусловлено столкновением молекул со стенками сосуда.

Если в ТД системе изменяются сразу три параметра, то состояние идеального газа описывается уравнением Менделеева (уравнением состояния идеального газа). Для вывода этого уравнения рассмотрим два последовательных изопроцесса. Пусть газ вначале изотермически расширялся ($T_1 = const$):

$$P_1 V_1 = P'_1 V_2 \quad (172),$$

а потом изохорически охлаждался ($V_2 = const$):

$$\frac{P'_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad (173).$$

В соотношение (173) подставляем значение промежуточного параметра P'_1 , взятое из выражения (172). В итоге получаем:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad (174)$$

Формула (174) показывает, что величина $\frac{PV}{T}$ является постоянной при протекании любых процессов в ГД системе. Причем эта константа зависит от рода вещества. Таким образом, уравнение состояния идеального газа имеет вид:

$$PV = \nu R T \quad (175),$$

где ν - количество молей вещества $\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$; M - молярная масса вещества, m - масса газа, N_A - число Авогадро, R - универсальная газовая постоянная.

Используя соотношение (175) и основное уравнение МКТ можно найти среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул одноатомного газа:

$$PV = \frac{2}{3} N \bar{W} \quad (176)$$

$$\frac{3}{2} \nu R T = N \bar{W}$$

$$\frac{3}{2} \frac{N}{N_A} R T = N \bar{W}$$

$$\bar{W} = \frac{3}{2} k T \quad (177),$$

где $k = \frac{R}{N_A}$ - постоянная Больцмана.

Найдем полную внутреннюю энергию идеального газа в зависимости от числа атомов в молекуле и их связи. Число атомов в молекуле определяет число ее степеней свободы. **Число степеней свободы** – это число независимых переменных, определяющих положение тела (молекулы) в пространстве. У всякого физического тела сложной формы имеется **три поступательные** и **три вращательные** степени свободы. У одноатомной молекулы, как у

простого объекта, имеется только **три** поступательные степени свободы. У двухатомной **пять** степеней свободы (две вращательные степени и три поступательные). У многоатомной **шесть** степеней свободы (три вращательные степени и три поступательные). Кроме перечисленных степеней свободы, молекулы характеризуются также и колебательными степенями. В общем случае для многоатомной молекулы их число может быть велико. Оно зависит от типа связей между молекулами: упругой или жесткой.

Так как в идеальном газе взаимодействие молекул можно пренебречь, то вклад в полную энергию будет давать их кинетическая энергия. По теореме равнораспределения Больцмана на каждую степень свободы приходится энергия:

$$W_0 = \frac{1}{2} kT \quad (178)$$

Энергия газа, в котором содержится N молекул, описывается соотношением:

$$W = i \cdot N \cdot W_0 \quad (179),$$

где i - число степеней свободы молекул данного газа.

$$W = i \cdot \frac{N}{N_A} \cdot \frac{1}{2} RT = \frac{i}{2} \cdot \nu \cdot RT \quad (180)$$

Соотношение (180) соответствует полной энергии идеального газа.

13. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ РАБОТА. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ТЕПЛОЕМКОСТИ ГАЗА

Термодинамическая работа характеризует способность газа расширяться в окружающем пространстве, если оно не ограничено, поэтому она непосредственно связана с изменением его объема. Формула для термодинамической работы может быть получена на основании соотношения для механической работы.

Рассмотрим газ, помещенный в герметичный сосуд с подвижным поршнем. Пусть газ, расширяясь, перемещает поршень на малое расстояние dh . В этом случае он совершает элементарную работу:

$$dA = Fdh \quad (181)$$

где F - сила, с которой газ давит на поршень, перемещая его. Известно, что эта сила связана с давлением соотношением:

$$P = \frac{F}{S} \quad (182)$$

где S – площадь поверхности поршня.

Подставляя (182) в (181) получаем:

$$dA = PSdh = PdV \quad (183)$$

где dV – приращение объема газа при его расширении. Формула (183) дифференциальное выражение для термодинамической работы. Интегральная форма для термодинамической работы задается соотношением вида:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV \quad (184)$$

Рассчитаем работу для рассмотренных ранее изопроцессов. В случае **изохорного процесса** объем системы не изменяется, поэтому, согласно соотношению (184) **работа равна нулю.**

В случае **изобарного процесса** $P = \text{const}$, следовательно, интеграл (184) для термодинамической работы можно переписать в виде:

$$A = P \int_{V_1}^{V_2} dV = P(V_2 - V_1) \quad (185)$$

Чтобы найти формулу для работы при изотермическом процессе, необходимо воспользоваться уравнением состояния идеального газа и выразить оттуда давление как функцию от объема: $P = \frac{\nu RT}{V}$. Подставим теперь правую часть данного выражения в (184), возьмем интеграл и получим:

$$A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (186).$$

Термодинамические начала позволяют судить об энергетическом состоянии системы, как с качественной точки зрения, так и с количественной.

Первый закон термодинамики показывает, что все количество теплоты, переданное системой, идет не только на совершение этой системой работы, но и на изменение ее внутренней энергии. **Количество теплоты**, как и работа, является **функцией процесса**. Поэтому I закон термодинамики, можно записать в виде:

$$\delta Q = \Delta W + \delta A \quad (187),$$

где Q - количество теплоты переданное системе. В соотношении (187) у функций количества теплоты и работы используют знаки вариаций δ , а не простых изменений Δ , так как эти функции зависят от пути процесса в термодинамическом пространстве (P, V, T) . Если путь процесса определен условием задачи, то соотношение (187) примет вид:

$$dQ = dW + dA \quad (188)$$

Соотношение для первого начала термодинамики (188) записано в полных дифференциалах.

Если теплота, переданная системе отрицательная (система охлаждается), то работа в (187) и (188) совершается над системой. В случае циклического процесса, когда система, пройдя ряд состояний приходит в исходное, изменение ее внутренней энергии $\Delta W = 0$.

Первое начало термодинамики показывает, что невозможно создать **двигатель первого рода**, который бы, в случае циклического процесса, совершал работу, большую, чем переданное ему количество теплоты.

Очень важной характеристикой газа является его **теплоемкость**. Она показывает, какое количество теплоты надо затратить, чтобы нагреть тело на 1К. Различают молярную и удельную теплоемкость

Молярная теплоемкость – это теплоемкость, отнесенная к одному молю вещества:

$$C = \frac{dQ}{\nu \cdot dT} \quad (189)$$

Удельная теплоемкость – это теплоемкость, отнесенная к одному килограмму вещества:

$$c = \frac{dQ}{m \cdot dT} \quad (190)$$

Теплоемкость - это величина, значение которой существенно зависит от способа нагревания. Рассмотрим два наиболее простых способа – **изобарный и изохорный**.

При **изохорном способе нагревания** объем газа остается постоянным, поэтому работа 1 моля газа равна нулю. Перепишем с учетом этого первое начало термодинамики в дифференциальной форме:

$$dQ = dW$$

Продифференцируем обе части этого выражения по температуре и, учитывая соотношения (188) и (180) для одного моля, получаем формулу для молярной теплоемкости при этом процессе:

$$C_v = \frac{dQ}{dT} = \frac{dW}{dT} = \frac{i \cdot R dT}{2 \cdot dT} = \frac{i}{2} R \quad (191)$$

Соотношение (191) показывает, что изохорная молярная теплоемкость зависит только от типа газа (i – число степеней свободы газа).

