ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т.Г.ШЕВЧЕНКО

Физико-математический факультет

Кафедра прикладной математики и информатики

ЭКОНОМЕТРИКА,
ПРОДВИНУТЫЙ КУРС

Методические указания по выполнению контрольной работы

Тирасполь, 2019

УДК 519.862.6(072.8)
ББК У.в631р30
Э40

Составители:
Г.В. Спиридонова, канд. тех. наук, доц. кафедры прикладной математики и информатики, ФМФ, ПГУ им. Т.Г. Шевченко
Н.Г. Леонова, канд. соц. наук, доц. кафедры прикладной математики и информатики, ФМФ, ПГУ им. Т.Г. Шевченко
Н.В. Семенова, ст. преп. кафедры высшей математики, МИСИС г. Москва
И.И. Журжи, ст. преп. кафедры алгебры, геометрии и МПМ, ФМФ, ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Рецензенты:
В.В. Граневский, канд. филос. наук, доц. кафедры философии, ИГУП и СГН , ПГУ им. Т.Г. Шевченко
Л.В. Чуйко, канд. пед. наук, доц. кафедры математического анализа и приложений, ФМФ, ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Э30 *Методические указания по выполнению контрольной работы по дисциплине «Эконометрике, продвинутый курс» для обучающихся по программе магистратуры заочной формы обучения экономического факультета. В пособии приведены варианты заданий и образцы выполнения контрольных работ на ПК с помощью ППП Excel с использованием надстройки Анализ данных и инструментов Корреляция и Регрессия.*

Методические указания составлены согласно учебным планам и рабочим программам по направлению подготовки: направление подготовки 38.03.01 – Экономика и по профилям подготовки: Бухгалтерский учет, анализ и аудит в отраслях экономики, Аудит и финансовый консалтинг, Международный финансы и банки, Международная экономика.

Приводятся правила выполнения, оформления и защиты контрольной работы по дисциплине «Эконометрика, продвинутый курс», варианты заданий и образцы их выполнения.

УДК 519.862.6(072.8)
ББК У.в631р30

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им.Т.Г.Шевченко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современному квалифицированному специалисту необходимо не только иметь четкие представления об основных направлениях развития экономики, но и уметь учитывать сложное взаимосвязанное многообразие, факторов, оказывающих существенное влияние на изучаемый процесс. Исследование реальных экономических процессов невозможно проводить без знания основ теории вероятностей и математической статистики, математических методов моделирования в экономике и эконометрики. Знания, полученные при изучении этих дисциплин, позволяют исследователю разобраться в огромном количестве статистической информации и выбрать ту модель, которая будет наилучшим образом отражать изучаемый процесс или явление.

Преподавание эконометрики вошло в стандарты третьего поколения для экономических специальностей в качестве дисциплины обязательной для изучения как обучающихся по программе бакалавриата, так и по программе магистратуры.

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа, которая включает в себя изучение теоретического материала по учебникам, выполнение практических заданий с использованием учебных и методических пособий.

При изучении разделов курса эконометрики обучающийся по программе магистратуры должен освоить современные эконометрические методы, уметь строить эконометрические модели и осуществлять прогнозы, используя реальные статистические данные.

В соответствии с учебным планом после освоения необходимого теоретического и практического материала необходимо выполнить контрольную работу, и сдать экзамен. В процессе всего периода обучения студент может получать у преподавателя необходимые ему консультации.

Методические указания содержат:

– правила выполнения, оформления и защиты контрольной работы;
– краткие теоретические сведения и методические указания по темам;
– задания для контрольной работы;
– образец выполнения заданий;
– литература;
– оглавление.

Методические указания могут быть использованы при проведении практических и лабораторных занятий со студентами бакалаврами.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ, ОФОРМЛЕНИЯ И ЗАЩИТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа должна быть выполнена в срок, указанный в учебном графике.
2. Номер варианта N контрольной работы и серию определяет преподаватель.
3. На титульном листе должны быть четко написаны Ф.И.О. студента, факультет, курс, группа, номер варианта и Ф.И.О. преподавателя.
4. Контрольную работу необходимо выполнить в формате WORD на листах формата А-4, вложенных в папку с файлами, оставляя поля для замечаний.
5. Контрольная работа не проверяется, если студент решил не свой вариант.
6. Если задание содержит параметр N, то условие этого задания следует записать с параметром N, а рядом записать численное значение данного варианта. Все задания, входящие в вариант, должны быть решены. Перед решением каждого задания необходимо записать полный текст его условия. Каждое задание решается с новой страницы. В конце решения каждого задания записать ответ.
7. Оформление контрольной работы необходимо сопровождать полным описанием хода решения каждого задания, приводить формулы, таблицы, рисунки, применяемые при решении. После решения каждого задания оставлять место для учета возможных замечаний. При решении заданий используйте ППП Excel, надстройки Анализ данных.
8. При получении не допущенной к защите работы, студент должен выполнить заново те задания, которые содержат замечания, и сдать на проверку исправленную работу. Листы с замечаниями вложить в конце работы.
9. Зачтенная работа допускается к устной защите. При защите контрольной работы студент должен:
   - изложить смысловое содержание задачи,
   - обосновать выбор метода решения объяснить ход выполнения работы,
   - дать экономическую интерпретацию построенной модели, оценить её качество,
   - оценить качество параметров модели, провести анализ полученных результатов.
10. Зачтенная работа в обязательном порядке предъявляется на экзамене.

1. ПАРНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

1.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В первом задании по данной теме необходимо построить линейное уравнение парной регрессии $y = ax + b$ [2,3,5]. Для нахождения параметров этого уравнения применяются формулы:

$$a = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)};\ b = \bar{y} - a\bar{x};\ \text{где } Cov(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y});$$

$$Var(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,\ \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i.$$

Теснота связи между переменными y и x определяется с помощью коэффициента парной корреляции r_{xy}, который находится по формуле:

$$r_{yx} = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)\cdot Var(y)}}.$$

Для нелинейной модели находим индекс корреляции:

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{ip})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

Средняя ошибка аппроксимации (среднее отклонение расчетных значений от фактических):

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y_i - y_{ip}}{y_i}\right|\cdot 100\%,$$

должна быть не более 10%.

Коэффициент детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{ip})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = (r_{xy})^2,$$

показывает долю дисперсии y, которая объясняется уравнением регрессии.

Для оценки линейного уравнения регрессии в целом и показателя тесноты связи коэффициента корреляции применяем критерий Фишера. При этом проверяется гипотеза H_0 – о статистической незначимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи – коэффициента корреляции.

Фактическое значение F – критерия Фишера находим по формуле:

$$F_{факт} = \frac{R^2}{1 - R^2}(n-2),$$

где n - число единиц совокупности. Полученное значение $F_{факт}$ сравниваем с $F_{табл}$, значение которого – это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости α $(\alpha = 0{,}05$ *или* $0{,}01)$.

Если $F_{факт} > F_{табл}$, гипотеза H_0 – о статистической незначимости уравнения регрессии и коэффициента корреляции отвергается. Уравнение регрессии статистически значимо и надежно, связь между переменными x и y сформировалась не случайно, а под влиянием объективно действующих факторов. В противном случае, если $F_{факт} < F_{табл}$, гипотеза H_0 – о статистической незначимости уравнения регрессии и коэффициента корреляции принимается. Уравнение регрессии статистически незначимо и ненадежно, связь между переменными x и y сформировалась случайно.

Для оценки статистической значимости коэффициентов регрессии и корреляции рассчитывается t – критерий Стьюдента и доверительные интервалы для каждого из показателей. Выдвигается гипотеза H_0 – о незначимом отличии этих коэффициентов от нуля. Вычисляются фактические значения t – критерия Стьюдента:

$$t_a = \frac{a}{m_a}, t_b = \frac{b}{m_b},\ t_r = \frac{r}{m_r},$$

где m_a, m_b, m_r – ошибки значений a, b, r_{xy}, которые вычисляются по формулам:

$$m_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{ip})^2 / (n-2)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}, \quad m_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{ip})^2}{n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}, m_r = \sqrt{\frac{1 - R_{xy}^2}{n-2}}.$$

Сравниваем $t_{факт}$ с $t_{табл}$, и если $t_{факт} > t_{табл}$, – гипотеза H_0 отклоняется, значения a, b, r_{xy} не случайно отличаются от нуля и сформировались под влиянием факторов, которые действуют постоянно, в противном случае если $t_{факт} < t_{табл}$, – гипотеза H_0 принимается, значения a, b, r_{xy} отличаются от нуля случайно.

Доверительные интервалы коэффициентов находятся по формулам:

$$\gamma_a = (a - \Delta_a; a + \Delta_a),\ \Delta_a = t_{\text{табл}} \cdot m_a,\ \gamma_b = (b - \Delta_b; b + \Delta_b),\ \Delta_b = t_{\text{табл}} \cdot m_b.$$

Прогнозное значение $y_{пр}$ переменной y вычисляется по найденному уравнению регрессии: $y_{пр} = a \cdot x_{пр} + b$ при заданном прогнозном значении $x_{пр}$ независимой переменной x. Для ошибки прогноза:

$$m_{пр} = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{ip})^2}{n-2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{пр} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)},$$

находится доверительный интервал прогноза,

$$\gamma_{пр} = (y_{пр} - \Delta_{пр};\ y_{пр} + \Delta_{пр}),\ \Delta_{пр} = t_{табл} \cdot m_{пр}.$$

Во втором задании по данной теме необходимо построить нелинейное уравнение парной регрессии одного из видов: $y = ax^k$; $y = ka^x$; $y = \frac{k}{x-c} + b$; $y = a(x-c)^2 + b$.

Для нахождения параметров уравнений $y = ax^k$; $y = ka^x$ их предварительно логарифмируем. Для уравнения $y = ax^k$ получим:
$\ln y = \ln a + k \ln x$; обозначим $Y = \ln y$; $X = \ln x$; $b = \ln a$ и следовательно $a = e^b$.

Получим линейную модель парной регрессии: $Y = b + k \cdot X$.

Для уравнения $y = ka^x$ получим:

$\ln y = \ln k + x \cdot \ln a$; обозначим $Y = \ln y$; $\tilde{a} = \ln a$; $b = \ln k$; тогда $a = e^{\tilde{a}}$, $k = e^b$. Получаем линейное уравнение парной регрессии: $Y = b + \tilde{a} \cdot x$.

От уравнения $y = \frac{k}{x-c} + b$ перейдем к линейному уравнению $y = k \cdot X + b$, предварительно сделав замену переменной: $X = \frac{1}{x-c}$, где c параметр, который находим методом подбора.

Аналогично от уравнения $y = a(x-c)^2 + b$, переходим к линейному уравнению $y = a \cdot X + b$, сделав замену $X = (x-c)^2$, где c параметр, который находим методом подбора.

Определив параметры линейных уравнений аналогично описанному выше, переходим к уравнениям, записанным в истинной форме.

Данные виды моделей являются внутренне линейными, так как с помощью логарифмирования, они приводятся к соответствующим линейным моделям. Для оценки качества этих моделей используются те же методы, которые применялись для оценки линейных моделей.

1.2. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «ПАРНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ»

Серия А.

Задание 1.1

Зависимость себестоимости продукции (y в тыс. руб.) от роста производительности труда (x в тыс. ед. продукции) приведена в таблице 1.1.

Таблица 1.1

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	9.5+0.1N	8,7+0.1N	9.3+0.1N	7.6+0.1N	6,0+0,1 N	5,3+0,1 N	5,0+0,1 N	4,5+0,1N

По приведенным данным требуется:

1. Построить диаграмму рассеяния.

2. Построить линейную модель парной регрессии $y = ax + b$.

3. Рассчитать коэффициенты корреляции, детерминации и среднюю ошибку аппроксимации.

4. Оценить линейную модель, применив критерии Фишера и Стьюдента. Проверить выполнение свойств ряда остатков.

5. Рассчитать прогнозное значение результата, если прогнозное значение фактора увеличится на 20% от его среднего уровня. Построить доверительные интервалы для каждого из показателей и для прогнозного значения результата с вероятностью 0,95.

6. Результаты расчетов отобразить на графиках.

При проведении решения использовать ППП *Excel*, надстройки Анализ данных, инструменты Корреляция и Регрессия. В конце задания записать ответ.

Задание 1.2

В таблице 1.2 приведена зависимость объёма продаж (y в тыс.руб.) от расходов на рекламу (x в тыс.руб.).

Таблица 1.2

x	8	7	6	5	4	3	2	1
y	8,5+0,1N	9,7+0,1N	10,3+0,1N	12,6+0,1N	16,0+0,1N	15,3+0,1N	17,0+0,1N	20+0,1N

По приведенным данным требуется:

1. Построить диаграмму рассеяния и модель парной регрессии $y = ax^k$, $y = \dfrac{k}{x-c} + b$, $(c \neq x)$.

2. Рассчитать индексы (коэффициенты) корреляции, детерминации и среднюю ошибку аппроксимации. Оценить качество модели с помощью критериев Фишера.

3. Рассчитать прогнозное значение результата, если прогнозное значение фактора увеличится на 20% от его среднего уровня.

4. Результаты расчетов отобразить на графиках.

При проведении решения использовать ППП *Excel*, надстройки Анализ данных, инструменты Корреляция и Регрессия. В конце задания записать ответ и выбрать лучшую модель.

Серия Б.

Задание 1.1

В таблице 1.3 приведена зависимость между производительностью труда (y, в тыс. шт.) и энерговооружённостью (x,тыс. квт-час) рабочего.

Таблица 1.3

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	13,5+0,1N	14,5+0,1N	17,5+0,1N	19,8+0,1N	21+0,1N	23+0,1N	25+0,1N	30+0,1N

По приведенным данным требуется.

1. Построить диаграмму рассеяния.

2. Построить линейную модель парной регрессии $y = ax + b$.

3. Рассчитать коэффициенты корреляции, детерминации и среднюю ошибку аппроксимации.

4. Оценить линейную модель, применив критерии Фишера и Стьюдента. Проверить выполнение свойств ряда остатков.

5. Рассчитать прогнозное значение результата, если прогнозное значение фактора увеличится на 20% от его среднего уровня. Построить доверительные интервалы для каждого из показателей и для прогнозного значения результата с вероятностью 0,95.

6. Результаты расчетов отобразить на графиках.

При проведении решения использовать ППП *Excel*, надстройки Анализ данных, инструменты Корреляция и Регрессия. В конце задания записать ответ.

Задание 1.2

Зависимость среднедушевого потребления фруктов в месяц (y,кг) от среднемесячного дохода на душу населения (x тыс. руб.) приведена в таблице 1.4.

Таблица 1.4

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	2,9+0,1N	3,5+0,1N	4,1+0,1N	5,5+0,1N	7,5+0,1N	9,8+0,1N	12,1+0,1N	15+0,1N

По приведенным данным требуется.

1. Построить диаграмму рассеяния и модель парной регрессии $y = ka^x$; $y = a(x-c)^2 + b$.

2. Рассчитать индексы (коэффициенты) корреляции, детерминации и среднюю ошибку аппроксимации. Оценить качество модели с помощью критериев Фишера.

3. Рассчитать прогнозное значение результата, если прогнозное значение фактора увеличится на 20% от его среднего уровня.

4. Результаты расчетов отобразить на графиках.

При проведении решении использовать ППП *Excel*, надстройки Анализ данных, инструменты Корреляция и Регрессия. В конце задания записать ответ и выбрать лучшую модель.

1.3. ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «ПАРНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ»

Задание 1.1

Зависимость урожайности (y,т/га) от внесения удобрений (x,ц) приведена в таблице 1.5.

Таблица 1.5

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	12,9	16,4	18,8	22,8	24,6	27,1	29,5	35,4

По приведенным данным требуется.

1. Построить диаграмму рассеяния.

2. Построить линейную модель парной регрессии $y = ax + b$.

3. Рассчитать коэффициенты корреляции, детерминации и среднюю ошибку аппроксимации.

4. Оценить линейную модель, применив критерии Фишера и Стьюдента.

5. Рассчитать прогнозное значение результата, если прогнозное значение фактора увеличится на 20% от его среднего уровня. Построить доверительные интервалы для каждого из показателей и для прогнозного значения результата с вероятностью 0,95.

6. Результаты расчетов отобразить на графиках.

Решение.

1. Построим диаграмму рассеяния.

Диаграмма рассеяния имеет вид:

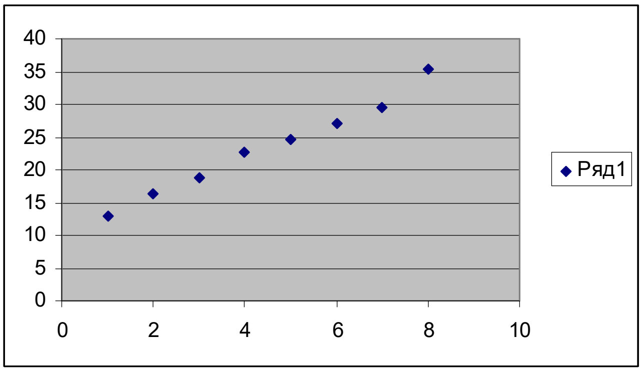

Рис. 1.1

Видим, что точки группируются около некоторой прямой и уравнение регрессии целесообразно искать в виде $y = a \cdot x + b$.

