

ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМ.Т.Г.ШЕВЧЕНКО

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа и приложений

Математический анализ.

Задания для индивидуальной работы и рекомендации по их выполнению

методические указания

Тирасполь, 2022

УДК 517(076.5)
ББК В161я73
М 34

Составитель:

Г.И.Ворническу, кандидат физико-математических наук, доцент

Рецензенты:

К.Д.Ляхомская, кандидат физико-математических наук, начальник управления научной политики и организации научных исследований ПГУ им.Т.Г.Шевченко

Л.В.Чуйко, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа и приложений физико-математического факультета ПГУ им.Т.Г.Шевченко

Математический анализ. Задания для индивидуальной работы и рекомендации по их выполнению: методические указания./ сост.Г.И.Ворническу. – Издательство ПГУ, 2022.-51 с.

В работе приведены варианты заданий для индивидуальной работы по разделам математического анализа и примеры оформления и решения заданий. Указания предназначены для студентов-бакалавров, обучающихся по направлению «Электроника и наноэлектроника» профиль «Промышленная электроника», соответствуют основной образовательной программе, рабочей программе и включены в фонд оценочных средств по дисциплине «Математический анализ».

УДК 517(076.5)
ББК В161я73
М 34

Рекомендовано научно-методическим советом ПГУ им.Т.Г.Шевченко

© Ворническу Г.И.,
составление 2022

Оглавление

Введение.	4
Индивидуальная работа 1.	6
Индивидуальная работа 2.	12
Индивидуальная работа 3.	21
Индивидуальная работа 4.	25
Индивидуальная работа 5.	30
Индивидуальная работа 6.	35
Индивидуальная работа 7.	42
Литература...	50

Введение

В настоящее издание включены задания для индивидуальной работы студентов-бакалавров по следующим разделам математического анализа:

- I. Введение в математический анализ.
- II. Предел последовательности.
- III. Предел функции.
- IV. Производная и функции одной переменной и ее применения.
- V. Неопределенный интеграл.
- VI. Определенный интеграл и его приложения.
- VII. Функции многих переменных.
- VIII. Кратные и криволинейные интегралы.
- IX. Числовые и функциональные ряды.

Согласно Положению о балльно-рейтинговой системе, принятой на физико-математическом факультете, студент, обучающийся по программе бакалавриата в течение семестра должен набрать от 45 до 70 баллов. Согласно технологической карте по дисциплине «математический анализ» баллы распределяются следующим образом: 20 баллов за присутствие и работу на лекционных и практических занятиях, 20 баллов за контрольные работы и 30 баллов за индивидуальные работы.

В настоящем пособии приведены все индивидуальные работы, предлагаемые студентам по дисциплине «математический анализ». Индивидуальные работы 1-4 предназначены для выполнения в первом семестре, индивидуальные работы 5-7 – во втором семестре.

В каждой индивидуальной работе указано максимальное количество баллов, которые может заработать студент, выполнив все задания своего варианта правильно. Для того, чтобы обучающемуся было легче сориентироваться и допустить как можно меньше ошибок, для каждой индивидуальной работы решен один вариант.

Решение всех индивидуальных работ оформляется в отдельной тетради, от руки. Обязательно требуется указать номер индивидуальной работы, тему, максимальное количество баллов. Далее следует записать условие задания с указанием количества баллов и ниже решение. В конце задания необходимо записать ответ.

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 1

**Темы: «Введение в математический анализ»,
«Предел последовательности», «Предел функции»**

Максимальное количество баллов -7.

1. Решить уравнение. (1 балл)

вариант	задание	вариант	задание
I	$x^2 + 3 x + 1 - 1 = 0$	VI	$ x - 2 + 4 - 5 = 0$
II	$ 3x - 5 = \sqrt{(5 - 2x)^2}$	VII	$\frac{2}{ x - 1 } + \frac{4}{x + 3} = 3$
III	$2^{ x+3 } = 8^{3x-5}$	VIII	$2x - 3 + 3x - 1 = 5x - 4 $
IV	$ 3x - 4 = \sqrt[4]{(2 + x)^4}$	IX	$2 x + 2 + 3 = (x + 2)^2$
V	$5^{ 3x-7 } = 0,2^{-2 x+1 }$	X	$ x - 1 + x - 2 + x + 3 = x$

2. Вычислить пределы последовательностей (2 балла):

вариант	задание	вариант	задание
I	a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}$	VI	a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^3 - (n-4)^3}{n^2 - 5n + 3}$
	б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+4)!}{(n-1)! + (n+1)!}$		б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+1)!}{(n+3)! + (n-1)!}$
II	a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}$	VII	a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 - (n-2)^2}{n^2 - n + 7}$
	б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$		б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! + (2n-1)!}{(2n)! + (2n+1)!}$
III	a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4}$	VIII	a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-4)^3 + (n-2)^3}{n^3 - 4n^2 + 2n - 3}$
	б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$		б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+4)!}{(n+2)! + (n+1)!}$
IV	a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 + (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2}$	IX	a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}$
	б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! + (n+2)!}{(n+3)!}$		б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n)!}{(2n)! + (2n+2)!}$
V	a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5-n)^2 + (n+3)^2}{(n+2)^2 + (n+3)^2}$	X	a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (n-2)^2}{5n - 3}$
	б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)! + (2n+4)!}{(2n)! + (2n+1)!}$		б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)! + (2n+2)!}{(2n+1)!}$

3. Вычислить пределы функций без использования правила Лопиталя (4 балла).

вариант	задание	вариант	задание
I	a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$	VI	a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$

	$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 2}{4x + 3} \right)^{2x+3}$		$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{13+x} - 4}{\sqrt{3x} - 3}$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x + 2}{6x - 1} \right)^{3x-5}$
II	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 1}{5x + 3} \right)^{6x+2}$	VII	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{1-2x} - 3}{x - 3}$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{7x^2}$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 4}{2x + 5} \right)^{3x-1}$
III	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}}$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 2}{5x + 4} \right)^{2x+3}$	VIII	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{x - 2}$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x - 5} \right)^{6x+2}$
IV	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}$	IX	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \arctg x}$

	г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^{2x-5}$		г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+7}{3x-4} \right)^{5x-2}$
V	а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ б) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{(e^{x^2}-1)^2}$ г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-7}{2x+5} \right)^{3x+4}$	X	а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$ б) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x-7}-3}{\sqrt{x}-4}$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1-\cos 2x)}$ г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+6}{5x-1} \right)^{5x+4}$

Пример решения:

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 1

тема «Введение в математический анализ»,

«Предел последовательности», «Предел функции»

Максимальное количество баллов -7.

1. Решить уравнение $|2x+3| = \sqrt{(4-x)^2}$ (1 балл)

Решение.

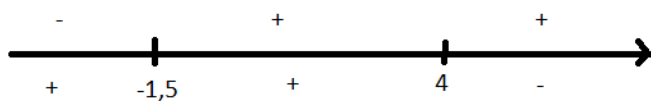
$$|2x+3| = \sqrt{(4-x)^2}$$

$$|2x+3| = |4-x|$$

$$|2x+3| - |4-x| = 0$$

Найдем нули выражений по знакам модуля: $x = -\frac{3}{2}$, $x = 4$.

Отметим эти значения на числовой оси и определим знаки выражений $2x+3$, $4-x$ на полученных промежутках.



Над осью указаны знаки выражения $2x + 3$, под осью – знаки выражения $4 - x$. Таким образом числовая ось разбивается на три промежутка, в каждом из которых выражения под знаком модуля имеют определенные знаки. В соответствии с этими знаками, воспользовавшись определением модуля действительного числа получаем следующую совокупность

$$\begin{cases} x \leq -1,5 \\ -(2x + 3) - (4 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1,5 \\ -2x - 3 - 4 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1,5 \\ -x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1,5 < x < 4 \\ (2x + 3) - (4 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1,5 < x < 4 \\ 2x + 3 - 4 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1,5 < x < 4 \\ 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ (2x + 3) + (4 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 2x + 3 + 4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1,5 \\ x = -7 \end{cases} \begin{cases} -1,5 < x < 4 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \begin{cases} x = -7 \\ x = \frac{1}{3} \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \begin{cases} x \geq 4 \\ x = -7 \end{cases}$$

Ответ: $-7, \frac{1}{3}$

2. Вычислить пределы последовательностей (2 балла):

Решение.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-4)^3 + (n-2)^3}{n^3 - 4n^2 + 2n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 12n^2 + 48n - 64 + n^3 - 6n^2 + 12n - 8}{n^3 - 4n^2 + 2n - 3} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 18n^2 + 60n - 72}{n^3 - 4n^2 + 2n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^3}{n^3} - \frac{18n^2}{n^3} + \frac{60n}{n^3} - \frac{72}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} - \frac{4n^2}{n^3} + \frac{2n}{n^3} - \frac{3}{n^3}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{18}{n} + \frac{60}{n^2} - \frac{72}{n^3}}{1 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n)!}{(2n)! + (2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!(2n+1) + (2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!(2n+1+1)}{(2n)!(1+(2n+1)(2n+2))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{4n^2+6n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{n^2} + \frac{2}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2} + \frac{6n}{n^2} + \frac{3}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{0}{4} = 0.$$

Ответ: а) 2; б) 0.