В случае **изобарного нагревания** работа газа отлична от нуля и I начало термодинамики можно записать в виде (188):

$$dQ = dW + dA$$

Продифференцируем по температуре обе части уравнения аналогично предыдущему случаю и учтем, что для одного моля газа:

$$\frac{dA}{dT} = \frac{PdV}{dT} = \frac{Pd(RT/P)}{dT} = \frac{PRdT}{PdT} = R \quad (192).$$

Отсюда следует физический смысл универсальной газовой постоянной. Она есть работа, совершаемая над одним молем газа при его нагревании на один Кельвин. Изобарная теплоемкость с учетом (192), (189), (188) и (180) равна:

$$C_p = \frac{dQ}{dT} = \frac{dW}{dT} + \frac{dA}{dT} = \frac{i \cdot R dT}{2 \cdot dT} + R = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R \quad (193),$$

то есть она, как и изохорная теплоемкость, зависит только от типа газа.

Из сравнения соотношений (191) и (193) видно, что изобарная теплоемкость больше изохорной на величину универсальной газовой постоянной. Перепишем соотношение (193) в виде:

$$C_p = C_v + R \quad (194).$$

Полученное уравнение называют **уравнением Майера**. Оно показывает, что для того, чтобы нагреть газ изобарным способом требуется большее количество тепла, чем для изохорного нагревания для одинакового изменения внутренней энергии газа.

Это связано с тем, что при изобарном нагревании помимо изменения внутренней энергии совершается работа.

Кроме вышеперечисленных характеристик состояния идеального газа в термодинамике используется еще одна, связанная с его теплоемкостями. Это **коэффициент Пуассона**. Он равен отношению изобарной теплоемкости к изохорной для одного и того же количества вещества и численно всегда больше единицы:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{(i+2)R}{2} \cdot \frac{2}{iR} = \frac{i+2}{i} \quad (195).$$

Для одноатомного газа $\gamma = \frac{5}{3} = 1.67$, для двухатомного - $\gamma = \frac{7}{5} = 1.4$, для многоатомного - $\gamma = \frac{8}{6} = 1.33$.

14. АДИАБАТИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС. ПОЛИТРОПНЫЙ ПРОЦЕСС. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Кроме трех описанных выше процессов, существует процесс, связанный с сохранением еще одного термодинамического параметра, который был введен в термодинамику и молекулярную физику немного позже. Этим параметром является энтропия, а процесс называется **адиабатическим**. **Энтропия** – это мера беспорядка (хаоса) в системе. Если в системе действуют силы, заставляющие частицы двигаться упорядочено, то система находится в неравновесном состоянии. Поэтому при устранении таких сил, система должна перейти в равновесное состояние, то есть частицы в ней начнут двигаться хаотически. Такое движение характерно только для объектов, обладающих тепловой энергией. Переход любого вида энергии в тепловую энергию приводит к ее обесцениванию, а, следовательно, к возрастанию энтропии системы.

Таким образом, энтропия необратимого процесса всегда возрастает, а энтропия обратимого процесса не меняется.

Адиабатический процесс – процесс, который происходит в отсутствии теплообмена с окружающей средой. В природе нет абсолютных теплоизолированных систем, поэтому квазиадиабатическими можно считать процессы быстрого сжатия малых объемов газа (накачивание резиновой камеры велосипеда) или медленного сжатия больших объемов газа (конвекция воздушных масс). Так как процесс происходит в отсутствии теплообмена, то количество теплоты в уравнении первого начала термодинамики, должно обращаться в нуль.

Характерным для адиабатического процесса свойством, является то, что вся совершаемая над системой работа идет только на изменение внутренней энергии этой системы, поэтому уравнение первого начала термодинамики примет вид:

$$\Delta W = -\delta A \quad (196)$$

В дифференциальной форме уравнение адиабатического процесса для одного моля газа будет иметь вид:

$$\frac{i}{2} \cdot R \cdot dT = -PdV \quad (197),$$

Воспользовавшись (175) для одного моля газа, получим, что:

$$P = \frac{RT}{V} \quad (198).$$

Подставляя (198) в (197) и разделяя переменные в дифференциальном уравнении (197) получаем:

$$\frac{i}{2} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{2}{i}} \quad (199),$$

где $\gamma = \frac{i+2}{i}$, γ - коэффициент Пуассона.

Отсюда, уравнение адиабатического процесса принимает вид:

$$T \cdot V^{\gamma-1} = const \quad (200).$$

Соотношение (200) показывает, что газ расширяясь, охлаждается, а, сжимаясь, нагревается при адиабатическом процессе.

Если в (200) подставить (198), то получим уравнение адиабаты на плоскости (P, V) , которое можно сравнить с уравнением изотермы:

$$P \cdot V^\gamma = const \quad (201).$$

Так как $\gamma > 1$ для любого газа, то адиабата 1 идет на графике круче, чем изотерма 2 (см. рис. 31).

Политропный процесс – это термодинамический процесс, протекающий с постоянной теплоемкостью. Все рассмотренные ранее термодинамические процессы относятся к политропным процессам.

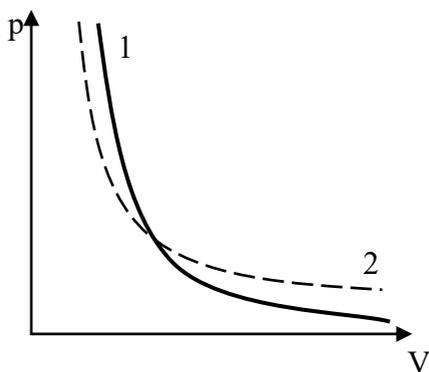


Рис. 31

Уравнение политропы можно получить из I начала термодинамики в полных дифференциалах для одного моля:

$$dQ = dW + dA$$

$$CdT = C_v dT + PdV$$

$$(C - C_v) dT = PdV \quad (202)$$

Взяв дифференциал от уравнения состояния идеального газа с учетом того, что при политропном процессе могут меняться сразу три термодинамических параметра, получаем:

$$RdT = PdV + VdP \quad (203)$$

Выразим dT из (203) и подставим в (202) и получим:

$$\frac{(C - C_v)}{R} VdP = \frac{(R - C + C_v)}{R} PdV = \frac{(C_p - C)}{R} PdV \quad (204)$$

Решение уравнения имеет вид:

$$PV^n = const \quad (205)$$

Соотношение (39) называют **уравнением политропы**, с показателем n равным:

$$n = \frac{(C - C_p)}{(C - C_v)} \quad (206)$$

При $n = \gamma$ - процесс является адиабатическим, при $n = 1$ - изотермическим, при $n = 0$ - изобарным, при $n \rightarrow \infty$ - изохорным.

Второе начало термодинамики связано с задачей о цикле Карно. **Цикл Карно** – циклический процесс, который представляет собой последовательное чередование изотерм и адиабат на плоскости (P, V) (см. рис. 32).