2. Построим линейную модель парной регрессии:

$$y = a \cdot x + b, \text{ где } a = \frac{Cov(x, y)}{Var(x)}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i .$$

$$Cov\,(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y}), \quad Var\,(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 .$$

Расчеты будем проводить в таблицах ППП Excel (таблица 1.6), из которых выписываем:

$Cov\ (x,y) = 15{,}60{,}625$, $Var\ (x) = 5{,}25$, тогда

$$a = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)} = 2{,}972619 \approx 2{,}97,\ b = \bar{y} - a\bar{x} = 10{,}06071 \approx 10{,}06.$$

Уравнение имеет вид: у = 2,972619х + 10,06071.

Если внесение удобрений увеличится на 1 ц., то урожайность возрастет ≈ 2,97т/га.

3. Рассчитаем коэффициент парной корреляции по формуле:

$$r_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}} = 0{,}992056 \approx 0{,}99 > 0{,}7$$

– свидетельствует о тесной связи между факторами *x* и *y*. Коэффициент детерминации равен:

$$R^2_{xy} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{ip}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2} = \left(r_{xy}\right)^2\ 0{,}984176 \approx 0{,}98,$$

то есть 98% вариации средней урожайности, определяется вариацией внесения удобрений.

Средняя по модулю ошибка аппроксимации

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - y_{ip}}{y_i}\right| \cdot 100\% = 2{,}675885\% \approx 2{,}68\% < 10\%$$

показывает, что точность модели удовлетворительная.

4. Значимость уравнения регрессии оценим с помощью критерия Фишера. Фактическое значение критерия равны:

$$F_{факт} = \frac{R_{xy}{}^2}{1 - R_{xy}{}^2} \cdot (n-2) = 373{,}16767 \approx 373{,}1677.$$

$$F_{факт} \approx 373{,}1677. \ > F_{табл} = 5{,}99.$$

Вывод: так как табличное значение критерия Фишера $F_{табл} < F_{факт}$, то следует отвергнуть нулевую гипотезу H_0 о случайной природе полученной зависимости и признать статистическую значимость уравнения регрессии.

Для оценки статистической значимости коэффициентов регрессии и корреляции рассчитывается *t* – критерий Стьюдента и доверительные интервалы для *a*, *b* и для прогнозного значения $y_{пр}$.

$$t_a = \frac{a}{m_a},\quad t_b = \frac{b}{m_b},\quad t_r = \frac{r}{m_r},$$

где m_a, m_b, m_r – ошибки коэффициентов *a*, *b*, *r*, которые вычисляются по формулам:

$$m_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{ip}\right)^2 / (n-2)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}} = 0{,}1538818 \approx 0{,}1539,$$

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{ip}\right)^2}{n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}} = 0{,}777065 \approx 0{,}777,$$

$$m_r = \sqrt{\frac{1 - R_{xy}^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}9283455}{6}} = 0{,}0513552 \approx 0{,}05135.$$

$$t_a = \frac{a}{m_a} = 19{,}317547 \approx 19{,}3175, \qquad t_b = \frac{b}{m_b} = 12{,}9470685 \approx 12.9471,$$

$$t_r = \frac{r}{m_r} = 19{,}317547 \approx 19{,}3175.$$

Поскольку $|t_{факт}| > t_{табл} = 2{,}4469$, то гипотеза H_0 отклоняется, значения a, b, r_{xy} не случайно отличаются от нуля и сформировались под влиянием объективно-действующих факторов.

Найдем доверительные интервалы для параметров a и b:

$\Delta_a = t_{\text{табл}} \cdot m_a = 2{,}4469 \cdot 0{,}1538818 \approx 0{,}376533$,

$\gamma_a = \left(a - \Delta_a; a + \Delta_a\right) = (2{,}972619 - 0{,}376533;\ 2{,}972619 + 0{,}376533) \approx (2{,}596;\ 3{,}349)$,

$\Delta_b = t_{\text{табл}} \cdot m_b = 2{,}4469 \cdot 0{,}777065 \approx 1{,}9014$,

$\gamma_b = \left(b - \Delta_b; b + \Delta_b\right) = (10{,}06071 - 1{,}9014;\ 10{,}06071 + 1{,}9014) \approx (8{,}1593;\ 11{,}9621)$.

5. Вычислим прогнозное значение результата, если прогнозное значение прожиточного минимума в среднем на душу населения составит:

$x_{пр} = 1{,}2 \cdot \bar{x} = 1{,}2 \cdot 4{,}5 = 5{,}4$ ц.

$y_{пр} = 2{,}972619 \cdot 5{,}4 + 10{,}06071 = 26{,}112857$ т/га.

При внесении 5,4 ц. удобрений на 1 га урожайность составит $\approx 26{,}1128$ т/га.

Найдём ошибку прогноза по формуле:

$$m_{пр} = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{ip}\right)^2}{n-2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_{пр} - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}\right)} = 1{,}0667905.$$

Найдём доверительный интервал прогноза п фрмуле:

$\Delta_{пр} = t_{\text{табл}} \cdot m_{пр} = 2{,}4469 \cdot 1{,}0667905 = 2{,}6103298$,

$\gamma_{пр} = \left(b - \Delta_{пр}; b + \Delta_{пр}\right) = (26{,}112857 - 2{,}6103298;\ 26{,}112857 + 2{,}6103298) \approx$

$\approx (23{,}5025;\ 28{,}7232)$.

Прогнозное значение урожайности изменяется в пределах от 23,5025 до 28,7232 т/га.

Таблица 1.6

№	x	y	$x_i - x_{cp}$	$y_i - y_{cp}$	$(x_i - x_{cp})(y_i - y_{cp})$	$(x_i - x_{cp})^2$	$(y_i - y_{cp})^2$	y_{ip}
1	1	12,9	-3,5	-10,538	36,88125	12,25	111,038906	13,033333
2	2	16,4	-2,5	-7,0375	17,59375	6,25	49,5264063	16,005952
3	3	18,8	-1,5	-4,6375	6,95625	2,25	21,5064063	18,978571
4	4	22,8	-0,5	-0,6375	0,31875	0,25	0,40640625	21,95119
5	5	24,6	0,5	1,1625	0,58125	0,25	1,35140625	24,92381
6	6	27,1	1,5	3,6625	5,49375	2,25	13,4139063	27,896429
7	7	29,5	2,5	6,0625	15,15625	6,25	36,7539063	30,869048
8	8	35,4	3,5	11,9625	41,86875	12,25	143,101406	33,841667
Сумма	**36**	**187,5**	**0**	**0**	**124,85**	**42**	**377,09875**	**187,5**
Среднее	**4,5**	**23,4375**	**0**	**0**	**15,60625**	**5,25**	**47,1373438**	**23,4375**
	xcp	*ycp*			*Cov(x,y)*	*Var(x)*	*Var(y)*	

Продолжение таблицы 1.6

$y_i - y_{ip}$	$(y_i - y_{ip})^2$	$\lvert (y_i - y_{ip})/y_i \rvert$	x^2
-0,133333333	0,0177778	0,01033592	1
0,394047619	0,1552735	0,02402729	4
-0,178571429	0,0318878	0,00949848	9
0,848809524	0,7204776	0,03722849	16
-0,323809524	0,1048526	0,01316299	25
-0,796428571	0,6342985	0,02938851	36
-1,369047619	1,8742914	0,04640839	49
1,558333333	2,4284028	0,04402072	64
8,88178E-15	**5,9672619**	**0,21407079**	**204**
1,11022E-15	**0,7459077**	**0,02675885**	**25,5**
	Acp=	2,67588482	

Проведем расчёты с помощью пакета «Анализ данных» (таблица 1.7).

Таблица 1.7

ВЫВОД ИТОГОВ					
Регр. статистика					
Множ. R	0,992056381				
R-квадрат	0,984175864				
Нормир. R-квадрат	0,981538508				
Стандарт. ошибка	0,997268094				
Наблюдения	8				
Дисперсионный анализ					
	df	*SS*	*MS*	*F*	
Регрессия	1	371,13149	371,1315	373,16762	
Остаток	6	5,9672619	0,994544		
Итого	7	377,09875			
	Коэфф.	*Ст. ош.*	*t-стат.*	*Нижн. 95%*	*Верхн. 95%*
b	10,06071429	0,777065	12,94707	8,1593046	11,9621239
a	2,972619048	0,1538818	19,31755	2,5960838	3,34915427

Результаты расчётов совпадают с результатами, приведенными в таблице 1.6.

6. Графики диаграммы рассеяния и уравнения регрессии отображены на рисунке 1.2.

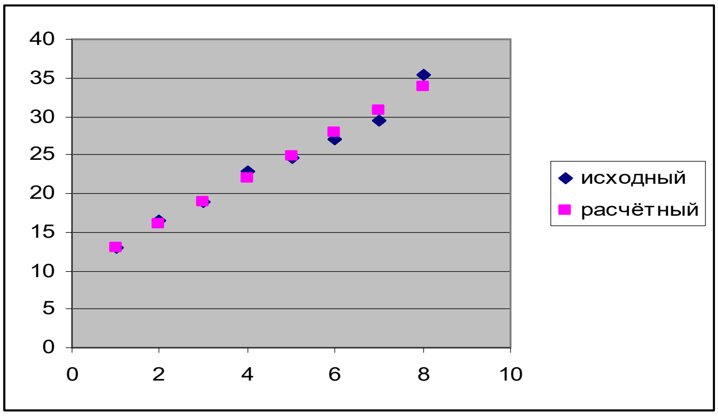

Рис 1.2.

Ответ: Построено уравнение: y = 2,972619x + 10,06071. Уравнение статистически значимо и надёжно, связь между урожайностью и внесением удобрений тесная. Точность модели удовлетворительная.

Задание 1.2

В таблице 1.8 приведена зависимость выпуска продукции (*y*, тыс. ед.) от материалоёмкости продукции (*x*, кг).

Таблица 1.8

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5,3	9,4	12,8	16,7	20,3	23,4	28,3	33,3

По приведенным данным требуется.

1. Построить модель парной регрессии $y = ax^k$.

2. Рассчитать индексы (коэффициенты) корреляции , детерминации и среднюю ошибку аппроксимации. Оценить модель с помощью критерия Фишера.

3. Рассчитать прогнозное значение результата, если прогнозное значение фактора увеличится на 20% от его среднего уровня.

4. Результаты расчетов отобразить на графиках.

Решение.

1. Построим степенную модель парной регрессии *y* от *x*: $y = ax^k$.

Уравнение регрессии в логарифмической форме: $\ln y = \ln a + k \cdot \ln x$;

Обозначим: $Y = \ln y$, $b = \ln a$, $X = \ln x$, тогда $a = e^b$. Получим линейную модель парной регрессии $Y = b + k \cdot X$.

Расчёты проведём с помощью ППП Excel (таблица 1.9) и пакета «Анализ данных» (таблица 1.10).

Таблица 1.9

№	*x*	*y*	*X=ln x*	*Y = ln y*	*yip*	*(y-ycp)^2*	*(y-yp)^2*	$\overline{A}$
1	1	5,3	0	1,667707	5,131298	179,2252	0,02846	0,0318306
2	2	9,4	0,693147	2,240710	9,363689	86,25766	0,001319	0,0038629
3	3	12,8	1,098612	2,549445	13,312226	34,66266	0,262376	0,0400177
4	4	16,7	1,386294	2,815409	17,087034	3,950156	0,149795	0,0231757
5	5	20,3	1,609438	3,010621	20,737703	2,600156	0,191584	0,0215617
6	6	23,4	1,791759	3,152736	24,292399	22,20766	0,796377	0,0381367
7	7	28,3	1,945910	3,342862	27,769222	92,40016	0,281726	0,0187554
8	8	33,3	2,079441	3,505557	31,180739	213,5252	4,491268	0,0636415
Сумма	**36**	**149,5**	**10,604603**	**22,285046**	**148,874310**	**634,8288**	**6,202905**	**0,2409822**
Среднее	**4,5**	**18,6875**	**1,325575**	**2,785631**	**18,609289**	**79,35359**	**0,775363**	**0,0301228**
			нов хср					
			хнов=ln x					

Из таблицы 1.9 получаем: $k = 0{,}867753$, $b = 1{,}635359$.

Линейное уравнение парной регрессии имеет вид:

$$Y = 0{,}867753 \cdot X + 1{,}635359.$$

Найдем $a = e^{1{,}635359} = 5{,}13129789$.

Потенцируя, получим уравнение регрессии в виде:

$$y = 5{,}1312979 \cdot x^{0.867753142}.$$

2. Рассчитаем индекс парной корреляции по формуле:

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y_{ip}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{6,202905}{634,8288}} = 0,9951025 \approx 0,995.$$

это свидетельствует о тесной связи между выпуском продукции и материалоёмкостью продукции.

Коэффициент детерминации равен: $R_{xy}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y_{ip}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2} =$ 0,990229 $\approx$ 0,99.

То есть $\approx$ 99% вариации выпуска продукции определяется вариацией материалоёмкости продукции.

Значимость уравнения регрессии оценим с помощью критерия Фишера. Фактическое значение критерия равны:

$$F_{факт} = \frac{R_{xy}{}^2}{1 - R_{xy}{}^2} \cdot (n-2) \frac{0,990229011}{1 - 0,990229011} \cdot (8-2) = 608,062724 .$$

$$F_{факт} \approx 608,062724 > F_{табл} = 5,99 .$$

Вывод: так как табличное значение критерия Фишера $F_{табл} < F_{факт}$, то следует отвергнуть нулевую гипотезу H_0 о случайной природе полученной зависимости и признать статистическую значимость уравнения регрессии.

Средняя по модулю ошибка аппроксимации

$$\overline{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{y_i - y_{ip}}{y_i} \right| \cdot 100\% = 3,0123\% > 10\%,$$

показывает, что точность модели неудовлетворительная.

Таблица 1.10

ВЫВОД ИТОГОВ			
Регрессионная статистика			
Множественный R	0,998152		
R-квадрат	0,996308		
Нормированный R-квадрат	0,995692		
Стандартная ошибка	0,040134		
Наблюдения	8		
Дисперсионный анализ			
	df	*F*	
Регрессия	1	1619,09402	
Остаток	6		
Итого	7		
	Коэфф-ты	*Станд. ош.*	*t-стат.*
b	1,635359	0,031914	51,24175
k	0,867753	0,021565	40,23797

3. Вычислим прогнозное значение результата, если прогнозное значение прожиточного минимума в среднем на душу населения составит: $x_{пр} = 1{,}2 \cdot \bar{x} =$ 5,4. $y_{пр} = 5{,}1312979 \cdot x^{0.8677553142} \approx 22{,}1699$.

При материалоёмкости продукции 5,4 кг выпуск продукции составит 20,165969 тыс. ед.

4. Результаты расчетов отображены на рисунке 1.3.

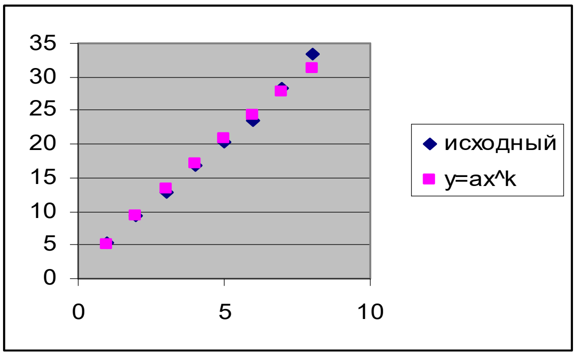

Рис.1.3

Ответ: Построено уравнение: $y = 5{,}1312979 \cdot x^{0.867753142}$. Связь между выпуском продукции и материалоёмкостью тесная. Точность модели удовлетворительная.

2. МНОЖЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

2.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В первом задании по данной теме необходимо построить линейное уравнение множественной регрессии $y = a_1x_1 + a_2x_2 + b$ [2,3,5]. Для нахождения параметров этого уравнения применим метод наименьших квадратов (МНК). Построим систему нормальных уравнений и решим ее методом Крамера.

$$\begin{cases} a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{1i} + b\sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{1i}; \\ a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_{2i} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{2i}; \\ a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i} + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i} + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i; \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{D_1}{D};\ a_2 = \frac{D_2}{D};\ b = \frac{D_3}{D},\ \text{где}$$

$$D = \begin{vmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{1i} \\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{2i} & n \end{vmatrix}; \qquad D_1 = \begin{vmatrix} \sum x_{1i}y_i & \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{1i} \\ \sum x_{2i}y_i & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i} \\ \sum y_i & \sum x_{2i} & n \end{vmatrix};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}y_i & \sum x_{1i} \\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}y_i & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum y_i & n \end{vmatrix}; \qquad D_3 = \begin{vmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}y_i \\ \sum x_{1i} & \sum x_{2i} & \sum y_i \end{vmatrix}.$$

Теснота связи между переменными y, x_1, x_2 определяется с помощью индекса (коэффициента) множественной корреляции $R_{yx_1x_2}$, который находится по формуле: $R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{ip})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$.

