

Практическое занятие №7

**ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ДВУХФАКТОРНОГО
ПОЛЕВОГО ОПЫТА, ПРОВЕДЕННОГО МЕТОДОМ
РЕНДОМИЗИРОВАННЫХ ПОВТОРЕНИЙ**

Пример. Влияние способов возделывания на урожайность сортов капусты (т/га).

Способ возделывания (Фактор А)	Сорт капусты (Фактор В)	Повторения, X			
		1	2	3	4
Рассадный	Волна	65,2	67,4	62,3	66,1
	Арривист	74,7	77,2	71,9	76,4
	Вестри	87,5	89,1	85,3	86,9
Безрассадный	Волна	50,1	47,2	49,4	53,5
	Арривист	61,4	64,1	65,2	59,3
	Вестри	68,7	70,4	65,4	69,1

В опыте изучаются 2 фактора и их взаимодействие:

фактор А – способ выращивания капусты

фактор В – сорт капусты

фактор АВ – взаимодействие факторов А и В.

В двухфакторном опыте проверяется 3 нулевые гипотезы: по фактору А, по фактору В и по их взаимодействию. В нашем примере нулевые гипотезы формулируются следующим образом:

по фактору А – *способ возделывания не влияет на урожайность капусты;*

по фактору В – *урожайность изучаемых сортов капусты существенно не различается;*

по фактору АВ – *изучаемые факторы не взаимодействуют.*

Для проверки нулевых гипотез проводим дисперсионный анализ.

Дисперсионный анализ многофакторного опыта проводится в два этапа.

I. На первом этапе данные опыта обрабатываются также как и в проведении однофакторного опыта.

1. Заполняем вспомогательную таблицу:

Способ возделывания (Фактор А)	Сорт капусты (Фактор В)	Повторения, X				Суммы, V	Средние. \bar{x}
		1	2	3	4		
Рассадный	Волна	65,2	67,4	62,3	66,1	261,0	65,2
	Арривист	74,7	77,2	71,9	76,4	300,2	75,0
	Вестри	87,5	89,1	85,3	86,9	348,8	87,2
Безрассадный	Волна	50,1	47,2	49,4	53,5	200,2	50,0
	Арривист	61,4	64,1	65,2	59,3	250,0	62,5
	Вестри	68,7	70,4	65,4	69,1	273,6	68,4
Суммы, P		407,6	415,4	399,5	411,3	$\sum X = 1633,8$	-

Проверим правильность заполнения таблицы: сумма сумм значений признака по вертикали должна быть равна сумме сумм значений признака по горизонтали, т.е. $\sum X = 407,6 + 415,4 + 399,5 + 411,3 = 261,0 + 300,2 + 348,8 + 200,2 + 250,0 + 273,6 = 1633,8$

2. Рассчитываем суммы квадратов:

$$\sum X^2 = 65,2^2 + 67,4^2 + 62,3^2 + 66,1^2 + 74,7^2 + 77,2^2 + 71,9^2 + 76,4^2 + 87,5^2 + 89,1^2 + 85,3^2 + 86,9^2 + 50,1^2 + 47,2^2 + 49,4^2 + 53,5^2 + 61,4^2 + 64,1^2 + 65,2^2 + 59,3^2 + 68,7^2 + 70,4^2 + 65,4^2 + 69,1^2 = 4251,0 + 4542,8 + 3881,3 + 4369,2 + 5580,1 + 5959,8 + 5169,6 + 5837,0 + 7656,2 + 7938,8 + 7276,1 + 7551,6 + 2510,0 + 2227,8 + 2440,4 + 2862,2 + 3767,0 + 4108,8 + 4251,0 + 3516,5 + 4719,7 + 4956,2 + 4277,2 + 4774,8 = 114425,1$$

$$\sum V^2 = 261,0^2 + 300,2^2 + 348,8^2 + 200,2^2 + 250,0^2 + 273,6^2 = 68121,0 + 90120,0 + 121661,4 + 40080,0 + 62500,0 + 74857,0 = 457339,4$$

$$\sum P^2 = 407,6^2 + 415,4^2 + 399,5^2 + 411,3^2 = 166137,8 + 172557,2 + 159600,2 + 169167,7 = 667462,9$$

3. Проводим дисперсионный анализ

Определяем общее число наблюдений $N = la \cdot lb \cdot n = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

la – число градаций фактора А; lb – число градаций фактора В;

n – количество повторений

Корректирующий фактор:

$$C = (\sum X)^2 : N = 1633,8^2 : 24 = 2669302,4 : 24 = 111220,9$$

Суммы квадратов отклонений:

общая $C_y = \sum X^2 - C = 114425,1 - 111220,9 = \mathbf{3204,2}$

вариантов

$C_v = \sum V^2 \div n - C = 457339,4 : 4 - 111220,9 = 114334,8 - 111220,9 = \mathbf{3113,9}$

повторений

$C_p = \sum P^2 \div (la \cdot lb) - C = 667462,9 : (2 \times 3) - 111220,9 = 667462,9 : 6 - 111220,9 = 111243,8 - 111220,9 = \mathbf{22,9}$

остатка $C_z = C_y - C_v - C_p = 3204,2 - 3113,9 - 22,9 = \mathbf{67,4}$

Степени свободы:

общее число $\nu_y = N - 1 = 24 - 1 = 23$

для вариантов $\nu_v = la \cdot lb - 1 = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

для повторений $\nu_p = n - 1 = 4 - 1 = 3$

остатка $\nu_z = \nu_y - \nu_v - \nu_p = 23 - 5 - 3 = 15$

4. Составляем таблицу дисперсионного анализа:

Виды варьирования	Сумма квадратов	Степени свободы	Дисперсия	Ффакт	F ₀₅
Общая	3204,2	23	-	-	-
Вариантов	3113,9	5	622,8	138,4	2.90
Повторений	22,9	3	-	-	-
Случайное (остаток)	67,4	15	4,5	-	-

Дисперсия, или средний квадрат вариантов рассчитывается как отношение суммы квадратов отклонений вариантов к степеням свободы

вариантов, т.е. $S_v^2 = \frac{3113,9}{5} = 622,8$.