3. Вычислить пределы функций без использования правила Лопиталя (4 балла).

а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(-1)^3 - 3(-1) - 2}{(-1)^2 + 2(-1) + 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$ – неопределенность.

Разложим многочлены в числителе и знаменателе на множители.

$$\begin{aligned} x^3 - 3x - 2 &= x^3 - x - 2x - 2 = x(x^2 - 1) - 2(x + 1) = x(x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) \\ &= (x + 1)(x(x - 1) - 2) = (x + 1)(x^2 - x - 2) = (x + 1)^2(x - 2) \\ x^2 + 2x + 1 &= (x + 1)^2 \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в предел:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^2(x - 2)}{(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 2) = -1 - 2 = -3$$

б) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x - 7} - 3}{\sqrt{x} - 4} = \frac{\sqrt{16 - 7} - 3}{\sqrt{16} - 4} = \left(\frac{0}{0}\right)$ – неопределенность

Для раскрытия неопределенности помножим числитель и знаменатель на выражение $(\sqrt{x - 7} + 3)(\sqrt{x} + 4)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x - 7} - 3}{\sqrt{x} - 4} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x - 7} - 3)(\sqrt{x - 7} + 3)(\sqrt{x} + 4)}{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x - 7} + 3)(\sqrt{x} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{((\sqrt{x - 7})^2 - 3^2)(\sqrt{x} + 4)}{((\sqrt{x})^2 - 4^2)(\sqrt{x - 7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)}{(x - 16)(\sqrt{x - 7} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x - 7} + 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$ – неопределенность

Для раскрытия неопределенности в этом случае воспользуемся I замечательным пределом и его следствиями.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x 2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x 2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{x 2 \sin^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{\cos x}}{2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x \sin 2x} = \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x \frac{\sin 2x}{2x} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{x^2}{4}}{2x^2} = \frac{1}{4}.$$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+6}{5x-1} \right)^{5x+4} = (1^\infty)$ – неопределенность

для раскрытия этой неопределённости воспользуемся вторым замечательным пределом.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+6}{5x-1} \right)^{5x+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1+7}{5x-1} \right)^{5x+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{5x-1} \right)^{5x+4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{5x-1} \right)^{5x-1+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{5x-1} \right)^{5x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{5x-1} \right)^5 = e^7 \cdot 1 = e^7$$

Ответ: а) -3 ; б) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{1}{4}$; г) e^7 .

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 2

Тема «Производная и функции одной переменной и ее применения»

Максимальное количество баллов - 8.

1. Вычислить производные (3 балла):

а) сложной функции;

б) методом логарифмического дифференцирования;

в) функции, заданной параметрически.

вариант	задание	вариант	задание
I	а) $y = \sqrt[3]{x^2 - 6x}$ б) $y = (\sin x)^{5x^2}$ в) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1 - t^2} \\ y = \operatorname{arctg} 3t \end{cases}$	VI	а) $y = \arcsin(3\ln^2 x)$ б) $y = (\cos 2x)^{\sin x}$ в) $\begin{cases} x = t^2 + 2^t + 1 \\ y = t^3 + 8^{t^2+1} \end{cases}$
II	а) $y = \ln(\cos^4 x)$ б) $y = (\ln x)^{3x}$ в) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}(2^t) \\ y = \ln(2^t) \end{cases}$	VII	а) $y = \sqrt[3]{e^x - 1}$ б) $y = (\sin x)^{8\ln x}$ в) $\begin{cases} x = t - \cos t \\ y = t^2 + \sin t \end{cases}$
III	а) $y = 4\operatorname{arctg}(e^x - 2)$ б) $y = (\arcsin x)^{e^x}$ в) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}(e^t) \\ y = \operatorname{tg}(e^t) \end{cases}$	VIII	а) $y = \ln(5x^2 + 2x^5)$ б) $y = (\operatorname{tg} x)^{e^x}$ в) $\begin{cases} x = t^2 + \frac{1}{t} \\ y = t + \frac{1}{t^2} \end{cases}$
IV	а) $y = 2^{\operatorname{tg} x^2}$ б) $y = x^{\arcsin x}$ в) $\begin{cases} x = t - \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$	IX	а) $y = \arcsin(x^2 - 4)$ б) $y = (\cos 5x)^{e^x}$ в) $\begin{cases} x = \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} \\ y = \frac{2 - t^2}{t^2 + 1} \end{cases}$

V	a) $y = \frac{1}{\sin 4x}$ б) $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}$ в) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$	X	a) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7-x^2}}$ б) $y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}$ в) $\begin{cases} x = t + \ln \cos t \\ y = t - \ln \sin t \end{cases}$
----------	--	----------	---

2. Вычислить дифференциал функции (1 балл).

вариант	задание	вариант	задание
I	$y = \frac{\ln 2x}{3}$	VI	$y = \sqrt{1+x^2}$
II	$y = 2\sin 2x$	VII	$y = \frac{x^2-1}{x}$
III	$y = \sqrt{x-1}$	VIII	$y = 7^{\ln x}$
IV	$y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$	IX	$y = \arcsin 2x$
V	$y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$	X	$y = \cos \frac{3}{x}$

3. Провести полное исследование функции и построить ее график (3 балла)

вариант	задание	вариант	задание
I	$f(x) = \frac{2}{(x-2)(x-1)}$	VI	$f(x) = \frac{4}{3x+x^2}$
II	$f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$	VII	$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$
III	$f(x) = \frac{2}{x^2+2x}$	VIII	$f(x) = \frac{x+3}{x-4}$
IV	$f(x) = \frac{4x^2}{3+x^2}$	IX	$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2}$
V	$f(x) = \frac{12x}{9+x^2}$	X	$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

4. Решить задачу. (1 балл)

вариант	задание
I	Данное положительное число m разложить на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.
II	Разность двух чисел равна 7. Каковы должны быть эти числа, чтобы произведение их было наименьшим.
III	Из куска проволоки длиной 20 см согнуть прямоугольник наибольшей площади. Каковы размеры этого прямоугольника?
IV	Из всех прямоугольников, имеющих периметр 20 см, выделить тот, у которого диагональ наименьшая.
V	Гипотенуза прямоугольного треугольника равна s . Каковы должны быть катеты этого треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?
VI	В данный полукруг радиуса R вписать прямоугольник с наибольшим периметром.
VII	Показать, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг радиуса r , наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.
VIII	Определить размеры цилиндра объемом 10 м^3 , имеющего наименьшую полную поверхность.
IX	Бак с квадратным основанием должен вмещать 27 л. Каковы должны быть его размеры, чтобы полная поверхность была наименьшей?
X	Из квадратного листа жести, сторона которого 42 см, вырезают по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивают коробку. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

Пример решения:

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 2

Тема «Производная и функции одной переменной и ее применения»

Максимальное количество баллов - 8.

1. Вычислить производные (3 балла): а) сложной функции; б) методом логарифмического дифференцирования; в) функции, заданной параметрически.

Решение.