Индекс (коэффициент) множественной детерминации

$$R_{yx_1x_2}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{ip})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

показывает, сколько процентов вариации зависимой переменной y объясняется уравнением множественной регрессии.

Проверку значимости линейного уравнения множественной регрессии в целом и индекса (коэффициента) множественной корреляции проведём с помощью F – критерия Фишера. Для этого проверяется гипотеза H_0 – о статистической незначимости уравнения множественной регрессии в целом и показателя тесноты связи – индекса множественной корреляции.

Вычисляется фактическое значение F – критерия Фишера по формуле:

$$F_{факт} = \frac{R^2_{yx_1x_2}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n-m-1}{m},$$

где n – число единиц совокупности, m – число параметров при независимых неизвестных. Полученное значение $F_{факт}$ сравнивается с табличным значением критерия $F_{табл}$.

Значение $F_{табл}$ – это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости α $(\alpha = 0{,}05\ или\ 0{,}01)$.

Если $F_{факт} > F_{табл}$, гипотеза H_0 – о статистической незначимости линейного уравнения множественной регрессии и индекса множественной корреляции отвергается. Уравнение регрессии статистически значимо и надежно, связь между переменными x_1, x_2 и y сформировалась не случайно, а под влиянием объективно действующих факторов. В противном случае, если $F_{факт} < F_{табл}$, гипотеза H_0 – о статистической незначимости уравнения регрессии и индекса корреляции принимается. Уравнение регрессии статистически незначимо и ненадежно, связь между переменными x_1, x_2 и y сформировалась случайно.

Частные F – критерии: Fx_1 и Fx_2 оценивают статистическую значимость присутствия каждой независимых переменных x_1 и x_2 в уравнении, их значения находятся по формулам:

$$Fx_1 = \frac{R^2{}_{yx_1x_2} - R^2{}_{yx_2}}{1 - R^2{}_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n-m-1}{1}, \quad Fx_2 = \frac{R^2{}_{yx_1x_2} - R^2{}_{yx_1}}{1 - R^2{}_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n-m-1}{1}.$$

Полученные значения сравниваются с табличным значением $F_{табл}$. Если $Fx_1 > F_{табл.}$, то целесообразно включать в модель фактор x_1 после фактора x_2, в противном случае если $Fx_1 < F_{табл.}$, то включать в модель фактор x_1 после фактора x_2 нецелесообразно. Аналогичные выводы получаем для проверки включения фактора x_2 после фактора x_1.

Оценку значимости коэффициентов a_1, и a_2 по t-критерию Стьюдента проводим с помощью вычисления фактических значений t – критерия:

$$t_{a_1} = \sqrt{Fx_1}\ ,\ t_{a_2} = \sqrt{Fx_2}\ .$$

Сравниваем $t_{факт}$ с $t_{табл}$, и если $t_{факт} > t_{табл}$, – гипотеза H_0 отклоняется, значения a_1, a_2 не случайно отличаются от нуля, сформировались под влиянием объективно действующих факторов, статистически значимы. В противном случае если $t_{факт} < t_{табл}$ – гипотеза H_0 принимается, значения a_1, a_2 отличаются от нуля случайно.

Средняя ошибка аппроксимации, среднее отклонение расчетных значений от фактических: $\overline{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y_i - y_{ip}}{y_i}\right| \cdot 100\%$, должна быть не более 10%.

Для оценки тесноты связи между каждой парой факторов вычисляются коэффициенты парной корреляции: r_{yx_1}, r_{yx_2} и $r_{x_1x_2}$.

$$r_{yx_1}=\frac{Cov(x_1,y)}{\sqrt{Var(x_1)\cdot Var(y)}};\; r^2_{yx_1}=(r_{yx_1})^2;\; r_{yx_2}=\frac{Cov(x_2,y)}{\sqrt{Var(x_2)\cdot Var(y)}};\; r^2_{yx_2}=(r_{yx_2})^2;$$

$$r_{x_1x_2}=\frac{Cov(x_1,x_2)}{\sqrt{Var(x_1)\cdot Var(x_2)}};\qquad r^2_{x_1x_2}=(r_{x_1x_2})^2.$$

Для оценки влияния на y значения фактора x_1 при неизменном значении фактора x_2 и значения фактора x_2 при неизменном значении фактора x_1 вычисляются частные коэффициенты (или индексы) корреляции:

$$r_{yx_1\cdot x_2}=\frac{r_{yx_1}-r_{yx_2}\cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{yx_2}\right)\cdot\left(1-r^2_{x_1x_2}\right)}},\; r_{yx_2\cdot x_1}=\frac{r_{yx_2}-r_{yx_1}\cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{yx_1}\right)\cdot\left(1-r^2_{x_1x_2}\right)}},$$

$$r_{x_1x_2\cdot y}=\frac{r_{x_1x_2}-r_{yx_1}\cdot r_{yx_2}}{\sqrt{\left(1-r^2_{yx_1}\right)\cdot\left(1-r^2_{yx_2}\right)}}.$$

Коэффициент $r_{yx_1\cdot x_2}$ определяет тесноту связи между переменными y и x_1 при постоянном значении переменной x_2. Коэффициенты $r_{yx_2\cdot x_1}$ и $r_{x_1x_2\cdot y}$ определяют тесноту связи между переменными y и x_2 при постоянном значении переменной x_1 и между переменными x_1 и x_2 при постоянном значении переменной y соответственно.

Необходимо построить математическую модель вида: $y=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+b$. Для нахождения параметров этого уравнения применим метод наименьших квадратов (МНК). Построим систему нормальных уравнений для нахождения параметров a_1, a_2, a_3, b:

$$\begin{cases}
a_1\sum_{i=1}^{n}x_{1i}^2+a_2\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}+a_3\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{3i}+b\sum_{i=1}^{n}x_{1i}=\sum_{i=1}^{n}x_{1i}y_i;\\
a_1\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}+a_2\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2+a_3\sum_{i=1}^{n}x_{2i}x_{3i}+b\sum_{i=1}^{n}x_{2i}=\sum_{i=1}^{n}x_{2i}y_i;\\
a_1\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{3i}+a_2\sum_{i=1}^{n}x_{2i}x_{3i}+a_3\sum_{i=1}^{n}x_{3i}^2+b\sum_{i=1}^{n}x_{3i}=\sum_{i=1}^{n}x_{3i}y_i;\\
a_1\sum_{i=1}^{n}x_{1i}+a_2\sum_{i=1}^{n}x_{2i}+a_3\sum_{i=1}^{n}x_{3i}+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i.
\end{cases}$$

Параметры уравнения a_1, a_2, a_3, b находим с помощью ППП Excel и пакета «Анализ данных», надстроек Корреляция и Регрессия. Оценку уравнения и его параметров проводим с помощью критериев Фишера, частных F-критериев Фишера и частных t-критериев Стьюдента, коэффициентов (индексов) множественной корреляции и детерминации, коэффициентов частной корреляции и средней ошибки аппроксимации.

При построении уравнения следует вычислить коэффициенты парной корреляции, проверить наличие мультиколлинеарности переменных, и при необходимости провести отсев переменных, исключив из рассмотрения статистически незначимые факторы [3].

Во втором задании по данной теме студенты должны построить производственную функцию типа Кобба–Дугласа: $y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$.

Для нахождения параметров этого уравнения предварительно прологарифмируем эту функцию, получим следующее уравнение:

$$\ln y = \ln A + \alpha \cdot \ln x_1 + \beta \cdot \ln x_2 .$$

Произведем замену:

$$Y = \ln y,\ X_1 = \ln x_1,\ X_2 = \ln x_2,\ b = \ln A,\ a_1 = \alpha,\ a_2 = \beta,\ A = e^b .$$

Получим следующее линейное уравнение: $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + b$.

Далее записываем уравнение в истинной форме. Поскольку исходное уравнение является внутренне линейным, то для его оценки применяем методику, описанную выше для линейного уравнения множественной регрессии.

2.2. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «МНОЖЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ»

Серия А.

Задание 2.1

В таблице 2.1 приведены условные данные зависимости объёма выпускаемой продукции y от затрат объёмов ресурсов 1-го, 2-го и 3-го видов $x_1', x_2'., x_3'$. Сформировать свой вариант исходных данных, используя формулы (где N – номер варианта):

$$y = y' + 0{,}05N;\ x_1 = x_1' + 0{,}05N;\ x_2 = x_2' + 0{,}05N;\ x_3 = x_3' + 0{,}05N.$$

Требуется:

1. Построить матрицу парных коэффициентов корреляции, установить какие факторы коллинеарны.
2. Построить эконометрическую модель, уравнение множественной регрессии $y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b$, зависимости объёма выпускаемой продукции y от затрат объёмов ресурсов 1-го , 2-го и 3-го видов x_1, x_2 и x_3, дать экономическую интерпретацию модели.
3. Оценить модель и ее параметры, с помощью критериев Фишера и Стьюдента. Определить точность модели с помощью средней ошибки аппроксимации.
4. Рассчитать средние по совокупности коэффициенты эластичности, сделать вывод.
5. С учетом анализа парных коэффициентов корреляции при наличии мультиколлинеарности переменных $x_i\ x_j$, $r_{x_ix_j}$ >0,75 , провести отсев переменных. Найти уравнения с двумя переменными, оценить их качество согласно вышеописанному для уравнения с полным набором переменных. Найти коэффициенты частной корреляции, сделать вывод.
6. Из всех полученных уравнений выбрать наилучшее. Записать полный ответ.

Таблица 2.1

№	y'	x_1'	x_2'	x_3'	№	y'	x_1'	x_2'	x_3'
1	68,96	24,60	41,25	25,11	11	101,1	45,30	57,90	39,5
2	70,36	26,55	42,90	25,15	12	102,81	47,34	58,12	40,1
3	75,61	28,50	46,25	27,81	13	103,18	44,52	59,53	41,2
4	82,73	34,05	47,10	30,9	14	105,78	49,81	60,24	41,3
5	89,82	36,00	50,71	35,1	15	107,74	50,63	61,42	42,4
6	89,92	32,25	47,74	37,2	16	110,27	52,44	63,53	43,5
7	92,72	37,35	46,50	37,5	17	112,57	56,83	62,12	44,1
8	95,39	39,15	51,96	38,1	18	113,17	57,11	64,11	44,2
9	95,46	38,40	54,00	38,15	19	114,66	56,52	64,55	45,5
10	96,01	38,10	50,73	39,2	20	116,83	60,13	65,14	46

Задание 2.2

В таблице 2.2 приведены условные данные зависимости объёма выпускаемой продукции y от затрат объёмов ресурсов 1-го, 2-го и 3-го видов $x_1', x_2'., x_3'$. Сформировать свой вариант исходных данных, используя формулы (где N – номер варианта):

$$y = y' + 0{,}05N;\ x_1 = x_1' + 0{,}05N;\ x_2 = x_2' + 0{,}05N;\ x_3 = x_3' + 0{,}05N.$$

Требуется:

1. Построить эконометрическую модель, уравнение множественной регрессии $y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} \cdot x_3^{\gamma}$, зависимости объёма выпускаемой продукции y от затрат объёмов ресурсов 1-го, 2-го и 3-го видов, дать экономическую интерпретацию модели, с помощью коэффициентов эластичности.

2. Оценить модель, с помощью критерия Фишера. Определить точность модели с помощью средней ошибки аппроксимации.

Таблица 2.2.

№	y'	x_1'	x_2'	x_3'	№	y'	x_1'	x_2'	x_3'
1	91,09	25,2	41,3	11,2	11	114,01	30,1	45,1	21,41
2	94,66	26,5	42,4	12,5	12	119,01	32,2	46,2	23,5
3	99,09	27,8	43,6	13,7	13	118,02	31,5	44,5	25,61
4	105,41	31,5	45,2	14,91	14	127,72	32,4	48,5	28,9
5	113,09	32,8	47,6	16,82	15	133,46	34,1	50,1	31,1
6	109,91	30,3	45,2	18,31	16	138,55	36,2	52,1	31,5
7	111,85	33,7	44,8	17,45	17	145,01	38,5	54,2	33,7
8	120,05	34,7	48,4	20,11	18	146,65	39,1	53,4	35,1
9	124,11	34,4	49,8	21,52	19	151,99	39,7	55,9	37,1
10	120,01	31,2	47,6	23,44	20	154,05	40,8	56,1	37,8

Серия Б.

Задание 2.1

В таблице 2.3 приведены условные данные зависимости объёма выпускаемой продукции y от затрат объёмов ресурсов 1-го, 2-го и 3-го видов $x_1', x_2'., x_3'$. Сформировать свой вариант исходных данных, используя формулы (где N – номер варианта):

$$y = y' + 0{,}05N;\ x_1 = x_1' + 0{,}05N;\ x_2 = x_2' + 0{,}05N;\ x_3 = x_3' + 0{,}05N.$$

Требуется:

1. Построить матрицу парных коэффициентов корреляции, установить какие факторы коллинеарны.
2. Построить эконометрическую модель, уравнение множественной регрессии $y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b$, зависимости объёма выпускаемой продукции y от затрат объёмов ресурсов 1-го , 2-го и 3-го видов x_1, x_2 и x_3, дать экономическую интерпретацию модели.
3. Оценить модель и ее параметры, с помощью критериев Фишера и Стьюдента. Определить точность модели с помощью средней ошибки аппроксимации.
4. Рассчитать средние по совокупности коэффициенты эластичности, сделать вывод.
5. С учетом анализа парных коэффициентов корреляции при наличии мультиколлинеарности переменных $x_i\ x_j$, $r_{x_ix_j}$ >0,75 , провести отсев переменных. Найти уравнения с двумя переменными, оценить их качество согласно вышеописанному для уравнения с полным набором переменных. Найти коэффициенты частной корреляции, сделать вывод.
6. Из всех полученных уравнений выбрать наилучшее. Записать полный ответ.

Таблица 2.3

№	y'	x_1'	x_2'	x_3'	№	y'	x_1'	x_2'	x_3'
1	264,08	31,80	48,45	25,11	11	375,32	47,33	58,12	39,5
2	269,7	33,75	50,10	25,15	12	375,81	44,51	59,54	40,1
3	289,35	35,70	51,90	27,81	13	390,75	49,81	60,25	41,2
4	317,57	41,25	54,34	30,9	14	394,36	50,62	61,41	41,3
5	347,07	43,20	57,90	35,1	15	405,81	52,44	63,51	42,4
6	346,32	39,45	54,95	37,2	16	415,44	56,85	62,13	43,5
7	354,22	44,55	53,70	37,5	17	422,01	57,12	64,12	44,1
8	368,72	46,35	59,17	38,1	18	422,27	56,51	64,54	44,2
9	370,88	45,60	61,20	38,15	19	434,82	60,12	65,16	45,5
10	370,38	45,30	57,96	39,2	20	439,01	60,15	66,22	46

Задание 2.2

В таблице 2.4 приведены условные данные зависимости объёма выпускаемой продукции y от затрат объёмов ресурсов 1-го, 2-го и 3-го видов $x_1', x_2'., x_3'$. Сформировать свой вариант исходных данных по данным таблицы 1., используя формулы (где N – номер варианта):

$$y = y' + 0{,}05N;\ x_1 = x_1' + 0{,}05N;\ x_2 = x_2' + 0{,}05N;\ x_3 = x_3' + 0{,}05N.$$

Требуется:

1. Построить эконометрическую модель, уравнение множественной регрессии $y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} \cdot x_3^{\gamma}$, зависимости объёма выпускаемой продукции y от затрат объёмов ресурсов 1-го, 2-го и 3-го видов, дать экономическую интерпретацию модели, с помощью коэффициентов эластичности.

2. Оценить модель, с помощью критерия Фишера. Определить точность модели с помощью средней ошибки аппроксимации.

Таблица 2.4

№	y'	x_1'	x_2'	x_3'	№	y'	x_1'	x_2'	x_3'
1	139,01	30,15	45,1	25,11	11	187,13	41,61	57,1	39,5
2	144,05	32,25	46,2	25,15	12	184,53	40,41	56,1	40,1
3	144,84	31,51	44,5	27,81	13	192,5	43,2	58,1	41,2
4	153,51	32,42	48,5	30,9	14	186,01	40,25	57,1	41,3
5	162,01	34,14	50,1	35,1	15	187,12	41,25	55,1	42,4
6	169,99	36,21	52,1	37,2	16	192	42,25	58,1	43,5
7	175,99	38,53	54,2	37,5	17	197	44,25	59,1	44,1
8	176,65	39,12	53,4	38,1	18	202	45,25	61,1	44,2
9	180,99	39,73	55,9	38,15	19	200,01	43,3	61,8	45,5
10	183,99	40,81	56,1	39,2	20	205,25	46,23	63	46

2.3. ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «МНОЖЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ»

Задание 2.1

По данным, представленным в таблице 2.5 [4], изучается зависимость индекса человеческого развития y от переменных:

x_1 - ожидаемая продолжительность жизни при рождении 1997 г. число лет;

x_2 - суточная калорийность питания населения, ккал на душу населения;

x_3 - расходы домашних хозяйств, % к ВВП.