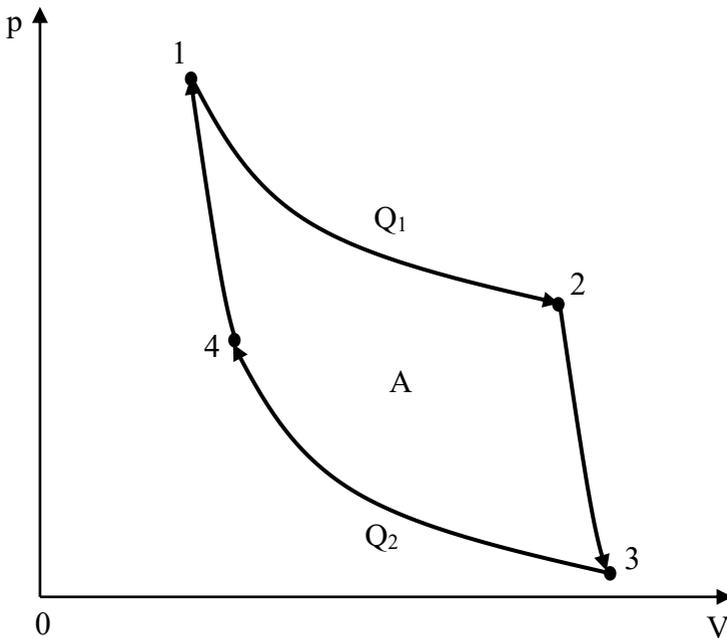


Рис. 32

Этому циклическому процессу соответствует работа **идеальной тепловой машины**. Она представляет собой герметичный цилиндр, с теплопроводящим дном и поршнем. В цилиндр помещен идеальный газ, который является рабочим телом. Для осуществления полной теплоизоляции, необходимой для протекания адиабатического процесса, применяют теплоизолирующую крышку, закрывающую дно. Во время работы машины к газу подводится тепло от нагревателя Q_1 и отдается тепло холодильнику Q_2 . Машина при этом совершает работу A . Переходу $1 \rightarrow 2$ на рис. 23 соответствует процесс изотермического расширения; переходу $2 \rightarrow 3$ – адиабатического охлаждения; $3 \rightarrow 4$ – изотермического сжатия; $4 \rightarrow 1$ – адиабатического нагревания. Внутренняя энергия идеального газа не изменяется, так как процесс циклический. Поэтому энергетическое уравнение процесса имеет вид:

$$A = Q_1 - Q_2 \quad (207)$$

Соотношение (207) опровергает возможность создания **двигателя второго рода**, в котором все количество теплоты тратилось бы на совершение работы и показывает, что часть переданного рабочему телу тепла идет еще на нагревание холодильника.

Коэффициент полезного действия тепловой машины определяется по соотношению:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (208)$$

В случае обратимых процессов формулу (208) можно переписать в виде:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (209)$$

Второе начало термодинамики имеет несколько формулировок.

Формулировка **Кельвина** гласит, что нельзя передать тепло от менее нагретого тела к более нагретому телу, не используя дополнительных приспособлений.

Формулировка **Клаузиуса** гласит, что в природе возможны только такие самопроизвольные процессы, энтропия которых возрастает. Такие процессы называются **необратимыми** и приводят к установлению термодинамического равновесия в системе.

Изменение **энтропии системы** обусловлено изменением количества приведенного к системе тепла δQ . Поэтому изменение энтропии определяется соотношением:

$$\Delta S = \frac{\delta Q}{T} \quad (210),$$

где T - температура, при которой осуществлялась передача тепла.

Соотношение (210) выражает термодинамический смысл энтропии и показывает, что в абсолютной теплоизолированной системе энтропия остается постоянной, так как $\Delta S = 0$. Энтропия является скалярной и аддитивной величиной. Поэтому энтропия системы равна алгебраической сумме энтропий подсистем.

$$S = \sum_{i=1}^n S_i \quad (211),$$

где n - число подсистем.

Кроме того, энтропия имеет и статистический смысл. Энтропия связана с вероятностью равновесного состояния системы. Чем ближе система к такому состоянию, тем больше ее энтропия. Это связано с тем, что в равновесном состоянии элементы системы движутся хаотически, а энтропия есть мера хаоса системы.

15. КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИКИ В МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

В молекулярной физике существует два подхода, позволяющих охарактеризовать состояние системы: термодинамический и статистический. Состояние системы с точки зрения термодинамического подхода называется макроскопическим, а состояние с точки зрения статистического подхода микроскопическим.

Макроскопическое – это такое состояние, которое характеризует систему в общем и описывается такими параметрами как давление, температура и объем. **Микроскопическое** – это состояние, которое характеризует положение и скорость каждой частицы системы. Каждое микросостояние системы, состоящей из N частиц, задается $3N$ координатами (x, y, z) и $3N$ (v_x, v_y, v_z) их скоростями.

Между различными подходами существует связь (например, полученное ранее основное уравнение молекулярно-кинетической теории). Из этой связи следует, что должна существовать связь между макроскопическими и микроскопическими состояниями. Всякому макросостоянию системы может соответствовать некоторое число микросостояний из всех возможных в соответствии с эргодической гипотезой: возможны лишь такие микросостояния ТД системы, для которых выполняется закон сохранения энергии. Отношение числа микросостояний, относящихся к определенному микросостоянию к общему числу микросостояний, реализуемых системой, дает вероятность макросостояния.

$$P = \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_0} \quad (212)$$

где Γ_α - число микросостояний характеризующих данное микросостояние, Γ_0 - общее число микросостояний, реализуемых в соответствии с эргодической гипотезой.

Наиболее вероятными при этом оказываются равновесные макросостояния. Задача статистической физики состоит в определении или числа данных микросостояний или вероятности макросостояния без подсчета числа микросостояний (что в основном и реализуется).

Очень большую роль в статистической физике играет функция распределения. Функция распределения задает распределение ато-

мов (молекул вещества) по какому-либо динамическому параметру. Например, распределение по скоростям или высотам относительно поверхности Земли и т.д. Эти распределения позволяют рассчитать вероятность того или иного состояния или найти средние значения физических величин, которые являются функциями динамических параметров. Вероятность и средние значения можно найти по общим соотношениям известным из теории вероятности и математической статистики. Так вероятность связана с функцией распределения соотношением:

$$P(x) = \int_{x_1}^{x_2} dF(x) \quad (213),$$

где $x \in (x_1, x_2)$ - интервал значений, которые может принимать аргумент, $F(x)$ - функция распределения частиц по параметру x :

$$dF(x) = f(x) dx \quad (214)$$

а $f(x)$ - плотность вероятности распределения величины x .

Среднее значение физической величины в случае непрерывной функции распределения по параметру может быть найдено по соотношению:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dF(x) \quad (215).$$

Если функция распределения принимает ряд дискретных значений, то пользуются понятием статистического веса – величины равной отношению числа одинаковых значений параметра x к общему числу все принимаемых значений x_i :

$$P_i = \frac{N_i}{N} \quad (216)$$

В этом случае среднее значение рассчитывается по соотношению:

$$\langle x \rangle = \sum_i P_i x_i \quad (217).$$

Найдем функцию распределения молекул газа, находящегося в состоянии установившегося термодинамического равновесия, по скоростям. Молекулы газа в этом состоянии будут совершать хаотическое движение и изменение проекций скорости будет произвольным и независимым в силу однородности и изотропности физического пространства. Распределение, которое в математической статистике соответствует таким свойствам пространства, является распределением Гаусса. Для скоростей в ПДСК плотность вероятности распределения $f(v_x, v_y, v_z)$ будет иметь вид:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left[m / (2\pi kT) \right]^{3/2} \exp\left(-m[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2] / 2kT\right), \quad (218)$$

а вероятность того, что частицы обладают скоростями в диапазоне $[v_x, v_x + dv_x; v_y, v_y + dv_y; v_z, v_z + dv_z]$ равна:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \quad (219)$$

В сферической системе координат плотность вероятности распределения по скоростям описывается соотношением:

$$f(v) = 4\pi \left[m / (2\pi kT) \right]^{3/2} v^2 \exp(-mv^2 / 2kT), \quad (220)$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, а вероятность определяется по формуле:

$$dP(v) = f(v) dv \quad (221)$$

Соотношение (220) называют распределением молекул газа по скоростям в состоянии термодинамического равновесия или **распределением Максвелла**.