а) $y = \arcsin(x^2 - 4)$

$$y' = (\arcsin(x^2 - 4))' = \frac{1}{\sqrt{1 + (x^2 - 4)^2}} \cdot (x^2 - 4)' = \frac{1}{\sqrt{1 + (x^2 - 4)^2}} \cdot 2x =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1 + x^4 - 8x^2 + 16}} = \frac{2x}{\sqrt{x^4 - 8x^2 + 17}}.$$

$$6) y = (\cos 5x)^{e^x}$$

$$\ln y = \ln(\cos 5x)^{e^x}$$

$$\ln y = e^x \cdot \ln(\cos 5x)$$

$$(\ln y)' = (e^x \cdot \ln(\cos 5x))'$$

$$\frac{y'}{y} = (e^x)' \cdot \ln(\cos 5x) + e^x (\ln(\cos 5x))'$$

$$\frac{y'}{y} = e^x \ln(\cos 5x) + e^x \frac{(\cos 5x)'}{\cos 5x}$$

$$\frac{y'}{y} = e^x \ln(\cos 5x) + e^x \frac{-5 \sin x}{\cos 5x}$$

$$y' = y \left(e^x \ln(\cos 5x) - \frac{5e^x \sin x}{\cos 5x} \right)$$

$$y' = (\cos 5x)^{e^x} \left(e^x \ln(\cos 5x) - \frac{5e^x \sin x}{\cos 5x} \right)$$

$$B) \begin{cases} x = \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} \\ y = \frac{2 - t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} \end{cases}$$

Для вычисления производной функции, заданной параметрически, воспользуемся формулой:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y'(x) = \frac{\left(\frac{2-t^2}{\sqrt{t^2+1}}\right)'}{\left(\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\right)'} = \frac{\frac{(2-t^2)'(\sqrt{t^2+1}) - (2-t^2)(\sqrt{t^2+1})'}{(\sqrt{t^2+1})^2}}{\frac{(t^2)'(\sqrt{t^2+1}) - (t^2)(\sqrt{t^2+1})'}{(\sqrt{t^2+1})^2}} = \frac{\left(-2t(\sqrt{t^2+1}) - (2-t^2)\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}\right)}{\left(2t\sqrt{t^2+1} - t^2\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}\right)}$$

$$= \frac{-2t(t^2 + 1) - 2t + t^3}{2t(t^2 + 1) - t^3} = \frac{-2t^3 - 2t - 2t + t^3}{2t^3 + 2t - t^3} = \frac{-t^3 - 4t}{t^3 + 2t}$$

Ответ: а) $y' = \frac{2x}{\sqrt{x^4 - 8x^2 + 17}}$

б) $y' = (\cos 5x)^{e^x} \left(e^x \ln(\cos 5x) - \frac{5e^x \sin x}{\cos 5x} \right)$

в) $y'(x) = \frac{-t^3 - 4t}{t^3 + 2t}$

2. Вычислить дифференциал функции $y = \sin \frac{5}{x}$ (1 балл).

Решение.

Дифференциал функции равен $dy = y'(x)dx$

$$dy = \left(\sin \frac{5}{x} \right)' dx = \cos \frac{5}{x} \cdot \left(\frac{5}{x} \right)' dx = -\frac{5}{x^2} \cos \frac{5}{x} dx$$

Ответ. $dy = -\frac{5}{x^2} \cos \frac{5}{x} dx$

3. Провести полное исследование функции $f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$ и построить ее график (3 балла).

Решение.

Исследование функции проводим по плану.

1. Находим область определения функции

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

2. Исследуем функцию на непрерывность.

Данная функция является непрерывной на своей области определения. Точка $x = 0$ является точкой разрыва. Исследуем эту точку.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^3 + 1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3 + 1}{x^2} = +\infty$$

Следовательно, $x = 0$ является точкой разрыва 2 рода.

3. Найдем асимптоты графика функции.

Так как точка $x = 0$ является точкой разрыва 2 рода, то график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

Для того, чтобы выяснить, есть ли у графика функции наклонная асимптота, найдем числа

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3+1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+1}{x^3} = 2;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3+1}{x^2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+1-2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Учитывая, что общий вид наклонной асимптоты $y = kx + b$ и найденные значения k и b получим следующее уравнение $= 2x + b$.

4. Исследуем функцию на четность.

Так как область определения функции симметрична относительно начала координат, то необходимо проверить выполнение одного из условий: $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3 + 1}{(-x)^2} = \frac{-2x^3 + 1}{x^2} \neq f(x) \neq -f(x).$$

Ни одно из условий не выполняется, следовательно, функция не является ни четной ни нечетной. А значит график не будет симметричным ни относительно оси ординат ни относительно начала координат.

5. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.

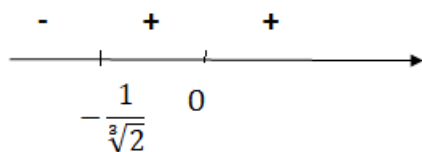
С осью Ox :

$$\frac{2x^3+1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3+1=0 \Leftrightarrow 2x^3=-1 \Leftrightarrow x^3 = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

С осью Oy точек пересечения нет.

6. Находим интервалы знакопостоянства функции.

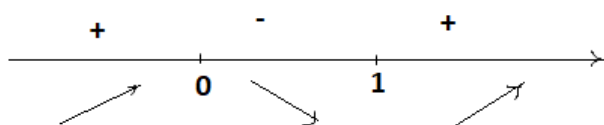
Так как нулем функции является точка $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, то



7. Находим интервалы монотонности и экстремумы функции.

$$f'(x) = \left(\frac{2x^3 + 1}{x^2} \right)' = \frac{6x^2 \cdot x^2 - (2x^3 + 1)2x}{x^4} = \frac{6x^4 - 4x^4 - 2x}{x^4} = \frac{2x^4 - 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2}{x^3}.$$

$$\frac{2x^3 - 2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 2 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$



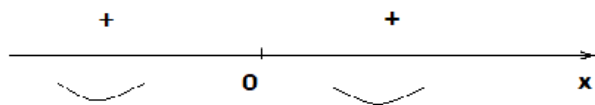
$x = 1$ – точка минимума

$$y_{\min} = y(1) = \frac{2 \cdot 1^3 + 1}{1^2} = 3$$

8. Находим интервалы выпуклости графика и точки перегиба.

$$f''(x) = \left(\frac{2x^3 - 2}{x^3} \right)' = \frac{6x^2 \cdot x^3 - (2x^3 - 2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{6x^5 - 6x^5 + 2x^2}{x^6} = \frac{2}{x^4}$$

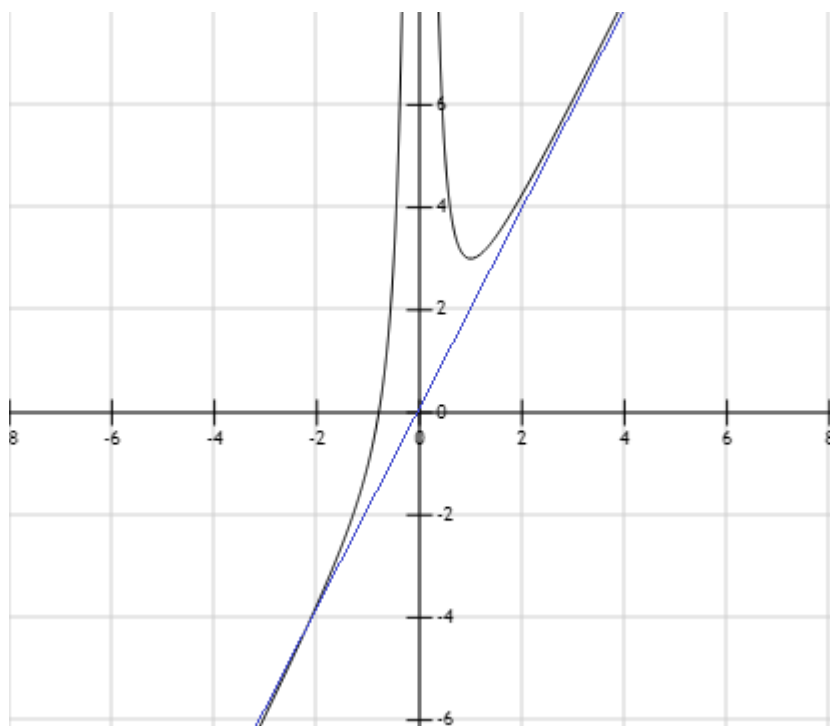
Так как $f''(x)$ не обращается в нуль ни при каких значениях переменной, то график функции точек перегиба не имеет. $f''(x) > 0$ на всей области определения, то график будет вогнутым (выпуклым вниз).