Таблица 2.5

N	Страна	y	x_1	x_2	x_3
1	Австрия	0,904	77,0	3343	56,1
2	Австралия	0,922	78,2	3001	61,8
3	Белоруссия	0,763	68,0	3101,	59,1
4	Бельгия	0,923	77,2	3543	63,3
5	Великобритания	0,918	77,2	3237	64,1
6	Германия	0,906	77,2	3330	57,0
7	Дания	0,905	75,7	3808	50,7
8	Индия	0,545	62,6	2415	57,1
9	Испания	0,894	78,0	3295	62,0
10	Италия	0,900	78,2	3504	61,8
11	Канада	0,932	79,0	3056	58,6
12	Казахстан	0,740	67,6	3007	71,7
13	Китай	0,701	69,8	2844	48,0
14	Латвия	0,744	68,4	2861	63,9
15	Нидерланды	0,921	77,9	3259	59,1
16	Норвегия	0,927	78,1	3350	47,5
17	Польша	0,802	72,5	3344	65,3
18	Россия	0,747	66,6	2704	53,2
19	США	0,927	76,7	3642	67,9
20	Украина	0,721	68,8	2753	61,7
21	Финляндия	0,913	76,8	2916	52,9
22	Франция	0,918	78,1	3551	59,9
23	Чехия	0,833	73,9	3177	51,5
24	Швейцария	0,914	78,6	3280	61,2
25	Швеция	0,923	78,5	3160	53,1

Требуется:

1. Построить матрицу парных коэффициентов корреляции. Установить, какие факторы мультиколлинеарны.

2. Построить уравнение множественной регрессии, характеризующее зависимость индекса человеческого развития (y) от ожидаемой продолжительности жизни при рождении 1997 г. число лет (x_1), суточной калорийности питания населения, ккал на душу населения (x_2) и расходов домашних хозяйств % к ВВП (x_3).

3. Оценить статистическую значимость уравнения регрессии и его параметров с помощью критериев Фишера и Стьюдента.

4. Отобрать информативные факторы, в зависимости от результатов, полученных в пунктах 1 и 3. Построить уравнение регрессии со статистически значимыми факторами. Дать полную оценку качества построенной модели с учетом экономической интерпретации .

5. Оценить точность модели с помощью средней ошибки аппроксимации и рассчитать средние по совокупности коэффициенты эластичности, зависимости индекса человеческого развития от статистически значимых факторов.

6. Сделать выводы, записать краткий ответ.

Решение.

1. Построим матрицу парных коэффициентов корреляции с помощью ППП Excel надстройки Анализ данных и инструмента Корреляция (таблица 2.6).

Таблица 2.6

	y	*x1*	*x2*	*x3*
y	1			
x1	0,96203316	1		
x2	0,7514499	0,70392712	1	
x3	-0,00433007	-0,0521242	0,1099746	1

Определим по таблицам Фишера-Йейтса [5] значения коэффициента корреляции $r_{кр}$ для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ равен $r_{кр} \approx 0{,}4$. Выборочные парные коэффициенты корреляции, абсолютная величина которых больше $r_{кр} \approx 0{,}4$ статистически значимы. Видим, что с вероятностью 0,95 можно утверждать наличие статистической связи между *i*-м и *j*-м признаками, выборочный парный коэффициент корреляции которых r_{ij} значим. Связь между признаками, которым соответствуют незначимые коэффициенты, с такой уверенностью не установлена (хотя нельзя утверждать отсутствие этой связи). Отмечаем, что согласно проверке статистически незначимыми являются коэффициенты корреляции $r_{x_1x_3}$ и $r_{x_2x_3}$.

Мультиколлинеарность зависимых факторов (переменных) отсутствует. Проверяем условие одновременного включения факторов в модель по правилу: $r_{yx_i} > r_{x_ix_j}$ и $r_{yx_j} > r_{x_ix_j}$ – то переменные x_i и x_j включать в модель целесообразно.

$r_{yx_1} = 0{,}96203316 > r_{x_1x_2} = 0{,}70392712$ и $r_{yx_2} = 0{,}7514499 > r_{x_1x_2} = 0{,}70392712$, следовательно, то переменные x_1 и x_2 включать в модель целесообразно.

$r_{yx_1} = 0{,}96203316 > r_{x_1x_3} = 0{,}0521242$ и $r_{yx_3} = 0{,}00433007 < r_{x_1x_3} = 0{,}0521242$, следовательно, то переменные x_1 и x_3 одновременно включать в модель нецелесообразно.

$r_{yx_2} = 0{,}7514499 > r_{x_2x_3} = 0{,}1099746$ и $r_{yx_3} = 0{,}00433007 < r_{x_2x_3} = 0{,}1099746$, следовательно, то переменные x_2 и x_3 одновременно включать в модель нецелесообразно.

2. Построим уравнение множественной регрессии, характеризующее зависимость индекса человеческого развития (y) от ожидаемой продолжительности жизни при рождении 1997 г. число лет (x_1), суточной калорийности питания населения, ккал на душу населения (x_2) и расходов домашних хозяйств % к ВВП (x_3) вида $y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b$.

Параметры уравнения находим с помощью ППП Excel с использованием надстройки Анализ данных и инструмента Регрессия (таблица 2.7).

Таблица 2.7

ВЫВОД ИТОГОВ			
Регрессионная статистика			
Множественный R	0,968013649		
R-квадрат	0,937050425		
Нормированный R-квадрат	0,928057629		
Стандартная ошибка	0,027169796		
Наблюдения	25		
Дисперсионный анализ			
	df	*F*	
Регрессия	3	104,200116	
Остаток	21		
Итого	24		
	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*
b	-0,665371219	0,105446316	-6,310047105
a1	0,018142391	0,001644763	11,03039996
a2	4,40329E-05	2,48157E-05	1,774395595
a3	0,000423405	0,00093481	0,452931886

Получено уравнение:

$$y = 0{,}018142391x_1 + 4{,}40329\text{E-}05\text{x}_2 + 0{,}000423405\text{x}_3 - 0{,}665371219.$$

Если ожидаемая продолжительность жизни при рождении (x_1) увеличится на 1 год, а суточная калорийность питания населения, (x_2) и расходы домашних хозяйств (x_3) не изменятся, то индекс человеческого развития (y) увеличится на 0,018 единиц.

Если суточная калорийность питания населения (x_2) возрастет на 1 ккал, а ожидаемая продолжительность жизни при рождении (x_1) и расходы домашних хозяйств (x_3) не изменятся, то индекс человеческого развития (y) практически не изменится.

Если расходы домашних хозяйств (x_3) увеличится на 1 % к ВВП, а ожидаемая продолжительность жизни при рождении (x_1)и суточная калорийность питания населения, (x_2) не изменятся, то индекс человеческого развития (y) увеличится на 0,0004 единицы.

3. Оценим статистическую значимость уравнения регрессии и его параметров с помощью критериев Фишера и Стьюдента.

Из таблицы находим коэффициенты множественной корреляции и детерминации: $R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{ip})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = 0{,}968013649$ и

$R^2{}_{yx_1x_2} = (0{,}968013649)^2 = 0{,}937050425$.

Нормированный коэффициент детерминации $R^2_{норм} = 0{,}928057629$.

$R_{yx_1x_2} \approx 0{,}97$ и $R^2{}_{yx_1x_2} \approx 0{,}94$ - связь между индексом человеческого развития (y) и ожидаемой продолжительности жизни при рождении (x_1), суточной калорийности питания населения, (x_2) и расходов домашних хозяйств (x_3) тесная, 94% вариации (y) объясняется переменными (x_1), (x_2), (x_3).

Далее оценку модели проводим с помощью данных таблицы 2.7.

Фактическое значение F-критерия Фишера:

$$F_{факт} = \frac{R^2_{yx_1x_2}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n - m - 1}{m} = 104{,}200116; \; F_{табл}=3{,}07.$$

Вывод: $F_{факт} \approx 104{,}200116 > F_{табл} = 3{,}07$, гипотеза H_0 о статистической незначимости уравнения регрессии в целом и показателя тесноты связи коэффициента корреляции отвергается. Уравнение регрессии в целом статистически значимо, связь между факторами сформировалась неслучайно.

Оценим параметры уравнения по критерию Стьюдента:

$t_{a_1} = 11{,}03039996 > t_{табл} = 2{,}0796;$

$t_{a_2} = 1{,}774395595 < t_{табл} = 2{,}0796,$

$t_{a_3} = 0{,}452931886 < t_{табл} = 2{,}0796.$

Вывод: гипотеза H_0 – о незначимом отличии от нуля коэффициента регрессии a_1 отклоняется, коэффициент регрессии a_1 не случайно отличаются от нуля и статистически значим, а коэффициент регрессии a_2 и a_3 статистически незначимы, что подтверждает также незначимость коэффициентов $r_{x_1x_3}$ и $r_{x_2x_3}$, и эти коэффициенты a_2 и a_3 полученные в уравнении регрессии близки к нулю .

4. Согласно данным пп. 1 и 3 исключаем из рассмотрения переменную x_3 и построим уравнение $y = a_1x_1 + b$ (таблица 2.8).

Таблица 2.8

ВЫВОД ИТОГОВ			
Регрессионная статистика			
Множественный R	0,962033161		
R-квадрат	0,925507804		
Нормированный R-квадрат	0,922269013		
Стандартная ошибка	0,028241717		
Наблюдения	25		
Дисперсионный анализ			
	F		
Регрессия	285,7571736		
Остаток			
Итого			
	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*
b	-0,652063486	0,08901942	-7,3249579
a1	0,020178753	0,0011937	16,9043537

Получено уравнение:

$y = 0{,}020178753x_1 - 0{,}652063486$.

Если ожидаемая продолжительность жизни при рождении (x_1) увеличится на 1 год, то индекс человеческого развития (y) уменьшится на 0,65 единиц.

Оценим статистическую значимость уравнения регрессии и его параметров с помощью критериев Фишера и Стьюдента.

Из таблицы находим коэффициенты множественной корреляции и детерминации: $R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{ip})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = 0{,}962033161$ и

$R^2{}_{yx_1x_2} = (0{,}962033161)^2 = 0{,}925507804$.

$R_{yx_1x_2} \approx 0{,}96$ и $R^2{}_{yx_1x_2} \approx 0{,}92$ - связь между индексом человеческого развития (y) и ожидаемой продолжительности жизни при рождении (x_1), 92% вариации (y) объясняется переменной (x_1).

Далее оценку модели проводим с помощью данных таблицы 2.8.

Фактическое значение F-критерия Фишера:

$F_{факт} = \dfrac{R^2_{yx_1x_2}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \dfrac{n-m-1}{m} = 285{,}7571736$; $F_{табл}$=4,28.

Вывод: $F_{факт} \approx 285{,}7571736 > F_{табл} = 3{,}07$, гипотеза H_0 о статистической незначимости уравнения регрессии в целом и показателя тесноты связи коэффициента корреляции отвергается. Уравнение регрессии в целом статистически значимо, связь между факторами сформировалась неслучайно.

Оценим параметры уравнения по критерию Стьюдента:

$t_{a_1} = 16{,}9043537 > t_{табл} = 2{,}0687$;

Вывод: гипотеза H_0 – о незначимом отличии от нуля коэффициента регрессии a_1 отклоняется, коэффициент регрессии a_1 не случайно отличаются от нуля и статистически значим.

N	y	x1	x2	x3	yp	y-yp	A
1	0,904	77	3343	56,1	0,9017	0,0023	0,002544
2	0,922	78,2	3001	61,8	0,925915	-0,003915	0,004246
3	0,763	68	3101	59,1	0,720092	0,042908	0,056236
4	0,923	77,2	3543	63,3	0,905736	0,017264	0,018704
5	0,918	77,2	3237	64,1	0,905736	0,012264	0,013359
6	0,906	77,2	3330	57	0,905736	0,000264	0,000291
7	0,905	75,7	3808	50,7	0,875468	0,029532	0,032632
8	0,545	62,6	2415	57,1	0,611126	-0,066126	0,121333
9	0,894	78	3295	62	0,921879	-0,027879	0,031185
10	0,9	78,2	3504	61,8	0,925915	-0,025915	0,028794
11	0,932	79	3056	58,6	0,942058	-0,010058	0,010792
12	0,74	67,6	3007	71,7	0,71202	0,02798	0,037811
13	0,701	69,8	2844	48	0,756413	-0,055413	0,079049
14	0,744	68,4	2861	63,9	0,728163	0,015837	0,021286
15	0,921	77,9	3259	59,1	0,919861	0,001139	0,001236
16	0,927	78,1	3350	47,5	0,923897	0,003103	0,003347
17	0,802	72,5	3344	65,3	0,810896	-0,008896	0,011092
18	0,747	66,6	2704	53,2	0,691841	0,055159	0,07384
19	0,927	76,7	3642	67,9	0,895647	0,031353	0,033822
20	0,721	68,8	2753	61,7	0,736235	-0,015235	0,02113
21	0,913	76,8	2916	52,9	0,897665	0,015335	0,016797
22	0,918	78,1	3551	59,9	0,923897	-0,005897	0,006424
23	0,833	73,9	3177	51,5	0,839146	-0,006146	0,007379
24	0,914	78,6	3280	61,2	0,933986	-0,019986	0,021867
25	0,923	78,5	3160	53,1	0,931969	-0,008969	0,009717
сумма	**21,243**	**1860,6**	**79481**	**1468,5**	**21,243**	**-3,11E-15**	**0,664913**
среднее	**0,84972**	**74,424**	**3179,24**	**58,74**	**0,84972**	**-1,24E-16**	**0,026597**

5. Средняя ошибка аппроксимации равна $\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - y_{ip}}{y_i}\right| \cdot 100\% =$ 2.66% <10%,

точность модели удовлетворительная.

Средний по совокупности коэффициент эластичности:

$$E_{x_1} = \frac{\delta y}{\delta x_1} : \frac{\overline{y}}{\overline{x}_1} = 0{,}020178753 : \frac{0{,}84972}{74{,}424} = 1{,}7673863.$$

При увеличении значения ожидаемой продолжительности жизни при рождении 1997г. на 1%, индекс человеческого развития в среднем по совокупности увеличится ≈ на 1,77%.

Вывод. Построено уравнение регрессии $y = 0{,}020178753x_1 - 0{,}652063486$. Уравнение статически значимо и надежно. При увеличении значения ожидаемой продолжительности жизни при рождении 1997г. на 1%, индекс человеческого развития в среднем по совокупности увеличится ≈ на 1,77%. Точность модели удовлетворительная.

Задание 2.2

В таблице 2.5 приведены зависимости объёма выпускаемой продукции y от затрат объёмов ресурсов 1-го и 2-го видов x_1', x_2'.

Требуется:

1. Построить и оценить эконометрическую модель, уравнение множественной регрессии $y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$ - зависимости объёма выпускаемой продукции y от затрат объёмов ресурсов 1-го и 2-го видов x_1 и x_2, используя ППП *Excel*, надстройки Анализ данных, инструменты Корреляция и Регрессия; привести анализ результатов, оценку модели используя полученные в таблицах результаты.

2. Оценить модель, с помощью критерия Фишера. Определить точность модели с помощью средней ошибки аппроксимации.

3. Дать экономическую интерпретацию модели, используя значения коэффициентов эластичности.

Решение.

1. Построим модель типа Кобба-Дугласа: $y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$.

Логарифмируем эту функцию, получим линейное уравнение в логарифмической форме:

$$\ln y = \ln A + \alpha \cdot \ln x_1 + \beta \cdot \ln x_2 .$$

Обозначим: $Y = \ln y$, $X_1 = \ln x_1$, $X_2 = \ln x_2$, $b = \ln A$, $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $A = e^b$.

Получим следующее линейное уравнение:

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + b.$$

Параметры уравнения найдём, решая методом Крамера систему нормальных уравнений.

$$\begin{cases} a_1 \sum X_{i1}^2 + a_2 \sum X_{i1} X_{i2} + b \sum X_{i1} = \sum Y_i X_{i1} \\ a_1 \sum X_{i1} X_{i2} + a_2 \sum X_{i2}^2 + b \sum X_{i2} = \sum Y_i X_{i2} \\ a_1 \sum X_{i1} + a_2 \sum X_{i2} + bn = \sum Y_i \end{cases}$$

Необходимые расчёты проводим с помощью ППП EXCEL и пакета «Анализ данных» (таблица 2.9).