На рис. 33 представлено распределение молекул газа по скоростям. С ростом температуры характерные скорости молекул увеличиваются, а высота кривой в максимуме уменьшается. Характерными скоростями распределения называют среднюю, среднеквадратичную и наиболее вероятную скорости молекул.

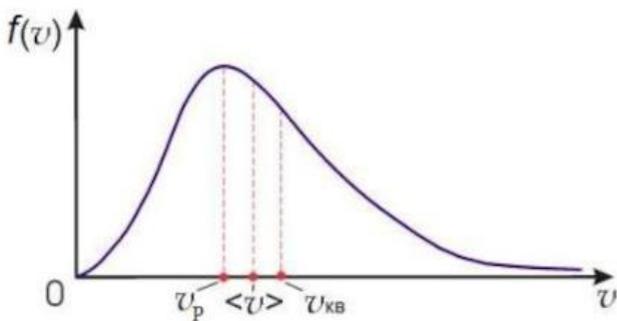


Рис. 33

Наиболее вероятная скорость молекул соответствует максимальному значению функции распределения и рассчитывается из условия экстремума функции:

$$\frac{df(v)}{dv} = 0.$$

Решение данного уравнения дает значение:

$$v_b = \sqrt{2kT/m} \quad (222)$$

Средняя и среднеквадратичная скорость рассчитываются из соотношения (215) с учетом (214). Для них получаем следующие значения:

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m} \quad (223);$$

$$\langle v^2 \rangle = \sqrt{3kT/m} \quad (224).$$

Как видно из соотношений (222, 223, 224) все скорости пропорциональны корню квадратному от температуры газа, то есть микроскопические характеристики молекул газа связаны с его макроскопическими характеристиками.

Еще одним важным распределением в статистической физике является **распределение Больцмана**. Оно описывает распределение молекул по энергиям в потенциальном поле внешних сил. В условиях термодинамического равновесия потенциальная сила

$\vec{F} = -gradE_n$ (E_n - потенциальная энергия одной молекулы), действующая на некоторый объем газа уравнивается силами давления на поверхность этого объема. В ПДСК для каждого направления можно записать в общем виде выражения для компонент внешней силы:

$$dF_{1i} = -n_0 dx dy dz \frac{dE_n}{di} \quad (225),$$

где $i = (x, y, z)$, n_0 - концентрация молекул в элементе объема $dx dy dz$.

С другой стороны, эта сила должна быть уравновешена силами давления:

$$dF_{2i} = -\frac{\partial p}{\partial i} dx dy dz \quad (226),$$

где $p = p(x, y, z)$ - давление, оказываемое на частицы элемента объема. В условиях термодинамического равновесия:

$$dF_{1i} + dF_{2i} = 0 \quad (227),$$

следовательно, подставляя в (227), соотношения (225) и (226) для определенного координатного направления получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx = -n_0 \frac{\partial E_n}{\partial x} dx \quad (228)$$

Складывая почленно левые и правые части соотношения (228) для всех координат, получаем уравнение в полных дифференциалах вида:

$$dp = -n_0 dE_n \quad (229)$$

Учитывая, что давление может быть определено также по основному закону молекулярно-кинетической теории и, что в условиях термодинамического равновесия $T = \text{const}$, получаем:

$$dp = dn_0 \cdot kT$$

$$dn_0 \cdot kT = -n_0 dE_n \quad (230)$$

Разделяя в уравнении (230) переменные и, учитывая, что некоторой концентрации в точке (x_0, y_0, z_0) соответствует потенциальная энергия $E_n(x_0, y_0, z_0) = 0$, получаем распределение частиц по энергиям во внешнем потенциальном поле – **распределение Больцмана**:

$$n_0(x, y, z) = n_0(x_0, y_0, z_0) \exp(-E_n(x, y, z)/kT) \quad (231)$$

Рассмотренные выше распределения называют классическими и применяют для описания систем с большим числом частиц, которые обладают выраженными отличительными признаками. В этом случае два микросостояния образованные заменой местами двух любых частиц будут различаться. Данные распределений подтверждены экспериментально в опытах Перрена (распределение Больцмана), Штерна, Ламмерта (распределение Максвелла).

Экспериментальная проверка закона распределения Максвелла была проведена **Штерном** в 1920 году.

Штерн использовал два коаксиальных цилиндра (рис. 34). В центре цилиндра с малым радиусом располагалась платиновая нить, покрытая серебром. При нагревании нити электрическим током атомы серебра испарялись и двигались от нити радиально. В цилиндре с малым радиусом имелась продольная прорезь, через которую проходил узкий пучок атомов серебра и оседал на внутренней поверхности цилиндра с большим радиусом. При этом цилиндры приводились в равномерное вращение и разные порции атомов серебра осаждались в разных местах внутренней поверхности цилиндра большого радиуса в виде продольных

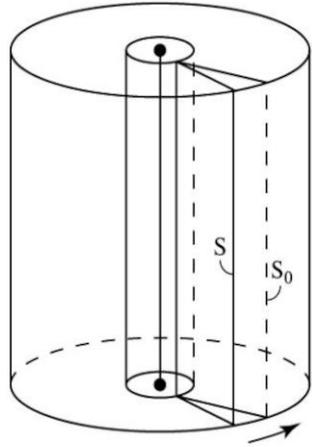


Рис. 34

полосок определенной плотности. Таким образом, по профилю следа можно было составить примерное представление о распределении атомов серебра по скоростям.

Более точные опыты по подтверждению распределения по скоростям были проведены **Ламмертом** в 1929 году.

В этих опытах молекулярный пучок направлялся через два вращающихся диска с радиальными прорезями, между которыми был некоторый угол, параллельно их оси вращения (рис. 35). Данное устройство позволило разделить молекулы по скоростям и получить более точную картину распределения Максвелла.

Перрен в 1909 году использовал распределение Больцмана для опытов по определению числа Авагадро. Для проведения опыта Перрен изготовил однородную эмульсию из шариков гуммигута с радиусом в несколько десятых долей микрометра, используя метод центрифугирования. Эмульсию он разместил в плоскую стеклянную кювету небольшой глубины и исследовал ее с помощью микроскопа. Поле зрения микроскопа было настолько мало, что были различимы только частицы в слое до 1 мкм эмульсии. Перемещая тубус микроскопа по вертикали, он исследовал распределение броуновских частиц по высоте. Полагая, что оно является Больцмановским, экспериментатор нашел значение числа Авагадро, которое хорошо согласовывалось со значениями, полученными другими методами.