9. Соберем все данные в таблицу

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 0\right)$	0	(0; 1)	1	$(1; +\infty)$
y	-	0	+	не существует	+	3	+
y'	+	+	+		-	0	+
y''	+	+	+		+	+	+
вид графика						МИНИМ.	

10. Построим график функции



4. Решить задачу. (1 балл)

Бак с квадратным основанием должен вмещать 27 л. Каковы должны быть его размеры, чтобы полная поверхность была наименьшей?

Дано:

бак – прямоугол. параллелепипед

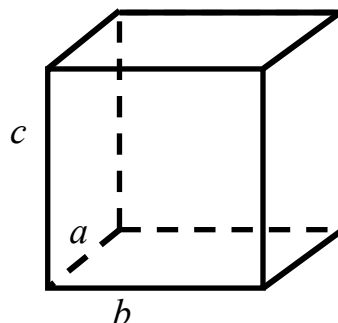
основание – квадрат

$V = 27$ л

$S_{\text{полн.}}$ – наименьшая

Найти:

размеры бака



Решение

Обозначим размеры бака через a, b, c . Так как по условию в основании лежит квадрат, то $a = b$. Обозначим $a = b = x$. Известно, что объем прямоугольного параллелепипеда можно вычислить по формуле $V = abc$. Таким образом, имеем $abc = 27$. Отсюда $x^2 c = 27$, $c = \frac{27}{x^2}$.

$$S_{\text{полн.}} = 2(ab + ac + bc)$$

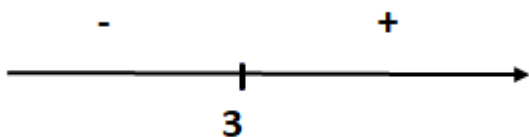
$$S(x) = 2 \left(x^2 + x \frac{27}{x^2} + x \frac{27}{x^2} \right) = 2 \left(x^2 + \frac{54}{x} \right) = 2x^2 + \frac{108}{x}$$

$$S'(x) = 4x - \frac{108}{x^2} = \frac{4x^3 - 108}{x^2}$$

$$\frac{4x^3 - 108}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 108 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 27 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Для функции $S(x) = 2x^2 + \frac{108}{x}$ точка $x = 3$ является точкой минимума.

Действительно,



Следовательно, в этой точке функция достигает наименьшего значения. Поэтому размеры бака $a = 3, b = 3, c = \frac{27}{9} = 3$.

Ответ. Для того, чтобы полная поверхность бака была наименьшей его размеры должны быть 3, 3, 3.

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 3

Тема «Неопределенный интеграл»

максимальное количество баллов – 8

1. Вычислить неопределенный интеграл методом введения переменной под знак дифференциала (2 балла).

вариант	задание	вариант	задание
I	$\int \frac{1 + \ln x}{x} dx$	VI	$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x + 1}} dx$
II	$\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$	VII	$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$
III	$\int \frac{\operatorname{tg}(x + 1)}{\cos^2(x + 1)} dx$	VIII	$\int \frac{2^x}{\sqrt{1 - 4^x}} dx$
IV	$\int \frac{4 \arctg x}{1 + x^2} dx$	IX	$\int \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx$
V	$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} dx$	X	$\int \frac{e^{\arcsin x} + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

2. Вычислить интеграл методом интегрирования по частям (2 балла).

вариант	задание	вариант	задание
I	$\int x \arctg x dx$	VI	$\int \arctg 5x dx$
II	$\int e^{-3x}(2 - 9x) dx$	VII	$\int \ln(x^2 + 1) dx$
III	$\int (2x - 5) \cos 4x dx$	VIII	$\int (2 - 3x) \sin 2x dx$
IV	$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$	IX	$\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$
V	$\int \ln(x^2 + 4) dx$	X	$\int e^{3x}(3x + 4) dx$

3. Вычислить интеграл методом замены переменной (2 балла)

вариант	задание	вариант	задание
I	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 + \sqrt{2x+1}}}$	VI	$\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx$
II	$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1} + 1}$	VII	$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$
III	$\int \frac{1 + \sqrt{x^2-9}}{x} dx$	VIII	$\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+3x+4}} dx$
IV	$\int \frac{x^3 dx}{1 - \sqrt{x^2+1}}$	IX	$\int \frac{3 + \sqrt{x^2-4}}{x} dx$
V	$\int \frac{\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}} dx$	X	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

4. Вычислить интеграл от тригонометрической функции. (2 балла)

вариант	задание	вариант	задание
I	$\int \frac{dx}{4\sin x - 8\cos x + 5}$	VI	$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$
II	$\int \frac{2 - \cos x}{2 + \cos x} dx$	VII	$\int \cos^5 x dx$
III	$\int \frac{\cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$	VIII	$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$
IV	$\int \frac{2\cos x - 5\sin x}{3\cos x + 4\sin x} dx$	IX	$\int \frac{1}{\cos^6 x} dx$
V	$\int \sin^4 x dx$	X	$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$

Пример решения:

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 3

Тема «Неопределенный интеграл»

максимальное количество баллов – 8

1. Вычислить неопределенный интеграл методом введения переменной под знак дифференциала (2 балла).

Решение.

$$\int \frac{e^{\arcsin x} + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \left(\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\int e^{\arcsin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \arcsin x = \int e^{\arcsin x} d(\arcsin x) + \arcsin x = e^{\arcsin x} +$$

$$+ \arcsin x + C.$$

Ответ. $e^{\arcsin x} + \arcsin x + C$.

2. Вычислить интеграл методом интегрирования по частям (2 балла).

Решение.

$$\int (3-2x)\sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = 3-2x \\ dv = \sin 2x dx \end{array} \quad v = \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cos 2x \right| =$$

$$= \frac{3-2x}{2} \cos 2x - \int (-2) \cdot \frac{1}{2} \cos 2x dx = \frac{3-2x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

Ответ. $\frac{3-2x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

3. Вычислить интеграл методом замены переменной (2 балла).

Решение.

$$\int \frac{1 + \sqrt{x-1}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-1} = t \\ x-1 = t^2 \\ x = t^2 + 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{1+t}{t^2+1} 2t dt = 2 \int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt =$$

$$2 \int \frac{t^2+1-1+t}{t^2+1} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt + 2 \int \frac{t}{t^2+1} dt = 2t - 2 \arctg t +$$

$$+ \int \frac{2t dt}{t^2+1} = 2t - 2 \arctg t + \int \frac{(t^2+1) dt}{t^2+1} = 2t - 2 \arctg t + \ln|t^2+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x-1} - 2 \arctg \sqrt{x-1} + \ln|x| + C.$$

Ответ. $2\sqrt{x-1} - 2 \arctg \sqrt{x-1} + \ln|x| + C$.

4. Вычислить интеграл от тригонометрической функции. (2 балла)

Решение.

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \right)^2 dx = \left| \begin{array}{ll} t = tg \frac{x}{2} & \sin x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ x = 2 \arctg t & \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$\int \left(\frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \right)^2 \frac{2dt}{1+t^2} = \int (t^2)^2 \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{t^4}{1+t^2} dt$$

Выделим целую часть дроби $\frac{t^4}{1+t^2}$.

$$\begin{array}{r} t^4 \\ t^4 + t^2 \overline{) t^2 + 1} \\ \underline{-t^2} \\ -t^2 - 1 \\ \underline{-t^2 - 1} \\ 1 \end{array}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{t^4}{1+t^2} dt &= 2 \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 2 \frac{t^3}{3} - 2t + 2 \arctg t + C = \\ &= \frac{2}{3} tg^3 \frac{x}{2} - 2tg \frac{x}{2} + 2 \arctg \left(tg \frac{x}{2} \right) + C = \frac{2}{3} tg^3 \frac{x}{2} - 2tg \frac{x}{2} + x + C. \end{aligned}$$

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 4

Тема «Определенный интеграл и его приложения

максимальное количество баллов – 8

1. Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям (2 балла).

вариант	задание	вариант	задание
I	$\int_{-2}^0 (5x + 6)\cos 2x \, dx$	VI	$\int_{-4}^0 (7x + 12)\cos x \, dx$
II	$\int_0^{\pi} (x - 4)\cos 3x \, dx$	VII	$\int_0^3 (5 - 3x)\sin 2x \, dx$
III	$\int_0^{\pi} (9x + 11)\cos 3x \, dx$	VIII	$\int_{-3}^0 (6x + 9)\sin 2x \, dx$
IV	$\int_0^3 3x\sin 2x \, dx$	IX	$\int_{\frac{\pi}{4}}^3 (3x - 1)\sin 2x \, dx$
V	$\int_0^{2\pi} (3 - 7x)\cos 2x \, dx$	X	$\int_{-3}^1 (2x + 3)\cos x \, dx$

2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной (2 балла).