Таблица 2.9

№	$x1$	$x2$	y	$X_1=\ln x_1$	$X_2=\ln x_2$	$Y=\ln y$
1	24,75	41,4	69,28	3,2088255	3,7232809	4,2381563
2	26,7	43,05	72,3	3,2846636	3,7623622	4,2808241
3	28,65	46,4	76	3,3551534	3,8372995	4,3307333
4	34,2	47,25	80,66	3,5322256	3,8554527	4,3902428
5	36,15	50,86	84,26	3,5876769	3,9290768	4,4339073
6	32,4	47,89	79,7	3,4781584	3,8689067	4,3782696
7	37,5	46,65	82,26	3,6243409	3,8426729	4,409885
8	39,3	52,11	87,4	3,6712245	3,9533569	4,4704953
9	38,55	54,15	88,15	3,6519561	3,991758	4,4790399
10	38,25	50,88	86,16	3,6441436	3,9294699	4,456206
11	45,45	58,05	95,56	3,8166128	4,0613047	4,5597543
12	47,49	58,27	96,97	3,8605192	4,0650874	4,5744017
13	44,67	59,68	96,15	3,7993021	4,088997	4,5659095
14	49,96	60,39	98,95	3,9112227	4,1008235	4,5946147
15	50,78	61,57	101,26	3,9275026	4,1201747	4,6176915
16	52,59	63,68	103,1	3,962526	4,1538705	4,6356994
17	56,98	62,27	105,13	4,0427003	4,1314798	4,6551977
18	57,26	64,26	106,7	4,0476023	4,1629374	4,6700212
19	56,67	64,7	105,26	4,037245	4,1697612	4,6564335
20	60,28	65,29	108,2	4,0990004	4,1788389	4,6839814
Сумма	858,58	1098,8	**1823,45**	**74,542602**	**79,926911**	**90,081464**
Среднее	42,929	54,94	91,1725	3,7271301	3,9963456	4,5040732

Результаты расчёта с помощью пакета «Анализ данных» приведены в таблице 2.10.

Таблица 2.10

ВЫВОД ИТОГОВ			
Регрессионная статистика			
Множественный R	0,999653805		
R-квадрат	0,99930773		
Нормированный R-квадрат	0,999226287		
	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*
b	1,783259744	0,054323981	32,82638181
a_1	0,292140065	0,014418587	20,26135145
a_2	0,408365445	0,026341798	15,50256552

Уравнение регрессии в линейной форме имеет вид:

$Y = 1{,}783259744^{X_1} + 0{,}292140065^{X_2} + 1{,}783259744$

Найдём значения параметров: $b = \ln A$, $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$, $A = \ell^b$.

$\alpha = 0{,}292140065 \approx 0{,}2921$; $\beta = 0{,}408365445 \approx 0{,}4084$;

$A =$ 5,9492178 ≈ 5,9492.

Уравнение регрессии в истинной форме имеет вид:

$$y = 5{,}9492\, x_1^{0.2921} x_2^{0.4084}.$$

При увеличении ресурса 1-го вида на 1% при неизменном объёме ресурса 2-го вида выпуск продукции увеличится ≈ на 0,29%.

При увеличении ресурса 2-го вида на 1% при неизменном объёме ресурса 1-го вида выпуск продукции увеличится ≈ на 0,41%.

Рассчитаем индексы множественной корреляции и детерминации, используя расчёты приведенные в таблице 3.

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_i - y_{ip})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{2,460098}{2789,9538}} \approx 0,999559018 \approx 0,9995. \quad R^2_{yx_1x_2} = (R_{yx_1x_2})^2 \approx 0,9991.$$

Оба индекса близки к единице, что говорит о тесной связи между y, x_1 и x_2 Значение коэффициента детерминации $R^2_{yx_1x_2}$ ≈0,999, почти 100% вариации переменной y объясняется уравнением регрессии.

$$F_{факт} = \frac{R^2_{yx_1x_2}}{1 - R^2_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n-m-1}{m} = 9631,1965; \; F_{табл}=3,59.$$

Вывод: $F_{факт} \approx 9631,1965$ > $F_{табл}$ = 3,59, гипотеза H_0 о статистической незначимости уравнения регрессии в целом и показателя тесноты связи коэффициента корреляции отвергается. Уравнение регрессии в целом статистически значимо, связь между факторами сформировалась неслучайно.

Построим матрицу парных коэффициентов корреляции и её анализ приведен в задании 2.1. Найдём среднюю ошибку аппроксимации (таблица 2.11). Средняя ошибка аппроксимации равна $\overline{A}$=0.2827% < 10% − точность модели удовлетворительная.

Таблица 2.11

№	*y расч*	*(y-yср)2*	*(y-yp)^2*	*|y-yp/y|*
1	69,487403	479,28156	0,043016	0,0029937
2	72,187023	356,17126	0,01276373	0,0015626
3	75,978848	230,20476	0,00044739	0,0002783
4	80,608009	110,51266	0,00270307	0,0006446
5	84,424961	47,782656	0,02721201	0,0019578
6	79,781926	131,61826	0,00671181	0,0010279
7	82,375641	79,432656	0,01337293	0,0014058
8	87,37296	14,231756	0,00073117	0,0003094
9	88,255715	9,1355063	0,01117574	0,0011993
10	85,84298	25,125156	0,10050176	0,0036794
11	95,272553	19,250156	0,08262565	0,003008
12	96,65165	33,611006	0,10134657	0,003283
13	95,870007	24,775506	0,07839621	0,002912
14	99,535983	60,489506	0,34337618	0,005922
15	100,80396	101,75766	0,20797694	0,0045037
16	103,25168	142,26526	0,02300783	0,0014712
17	104,73654	194,81181	0,15481073	0,0037426
18	106,24272	241,10326	0,20910311	0,0042856
19	106,21732	198,45766	0,91645263	0,0090948
20	108,55266	289,93576	0,12436748	0,0032593
Сумма	**1823,4505**	**2789,9538**	**2,46009894**	**0,0565411**
Среднее	**91,172527**	**139,49769**	**0,12300495**	**0,0028271**

Ответ: Построено уравнение: $y = 5{,}9492\, x_1^{0.2921} x_2^{0.4084}$.Связь между выпуском продукции и затратами ресурсов тесная. Уравнение статистически значимо и надёжно. Точность модели удовлетворительная.

3. СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В первом задании по данной теме необходимо построить простейшую структурную модель вида

$$\begin{cases} y_1 = f(y_2, x_1), \\ y_2 = f(y_1, x_2), \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} y_2 + a_{11} x_1 + c_1, \\ y_2 = b_{21} y_1 + a_{22} x_2 + c_2. \end{cases} \tag{3.1}$$

Структурная форма модели в правой части содержит коэффициенты b_{ij} при эндогенных переменных (y_i) и коэффициенты a_{ij} при экзогенных переменных (x_j). Для данной модели проверяется её идентификация [1, 5].

Модель идентифицируема, если все структурные коэффициенты определяются однозначно по коэффициентам приведенной модели, т.е. если число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной.

Модель неидентифицируема, если число структурных коэффициентов больше числа приведенных.

Модель сверхидентифицируема, если число приведенных коэффициентов больше числа структурных.

Если обозначить число эндогенных переменных в некотором уравнении через Н, а число экзогенных переменных, которые содержаться в системе, но не входят в данное уравнение – D, то необходимое условие идентифицируемости уравнения имеет вид: $D+1=H$. Если $D+1<H$ – уравнение неидентифицируемо, если $D+1>H$ – сверхидентифицируемо. Более точно условие идентификации определяется, если накладывать ограничения на коэффициенты матриц параметров структурной модели.

Уравнение идентифицируемо, если по отсутствующим в нем переменным (x_j) и (y_i) можно из коэффициентов при них в других уравнениях системы получить матрицу, определитель которой отличен от нуля, а ранг матрицы не меньше, чем число эндогенных переменных (y_i) в системе минус единица.

Проверяем выполнение необходимого и достаточного условий идентификации модели (3.1). Необходимое условие идентифицируемости уравнения: Н = D + 1.

В первом уравнении две эндогенные переменные y_1 и y_2: Н = 2, и одна экзогенная переменная x_2 не входит в это уравнение: D = 1. Получаем: Н = 2 = D + 1 = 2, необходимое условие выполняется.

Достаточное условие. Составляем матрицу из коэффициентов при переменных не входящих в первое уравнение. В данном случае матрица состоит из одного элемента:

$|a_{22}| \neq 0$ – достаточное условие идентифицируемости выполнено.

Аналогично для второго уравнения получим: Н = 2, D = 1; 2=1 + 1, необходимое условие выполняется. Достаточное условие также выполняется, т.к. $|a_{11}| \neq 0$.

Приведенная выше структурная модель (3.1) является точно идентифицируемой, найдём её параметры с помощью косвенного метода наименьших квадратов (КМНК), который состоит из двух этапов.

На первом этапе находятся параметры приведенной модели.

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13} \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23} \end{cases}.$$

Каждое уравнение этой модели является линейным уравнением множественной регрессии и параметры приведенных коэффициентов δ_{ij} находятся для каждого уравнения с помощью обычного МНК.

Для определения коэффициентов δ_{ij} первого и второго уравнений приведенной модели решаются две системы нормальных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} \delta_{11}\sum x_1^2 + \delta_{12}\sum x_1x_2 + \delta_{13}\sum x_1 = \sum x_1y_1, \\ \delta_{11}\sum x_1x_2 + \delta_{12}\sum x_2^2 + \delta_{13}\sum x_2 = \sum x_2y_1, \\ \delta_{11}\sum x_1 + \delta_{12}\sum x_2 + \delta_{13}\cdot n = \sum y_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_{21}\sum x_1^2 + \delta_{22}\sum x_1x_2 + \delta_{23}\sum x_1 = \sum x_1y_2, \\ \delta_{21}\sum x_1x_2 + \delta_{22}\sum x_2^2 + \delta_{23}\sum x_2 = \sum x_2y_2, \\ \delta_{21}\sum x_1 + \delta_{22}\sum x_2 + \delta_{23}\cdot n = \sum y_2. \end{cases}$$

Параметры δ_{ij} можно найти, используя пакет Анализ данных и надстройки Корреляция и Регрессия.

Второй этап. Получив систему приведенных уравнений с численными значениями параметров, путем алгебраических преобразований находим аналитические выражения для определения коэффициентов структурной модели, затем численные значения коэффициентов b_{12}, a_{11}, b_{21}, a_{22} для конкретного задания и записываем полученную структурную модель. .

Во втором задании по данной теме необходимо построить простейшую структурную модель вида

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}(y_2 + x_1) + c_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + c_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Проверяем выполнение необходимого и достаточного условий идентификации модели. Необходимое условие идентифицируемости уравнения: Н = D + 1.

В первом уравнении одна эндогенная переменная y_1, переменная y_2 в данном уравнении не рассматривается как эндогенная так как она входит в уравнение вместе с переменной экзогенной переменной x_1, поэтому Н = 1 и одна экзогенная переменная x_2 не входит в это уравнение: D = 1. Получаем: Н = 1 < D + 1 = 2, необходимое условие не выполняется, модель сверхидентифицируема.

Аналогично для второго уравнения получим: Н = 2, D = 1; 2=1 + 1, необходимое условие выполняется. Достаточное условие также выполняется, т.к. $|a_{11}| \neq 0$. Второе уравнение точно идентифицируемо. Так как одно из уравнений системы сверхидентифицируемо, то система (3.2) сверхидентифицируема.

Для нахождения параметров модели (3.2) применяем двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК). Находим параметры приведенной модели

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}. \end{cases}$$

На основе второго уравнения найдем расчетные значения для эндогенной переменной y_2, то есть y_{2ip}, затем вычисляем значения новой переменной z: $z_i = y_{2ip} + x_{1i}$. Далее находим параметры уравнения парной регрессии $y_1 = b_{12}z + c_1$.

Второе уравнение не изменилось, его структурная форма, находится из системы приведенных уравнений, так же как для системы (3.2).

3.2. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»

Серия А.

Задание 3.1

В таблице 3.1 приведены данные с 2002 по 2015 годы о годовом потреблении мяса на душу населения y_1 (кг.), оптовой цене y_2 (руб.) за кг., доходе x_1 (руб.) на душу населения и о расходах по обработке мяса x_2 (% к цене). Сформировать свой вариант исходных данных с учётом значения номера варианта N.

Требуется:

1. Построить систему эконометрических уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + c_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + c_2. \end{cases}$$

2. Провести идентификацию модели.

3. Построить приведенную модель и найти ее параметры.

4. На основе приведенной модели найти структурные коэффициенты и записать полученную систему структурных уравнений. Дать оценку полученной системы уравнений.

Таблица 3.1

Год	Годовое потребление молочных продуктов на душу населения, кг, y_1	Оптовая цена за кг, руб., y_2	Среднемесячная номинальная начисленная заработная плата, руб., x_1	Расходы по обработке молочных продуктов, % к цене, x_2
2002	35+N	132+0,1N	318,0+N	60–0,1N
2003	36+N	132+0,1N	453,0+N	59–0,1N
2004	37+N	134+0,1N	706,0+N	58–0,1N
2005	35+N	134+0,1N	1 013,0+N	60–0,1N
2006	35+N	136+0,1N	1 258,0+N	57–0,1N
2007	38+N	137+0,1N	1 625,0+N	55–0,1N
2008	38+N	135+0,1N	2 086,0+N	56–0,1N
2009	37+N	137+0,1N	2 139,0+N	58–0,1N
2010	39+N	138+0,1N	2 580,0+N	57–0,1N
2011	39+N	141+0,1N	2 911,0+N	55–0,1N
2012	38+N	144+0,1N	3 336,0+N	54–0,1N
2013	40+N	145+0,1N	3 715,0+N	53–0,1N
2014	41+N	140+0,1N	3 948,0+N	54–0,1N
2015	44+N	142+0,1N	3 805,0+N	52–0,1N
2016	45+N	140+0,1N	3 777,0+N	50–0,1N

Задание 3.2

По данным приведенным в таблице 3.1 задания 3.1 сформировать свой вариант исходных данных (где N – номер варианта).

Требуется:

1. Построить систему эконометрических уравнений вида

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}(y_2 + x_1) + c_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + c_2. \end{cases}$$

2. Провести идентификацию модели.

3. Построить приведенную модель и найти ее параметры.

4. На основе приведенной модели найти структурные коэффициенты и записать полученную систему структурных уравнений. Дать оценку полученной системы уравнений.

Серия Б.

Задание 3.1

В таблице 3.2 приведены данные с 2002 по 2015 годы о годовом потреблении фруктов на душу населения y_1 (кг.), оптовой цене y_2 (руб.) за кг., доходе x_1 (руб.) на душу населения и о расходах по хранению x_2 (%). Сформировать свой вариант исходных данных с учётом значения номера варианта N.

Требуется:

1. Построить систему эконометрических уравнений: $\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + c_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + c_2. \end{cases}$

2. Провести идентификацию модели.

3. Построить приведенную модель и найти ее параметры.

4. На основе приведенной модели найти структурные коэффициенты и записать полученную систему структурных уравнений. Дать оценку полученной системы уравнений.

Таблица 3.2

Год	Годовое потребление фруктов на душу населения, кг, y_1	Оптовая цена за кг, руб., y_2	Среднемесячная номинальная начисленная заработная плата, руб., x_1	Расходы по хранению фруктов, % к цене, x_2
2002	36+0,5N	28–0,1*N*	318,0+*N*	25+0,1*N*
2003	38+0,5N	25–0,1*N*	453,0+*N*	23+0,1*N*
2004	38+0,5N	29–0,1*N*	706,0+*N*	21+0,1*N*
2005	39+0,5N	30–0,1*N*	1 013,0+*N*	22+0,1*N*
2006	41+0,5N	31–0,1*N*	1 258,0+*N*	20+0,1*N*
2007	42+0,5N	30–0,1*N*	1 625,0+*N*	18+0,1*N*
2008	44+0,5N	35–0,1*N*	2 086,0+*N*	19+0,1*N*
2009	45+0,5N	32–0,1*N*	2 139,0+*N*	16+0,1*N*
2010	50+0,5N	34–0,1*N*	2 580,0+*N*	17+0,1*N*
2011	51+0,5N	36–0,1*N*	2 911,0+*N*	15+0,1*N*
2012	48+0,5N	36–0,1*N*	3 336,0+*N*	16+0,1*N*
2013	49+0,5N	37–0,1*N*	3 715,0+*N*	16+0,1*N*
2014	49+0,5N	37–0,1*N*	3 948,0+*N*	17+0,1*N*
2015	52+0,5N	38–0,1*N*	3 805,0+*N*	18+0,1*N*
2016	53+0,5N	39–0,1*N*	3 777,0+*N*	17+0,1*N*

Задание 3.2

По данным приведенным в таблице 3.2 задания 3.1 сформировать свой вариант исходных данных (где N – номер варианта).

Требуется:

1. Построить систему эконометрических уравнений вида

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}(y_2 + x_1) + c_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + c_2. \end{cases}$$

2. Провести идентификацию модели.

3. Построить приведенную модель и найти ее параметры.

4. На основе приведенной модели найти структурные коэффициенты и записать полученную систему структурных уравнений. Дать оценку полученной системы уравнений.