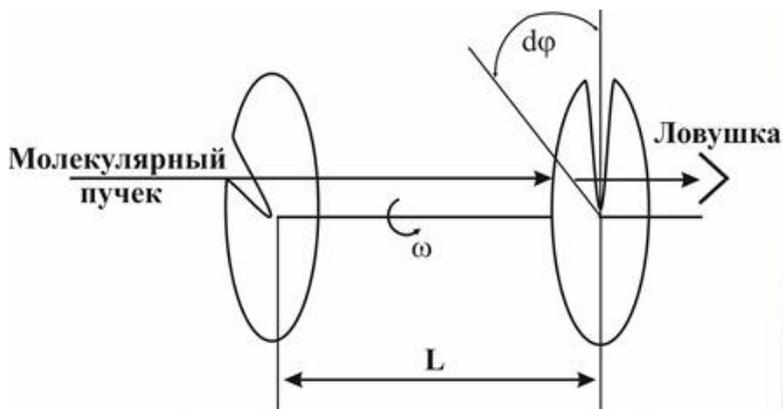


Рис. 35

Распределения Максвелла и Больцмана объединяются в единое **распределение Максвелла–Больцмана**. Так как скорости и координаты частиц независимы распределение Максвелла–Больцмана можно получить путем перемножения соответствующих функций распределения частиц по скоростям и в поле потенциальных сил.

На самом деле в природе невозможно отличить одну частицу от другой, так как по определению они совершенно идентичны. В этом случае замена одной частицы на другую не должна приводить к изменению микросостояния. Модели, в которых частицы рассматриваются как неразличимые, называются моделями **Бозе–Эйнштейна** и **Ферми–Дирака**. Эти модели различаются по отношению к поведению частиц в отношении микросостояний. Если в данном состоянии может находиться только одна частица, то его можно описать с помощью статистики Ферми–Дирака, а если в некотором состоянии одновременно находится много частиц – то его описывает статистика Бозе–Эйнштейна. В соответствии с принципом Паули частицы с полуцелым спином описываются статистикой Ферми–Дирака, а с целым – статистикой Бозе–Эйнштейна. Отсюда следует, что нет реальных частиц, подчиняющихся статистике Максвелла–Больцмана, однако она, как показывает опыт, во многих случаях правильно описывает их поведение. Формулы квантовых статистик сводятся к классической в том случае, когда число доступных для частиц состояний значительно больше, чем число частиц, которые могли бы занять эти состояния.

В **квантовой статистике** в отличие от классической энергия частицы характеризуется дискретным спектром (квантована), а не непрерывным, а состояние частицы характеризуется набором квантовых чисел, соответствующих определенной энергии E_i , где i - соответствующий набор.

Формула, описывающая **распределение Ферми–Дирака** учитывает принцип Паули и имеет вид:

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta E_i) + 1} \quad (232),$$

а формула, соответствующая **распределению Бозе–Эйнштейна**:

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta E_i) - 1} \quad (233),$$

где n_i/g_i - число частиц, приходящихся на одно состояние с энергией E_i , n_i - число неразличимых частиц в i -ом состоянии, g_i - число ячеек, по которым могут быть распределены частицы в состоянии с энергией E_i , α - параметр, зависящий от вида E_i и определяемый из условия сохранения числа частиц, $\beta = \frac{1}{kT}$.

Если в (232) и (233) число частиц в i -ом состоянии значительно меньше чем число ячеек ему соответствующих ($n_i/g_i \ll 1$), они переходят в функцию распределения Максвелла–Больцмана (единицей в соответствующих формулах пренебрегают):

$$n_i = A g_i \exp(-\beta E_i) \quad (234),$$

где $A = \exp(-\alpha)$.

16. ФАЗОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ И ПРЕВРАЩЕНИЯ ВЕЩЕСТВА

Фазой называют совокупность однородных и одинаковых по свойствам в бесконечно малом объеме физического пространства частей термодинамической системы. Например, фазой можно считать то или иное агрегатное состояние вещества или одну из его модификаций, возникающую при кристаллизации. Состояния, в которых с точки зрения термодинамики, может находиться каждое вещество, изображаются в виде **фазовой диаграммы**. **Фазовая диаграмма** вещества – это система кривых и образованных ими областей на плоскости термодинамических параметров. Обычно кривые фазовых переходов изображают в координатах (P , T). Вид этой диаграммы зависит существенным образом от рода вещества. В наиболее простом случае фазовая диаграмма изображена на рис. 36.

Области 1 соответствует газообразная фаза вещества, которая имеет место при высоких температурах и низких давлениях, область 3 – твердому состоянию, при котором наоборот давления высокие, а температуры низкие, область 2 – соответствует жидкому состоянию. Кривые разграничивающие соответствующие области, соответствуют кривым перехода вещества из одного состояния в другое. Они называются **кривыми фазовых переходов (превращений)**. Кривая АК является кривой кипения (насыщения) Она соответствует превращению вещества из газообразного состояния в жидкое состояние и наоборот (процессы испарения, кипения и конденсации); АВ отвечает кривой плавления и соответствует переходу из жидкого состояния в твердое и наоборот (процессы плавления и кристаллизации); АД есть кривая сублимации, которая соответствует превращению твердого вещества в газообразное. Точка А – тройная точка, которая соответствует наличию в системе вещества сразу в трех агрегатных состояниях (фазах). Состояния с одновременным присутствием более трех фаз невозможны.

Выделяют фазовые переходы двух родов: первого и второго. **Фазовым переходом I рода** называют переход, при котором поглощается или выделяется энергия в виде тепла (скрытой теплоты перехода) и изменяется агрегатное состояние вещества. **Фазовыми переходами II рода** называют переходы, при которых не происходит выделения или поглощения тепла, а вещество переходит из одной кристаллической модификации в другую, не меняя своего агрегатного состояния.

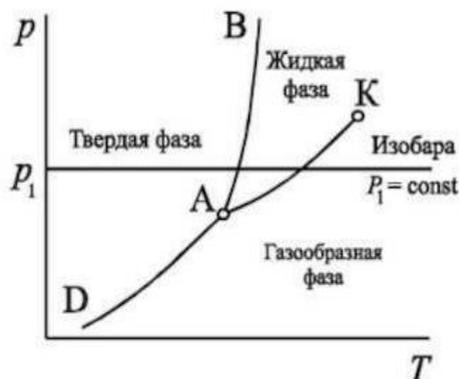


Рис. 36

Рассмотрим более подробно кривые фазовых переходов.

Кривой АК соответствуют процессы испарения, кипения и конденсации. **Испарение** - это процесс перехода наиболее быстрых молекул с поверхности жидкости в газообразное состояние. Этот процесс происходит при любых температурах, соответствующих кривой АК. При этом выделяется энергия в виде тепла, а температура жидкости и ее внутренняя энергия понижаются. **Кипение** - это тоже процесс перехода молекул жидкости в газообразное состояние. Однако он происходит при определенной температуре (температуре кипения) и не только с поверхностных слоев жидкости, но и с объема, за счет наличия в любой жидкости газовых пузырьков, которые при некоторой температуре начинают интенсивно расширяться, подниматься на поверхность и там разрываться. **Конденсация** - это процесс обратный испарению. Он заключается в том, что при любой температуре соответствующей участку АК наиболее медленные частицы газа переходят в жидкое состояние. При этом средняя энергия газа и температура повышаются, а тепло поглощается. При протекании данных процессов между жидкостью и ее паром может установиться равновесие. Это происходит при достижении определенного давления, при котором количество молекул, покидающих жидкость будет равно количеству молекул, возвращающихся в нее. Равновесие между жидкостью и паром будет существовать до тех пор, пока не изменится объем или температура системы. Пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется

насыщенным. Давление, при котором наблюдается равновесие, называется **давлением насыщенного пара.**

Процессы **плавления** и **кристаллизации** связаны с кривой АВ.