вариант	задание	вариант	задание
I	$\int_0^1 x^2\sqrt{1 - x^2} \, dx$	VI	$\int_0^{\frac{5}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}}$
II	$\int_0^3 \frac{dx}{(9 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$	VII	$\int_0^5 x^2\sqrt{25 - x^2} \, dx$

III	$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$	VIII	$\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$
IV	$\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$	IX	$\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx$
V	$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$	X	$\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$

3. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций (2 балла).

I	$y = (x-2)^3, y = 4x-8$	VI	$y = (x+1)^2, y^2 = x+1$
II	$y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3$	VII	$y = 1 - x^2, y = -x - 1$
III	$y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$	VIII	$y = -x^2 + 2x + 3, y = 3 - x$
IV	$y = \sqrt{4-x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$	IX	$y = 5 - 2x, y = 3^x, y = 0, x = 0$
V	$y = -x^2 + 2x + 5, y = x^2 + 2x - 3$	X	$y = x^2 - 1, y = 2x + 2$

4. Вычислить несобственные интегралы. (2 балла)

вариант	задание	вариант	задание
I	$\int_{-\infty}^1 e^t dt$	VI	$\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$
II	$\int_0^1 \ln x dx$	VII	$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$
III	$\int_{-\infty}^1 te^t dt$	VIII	$\int_{-2}^2 \frac{xdx}{x^2-1}$
IV	$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$	IX	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

V	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$	X	$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$
----------	--	----------	------------------------------

Пример решения:

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 4

Тема «Определенный интеграл и его приложения»

максимальное количество баллов – 8

1. Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям (2 балла).

Решение.

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 (2x+3)\cos x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = 2x+3 \\ dv = \cos x \, dx \end{array} \right. \quad \left. v = \int \cos x \, dx = \sin x \right| = (2x+3)\sin x \Big|_{-3}^1 - \\ -2 \int_{-3}^1 \sin x \, dx &= 5\sin 1 + 3\sin(-3) + 2\cos x \Big|_{-3}^1 = 5\sin 1 - 3\sin 3 + 2\cos 1 - 2\cos 3 \end{aligned}$$

Ответ. $5\sin 1 - 3\sin 3 + 2\cos 1 - 2\cos 3$.

2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной (2 балла).

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} \, dx &= \left| \begin{array}{l} x = 5\sin t \\ dx = 5\cos t \, dt \\ \text{если } x = 0, \text{ то } t = 0 \\ \text{если } x = 5, \text{ то } t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5\sin t)^2 \sqrt{25 - (5\sin t)^2} 5\cos t \, dt = \\ &= 625 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt = 625 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \\ &= 625 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{625}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 2t) \, dt = \frac{625}{4} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \end{aligned}$$

$$-\frac{625}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2t \, dt = \frac{625\pi}{8} - \frac{625}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4t}{2} \, dt = \frac{625\pi}{8} - \frac{625}{8} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\frac{625}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t \, dt = \frac{625\pi}{8} - \frac{625\pi}{16} - \frac{625\pi}{32} \sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{625\pi}{16}.$$

Ответ. $\frac{625\pi}{16}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = 3 - x$ (2 балла).

Решение.

Для вычисления площади фигуры, ограниченной заданными кривыми, построим эту фигуру.

1) $y = -x^2 + 2x + 3$ – квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вниз. Координаты вершины параболы:

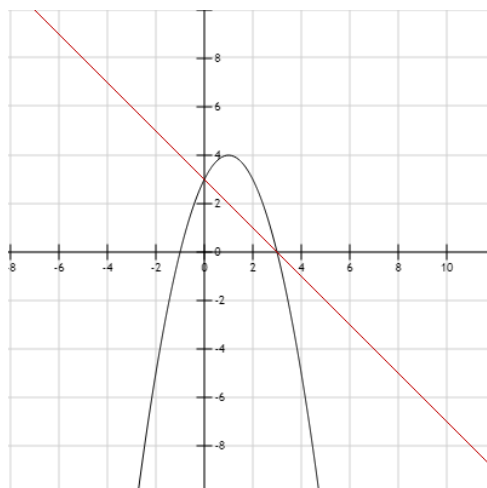
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1; \quad y = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4 \quad (1; 4)$$

Ось симметрии $x = 1$

x	1	2	3
y	4	2	0

2) $y = 3 - x$ – линейная функция, график прямая.

x	0	2
y	3	1



Площадь фигуры вычислим по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

$$S = \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3 - 3 + x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2} = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}$$

Ответ. $S = 4,5$ кв.ед.

4. Вычислить несобственные интегралы. (2 балла)

Решение.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Bigg|_0^{+\infty} = -e^{-\infty} + e^0 = -\frac{1}{e^{+\infty}} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Ответ. Несобственный интеграл сходится.

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 5

тема «Функции многих переменных»

Максимальное количество баллов - 10

1. Найти область определения функции и изобразить ее на плоскости. (1 б.)

вариант	задание	вариант	задание
I	$z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$	VI	$z = \arcsin(5 - x^2 - y^2)$
II	$z = \ln(x - y)$	VII	$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$
III	$z = \sqrt{\ln x + \ln y}$	VIII	$z = x^2 - y^2$
IV	$z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$	IX	$z = \sqrt{\log_a(x^2 + y^2)}$
V	$z = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}$	X	$z = \frac{4x - 3y + 2}{x - y}$

2. Найти все частные производные первого порядка и указанные частные производные второго порядка функции. (3б.)

вариант	задание	вариант	задание
I	$z = xy + \sin(x + y), \quad z''_{xx}$	VI	$z = y \ln x, \quad z''_{yx}$
II	$z = \arctg \frac{x + y}{1 - xy}, \quad z''_{xy}$	VII	$z = \cos(x + 2y^2), \quad z''_{xx}$
III	$z = x^2 \ln(x + y), \quad z''_{xy}$	VIII	$z = e^{x-y^2} + \cos x, \quad z''_{xy}$
IV	$z = e^{xy}, \quad z''_{xy}$	IX	$z = xy + \sin(x + y), \quad z''_{yy}$
V	$z = x^2 y^2, \quad z''_{yy}$	X	$z = x^2 y^2, \quad z''_{xx}$

3. Найти полный дифференциал функции. (2,5 б.)

вариант	задание	вариант	задание
I	$z = \ln xy$	VI	$z = \arctg \frac{y}{1 + x^2}$
II	$z = \arctg \frac{x}{y}$	VII	$z = x^{\sin y}$
III	$z = \ln tg\left(\frac{y}{x}\right)$	VIII	$z = e^{\arctg \frac{y}{x}}$
IV	$z = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + x^2}\right)$	IX	$z = tg(3x - y)$
V	$z = x^2 \sin^4 y$	X	$u = xy + yz + xz$

4. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением в указанной точке. (1,5 б.)

вариант	задание	вариант	задание
I	$z = 2x^2 + y^2, \quad M(1,1,3)$	VI	$z = 2x^2 + y^2, \quad M(1,2,6)$
II	$z = \ln(x^2 + y^2), \quad M(1,0,0)$	VII	$z = \ln(x^2 + y^2), \quad M(0, e, 2)$
III	$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y, \quad M(1,1,1)$	VIII	$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y, \quad M(1,2,4)$
IV	$z = \sin x \cdot \cos y, \quad M(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$	IX	$z = \sin x \cdot \cos y, \quad M(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{4})$
V	$z = x^4 + 2x^2y - xy + x, \quad M(1,0,2)$	X	$z = x^4 + 2x^2y - xy + x \quad M(1,1,3)$

5. Найти экстремумы функции. (2 б.)