3.3. ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УКРАВНЕНИЙ»

Задание 3.1

В таблице 3.3 приведены данные с 2002 по 2015 годы о годовом потреблении мяса на душу населения y_1 (кг.), оптовой цене y_2 (руб.) за кг., доходе x_1 (руб.) на душу населения и о расходах по обработке мяса x_2 (% к цене).

Таблица 3.3

Год	Годовое потребление мяса на душу населения, кг, y_1	Оптовая цена за кг, руб., y_2	Доход на душу населения, руб., x_1	Расходы по обработке мяса, % к цене, x_2
2002	20,3	44,7	483	44,7
2003	21,3	46,7	736	49,7
2004	23,3	41,7	1043	50,7
2005	25,3	43,7	1288	52,7
2006	22,3	42,7	1655	54,7
2007	26,3	44,7	2116	54,7
2008	28,3	47,7	2169	55,7
2009	27,3	46,7	2670	57,7
2010	30,3	46,7	3003	57,7
2011	31,3	49,7	2833	58,7
2012	32,3	50,7	2840	59,7
2013	32,3	52,7	2855	58,7
2014	33,3	53,7	2880	61,7
2015	33,3	55,7	2920	49,7

Требуется:

1. Построить систему эконометрических уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + c_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + c_2. \end{cases}$$

2. Провести идентификацию модели.

3. Построить приведенную модель и найти ее параметры.

4. На основе приведенной модели найти структурные коэффициенты и записать полученную систему структурных уравнений.

Решение.

Таблица 3.4

№	Год	*x1*	*x2*	*y1*	*y2*
1	1	483	44,7	20,3	44,7
2	2	736	49,7	21,3	46,7
3	3	1043	50,7	23,3	41,7
4	4	1288	52,7	25,3	43,7
5	5	1655	54,7	22,3	42,7
6	6	2116	54,7	26,3	44,7
7	7	2169	55,7	28,3	47,7
8	8	2670	57,7	27,3	46,7
9	9	3003	57,7	30,3	46,7
10	10	2833	58,7	31,3	49,7
11	11	2840	59,7	32,3	50,7
12	12	2855	58,7	32,3	52,7
13	13	2880	61,7	33,3	53,7
14	14	2920	49,7	33,3	55,7
Сумма	**105**	**29491**	**766,8**	**387,2**	**667,8**
Среднее	**7,5**	**2106,5**	**54,771429**	**27,65714**	**47,7**

1. Построим систему структурных уравнений в виде:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} y_2 + a_{11} x_1 + c_1, \\ y_2 = b_{21} y_1 + a_{22} x_2 + c_2. \end{cases}$$

Проверяем выполнение необходимого и достаточного условий идентификации модели. Необходимое условие идентифицируемости уравнения: H = D + 1.

В первом уравнении две эндогенные переменные y_1 и y_2: H = 2, и одна экзогенная переменная x_2 не входит в это уравнение: D = 1. Получаем: H = 2 = D + 1 = 2, необходимое условие выполняется.

Достаточное условие. Составляем матрицу из коэффициентов при переменных не входящих в первое уравнение. В данном случае матрица состоит из одного элемента:

$|a_{22}| \neq 0$ – достаточное условие идентифицируемости выполнено.

Аналогично для второго уравнения получим: H = 2, D = 1; 2=1 + 1, необходимое условие выполняется. Достаточное условие также выполняется, т.к. $|a_{11}| \neq 0$.

Следовательно, система структурных уравнений идентифицируема.

2. Построим систему приведенных уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \delta_{13}, \\ y_2 = \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \delta_{23}. \end{cases}$$

Приведенные коэффициенты δ_{ij} для каждого уравнения приведенной системы, найдём используя ППП *Excel* , надстройки Анализ данных, инструменты Корреляция и Регрессия.

Результаты приведены в таблицах 3.5 и 3.6.

Таблица 3.5

ВЫВОД ИТОГОВ			
Регрессионная статистика			
Множественный R	0,932800807		
R-квадрат	0,870117345		
Нормированный R-квадрат	0,846502317		
Стандартная ошибка	1,809201918		
Наблюдения	14		
Дисперсионный анализ			
	df	*F*	
Регрессия	2	36,84591609	
Остаток	11		
Итого	13		
	Коэфф.	*Станд. ошибка*	*t-стат.*
δ_{13}	21,49436418	8,081892299	2,6595707
δ_{11}	0,005136245	0,000920209	5,5816091
δ_{12}	-0,08502098	0,173879038	-0,4889663

Первое уравнение приведенной формы модели имеет вид:

$$y_1 = 0{,}00514x_1 - 0{,}08502x_2 + 21{,}49436.$$

Таблица 3.6.

ВЫВОД ИТОГОВ			
Регрессионная статистика			
Множественный R	0,754128973		
R-квадрат	0,568710507		
Нормированный R-квадрат	0,490294236		
Стандартная ошибка	3,04189415		
Наблюдения	14		
Дисперсионный анализ			
	df	*F*	
Регрессия	2	7,25245536	
Остаток	11		
Итого	13		
	Коэффициенты	*Станд. ош.*	*t-стат.*
δ_{23}	58,56780593	13,5884561	4,3101148
δ_{21}	0,004986575	0,00154719	3,2229902
δ_{22}	-0,390203908	0,2923508	-1,334711

Второе уравнение приведенной формы модели имеет вид:

$$y_2 = 0{,}00499x_1 - 0{,}39020x_2 + 58{,}56780.$$

Итак, получили систему приведенных уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}00514x_1 - 0{,}08502x_2 + 21{,}49436, \\ y_2 = 0{,}00499x_1 - 0{,}39020x_2 + 58{,}56780. \end{cases}$$

Выведем формулы для вычисления структурных коэффициентов. Рассмотрим систему приведённых уравнений в общем виде.

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13} \Rightarrow x_1 \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23} \Rightarrow x_2 \end{cases}$$

1) Выразим из второго уравнения приведенной формы x_2 и подставим в первое уравнение.

$$\delta_{22}x_2 = y_2 - \delta_{21}x_1 - \delta_{23},$$

$$x_2 = \frac{y_2}{\delta_{22}} - \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}}x_1 - \frac{\delta_{23}}{\delta_{22}}, \quad y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}\left(\frac{y_2}{\delta_{22}} - \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}}x_1 - \frac{\delta_{23}}{\delta_{22}}\right) + \delta_{13}.$$

Преобразуем полученное уравнение.

$$y_1 = \delta_{11}x_1 + \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}}y_2 - \frac{\delta_{12}\cdot\delta_{21}}{\delta_{22}}x_1 - \frac{\delta_{12}\cdot\delta_{23}}{\delta_{22}} + \delta_{13},$$

$$y_1 = \left(\delta_{11} - \frac{\delta_{12}\cdot\delta_{21}}{\delta_{22}}\right)x_1 + \left(\frac{\delta_{12}}{\delta_{22}}y_2\right) + \left(\delta_{13} - \frac{\delta_{12}\cdot\delta_{23}}{\delta_{22}}\right)$$

Получим следующие формулы. $b_{12} = \dfrac{\delta_{12}}{\delta_{22}}$, $a_{11} = \delta_{11} - \dfrac{\delta_{12}.\delta_{21}}{\delta_{22}}$; $c_1 = \delta_{13} - \dfrac{\delta_{12}.\delta_{23}}{\delta_{22}}$.

2) Аналогично выразим из первого уравнения приведенной формы x_1 и подставим во второе уравнение, преобразуем полученное выражение и выпишем из него формулы для определения структурных коэффициентов .

$$y_2 = \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}y_1 + \left(-\frac{\delta_{12}\cdot\delta_{21}}{\delta_{11}} + \delta_{22}\right)x_2 + \left(\delta_{23} - \frac{\delta_{13}\cdot\delta_{21}}{\delta_{11}}\right)$$

$$b_{21} = \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}, \quad a_{22} = \delta_{22} - \frac{\delta_{12}.\delta_{21}}{\delta_{11}}\ ; \quad c_2 = \delta_{23} - \frac{\delta_{13}.\delta_{21}}{\delta_{11}}.$$

С учётом найденных коэффициентов δ_{ij} определяем значения структурных коэффициентов и записываем систему структурных уравнений.

b12	a11	c1		b21	a22	c2
0,217888597	0,0040497	8,7331071		0,970860039	-0,3076604	37,6997867

Ответ: система структурных уравнений имеет вид.

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}2179y_2 + 0{,}0040x_1 + 8{,}7331, \\ y_2 = 0{,}9709y_1 - 0{,}3077x_2 + 37{,}6998. \end{cases}$$

Задание 3.2

По данным приведенным в таблице 3.4 сформировать свой вариант исходных данных (где N – номер варианта).

Требуется:

1. Построить систему эконометрических уравнений вида:
$$\begin{cases} y_1 = b_{12}(y_2 + x_1) + c_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + c_2. \end{cases}$$

2. Провести идентификацию модели.

3. Построить приведенную модель и найти ее параметры.

4. Найти структурные коэффициенты и записать систему структурных уравнений.

Решение.

1. Проверим на идентифицируемость систему структурных уравнений :
$$\begin{cases} y_1 = b_{12}(y_2 + x_1) + c_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + c_2. \end{cases}$$

Проверяем выполнение необходимого и достаточного условий идентификации модели. Необходимое условие идентифицируемости уравнения: H = D + 1.

В первом уравнении одна эндогенная переменная y_1, переменная y_2 в данном уравнении не рассматривается как эндогенная так как она входит в уравнение вместе с переменной x_1, поэтому H = 1 и одна экзогенная переменная x_2 не входит в это уравнение: D = 1. Получаем: H = 1 < D + 1 = 2, необходимое условие не выполняется, модель сверхидентифицируема.

Аналогично для второго уравнения получим: H = 2, D = 1; 2=1 + 1, необходимое условие выполняется. Достаточное условие также выполняется, т.к. $|a_{11}| \neq 0$.

Следовательно, система структурных уравнений сверхидентифицируема.

2. Построим систему приведенных уравнений:
$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}. \end{cases}$$

Система приведённых уравнений построена в задании 3.1 и имеет вид:
$$\begin{cases} y_1 = 0{,}00514x_1 - 0{,}08502x_2 + 21{,}49436, \\ y_2 = 0{,}00499x_1 - 0{,}39020x_2 - 58{,}56780. \end{cases}$$

3. Построим систему структурных уравнений.

С помощью второго уравнения находим расчётные значения y_{2p},затем вычисляем значения новой переменной $z = y_{2p} + x_1$ и находим параметры 1-го структурного уравнения $y_1 = b_{12}z + c_1$ с помощью МНК. Данные приведены в таблицах 3.7 и 3.8.

Таблица 3.7

№	Год	x1	x2	y1	y2	y2p	z
1	1	483	44,7	20,3	44,7	43,534207	526,53421
2	2	736	49,7	21,3	46,7	42,844791	778,84479
3	3	1043	50,7	23,3	41,7	43,985465	1086,9855
4	4	1288	52,7	25,3	43,7	44,426768	1332,4268
5	5	1655	54,7	22,3	42,7	45,476433	1700,4764
6	6	2116	54,7	26,3	44,7	47,775244	2163,7752
7	7	2169	55,7	28,3	47,7	47,649329	2216,6493
8	8	2670	57,7	27,3	46,7	49,367195	2719,3672
9	9	3003	57,7	30,3	46,7	51,027724	3054,0277
10	10	2833	58,7	31,3	49,7	49,789803	2882,7898
11	11	2840	59,7	32,3	50,7	49,434505	2889,4345
12	12	2855	58,7	32,3	52,7	49,899507	2904,8995
13	13	2880	61,7	33,3	53,7	48,85356	2928,8536
14	14	2920	49,7	33,3	55,7	53,73547	2973,7355
Сумма	**105**	**29491**	**766,8**	**387,2**	**667,8**	**667,8**	**30158,8**
Среднее	**7,5**	**2106,5**	**54,7714**	**27,657143**	**47,7**	**47,7**	**2154,2**

Таблица 3.8

ВЫВОД ИТОГОВ			
Регр. Стат.			
Множественный R	0,931351905		
R-квадрат	0,867416371		
Нормированный R-квадрат	0,856367735		
Стандартная ошибка	1,750097044		
Наблюдения	14		
Дисперсионный анализ			
	df	*F*	
Регрессия	1	78,50891205	
Остаток	12		
Итого	13		
	Коэфф.	*Станд. ош.*	*t-стат.*
c_1	17,3973594	1,248821034	13,931
b_{12}	0,004762688	0,000537518	8,86053

Из таблицы 3.8 выписываем: $b_{12} = 0{,}00476$; $c_1 = 17{,}3974$.

Первое структурное уравнение имеет вид:

$y_1 = 0{,}0047(y_2 + x_1) + 17{,}3974$,

Второе структурное уравнение найдено в задании 3.1:

$y_2 = 0{,}9709 y_1 - 0{,}3077 x_2 + 37{,}6998$.

Ответ: система структурных уравнений имеет вид.

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}0047(y_2 + x_1) + 17{,}3974, \\ y_2 = 0{,}9709 y_1 - 0{,}3077 x_2 + 37{,}6998. \end{cases}$$

4. МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

4.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В первом задании по данной теме необходимо построить уравнение линейного тренда $y = a \cdot t + b$ [2, 3, 5]. Данное уравнение представляет собой линейное уравнение парной регрессии, нахождение параметров этого уравнения, оценка значимости уравнения по критерию Фишера и оценка качества параметров a и b по критерию Стъюдента описано в теме «Парный корреляционный анализ».

Модели, построенные на основе данных, характеризующих объект за ряд последовательных моментов (периодов) времени, называются моделями временных рядов.

При наличии тенденции и циклических колебаний значения каждого последующего уровня ряда зависят от предыдущих значений. Корреляционную зависимость между последовательными уровнями временного ряда называют автокорреляцией уровней ряда.

Количественно ее можно измерить с помощью линейного коэффициента корреляции между уровнями исходного временного ряда и уровнями этого ряда, сдвинутыми на несколько шагов во времени.

Естественно предположить, что расходы на конечное потребление в текущем году зависят от расходов на конечное потребление предыдущих лет. Определим коэффициент корреляции между рядами y_t и y_{t-1} и измерим тесноту связи между расходами на конечное потребление текущего и предыдущего годов. Добавим в таблицу временной ряд y_{t-1}.

В качестве переменной x рассмотрим ряд y_t, т.е. $y_2, y_3, \ldots, y_8$, а в качестве переменной y ряд y_{t-1}, т.е. $y_1, y_2, \ldots, y_7$. Коэффициент корреляции между переменными y и x находится по формуле Тогда формула для коэффициента корреляции между переменными y и x будет иметь вид:

$$r_1 = \frac{\sum (y_t - \bar{y}_1)(y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum (y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}}, \qquad (4.1)$$

где

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t}{n-1}; \; \bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}}{n-1} \qquad (4.2)$$

Величину r_1 называют коэффициентом автокорреляции уровней ряда первого порядка, т.к. он измеряет зависимость между соседними уровнями ряда t и $t-1$, т.е. при лаге 1. Число периодов, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, называется лагом. С увеличением лага, число над значений, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, уменьшается. Некоторые ученные считают, что для обеспечения достоверности коэффициентов автокорреляции необходимо, чтобы максимальный лаг был не больше $n/4$.

Аналогично можно определить коэффициенты автокорреляции второго и более высоких порядков. Так, коэффициент автокорреляции 2-го порядка характеризует тесноту связи между уровнями $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y_{t-2}}$ и определяется по формуле:

$$r_2 = \frac{\sum(y_t - \bar{y}_3)(y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum(y_t - \bar{y}_3)^2 \cdot \sum(y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}} \qquad (4.3)$$

где

$$\bar{y}_3 = \frac{\sum_{t=3}^{n} y_t}{n-2}; \quad \bar{y}_4 = \frac{\sum_{t=3}^{n} y_{t-2}}{n-2} \qquad (4.4)$$

Отметим два важных свойства коэффициента автокорреляции.

1) Он строится по аналогии с линейным коэффициентом корреляции и характеризует тесноту только линейной связи текущего и предыдущего уровней ряда. Поэтому по коэффициенту автокорреляции можно судить о наличии линейной (или близкой к линейной) тенденции. Для некоторых временных рядов, имеющих сильную нелинейную тенденцию (например, параболу или экспоненту), коэффициент автокорреляции уровней исходного ряда может приближаться к нулю.

2) По знаку коэффициента автокорреляции нельзя делать вывод о возрастающей или убывающей тенденции в уровнях ряда. Большинство временных рядов экономических данных содержит положительную автокорреляцию уровней, но при этом они могут иметь убывающую тенденцию.

Последовательность коэффициентов автокорреляции уровней 1-го, и 2-го и т.д. порядков называют автокорреляционной функцией временного ряда. График зависимости ее значений от величины лага называется коррелограммой. Анализ автокорреляционной функции и коррелограммы позволяет определить лаг ,при котором автокорреляция наиболее высокая и тем самым выявить структуру ряда.

Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции 1-го порядка, исследуемый ряд содержит только тенденцию.

Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка τ, то ряд содержит циклические колебания с периодичностью в τ моментов времени.

Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым можно сделать одно из двух следующих предположений относительно структуры ряда: либо ряд не содержит тенденции и циклических колебаний; либо ряд содержит сильную нелинейную тенденцию, для выявления которой нужно провести дополнительный анализ.

Во втором задании по данной темы необходимо построить нелинейное уравнение парной регрессии вида: $y = kt^a$.

Для нахождения параметров уравнения $y = kt^a$ их предварительно логарифмируем.

$$\ln y = \ln k + a\ln t.$$

Обозначим: $Y = \ln y,\ b = \ln k, k = e^b, T = \ln t.$ Получаем линейное уравнение парной регрессии: $Y = a \cdot T + b$. Определив параметры линейного уравнения, переходим к уравнению в истинной форме.

4.2. ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ»

Серия А.

Задание 4.1

В таблице 4.1 приведены данные (условные) об объёме производства продукции $Y(t)$ за 12 месяцев. Сформировать свой вариант исходных данных с учётом номера варианта N.

Таблица 4.1

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Y(t)$	90+N	88+N	84+N	86+N	82+N	80+N	81+N	78+N	76+N	74+N	70+N	80+N

Требуется.

1. Провести расчёт параметров линейного тренда $y = a \cdot t + b$.
2. Оценить адекватность построенной модели на основе исследования:

а) случайности остаточной компоненты по критерию пиков,

б) независимости уровней ряда остатков по d-критерию (критические значения: $d_1 = 0{,}97$ и $d_2 = 1{,}33$) или по первому коэффициенту автокорреляции, при критическом значении $r_1 = 0{,}36$,

в) нормальности распределения остаточной компоненты по RS-критерию с критическими значениями от 2,87 до 3,9.

3. Найти коэффициенты автокорреляции 1-го и 2-го порядков.
4. Рассчитать коэффициенты корреляции, детерминации и среднюю ошибку аппроксимации.
5. Построить графики ряда динамики и тренда.
6. Сделать вывод.

Задание 4.2

В таблице 4.2 приведены в условных единицах поквартальные данные z_i,(i = 1,2,…,20) о кредитах от коммерческого банка на жилищное строительство. Строка соответствует году, столбец – кварталу. Сформировать свой вариант исходных данных по приведенной ниже формуле:

$$y_i = z_i + 0{,}1\mathrm{N}\,, \quad \mathrm{i} = 1,2,\ldots,20.$$

Таблица 4.2

квартал / год	I	II	III	IV
1	51,3	89,9	96,1	51,5
2	58,4	94,8	99,8	60,4
3	63,5	94,7	100,5	61,1
4	69,7	99,5	101,8	65,2
5	75,1	105,4	103,1	70,3

Требуется:

1. Построить адаптивную мультипликативную модель Хольта-Уинтерса с учетом сезонного фактора, приняв параметры сглаживания α_1 = 0,3; α_2 = 0,6; α_3 = 0,3; [2].
2. Оценить точность построенной модели с использованием средней относительной ошибки.
3. Оценить адекватность построенной модели на основе исследования:

– случайности остаточной компоненты по критерию пиков;

– независимости уровней ряда остатков по d-критерию (критические значения: d_1 = 1,20 и d_2 = 1,41) или по первому коэффициенту автокорреляции, при критическом значении r_1 = 0,32.

– нормальности распределения остаточной компоненты по R/S-критерию с критическими значениями от 3,18 до 4,49.

4. Построить точечный прогноз на четыре шага вперед, т. е. на один год.
5. Отобразить на графике фактические данные, расчетные и прогнозные.

Серия Б.

Задание 4.1

В таблице 4.3 приведены данные (условные) об объёме производства продукции $Y(t)$ за 12 месяцев. Сформировать свой вариант исходных данных с учётом номера варианта N.

Таблица 4.3

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Y(t)$	20+N	22+N	24+N	26+N	25+N	29+N	35+N	38+N	43+N	45+N	49+N	53+N

Требуется.

1. Провести расчёт параметров линейного тренда $y = a \cdot t + b$.
2. Оценить адекватность построенной модели на основе исследования:

а) случайности остаточной компоненты по критерию пиков,

б) независимости уровней ряда остатков по d-критерию (критические значения: $d_1 = 0{,}97$ и $d_2 = 1{,}33$) или по первому коэффициенту автокорреляции, при критическом значении $r_1 = 0{,}36$,

в) нормальности распределения остаточной компоненты по RS-критерию с критическими значениями от 2,87 до 3,9.

3. Найти коэффициенты автокорреляции 1-го и 2-го порядков.
4. Рассчитать коэффициенты корреляции, детерминации и среднюю ошибку аппроксимации.
5. Построить графики ряда динамики и тренда.
6. Сделать вывод.

Задание 4.2

В таблице 4.4 приведены в условных единицах поквартальные данные $z_i, (i = 1,2,\ldots,20)$ о кредитах от коммерческого банка на жилищное строительство. Строка соответствует году, столбец – кварталу. Сформировать свой вариант исходных данных по приведенной ниже формуле:

$$y_i = z_i + 0{,}1\mathrm{N}, \quad i = 1,2,\ldots,20.$$

Таблица 4.4

квартал / год	I	II	III	IV
1	61,3	99,9	106,1	61,5
2	68,4	104,8	109,8	70,4
3	73,5	104,7	110,5	71,1
4	79,7	109,5	111,8	75,2
5	85,1	115,4	113,1	80,3

Требуется:

1. Построить адаптивную мультипликативную модель Хольта-Уинтерса с учетом сезонного фактора, приняв параметры сглаживания $\alpha_1 = 0{,}3$; $\alpha_2 = 0{,}6$; $\alpha_3 = 0{,}3$[2].
2. Оценить точность построенной модели с использованием средней относительной ошибки.
3. Оценить адекватность построенной модели на основе исследования:

– случайности остаточной компоненты по критерию пиков;

– независимости уровней ряда остатков по d-критерию (критические значения: $d_1 = 1{,}20$ и $d_2 = 1{,}41$) или по первому коэффициенту автокорреляции, при критическом значении $r_1 = 0{,}32$;

– нормальности распределения остаточной компоненты по R/S-критерию с критическими значениями от 3,18 до 4,49.

4. Построить точечный прогноз на четыре шага вперед, т. е. на один год.
5. Отобразить на графике фактические данные, расчетные и прогнозные.

ОБРАЗЕЦ ВЫПЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ»

Задание 4.1

В таблице 4.5 приведены данные (условные) об объёме производства продукции $Y(t)$ за 12 месяцев.

Таблица 4.5

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Y(t)$	55	57	57	59	57	60	63	66	64	67	70	73

Требуется.

1. Провести расчёт параметров линейного тренда $y = a \cdot t + b$.
2. Оценить адекватность построенной модели на основе исследования:

а) случайности остаточной компоненты по критерию пиков,

б) независимости уровней ряда остатков по d-критерию (критические значения: $d_1 = 0{,}97$ и $d_2 = 1{,}33$) или по первому коэффициенту автокорреляции, при критическом значении $r_1 = 0{,}36$,

в) нормальности распределения остаточной компоненты по RS-критерию с критическими значениями от 2,87 до 3,9.

3. Найти коэффициенты автокорреляции 1-го и 2-го порядков.
4. Рассчитать коэффициенты корреляции, детерминации и среднюю ошибку аппроксимации.
5. Построить графики ряда динамики и тренда.
6. Сделать вывод.

Решение.

1. Расчёт параметров линейного тренда проведём, используя ППП *Excel* , надстройки Анализ данных, инструменты Корреляция и Регрессия. Результаты получим в таблице 4.6.

Таблица 4.6.

№	t	y
1	1	55
2	2	57
3	3	57
4	4	59
5	5	57
6	6	60
7	7	63
8	8	66
9	9	64
10	10	67
11	11	70
12	12	73
Сумма	**78**	**733**
Среднее	**6,5**	**61,083333**

Из таблицы 4.7 выписываем: $a = 1{,}5385$; $b = 52{,}3333$ Уравнение линейного тренда имеет вид: $y = 1{,}5385\, t + 52{,}3333$. Средний абсолютный прирост объёма производства продукции за месяц равен $\approx 1{,}5$ ед.

Таблица 4.7

ВЫВОД ИТОГОВ			
Регрессионная статистика			
Множественный R	0,960768923		
R-квадрат	0,923076923		
Нормированный R-квадрат	0,915384615		
Стандартная ошибка	1,679438246		
Наблюдения	12		
Дисперсионный анализ			
	df	*F*	
Регрессия	1	120	
Остаток	10		
Итого	11		
	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*
b	52,33333333	1,033622788	50,63097866
a	1,538461538	0,140441681	10,95445115

2. Качество модели определяется ее адекватностью исследуемому процессу и точностью. Модель считается адекватной, если ряд остатков обладает свойствами случайности, независимости последовательных уровней и нормальности распределения.

а) Проверку случайности проведем на основе критерия поворотных точек. Точка t является поворотной, если выполняются условия:

$E(t+1) < E(T) > E(t-1)$ или $E(t+1) > E(T) < E(t-1)$,

В этом случае в таблице 4.8 против соответствующего значения t записываем 1, в противном случае – 0. Затем вычисляем сумму поворотных точек: p и p^*: Сравниваем p и p^*, если $p > p^*$ - то ряд остатков является случайным рядом.

$$p^* = \left[2(N-2)/3 - 2\sqrt{(16N-29)/90}\right] = \left[2(12-2)/3 - 2\sqrt{(16\cdot 12-29)/90}\right] \approx [3.9] = 3$$

Таблица 4.8

№	*Yp*	*E = Y-Yp*	*Точка пов-та*	*|(Y-Yp)/Y|*	*(Y-Yp)2*	*E(t)-E(t-1)*	*(E(t)-E(t-1))2*	*E(t)*E(t-1)*
1	53,871795	1,128205128		0,02051282	1,272846811			
2	55,410256	1,58974359	1	0,02789024	2,527284681	0,461538	0,21301775	1,793557
3	56,948718	0,051282051	1	0,00089969	0,002629849	-1,538462	2,36686391	0,081525
4	58,487179	0,512820513	1	0,00869187	0,262984878	0,461538	0,21301775	0,026298
5	60,025641	-3,025641026	1	0,05308142	9,154503616	-3,538462	12,5207101	-1,551611
6	61,564103	-1,564102564	0	0,02606838	2,446416831	1,461538	2,13609467	4,732413
7	63,102564	-0,102564103	0	0,001628	0,010519395	1,461538	2,13609467	0,160421
8	64,641026	1,358974359	1	0,02059052	1,846811308	1,461538	2,13609467	-0,139382
9	66,179487	-2,179487179	1	0,03405449	4,750164366	-3,538462	12,5207101	-2,961867
10	67,717949	-0,717948718	0	0,01071565	0,515450362	1,461538	2,13609467	1,56476
11	69,25641	0,743589744	0	0,01062271	0,552925707	1,461538	2,13609467	-0,533859
12	70,794872	2,205128205		0,03020724	4,862590401	1,461538	2,13609467	1,639711
Сумма	**748**	**-3,55271E-14**	**6**	**0,24496302**	**28,20512821**	**1,076923**	**40,6508876**	**4,811966**
Сред.	**62,333333**	**-2,96059E-15**		**0,02041359**	**2,35042735**	**0,089744**	**3,38757396**	**0,400997**

Так как $p^* = 3 < p = 6$, следует что ряд остатков является случайным рядом.

б) Проверку независимости уровней ряда остатков проведем с помощью d-критерия Дарбина –Уотсона. Вычисляем коэффициент d по формуле:

$$d=\sum_{t=2}^{N}\left[E(t)-E(t-1)\right]^2:\sum_{t=1}^{N}\left(E(t)\right)^2.$$

Если $d<2$, то значение d сравнивается с двумя табличными уровнями нижним d_1 и верхним d_2. Если $d>2$,то вычисляется $d'=4-d$ и это значение сравнивается с d_1 *и* d_2. Если d или d′ находится в интервале от нуля до d_1, то уровни ряда остатков сильно автокоррелированы, а модель неадекватна. Если значение попадает в интервал от d_2 до *2,* то уровни ряда являются независимыми. Если $d_1<d<d_2$, то однозначного вывода сделать нельзя и необходимо применение других критериев. Например, вычисляем первый коэффициент автокорреляции r_1 по формуле: $r_1=\sum_{t=2}^{N}E(t)\cdot E(t-1):\sum_{t=1}^{N}\left(E(t)\right)^2.$

Если $|r_1|>r_{табл}$ (при $N=12<15$ следует что $r_{табл}=0{,}36$), то присутствие в остаточном ряду существенной автокорреляции подтверждается.

Найдем d: $d=40{,}6508876:28{,}20512821=1{,}441258741$

$d\in[1{,}33;\ 2]$ – то уровни ряда являются независимыми.

в) Проверим соответствие ряда остатков нормальному закону распределения при помощи RS – критерия: $RS=(E_{max}-E_{min}):S_E$,
где E_{max} и E_{min} максимальный и минимальный уровни ряда остатков.

S_E – среднее квадратическое отклонение ряда остатков.

$$S_E=\sqrt{\frac{N\sum\left(E(t)\right)^2-\left(\sum E(t)\right)^2}{N\cdot(N-1)}}\ ;\ S_E=\sqrt{\frac{12\cdot 28{,}20512821-\left(-3{,}55271\mathrm{E}{-}14\right)^2}{12\cdot(12-1)}}=1{,}601281538$$

$RS=(2{,}205128205+3{,}025641026):1{,}601281538=3{,}266614338$

$RS\in[2{,}87;\ 3{,}9]$, то для ряда остатков гипотеза о нормальном законе распределении подтверждается.

Точность модели оценим с помощью средней ошибки аппроксимации: $\overline{A}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{E(t)}{y}\right|\cdot 100\%$. $\overline{A}\approx 2{,}04\%<10\%$ - следовательно точность удовлетворена.

Вывод: Линейная модель адекватна исследуемому процессу, точность модели удовлетворительная.

3. Коэффициенты автокорреляции 1-го и 2-го порядков найдём по формулам:

$$r_1=\frac{\sum_{t=2}^{n}(y_t-\bar{y}_1)(y_{t-1}-\bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n}(y_t-\bar{y}_1)^2\cdot\sum_{t=2}^{n}(y_{t-1}-\bar{y}_2)^2}},\quad \bar{y}_1=\frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n}y_t,\ \bar{y}_2=\frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n}y_{t-1}.$$

$$r_2=\frac{\sum_{t=3}^{n}(y_t-\bar{y}_3)\cdot(y_{t-2}-\bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^{n}(y_t-\bar{y}_3)^2\cdot\sum_{t=3}^{n}(y_{t-2}-\bar{y}_4)^2}},\ \bar{y}_3=\frac{1}{n-2}\sum_{t=3}^{n}y_t,\ \bar{y}_4=\frac{1}{n-2}\sum_{t=3}^{n}y_{t-2}.$$

Расчёты коэффициентов автокорреляции 1-го и 2-го порядков, проведём в таблицах 4.9 и 4.10.

Находим значения:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{12-1}(57+57+59+57+60+63+66+64+67+70+73) = \frac{693}{11} = 63;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{12-1}(55+57+57+59+57+60+63+66+64+67+70) = \frac{675}{11} = 61,(36)$$

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{12-2}(57+59+57+60+63+66+64+67+70+73) = \frac{636}{10} = 63,6$$

$$\bar{y}_4 = \frac{1}{12-2}(55+57+57+59+57+60+63+66+64+67) = \frac{605}{10} = 60,5$$

Значения коэффициентов автокорреляции 1-го и 2-го порядков:

$r_1 = \dfrac{255}{\sqrt{242,5454545 \cdot 308}} \approx 0,932971231$ Коэффициент близок к 1 связь между объёмами выпускающей продукции текущего и непосредственно предшествующего месяцев тесная.

$r_2 = \dfrac{185}{\sqrt{160,5 \cdot 268,4}} \approx 0,89133909$ Коэффициент близок к 1 связь между объёмами выпускающей продукции текущего уровня и уровня сдвинутого на 2 месяца тесная.