Плавление – есть переход вещества из твердого в жидкое состояние при определенных значениях температуры – **температуры плавления** и давления, соответствующих кривой перехода АВ – **кривой плавления.** Причем для осуществления этого перехода требуется затрата определенного количества тепла – **теплоты плавления.** Процесс плавления протекает следующим образом. Веществу в твердом состоянии передается тепло, приводящее к его разогреву (повышению температуры). Затем оно, при некоторой температуре в зависимости от давления в веществе, начинает плавиться. При этом температура вещества не меняется. Далее температура вещества уже в жидкой фазе продолжает увеличиваться. **Кристаллизация** – это процесс обратный плавлению. Он также протекает при определенной температуре – **температуре кристаллизации,** соответствующей некоторому давлению на кривой фазового перехода. При осуществлении этого процесса тепло, наоборот, отнимается от вещества. При этом его температура постепенно понижается до определенного значения – **температуры кристаллизации.** Далее, **центры кристаллизации,** имеющиеся в веществе, начинают расти при неизменной температуре до тех пор, пока вещество не перейдет в твердое состояние. Затем, температура будет продолжать падать.

Кривой AD соответствует процесс сублимации (возгонки). **Сублимация** – это процесс перехода вещества из твердой фазы в газообразное состояние при определенной температуре и соответствующем ей давлении за счет того, что поверхность тела покидают наиболее быстрые молекулы, вследствие чего вещество охлаждается, а средняя энергия оставшихся в нем молекул уменьшается.

Чтобы совершить переход от уравнения Менделеева – Клапейрона к **уравнению Ван – дер – Ваальса для реального газа** нужно учесть следующие моменты и ввести соответствующие поправки. В уравнении реального газа **объем,** предоставленный для свободного перемещения частиц, меньше чем в случае идеального, так как учитываются размеры молекул и, следовательно, занимаемый ими объем b' . **Давление** же оказывается большим за счет учета давления, создаваемого вследствие взаимодействия молекул друг с

другом. Это давление обратно пропорционально квадрату объема ($\frac{a'}{V^2}$). Если внести эти поправки в уравнение состояния идеального газа, то уравнение Ван – дер – Ваальса примет вид:

$$\left(P + \frac{a'}{V^2} \right) (V - b') = \nu RT \quad (235)$$

Для одного моля:

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT \quad (236)$$

где $V = \nu V_m$ - объем, занимаемый идеальным газом, V_m - объем одного моля идеального газа, ν - число молей газа, а коэффициенты связаны соотношениями: $a' = \nu^2 a$, $b' = \nu b$.

Внутренняя энергия реального газа, в отличие от идеального, должна содержать слагаемое, описывающее взаимодействие молекул (их потенциальную энергию). **Энергия взаимодействия** между молекулами имеет вид для одного моля газа:

$$E_p = -\frac{a}{V_m} \quad (237)$$

Тогда для ν молей газа она примет вид:

$$E_p = -\frac{a'}{V^2} \quad (238)$$

Потенциальная энергия реального газа зависит от объема, занимаемого этим газом. Учет потенциальной энергии взаимодействия молекул приводит к уменьшению внутренней энергии газа. Внутренняя энергия реального газа зависит не только от температуры, но и от его объема. **Внутренняя энергия реального газа** определяется соотношением в случае одного моля газа:

$$W_m = C_v T - \frac{a}{V_m} \quad (239)$$

Для ν молей газа внутренняя энергия определяется по формуле:

$$W = \nu C_v T - \frac{a'}{V^2} \quad (240)$$

Уравнение Ван–дер–Ваальса является кубическим по объему. Кривые, соответствующие на плоскости (P, V) этому уравнению, называют **изотермами Ван – дер – Ваальса** (см. рис. 37).

Эксперименты показывают, что вместо характерного S – образного участка изотермы Ван – дер Ваальса имеет место **горизонтальный участок (плато)**, соответствующий некоторому постоянному значению давления (это давление насыщенного пара) при фиксированной температуре. Причем, **каждой температуре соответствует свое значение давления насыщенного пара**. С ростом температуры значение насыщенного пара растет, а размер горизонтального участка уменьшается. При критической температуре плато вырождается в точку (точку перегиба изотермы). Причем, с приближением к этой температуре, различие в плотностях жидкости и насыщенного пара уменьшается, а в самой точке они оказываются равными, то есть исчезает различие между жидкостью и паром в целом. При температуре выше некоторой критической газ ведет себя как идеальный и не меняет своего агрегатного состояния. В этом случае его изотерма, соответствует изотерме идеального газа.

В области горизонтального участка (плато) изотермы жидкость и ее насыщенный пар находятся в равновесии. Этот результат является общим для всех двухфазных состояний. Концы этого участка отвечают объемам V_1 и V_2 , занимаемым веществом в первой и второй фазе. **Отношение масс вещества** в первой и второй фазе, соответствующего двухфазного состояния равно отношению отрезков, на которые делит горизонтальный участок изотермы точка, изображающая состояние:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{V_1 - V}{V - V_2} \quad (241)$$

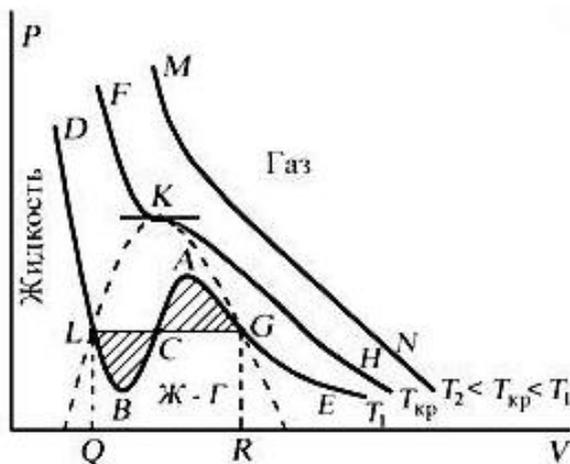


Рис. 37

Уравнение Клапейрона–Клаузиуса устанавливает зависимость равновесного давления (давления насыщенного пара) от температуры системы.

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q_{12}}{T(V'_2 - V'_1)} \quad (242)$$

Оно показывает, что производная равновесного давления по температуре $\frac{dP}{dT}$ прямо пропорциональна скрытой теплоте перехода q_{12} и обратно пропорциональна температуре T и разности удельных объемов фаз, находящихся в равновесии $V'_2 - V'_1$. Знак производной $\frac{dP}{dT}$ зависит от того какое изменение объема происходит при фазовом переходе, сопровождающимся поглощением тепла. При возрастании объема $\frac{dP}{dT} > 0$, а при уменьшении $\frac{dP}{dT} < 0$.