вар.	задание	вар.	задание
I	$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$	VI	$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y$
II	$z = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$	VII	$z = 2xy - 4x - 2y$
III	$z = xy^2(1 - x - y)$	VIII	$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$
IV	$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$	IX	$z = xy^2(1 - x - y)$
V	$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$	X	$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

Пример решения:

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 5

тема «Функции многих переменных»

Максимальное количество баллов - 10

1. Найти область определения функции и изобразить ее на плоскости. (1 б.)

$$z = \sqrt{\ln(x^2 + y^2)}$$

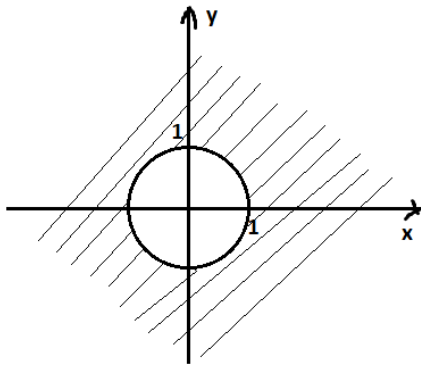
Решение. Найдем условия, при которых функция $z = \sqrt{\ln(x^2 + y^2)}$ имеет смысл:

$$\ln(x^2 + y^2) \geq 0$$

$$\ln(x^2 + y^2) \geq \ln 1$$

$$x^2 + y^2 \geq 1$$

Изобразим на плоскости множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих найденному условию:



Ответ. Область определения функции есть внешняя часть окружности $x^2 + y^2 = 1$, включая саму окружность.

2. Найти все частные производные первого порядка и частную производную z''_{xy} второго порядка функции $z = e^{x-y^2} + \cos x$. (3б.)

Решение.

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^{x-y^2} + \cos x)'_x = e^{x-y^2} - \sin x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (e^{x-y^2} + \cos x)'_y = -2ye^{x-y^2}$$

Найдем указанную производную второго порядка:

$$z''_{xy} = (e^{x-y^2} - \sin x)'_y = -2ye^{x-y^2}$$

Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y^2} - \sin x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2ye^{x-y^2}$; $z''_{xy} = -2ye^{x-y^2}$.

3. Найти полный дифференциал функции $z = e^{\arctg \frac{y}{x}}$. (2,5 б.)

Решение.

Для вычисления полного дифференциала воспользуемся формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{\arctg \frac{y}{x}} \right)'_x = e^{\arctg \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} e^{\arctg \frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \right)'_y = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

Подставляя полученные выражения в формулу, получим

$$dz = -\frac{y}{x^2 + y^2} e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} dy$$

Ответ. $dz = -\frac{y}{x^2 + y^2} e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} dy.$

4. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(0, e, 2)$. (1,5 б.)

Решение.

Уравнение касательной плоскости, проведенной к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad f'_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$f'_x(0, e) = \frac{2 \cdot 0}{0^2 + e^2} = 0; \quad f'_y(0, e) = \frac{2e}{0^2 + e^2} = \frac{2}{e}$$

Подставляя найденные значения в уравнение, получим

$$z - 2 = 0 \cdot (x - 0) + \frac{2}{e}(y - e)$$

$$z - 2 = \frac{2y}{e} - 2$$

$$z = \frac{2y}{e}$$

Ответ. $z = \frac{2y}{e}$

5. Найти экстремумы функции $z = 2x^2 + xy + y^2 - 5x - 3y$. (2 б.)

Решение.

Для нахождения экстремумов функции:

1) найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + y - 5; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 3$$

2) найдем стационарные точки функции

$$\begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 4x \\ x + 2(5 - 4x) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 4x \\ -7x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

3) найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

Частные производные второго порядка являются постоянными и не зависят от значений переменных x и y . Так как у функции всего одна стационарная точка $(1; 1)$, то лишь в этой точке функция может достигать экстремума. Следует проверить достаточное условие экстремума.

4) найдем значение Δ

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right)^2 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$$

Так как $\Delta > 0$, то согласно достаточному условию экстремума функции двух переменных точка $(1; 1)$ является точкой экстремума, причем это точка минимума, так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4 > 0$.

$$z_{\min} = z(1; 1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 2 + 1 + 1 - 5 - 3 = -4$$

Ответ. $z_{\min} = z(1; 1) = -4$

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 6

тема «Кратные и криволинейные интегралы»

максимальное количество баллов - 10

1. Переменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного двукратного интеграла (2 б).

вар.	задание	вар	задание
I	$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx$	VI	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} f dy + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} f dy$
II	$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f dy$	VII	$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx$
III	$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$	VIII	$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f dy$
IV	$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx$	IX	$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f dy$
V	$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f dy$	X	$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^0 f dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f dy$

2. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, $\rho(x, y)$ - поверхностная плотность. Найти массу пластинки (3 б).

вариант	задание	вариант	задание
I	$D: x = 1, y = 0, y = 2\sqrt{x}$ $\rho(x, y) = 7x^2 + y$	VI	$D: x = 1, y = 0, y = \sqrt{x}$ $\rho(x, y) = 3x + 6y^2$
II	$D: x = 1, y = 0, y = 2\sqrt{x}$ $\rho(x, y) = \frac{7}{2}x^2 + 5y$	VII	$D: x = 2, y = 0, y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ $\rho(x, y) = 2x + 3y^2$

III	$D: x = 2, y = 0, y = \sqrt{2x}$ $\rho(x, y) = \frac{7}{8}x^2 + 2y$	VIII	$D: x = 0,5, y = 0, y = 2\sqrt{2x}$ $\rho(x, y) = 7x + 3y^2$
IV	$D: x = 2, y = 0, y = \sqrt{x}$ $\rho(x, y) = 3x^2 + 6y$	IX	$D: x = 1, y = 0, y = 2\sqrt{x}$ $\rho(x, y) = 7x^2 + 2y$
V	$D: x = 1, y = 0, y = 2\sqrt{x}$ $\rho(x, y) = x + 3y^2$	X	$D: x = 2, y = 0, y = \sqrt{2x}$ $\rho(x, y) = \frac{7}{4}x^2 + \frac{5}{2}y$

3. Вычислить тройной интеграл (3 б).

вариант	задание	вариант	задание
I	$\iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz$ $V: x = 0, y = 1, y = x,$ $z = 0, z = 1$	VI	$\iiint_V x^2 z \sin \frac{xyz}{4} dx dy dz$ $V: x = 1, y = 2\pi, z = 4,$ $y = 0, x = 0, z = 0$
II	$\iiint_V 8y^2 z e^{2xy} dx dy dz$ $V: x = -1, y = 2, z = 1,$ $x = 0, y = 0, z = 0$	VII	$\iiint_V y^2 \cos \left(\frac{\pi}{4} xy\right) dx dy dz$ $V: x = 0, y = -1,$ $y = \frac{x}{2}, z = 0, z = -\pi^2$
III	$\iiint_V y^2 e^{-xy} dx dy dz$ $V: x = 0, y = -2, y = 4x,$ $x = 0, z = 1$	VIII	$\iiint_V 2y^2 z e^{2xy} dx dy dz$ $V: x = 1, y = -1, z = 1$ $x = 0, y = 0, z = 0$
IV	$\iiint_V x^2 z \sin (xyz) dx dy dz$ $V: x = 2, y = \pi, z = 1,$ $y = 1, x = 0, z = 1$	IX	$\iiint_V y^2 \cos (2xy) dx dy dz$ $V: x = 0, y = -2, z = 0,$ $y = 4x, z = 2$

V	$\iiint_V y^2 z \cos(xyz) dx dy dz$ $V: x = 1, y = 2\pi, z = 2,$ $y = 1, x = 0, z = 0$	X	$\iiint_V x^2 \operatorname{sh}(3xy) dx dy dz$ $V: x = 1, y = 2x, z = 0,$ $y = 0, z = 36$
----------	--	----------	---

4. Вычислить криволинейные интегралы (2 б.)