Таблица 4.9

N	*t*	*Yt*	*Yt-1*	*Yt-Y1cp*	*Yt-1-Y2cp*	*(Yt-Y1cp) (Yt-1-Y2cp)*	*(Yt-Y1cp)^2*	*(Yt-1-Y2cp)^2*
1	1	55						
2	2	57	55	-6	-6,36363636	38,18181818	40,49586777	36
3	3	57	57	-6	-4,36363636	26,18181818	19,04132231	36
4	4	59	57	-4	-4,36363636	17,45454545	19,04132231	16
5	5	57	59	-6	-2,36363636	14,18181818	5,58677686	36
6	6	60	57	-3	-4,36363636	13,09090909	19,04132231	9
7	7	63	60	0	-1,36363636	0	1,859504132	0
8	8	66	63	3	1,636363636	4,909090909	2,67768595	9
9	9	64	66	1	4,636363636	4,636363636	21,49586777	1
10	10	67	64	4	2,636363636	10,54545455	6,950413223	16
11	11	70	67	7	5,636363636	39,45454545	31,76859504	49
12	12	73	70	10	8,636363636	86,36363636	74,58677686	100
Сумма	**78**	**748**	**675**	**0**	**0**	**255**	**242,5454545**	**308**
Среднее	**6,5**	**62,33333**	**56,25**	**0**	**0**	**21,25**	**20,21212121**	**25,66666667**

Таблица 4.10

N	*t*	*Yt*	*Yt-2*	*Yt-Y3cp*	*Yt-2-Y4cp*	*(Yt-Y3cp) (Yt-2-Y4cp)*	*(Yt-Y3cp)^2*	*(Yt-2-Y4cp)^2*
1	1	55						
2	2	57						
3	3	57	55	-6,6	-5,5	36,3	30,25	43,56
4	4	59	57	-4,6	-3,5	16,1	12,25	21,16
5	5	57	57	-6,6	-3,5	23,1	12,25	43,56
6	6	60	59	-3,6	-1,5	5,4	2,25	12,96
7	7	63	57	-0,6	-3,5	2,1	12,25	0,36
8	8	66	60	2,4	-0,5	-1,2	0,25	5,76
9	9	64	63	0,4	2,5	1	6,25	0,16
10	10	67	66	3,4	5,5	18,7	30,25	11,56
11	11	70	64	6,4	3,5	22,4	12,25	40,96
12	12	73	67	9,4	6,5	61,1	42,25	88,36
Сумма	**78**	**748**	**605**	**0**	**0**	**185**	**160,5**	**268,4**
Среднее	**6,5**	**62,33333**	**50,416667**	**0**	**0**	**15,41667**	**13,375**	**22,36667**

Графики ряда динамики и тренда приведены на рисунке 4.1.

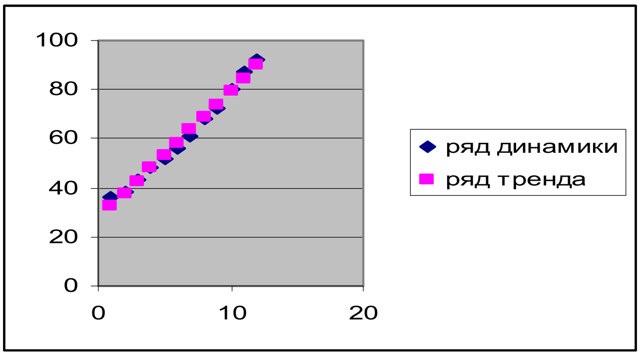

Рис. 4.1

Ответ: $r_1 \approx 0{,}997$. Коэффициент близок к 1 связь между объёмами выпускающей продукции текущего и непосредственно предшествующего уровней тесная.

$r_2 \approx 0{,}996$. Коэффициент близок к 1 связь между объёмами выпускающей продукции текущего уровня и уровня сдвинутого на 2 года тесная.

Задание 4.2

В каждом варианте таблица 4.11 приведены в условных единицах поквартальные данные z_i (i = 1,2,…,20) о кредитах от коммерческого банка на жилищное строительство. Строка соответствует году, столбец – кварталу. Сформировать свой вариант исходных данных по приведенным ниже формулам:

$$y_i = z_i + 0{,}1.$$

Таблица 4.11

квартал / год	I	II	III	IV
1	230,6	340,7	400,3	201,0
2	233,5	342,8	418,6	205,8
3	236,4	343,9	423,4	209,4
4	240,3	351,0	440,8	220,6
5	258,4	360,2	460,7	230,5

Требуется:

1. Построить адаптивную мультипликативную модель Хольта-Уинтерса с учетом сезонного фактора, приняв параметры сглаживания $\alpha_1 = 0{,}3$; $\alpha_2 = 0{,}6$; $\alpha_3 = 0{,}3$.

2. Оценить точность построенной модели с использованием средней относительной ошибки.

3. Оценить адекватность построенной модели на основе исследования:

– случайности остаточной компоненты по критерию пиков;

– независимости уровней ряда остатков по d-критерию (критические значения: d_1 = 1,20 и d_2 = 1,41) или по первому коэффициенту автокорреляции, при критическом значении r_1 = 0,32;

– нормальности распределения остаточной компоненты по *R/S*-критерию с критическими значениями от 3,18 до 4,49.

4. Построить точечный прогноз на четыре шага вперед, т. е. на один год.

5. Отобразить на графике фактические данные, расчетные и прогнозные.

Решение.

Построим аддитивную мультипликативную модель Хольта-Уинтерса Y(t) = a + b·t,

Значение a и b найдем по первым 8 точкам используя МНК

Таблица 4.12

t	y	t - tcp	y-ycp	$cov\ yt$	$var\ t$	$var\ y$	Yp
1	230,6	-3,5	-66,0625	231,21875	12,25	4364,2539	293,500000
2	340,7	-2,5	44,0375	-110,09375	6,25	1939,3014	294,403571
3	400,3	-1,5	103,6375	-155,45625	2,25	10740,731	295,307143
4	201	-0,5	-95,6625	47,83125	0,25	9151,3139	296,210714
5	233,5	0,5	-63,1625	-31,58125	0,25	3989,5014	297,114286
6	342,8	1,5	46,1375	69,20625	2,25	2128,6689	298,017857
7	418,6	2,5	121,9375	304,84375	6,25	14868,754	298,921429
8	205,8	3,5	-90,8625	-318,01875	12,25	8255,9939	299,825000
36	2373,3	0	-1,42E-13	37,95	42	55438,519	2373,3
4,5	296,6625	0	-1,78E-14	4,74375	5,25	6929,8148	296,6625

$$b = \frac{Cov(t,y)}{Var(t)} = \frac{4{,}74375}{5{,}25} = 0{,}903571;$$

$$a = \bar{y} - a_1\bar{t} = 296{,}6625 - 0{,}903571 \cdot 4{,}5 = 292{,}5964;$$

$Y(t) =\ 292{,}5964 +\ 0{,}903571 \cdot t,$

Найдем оценки начальных значений коэффициентов сезонности путем деления первых восьми фактических уровней по линейной модели с последующим их усреднением по одноименным номером кварталов.

$F_{10} = 0{,}5\ (y_1 / y_{1p} + y_5 / y_{5p}) = 0{,}5(230{,}6 / 293{,}500000 + 233{,}5 / 297{,}114286) \approx 0{,}785791$

$F_{20} = 0{,}5\ (y_2 / y_{2p} + y_6 / y_{6p}) = 0{,}5(340{,}7 / 294{,}403571 + 342{,}8 / 298{,}017857) \approx 1{,}153761$

$F_{30} = 0{,}5(y_3 / y_{3p} + y_7 / y_{7p}) = 0{,}5(400{,}3 / 295{,}307143 + 418{,}6 / 298{,}921429) \approx 1{,}377953$

$F_{40} = 0{,}5(y_4 / y_{4p} + y_8 / y_{8p}) = 0{,}5(201 / 296{,}210714 + 205{,}8 / 299{,}825000) \approx 0{,}682486$

Перебором возможных значений параметров сглаживания было установлено, что лучшими являются $\alpha_1 = 0{,}3$; $\alpha_2 = 0{,}6$; $\alpha_3 = 0{,}3$.

Расчеты параметров и оценочных значений показателя y_t (t= 1…20) проводились последовательно по формулам мультипликативной модели Хольта-Уинтерса, начиная с y_1.

Мультипликативная модель Х-У

$$Y_{t+\tau} = y_t(\tau) = (at + bt(\tau))\, F_{t-L+\tau},$$
$$a_t = \alpha_1 y_t / F_{t-L} + (l - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1}),$$
$$b_t = \alpha_3 (a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_3)\, b_{t-1},$$
$$F_t = \alpha_2 y_t / a_t + (l - \alpha_2) F_{t-L}.$$

Параметры модели на момент t=1 получили следующие значения (таблица 4.13):

$$a_1 = 0{,}3\ (230{,}6 : 0{,}785791) + 0{,}7\ (292{,}5964 + 0{,}903571) = 293{,}488631$$
$$b_1 = 0{,}3\ (293{,}488631 - 292{,}5964) + 0{,}7 \cdot 0{,}903571 = 0{,}900161$$
$$F_1 = 0{,}6\ (230{,}6 : 293{,}488631) + 0{,}4 \cdot 0{,}785791 = 0{,}785749$$
$$У_1 = (293{,}488631 + 0{,}900161) \cdot 0{,}785791 = 231{,}328184$$

для момента t=2

$$a_2 = 0{,}3\ (340{,}7 : 1{,}153761) + 0{,}7\ (293{,}488631 + 0{,}900161) = 294{,}660706$$

$$b_2 = 0{,}3\ (294{,}660706 - 293{,}488631) + 0{,}7 \cdot 0{,}900161 = 0{,}981735$$

$$F_2 = 0{,}6\ (340{,}7 : 294{,}660706) + 0{,}4 \cdot 1{,}153761 = 1{,}155251$$

$$У_2 = (294{,}660706 + 0{,}981735) \cdot 1{,}153761 = 339{,}654251$$

…………………………………………………………

Таблица 4.13

t	a_t	b_t	F_t	$Y(t)$
1	293,488631	0,900161	0,785749	231,328184
2	294,660706	0,981735	1,155251	339,654251
3	294,100728	0,519221	1,367840	407,381361
4	294,587464	0,509476	0,682380	201,073902
5	295,718488	0,695940	0,788061	231,872065
6	296,509685	0,724517	1,155771	342,433179
7	299,872916	1,516131	1,384691	406,568872
8	301,449735	1,534338	0,682573	205,661959
9	302,081896	1,263685	0,784766	238,769902
10	301,606995	0,742109	1,146444	350,598019
11	303,376040	1,050190	1,391253	418,660040
12	305,132518	1,262076	0,684785	207,793022
13	306,338005	1,245099	0,784563	240,448031
14	307,157427	1,117396	1,144219	352,626718
15	310,843387	1,887965	1,407348	428,888258
16	315,555477	2,735203	0,693365	214,153611
17	321,610079	3,731022	0,795900	249,719074
18	322,178702	2,782303	1,128496	372,261594
19	325,678715	2,997616	1,411690	457,333109
20	329,804505	3,336068	0,696685	227,892547

Модель *Х-У* имеет вид: $Y(20) = (329{,}804505 + 3{,}336068 \cdot t)F_{20-4+t}$

Оценим качество модели *Х-У:* $Y(t) = (329{,}804505 + 3{,}336068 \cdot t)\ F_{20-4+t}$,

а) Проверку случайности проведем на основе критерия поворотных точек.

$$p^* = \left[2(N-2)/3 - 2\sqrt{(16N-29)/90}\right] = \left[2(20-2)/3 - 2\sqrt{(16\cdot 20-29)/90}\right] \approx [10.2] = 10,$$

Так как $p^* = 10 < p = 13$, следует что ряд остатков является случайным рядом.

б) Проверим независимость уровней ряда (таблица 4.14):

d = 1458,241501 : 699,945220 ≈ 2,083365183> 2.

d' = 4 – d = 4 – 2,083365183 = 1,916634817

$d \in$ [1.41; 2] – уровни ряда являются независимыми.

Таблица 4.14

y-Y=E	Точка поворота	*|(y-Y)/y|*	*E2*	*E(t)-E(t-1)*	*(E(t)-E(t-1))2*	*E(t)*E(t-1)*
-0,728184		0,003158	0,530252003			
1,045749	1	0,003069	1,093590202	1,773933	3,146837143	-0,761497469
-7,081361	1	0,017690	50,14566736	-8,127109	66,04990381	-7,40532312
-0,073902	0	0,000368	0,005461519	7,007458	49,10447419	0,523327346
1,627935	1	0,006972	2,650172158	1,701837	2,896249265	-0,120307794
0,366821	1	0,001070	0,13455731	-1,261114	1,590409517	0,597159975
12,031128	1	0,028741	144,7480304	11,664307	136,0560583	4,413264731
0,138041	0	0,000671	0,019055356	-11,893086	141,4455047	1,660790541
-2,369902	0	0,010025	5,616433744	-2,507943	6,289776937	-0,327143918
-6,698019	1	0,019477	44,86346394	-4,328118	18,73260345	15,87364712
4,739960	1	0,011195	22,46721959	11,437979	130,8273699	-31,7483432
1,606978	0	0,007674	2,58237762	-3,132982	9,815576725	7,617010244
-0,148031	0	0,000616	0,021913313	-1,755009	3,080057465	-0,237883266
-1,626718	1	0,004635	2,646212137	-1,478687	2,18651451	0,240805469
11,911742	1	0,027023	141,8896003	13,538460	183,289908	-19,37704782
6,446389	1	0,029222	41,55593034	-5,465353	29,87008537	76,78772262
8,680926	1	0,033595	75,35846905	2,234537	4,993154036	55,96062268
-12,061594	1	0,033486	145,4820464	-20,742519	430,252113	-104,7057988
3,366891	1	0,007308	11,3359576	15,428485	238,038157	-40,61007646
2,607453		0,011312	6,798809168	-0,759439	0,576747238	8,779009765
23,782300	**13**	**0,257307**	**699,945220**	**3,335637**	**1458,241501**	**-32,840061**

в) Проверим соответствие ряда остатков нормальному закону распределения

$$S_E = \sqrt{\frac{N\sum(E(t))^2 - \left(\sum E(t)\right)^2}{N\cdot(N-1)}} = \sqrt{\frac{20\cdot 699{,}945220 - (23{,}782300)^2}{20\cdot 19}} = 5{,}945654451$$

RS = (12,031128 + 12,061594) : 5,945654451= 4,052156347 $\in$ [3.18; 4,49], то для ряда остатков гипотеза о нормальном законе распределении не отвергается

Оценим точность модели: $\overline{A} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{E(t)}{y}\right|\cdot 100\%$ ≈ 1,3 % < 10% - следовательно точность удовлетворена.

Вывод: модель адекватна к исследуемому процессу.

Найдем прогнозное значение на 4 шага вперед, то есть на год.

Получена модель $Y(20) = (329{,}804505 + 3{,}336068\cdot t)F_{20-4+t}$

t=21 $Y_{21} = Y_{20}(1) = (329{,}804505 + 3{,}336068 \cdot 1)\cdot 0{,}795900 = 265{,}146456$, в 21-м квартале кредит от коммерческого банка на жилищное строительство составит 265,15 у.е.

t=22 $Y_{22} = Y_{20}(2) = (329{,}804505 + 3{,}336068 \cdot 2)\cdot 1{,}128496 = 379{,}712406$, в 22-м квартале кредит от коммерческого банка на жилищное строительство составит 379,71 у.е.

$t=23$ $Y_{23} = Y_{20}(3) = (329{,}804505 + 3{,}336068 \cdot 3) \cdot 1{,}411690 = 479{,}710082$, в 23-м квартале кредит от коммерческого банка на жилищное строительство составит 479,71 у.е.

$t=24$ $Y_{24} = Y_{20}(4) = (329{,}804505 + 3{,}336068 \cdot 4) \cdot 0{,}696685 = 239{,}066670$, в 24-м квартале кредит от коммерческого банка на жилищное строительство составит 239,07 у.е.

ЛИТЕРАТУРА

1. Экономико-математические методы и модели / Под ред. А.В. Кузнецова. Мн.: БГЭУ, 1999.
2. Эконометрика, учебник для бакалавриата и магистратуры. Под редакцией члена-корр. РАН И.И. Елисеевой. Москва, Юрайт, 2015.
3. Эконометрика. Учебник/ Под ред. И.И. Елисеевой. М.: Финансы и статистика, 2007.
4. Практикум по эконометрике. Учеб.пособие / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Н.М. Гордеенко и др./ Под ред. И.И, Елисеевой. М.: Финансы и статистика, 2005.
5. Доугерти К. «Введение в эконометрику». Пер. с англ. М.:ИНФРА-М, 1999.
6. Спиридонова Г.В., Макаров П.В., Семенова Н.В., Журжи И.И. «Эконометрика». Лабораторный практикум. Издание второе , переработанное и дополненное. Тирасполь, изд. ПГУ, 2016.
7. Статистический ежегодник Приднестровской Молдавской Республики – 2005 (2009, 2013, 2017): Статистический сборник за 2000-2004 гг. (2004-2008; 2008-2012; 2012-2016 гг.) / Государственная служба статистики Министерства экономики ПМР.– Тирасполь, 2005 (209, 2013, 2017).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Таблица значений F-критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$
$k_1 = m$; $k_2 = n - m - 1$

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18

200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1

Критические значения t-критерия Стьюдента

Число степеней свободы d.f.	α			Число степеней свободы d.f.	α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2.9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебно-методическое издание

Спиридонова Галина Васильевна,

Леонова Наталья Григорьевна,

Семёнова Наталья Вячеславовна,

Журжи Инна Ивановна

ЭКОНОМЕТРИКА,
ПРОДВИНУТЫЙ КУРС

Методические указания по выполнению контрольной работы

Усл. печ. л. 4.0.

Тирасполь ПГУ им. Т. Г. Шевченко