Температура перехода из одной кристаллической модификации в другую будет повышаться или понижаться с ростом давления в зависимости от того, какая из твердых фаз обладает большим удельным объемом.

Некоторые состояния, соответствующие S – образному участку также можно получить на опыте. Однако они будут являться **метастабильными** (неустойчивыми). Даже слабое воздействие на такое состояние приводит к его переходу в более устойчивое, лежащее на соответствующем плато изотермы. Средняя часть S – образного участка изотермы Ван-дер Ваальса АВ на рис. 37 нереализуема в природе. Краевые части соответствуют перегретой жидкости (участок LB) и пересыщенному пару (участок AG).

У **пересыщенного пара** давление больше, чем у насыщенного пара при той же температуре. **Пересыщенный пар** можно получить с помощью резкого адиабатического расширения пересыщенного пара. При этом пар охладится и состояние газа будет соответствовать изотерме, лежащей ниже (то есть с меньшей температурой), а давление слабо изменится и окажется большим, чем давление насыщенного пара, соответствующего этой изотерме.

Давление у **перегретой жидкости** оказывается меньшим, чем давление насыщенного пара соответствующего рассматриваемой изотерме. Для того, чтобы перевести жидкость в перегретое состояние, необходимо ее тщательно очистить от неоднородностей в виде твердых включений и растворенных в ней газов и, путем нагревания, не доводя до кипения, перевести ее в состояние с меньшим давлением по отношению к давлению насыщенного пара при данной температуре.

При достаточно низких температурах изотерма Ван – дер – Ваальса может пересекать ось объема и опускаться в область отрицательных давлений. При отрицательных давлениях вещество будет находиться в очень растянутом состоянии. **Жидкость** в таком состоянии называется **растянутой**.

17. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

Явления переноса являются важным объектом изучения в молекулярной физике. Все сделанные ранее выводы этого раздела соответствуют равновесным процессам с установившимися термодинамическими параметрами. Однако при нарушении равновесия в ТД системе возникают явления переноса массы вещества, тепла, сил трения в вязких жидкостях и газах. Изучением таких процессов, вызванных нарушением равновесия в ТД системе, занимается **физическая кинетика**, которая является областью молекулярной физики. **Явления переноса** являются **необратимыми процессами**. Их необратимость обусловлена возникновением не скомпенсированных в некотором направлении или направлениях потоков тепла, молекул и так далее.

Три основных явления переноса в молекулярной физике это: **диффузия, теплопроводность, вязкость (внутреннее трение)**.

При описании какого-либо явления переноса в физической кинетике, основной характеристикой является **поток**. Под **потоком физической величины** понимают количество этой величины, переносимое в единицу времени через некоторую поверхность. Поток является скалярной величиной. В зависимости от выбранного направления он может иметь как положительный, так и отрицательный знак. Выбор направления может быть произвольным. При наличии замкнутых поверхностей выходящий поток считается положительным, а входящий отрицательным.

Все явления переноса обусловлены перемещением молекул вещества в соответствующих средах из одних областей системы в другие. При этом молекулы могут сталкиваться и взаимодействовать друг с другом, что приводит к изменению их характеристик (например, направление движения). Минимальное расстояние, на которое могут сблизиться при столкновении центры двух молекул, называется **эффективным диаметром молекулы d** , а площадь, связанная с этим диаметром – **эффективным сечением рассеяния молекулы σ** . Эффективное сечение рассеяния и диаметр связаны соотношением:

$$\sigma = \pi \cdot d^2 \quad (243)$$

Эффективный диаметр молекулы зависит от ее энергии, а, следовательно, и **от температуры**. С ростом температуры эффективный диаметр молекулы уменьшается. Еще одной важной характеристикой столкновения молекул является длина свободного пробега молекулы. **Длиной свободного пробега** λ называют среднее расстояние, которое проходит молекула между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами вещества. Длину свободного пробега можно определить по формуле:

$$\lambda = \frac{\langle u \rangle}{\nu} \quad (244)$$

Из соотношения (244) видно, что длина свободного пробега прямо пропорциональна **средней скорости движения молекул** $\langle u \rangle$ и обратно пропорциональна **частоте столкновений** ν . В более конкретных случаях длина **свободного пробега** зависит от **площади эффективного сечения** σ и **концентрации молекул** n и может быть найдена из соотношения:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} \quad (245)$$

Так как зависимость (245) от σ и n обратная, то с ростом температуры длина свободного пробега увеличивается, а при увеличении концентрации, а, следовательно, и давления она уменьшается.

Рассмотрим три основных явления переноса и дадим им общую характеристику.

Под **диффузией** понимают самопроизвольное выравнивание концентраций в смеси различных веществ, обусловленное тепловым движением молекул веществ этих смесей. Выравнивание концентраций связано с переносом массы каждой из компонент смеси в направлении убывания ее концентрации. Уравнения, описывающие перенос потоков частиц или их масс при диффузии, были получены опытным (эмпирическим) путем и носят название **уравнений Фика**. Из этих уравнений видно, что **количество переносимых частиц** каждой компоненты смеси N_i (**количество переносимой массы** каждой компоненты M_i) пропорционально

площади поперечного сечения S , градиента концентрации компоненты dn_i/dz (градиента плотности компоненты $d\rho_i/dz$) и связано с ними коэффициентом диффузии D . В рассматриваемом случае ось OZ совпадает с направлением переноса вещества. Уравнения Фика имеют следующий вид:

$$N_i = -D \frac{dn_i}{dz} S \quad (246)$$

$$M_i = -D \frac{d\rho_i}{dz} S \quad (247)$$

Соотношение (246) получено для потока числа молекул i -го вида, а (247) для потока массы молекул i -го вида.

В уравнениях (246) и (247) D - есть коэффициент диффузии, который определяется по формуле:

$$D = \frac{1}{3} \langle u \rangle \lambda \quad (248)$$

В случае смеси из молекул двух видов с массами m_1 и m_2 коэффициент диффузии принимает вид:

$$D = \frac{3}{8} \left(\frac{\pi kT}{2\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{n\sigma} \quad (249)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведенная масса молекул смеси, а

$\sigma = \pi \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2$ - эффективное сечение молекул смеси.

Из соотношений (248) и (249) видно, что коэффициент диффузии зависит от рода вещества, его температуры и давления (концентрации). С ростом температуры коэффициент диффузии растет, а с ростом концентрации (давления) – он уменьшается. Диффузия характерна не только для газообразного состояния вещества, но также и для жидкого, твердого состояний.

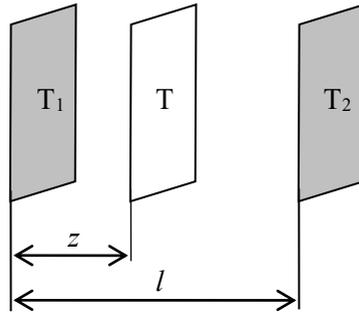


Рис. 38

Теплопроводностью называют перенос тепла в направлении менее нагретой области ТД системы или от более нагретого тела к менее нагретому телу, при наличии непосредственного контакта между ними.