вариант	задание
I	$\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy,$ где L – отрезок прямой от точки $A(-1; 1)$ до точки $B(3, 2)$
II	$\int_L 2(x^2 + y^2) dx + (y + x)^2 dy,$ где L – отрезок прямой, заключенный между точками $A(2; 2)$ и $B(1, 3)$
III	$\int_L (xy - 1) dx + x^2 y dy,$ где L – отрезок прямой $2x + y = 2$ от точки $A(1; 0)$ до точки $B(0, 2)$
IV	$\int_L (xy - 1) dx + x^2 y dy,$ где L – отрезок параболы $4x + y^2 = 4$ от точки $A(1; 0)$ до точки $B(0, 2)$
V	$\int_L xy^2 dy - yx^2 dx,$ где L – окружность $x^2 + y^2 = 9$, проходимая в положительном направлении
VI	$\int_L y^2 dS,$ где L – арка циклоиды $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), t \in [0; 2\pi]$
VII	$\int_L e^{x^2+y^2} (-y dx + x dy)$ где L – окружность $x^2 + y^2 = 1$, проходимая в положительном направлении

VIII	$\int_L (x - y) dS,$ где L – отрезок прямой, заключенный между точками $O(0; 0)$ и $B(4,3)$
IX	$\int_L xy dS,$ где L – арка эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, расположенная в первой координатной четверти
X	$\int_L y dS,$ где L – дуга кривой $y^2 = 2x$, заключенная между точками $y = 0$ и $y = \sqrt{2}$

Пример решения:

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 6

тема «Кратные и криволинейные интегралы»

максимальное количество баллов - 10

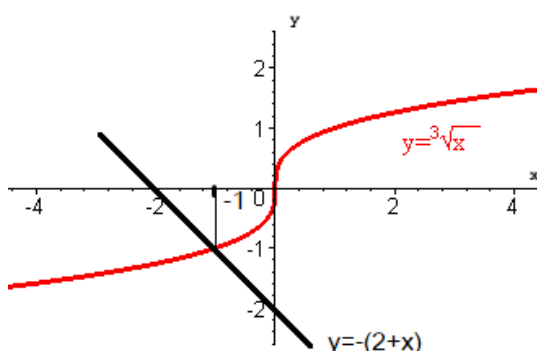
1. Переменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного двукратного интеграла (2 б).

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^0 f dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f dy$$

Решение.

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^0 f dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy,$$

где D_1 задается неравенствами $-2 \leq x \leq -1, -(2+x) \leq y \leq 0$, а область D_2 задается неравенствами $-1 \leq x \leq 0, \sqrt[3]{x} \leq y \leq 0$. Построим эти области в одной системе координат.



По рисунку видно, что области D_1 и D_2 образуют одну область D , стандартную относительно оси Ox . Поэтому поменяв порядок интегрирования в интеграле, получим один двукратный интеграл.

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-2-y}^{y^3} f(x, y) dx$$

Границы первого интеграла находим, проектируя область D на ось Oy , границы второго интеграла выражаем из уравнений линий, ограничивающих область D слева $y = -(2+x)$ и справа $y = \sqrt[3]{x}$. А именно, нижнюю границу получим, выразив x из $y = -(2+x)$: $x = -2-y$. Тогда уравнение верхней границы $x = y^3$.

Ответ.
$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2-y}^{y^3} f(x, y) dx$$

2. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, $\rho(x, y)$ -поверхностная плотность. Найти массу пластинки (3 б).

Дано:

$$D: x = 1, y = 0, y = 2\sqrt{x}$$

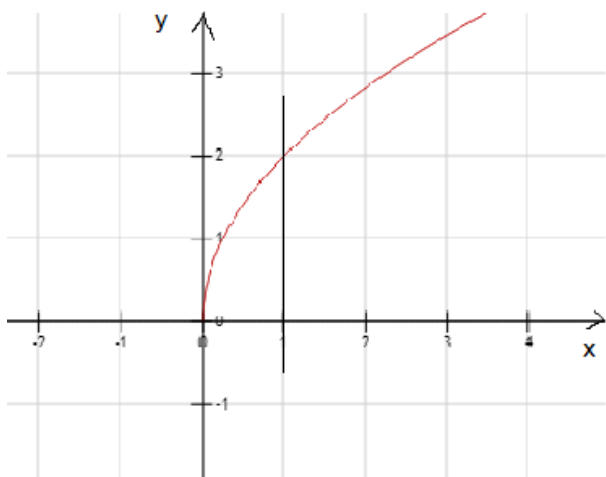
$$\rho(x, y) = 7x^2 + 2y$$

Найти: массу D

Решение. Массу пластинки с плотностью $\rho(x, y)$ можно вычислить по формуле

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy$$

Построим пластинку.



$$m = \iint_D (7x^2 + 2y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2\sqrt{x}} (7x^2 + 2y) dy = \int_0^1 dx \left(7x^2 y + 2 \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{2\sqrt{x}} =$$

$$\int_0^1 (14x^2 \sqrt{x} + 4x) dx = \int_0^1 \left(14x^{\frac{5}{2}} + 4x \right) dx = \left(14 \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 4 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6.$$

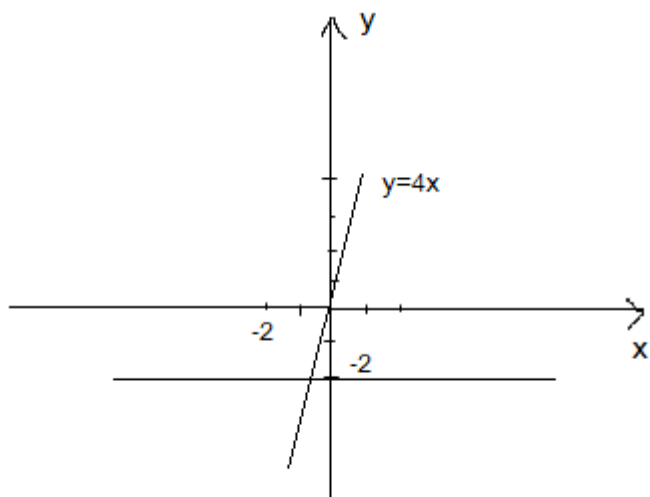
Ответ. $m = 6$

3. Вычислить тройной интеграл (3 б).

$$\iiint_V y^2 \cos(2xy) dx dy dz, \quad V: x = 0, y = -2, z = 0, y = 4x, z = 2$$

Решение.

Построим проекцию тела V на плоскость xOy .



$$\begin{aligned}
\iiint_V y^2 \cos(2xy) dx dy dz &= \int_{-2}^0 dy \int_{\frac{y}{4}}^0 dx \int_0^2 y^2 \cos(2xy) dz = \\
&= \int_{-2}^0 dy \int_{\frac{y}{4}}^0 y^2 \cos(2xy) dx \cdot z \Big|_0^2 = 2 \int_{-2}^0 dy \int_{\frac{y}{4}}^0 y^2 \cos(2xy) dx = \\
&= 2 \int_{-2}^0 y^2 dy \int_{\frac{y}{4}}^0 \cos(2xy) dx = 2 \int_{-2}^0 y^2 dy \frac{1}{2y} \int_{\frac{y}{4}}^0 \cos(2xy) d(2xy) = \\
&= - \int_{-2}^0 y dy \cdot \sin(2xy) \Big|_{\frac{y}{4}}^0 = - \int_{-2}^0 y \left(\sin 0 - \sin \frac{y^2}{2} \right) dy = \int_{-2}^0 y \sin \frac{y^2}{2} dy = \\
&= \int_{-2}^0 \sin \frac{y^2}{2} d\left(\frac{y^2}{2}\right) = \left(\cos \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-2}^0 = 1 - \cos 2.
\end{aligned}$$

Ответ. $1 - \cos 2$

4. Вычислить криволинейный интеграл (2 б.)

$$\int_L e^{x^2+y^2} (-y dx + x dy)$$

где L – окружность $x^2 + y^2 = 1$, проходимая в положительном направлении.

Решение. Запишем уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$ в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0; 2\pi]$$

Тогда

$$e^{x^2+y^2} = e^{\cos^2 t + \sin^2 t} = e, dx = (\cos t)' dt = -\sin t dt, dy = (\sin t)' dt = \cos t dt.$$

Подставив полученные выражения в криволинейный интеграл, перейдем к определенному интегралу по переменной t :

$$\int_L e^{x^2+y^2} (-y dx + x dy) = \int_0^{2\pi} e (-\sin t \cdot (-\sin t) dt + \cos t \cdot \cos t dt) =$$

$$= e \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = e \int_0^{2\pi} dt = e t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi e.$$

Ответ. $2\pi e$.

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 7

тема «Числовые и функциональные ряды»

максимальное количество баллов - 10

1. Исследовать на сходимость ряд с помощью признака Даламбера (1 б.).

вариант	задание	вариант	задание
I	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$	VI	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n+3)!}$
II	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$	VII	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2-1)}{n!}$
III	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{2^n(3n+7)}$	VIII	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{2}{n}}{n!}$
IV	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n(n+2)!}$	IX	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$
V	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$	X	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$

2. Исследовать на сходимость ряд с помощью радикального признака (1 б.).

вариант	задание	вариант	задание
I	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2}$	VI	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$
II	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$	VII	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5n+2} \right)^{n^2}$

III	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$	VIII	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n}\right)^{n^2}$
IV	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{7n+2}\right)^{n^2}$	IX	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-5}{2n+1}\right)^{n^2}$
V	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-4}{n+2}\right)^{n^2}$	X	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{5n-2}\right)^{n^2}$

3. Исследовать на сходимость ряд с помощью интегрального признака (1 б).

вариант	задание	вариант	задание
I	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2}$	VI	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$
II	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$	VII	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$
III	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+2}}$	VIII	$\sum_{n=1}^{\infty} \arctg n$
IV	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 n}$	IX	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(4n+3)^3}}$
V	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n} - \sqrt[3]{n})}$	X	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-3}{6n^3+5}$

4. Исследовать ряд на абсолютную/условную сходимость (2 б).

вариант	задание	вариант	задание
I	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$	VI	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}$
II	$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$	VII	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt[4]{n^5}}$
III	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}$	VIII	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

IV	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$	IX	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n-1}(2n+1)}$
V	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{2n}(n+1)}$	X	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 5^n}{5^n}$

5. Найти область сходимости степенного ряда (2 б.).

вариант	задание	вариант	задание
I	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3}{3n+1} x^n$	VI	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{5n-8} x^n$
II	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 7^n} x^n$	VII	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^n$
III	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 5^n} x^n$	VIII	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} x^n$
IV	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4} (x-1)^n$	IX	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2} x^n$
V	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \cdot 2^n} x^n$	X	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n \cdot 3^{n+1}} x^n$

6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням x , используя готовые разложения (3 б.)

вариант	задание	вариант	задание
I	$\frac{x^2}{1+x}$	VI	$(3 + e^{-x})^2$
II	$\ln \frac{1-x}{1+x}$	VII	$\frac{x}{1+x-2x^2}$
III	$(2 - e^x)^2$	VIII	$\sin \frac{2x^4}{3}$

IV	$\cos^2 3x$	IX	$x \cos^2 \frac{x}{2}$
V	$\frac{x}{x^2 - 5x + 6}$	X	$\frac{5}{6 + x - x^2}$

Пример решения:

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА 7

тема «Числовые и функциональные ряды»

максимальное количество баллов - 10

1. Исследовать на сходимость ряд с помощью признака Даламбера (1 б.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2 - 1)}{n!}$$

Решение.

Запишем $a_n = \frac{6^n(n^2-1)}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{6^{n+1}((n+1)^2-1)}{(n+1)!}$ и вычислим предел вида

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6^{n+1}((n+1)^2-1)}{(n+1)!}}{\frac{6^n(n^2-1)}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1}(n^2 + 2n) \cdot n!}{6^n(n^2 - 1) \cdot (n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n \cdot 6 \cdot (n^2 + 2n) \cdot n!}{6^n(n^2 - 1) \cdot n! (n+1)} = 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{(n^2 - 1)(n+1)} = 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{n^3 + n^2 - n - 1} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Так как $0 < 1$, то по признаку Даламбера данный ряд является сходящимся.

Ответ. Ряд сходится.

2. Исследовать на сходимость ряд с помощью радикального признака (1 б.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{5n-2} \right)^{n^2}$$

Решение.

Вычислим предел вида

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{5n-2}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{5n-2}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^\infty = 0$$

Так как $0 < 1$, то по радикальному признаку данный ряд является сходящимся.

Ответ. Ряд сходится.

3. Исследовать на сходимость ряд с помощью интегрального признака (1 б).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(4n+3)^3}}$$

Решение.

Составим функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(4x+3)^3}}$ и вычислим несобственный интеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(4x+3)^3}} dx &= \int_1^{\infty} (4x+3)^{-\frac{3}{4}} dx = \frac{1}{4} \int_1^{\infty} (4x+3)^{-\frac{3}{4}} d(4x+3) = \frac{1}{4} \frac{(4x+3)^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} \Big|_1^{\infty} = \\ &= \infty - \sqrt[4]{7} = \infty. \end{aligned}$$

Несобственный интеграл является расходящимся, следовательно, согласно интегральному признаку ряд расходится.

Ответ. Ряд расходится.

4. Исследовать ряд на абсолютную/условную сходимость (2 б).

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Решение.

Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

и исследуем его на сходимость, применив радикальный признак.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится. А значит, согласно теореме Коши, исходный ряд сходится абсолютно.

Ответ. Ряд абсолютно сходится.

Пример 2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n-1}{7n}$$

Решение.

Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{7n}$$

и исследуем его на сходимость, применив следствие из необходимого признака сходимости ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-1}{7n} = \frac{5}{7} \neq 0.$$

Следовательно, ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится.

Выясним теперь вопрос о сходимости знакочередующегося ряда, применив признак Лейбница:

1) Рассмотрим последовательность, составленную из абсолютных величин исходного ряда:

$$\frac{4}{7}, \frac{9}{7}, \frac{14}{7}, \dots$$

Очевидно, что эта последовательность возрастающая, что противоречит одному из условий признака Лейбница. Поэтому знакочередующийся ряд будет расходящимся.

Ответ. Ряд расходится.

5. Найти область сходимости степенного ряда (2 б.).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n \cdot 3^{n+1}} x^n$$

Решение. Для нахождения области сходимости степенного ряда воспользуемся признаком Даламбера.

$$a_n = \frac{2n+1}{n \cdot 3^{n+1}} x^n, \quad a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1) \cdot 3^{n+2}} x^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2n+2}{(n+1) \cdot 3^{n+2}} x^{n+1}}{\frac{2n+1}{n \cdot 3^{n+1}} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+2) \cdot x^{n+1} \cdot n \cdot 3^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+2} \cdot (2n+1) \cdot x^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+2) \cdot x^n \cdot x \cdot n \cdot 3^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1} \cdot 3 \cdot (2n+1) \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x \cdot (2n^2 + 2n)}{3 \cdot (2n^2 + 3n + 1)} \right| = \\ &= \left| \frac{x}{3} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n^2 + 2n)}{(2n^2 + 3n + 1)} \right| = \frac{|x|}{3}. \end{aligned}$$

Для того чтобы ряд сходил, полученное значение должно быть меньше 1.

$$\frac{|x|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

Выясним теперь поведение ряда на концах полученного интервала.

Пусть $x = 3$. Подставляя это значение в исходный степенной ряд, получим числовой ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n},$$

который является расходящимся, согласно следствию из необходимого признака сходимости ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3} \neq 0$). Значит точка $x = 3$ не является точкой сходимости функционального ряда.

Пусть $x = -3$. Подставляя это значение в исходный степенной ряд, получим знакопеременный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n}.$$

Поскольку ряд, составленный из модулей знакопеременного ряда совпадает с рассмотренным выше (а он расходится), то проверим лишь выполнение условий признака Лейбница для знакочередующихся рядов.

1) последовательность $1, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \dots$ - убывающая;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3} \neq 0$.

Второе условие не выполняется, следовательно ряд расходится, и точка $x = -3$ также не является точкой сходимости.

Ответ. Область сходимости ряда $(-3; 3)$.

6. Разложить функцию $f(x) = x \cos^2 \frac{x}{2}$ в ряд Тейлора по степеням x , используя готовые разложения (3 б.)

Решение.

$$x \cos^2 \frac{x}{2} = x \cdot \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{x}{2} \cdot (1 + \cos x) = \frac{x}{2} \cdot \left(1 + 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) =$$

$$\frac{x}{2} \cdot \left(2 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) = x + \frac{x^3}{2 \cdot 2!} + \frac{x^5}{2 \cdot 4!} + \dots$$

Литература.

1. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учеб. пособие для втузов. – М., 1983 г. -175 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. 16-е изд.– М.: Наука, 1969 г. – 440 с.
3. Запорожец Г.Н. Руководство к решению задач по математическому анализу. – 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1966 г. – 460 с.
4. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции многих переменных: учебное пособие для вузов. – М.:Высшая школа, 1988 г. – 288 с.

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ
РАБОТЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

методические указания

Издается в авторской редакции