На рис. 38 представлен процесс передачи тепла от более нагретого слоя вещества с температурой T_1 к менее нагретому слою с температурой T_2 , при этом градиент направлен вдоль оси OZ

Этот процесс является необратимым. Перенос тепла обусловлен наличием **неравновесного распределения температур в системе.** Поток переносимого тепла q пропорционален **градиенту температуры dT/dz и площади поперечного сечения S** и связан с ними через **коэффициент теплопроводности κ .** Уравнение для потока тепла называют уравнение теплопроводности или уравнением Фурье. Это уравнение имеет вид:

$$q = -\kappa \frac{dT}{dz} S \quad (250)$$

где коэффициентом теплопроводности для газа является величина:

$$\kappa = \frac{1}{3} \langle u \rangle \lambda \rho c_v \quad (251)$$

В соотношении (251) ρ - плотность газа, c_v - его удельная изохорная теплоемкость.

Уравнение (250) было получено экспериментально. Знак минус в формуле для потока тепла указывает на то, что оно перенос-

сится к менее нагретым областям. Процесс переноса тепла возможен для любых агрегатных состояний вещества.

Коэффициент теплопроводности κ , согласно формуле (251), зависит от рода вещества и его параметров состояния. Для газов с ростом температуры коэффициент теплопроводности растет. Зависимость от давления обусловлена соотношением между длиной свободного пробега и расстояния между поверхностями вещества, обменивающимися теплом (с расстоянием на которое это тепло передается). Если это расстояние намного больше длины свободного пробега, то коэффициент теплопроводности не зависит от давления. Если оно соизмеримо с этой длиной, то коэффициент теплопроводности уменьшается с понижением давления.

Вязкостью (внутренним трением) называют явление переноса импульса между слоями вязких газов или жидкостей при их течении или движении твердых тел в этих средах. Это явление переноса происходит из-за сцепления между этими слоями и поверхностями твердых тел, к которым они примыкают, за счет межмолекулярных сил. **Межмолекулярные силы сцепления** (силы внутреннего трения) приводят к возникновению градиента скорости (импульса) для этих слоев в направлении перпендикулярном течению. Если рассматривается движение газа или жидкости по трубе, то те слои, которые примыкают к ее стенкам, не движутся, как и ее стенки, а слой в центре имеет максимально возможную скорость. Если рассматривается движение твердого тела в газе или жидкости, то быстрее всего движутся слои, примыкающие к телу и их скорость равна или близка к скорости этого тела. Скорость стальных слоев монотонно убывает при удалении от этого слоя. Уравнение вязкости для сил внутреннего трения определяется уравнением:

$$F = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S \quad (252)$$

Соотношение (252) было также рассмотрено в разделе в теме «Основы гидродинамики» выше.

Поток импульса за единицу времени K пропорционален **градиенту скорости слоев** в направлении перпендикулярном к течению или поверхности тела, движущегося в жидкой или газооб-

разной среде dv/dz , и площади их поверхности соприкосновения S . Коэффициентом пропорциональности в этом случае является динамическая вязкость η . Уравнение, описывающее перенос импульса, называется **уравнением вязкости** или **уравнением Ньютона**. Оно имеет следующий вид при ламинарном течении газа или жидкости:

$$K = -\eta \frac{dv}{dz} S \quad (253)$$

Соотношение (253) было получено опытным путем и выполняется только для сред, в которых течение является **ламинарным**. Знак минус в **уравнении вязкости** показывает, что импульс передается от более быстрых слоев к менее быстрым.

Коэффициент вязкости η в уравнениях (252) и (253), также как и другие коэффициенты переноса зависит от рода веществ и их параметров состояния и определяется по формуле:

$$\eta = \frac{1}{3} \langle u \rangle \lambda \rho \quad (254)$$

Коэффициент вязкости газа растет с ростом температуры, а **коэффициент вязкости жидкости** при этом убывает. **Зависимость** коэффициента вязкости газа **от давления** такая же как у коэффициента теплопроводности.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица сравнения основных кинематических и динамических величин при поступательном и вращательном движении

Поступательное движение		Вращательное движение	
Наименование физической величины	Основное соотношение	Наименование физической величины	Основное соотношение
Линейная скорость	мгновенная $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ средняя $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$	Угловая скорость	мгновенная $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ средняя $\langle \vec{\omega} \rangle = \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t}$
Линейное ускорение	мгновенное $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ среднее $\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$	Угловое ускорение	мгновенное $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ среднее $\langle \vec{\beta} \rangle = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$
Равномерное прямолинейное движение	$s = v \cdot t$	Равномерное вращение по окружности	$\varphi = \omega \cdot t$
Равноускоренное прямолинейное движение	$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ $v = v_0 + at$	Равноускоренное вращение по окружности	$\varphi = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}$ $\omega = \omega_0 + \beta t$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$ $L_z = I \cdot \omega_z$
Сила (второй закон Ньютона)	$\vec{F} = m\vec{a}$ в дифференциальной форме: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	Момент силы (основной закон динамики вращательного движения)	$\vec{M} = I \cdot \vec{\beta}$ $M_z = I \cdot \beta_z$ в дифференциальной форме: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Кинетическая энергия	$T = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия	$T_{\text{вр}} = \frac{I\omega^2}{2}$
Механическая работа	$dA = F_s ds$	Механическая работа	$dA = M_\omega d\varphi$

Таблица основных физических величин и соответствующих им единиц измерения в механике и молекулярной физике

Наименование физической величины	Символьное обозначение физической величины	Единицы измерения физических величин в СИ
Расстояние, путь, перемещение	l, s, r	Метр (м)
Время	t	Секунда (с)
Масса	$m(M)$	Килограмм (кг)
Скорость	v	м/с
Ускорение	a	м/с ²
Сила	F	Ньютон (Н)
Работа, энергия, количество теплоты	A, T, U, W, E, Q	Джоуль (Дж)
Мощность	$P(N)$	Ватт (Вт)
Импульс	p	кг·м/с
Момент импульса	L	кг·м ² /с
Момент силы	M	кг·м ² /с ²
Момент инерции	I	кг·м ²
Температура	T	Кельвин (К)
Давление	P	Паскаль (Па)
Энтропия	S	Дж/К
Объем	V	м ³
Период колебания	T	Секунда (с)
Нормальная частота	ν	с ⁻¹
Циклическая частота	ω	рад/с

**Основные физические константы,
используемые в механике и молекулярной физике**

Наименование физ. постоянной	Обозначение	Численное значение	Единицы измерения
Гравитационная постоянная	$G(\gamma)$	$6.67 \cdot 10^{-11}$	$\text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$
Ускорение свободного падения	g	9.8	$\text{м} / \text{с}^2$
Универсальная газовая постоянная	R	8.31	$\text{Дж} / \text{моль} \cdot \text{К}$
Постоянная Больцмана	k	$1.38 \cdot 10^{-23}$	$\text{Дж} / \text{К}$
Число Авогадро	N_A	$6.02 \cdot 10^{23}$	моль^{-1}
Молярный объем	V_μ	22,4	л

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Детлаф, Б.М. Яворский. Курс физики, М., Высшая школа, 2002.
2. А. Н. Ремизов, А. Я. Потапенко. Курс физики, М., Дрофа, 2002.
3. И. В. Савельев. Курс общей физики. 1 том Механика. Молекулярная физика, М., Наука, 1987.
4. Общий курс физики, Том 1, Механика, Сивухин Д.В., 2005.
5. Общий курс физики, Том 2, Термодинамика и молекулярная физика, Сивухин Д.В., 2005.