Дисперсия, или средний квадрат остатка рассчитывается как отношение суммы квадратов отклонений остатка к степеням свободы

остатка, т.е. $S_z^2 = \frac{67,4}{15} = 4,5$.

Фактическое значение критерия Фишера рассчитывается по формуле

$$F = \frac{S_v^2}{S_z^2} = \frac{622,8}{4,5} = 138,4$$

Теоретическое значение критерия Фишера берется из статистической таблицы для 5% уровня значимости и числа степеней свободы вариантов и остатка. При $v_v=5$ и $v_z=15$ $F_{05}=2.90$

Фактическое значение критерия Фишера больше, чем теоретическое, следовательно, нулевая гипотеза отвергается и между вариантами есть существенные различия. Т.к. между вариантами есть существенные различия, переходим ко второму этапу дисперсионного анализа.

II. Алгоритм второго этапа дисперсионного анализа полевого опыта зависит от метода размещения вариантов по делянкам опыта. Если опыт заложен методом рендомизированных повторений, на компоненты делится только варьирование вариантов и число степеней свободы вариантов. Количество компонентов зависит от количества изучаемых факторов.

5. Вычисляем суммы квадратов отклонений для факторов А, В и взаимодействия АВ.

Таблица для определения влияния главных эффектов и взаимодействий

А (способ возделывания)	В (сорта)			Суммы А
	Волна	Арривист	Вестри	
Рассадный	261,0	300,2	348,8	910,0
Безрассадный	200,2	250,0	273,6	723,8
Суммы В	461,2	550,2	622,4	$\sum X=1633,8$

Заносим в таблицу суммы значений признака по вариантам, которые берем из первой вспомогательной таблицы (графа «Суммы, V»). Складываем суммы по вертикали и по горизонтали. Проверяем правильность расчетов: сумма сумм значений признака по вертикали равна сумме сумм значений признака по горизонтали и равна $\sum X$, рассчитанной на первом этапе. Т.е. $\sum X=461,2+550,2+622,4=910,0+723,8=1633,8$

Суммы квадратов отклонений:

фактора А

$$C_A = \sum A^2 \div (lb \cdot n) - C = (910,0^2 + 723,8^2) \div (3 \cdot 4) - 111220,9 = (828100,0 + 523886,4) \div 12 - 111220,9 = 1351986,4 \div 12 - 111220,9 = 112665,5 - 111220,9 = 1444,6$$

фактора В

$$C_B = \sum B^2 \div (la \cdot n) - C = (461,2^2 + 550,2^2 + 622,4^2) \div (2 \cdot 4) - 111220,9 =$$

$$= (212705,4 + 302720,0 + 387381,8) \div 8 - 111220,9 = 902807,2 \div 8 - 111220,9 =$$

$$= 112850,9 - 111220,9 = 1630,0$$

взаимодействия АВ $C_{AB} = C_V - C_A - C_B = 3113,9 - 1444,6 - 1630,0 = 39,3$

Степени свободы:

для фактора А $v_A = la - 1 = 2 - 1 = 1$

для фактора В $v_B = lb - 1 = 3 - 1 = 2$

для взаимодействия АВ $v_{AB} = (la - 1) \cdot (lb - 1) = (2 - 1) \cdot (3 - 1) = 2$

6. Составляем таблицу дисперсионного анализа

Виды варьирования	Сумма квадратов	Степени свободы	Дисперсия	Fфакт	F ₀₅
Фактора А	1444,6	1	1444,6	321,0	4,54
Фактора В	1630,6	2	815,3	181,2	3,60
Взаимодействия АВ	39,3	2	19,6	4,3	3,60
Остаток	67,4	15	4,5	-	-

Значение F₀₅ берем из статистической таблицы, исходя из степеней свободы для дисперсии главных эффектов факторов А, В и взаимодействия АВ и остатка.

Определяем фактическое значение критерия Фишера:

для фактора А $F_A = \frac{S_A^2}{S_z^2} = \frac{1444,6}{4,5} = 321,0$

для фактора В $F_B = \frac{S_B^2}{S_z^2} = \frac{815,3}{4,5} = 181,2$

для взаимодействия АВ $F_{AB} = \frac{S_{AB}^2}{S_z^2} = \frac{19,6}{4,5} = 4,3$

Теоретическое значение критерия Фишера:

для фактора А при v_A=1 и v_z=15 F₀₅=**4,54**

для фактора В при v_B=2 и v_z=15 F₀₅=**3,60**

для взаимодействия АВ при v_{AB}=2 и v_z=15 F₀₅=**3,60**

Проводим попарно сравнение фактического и теоретического значения критериев Фишера:

Для фактора А фактическое значение критерия Фишера больше, чем теоретическое, следовательно, нулевая гипотеза отвергается и между вариантами есть существенные различия, т.е. способ возделывания культуры существенно влияет на урожайность капусты.

Для фактора В фактическое значение критерия Фишера больше, чем теоретическое, следовательно, нулевая гипотеза отвергается и между вариантами есть существенные различия, т.е. сорта капусты существенно различаются по урожайности.

Для взаимодействия АВ фактическое значение критерия Фишера больше, чем теоретическое, следовательно, нулевая гипотеза отвергается и между вариантами есть существенные различия, т.е. факторы взаимодействуют.

Т.к. между вариантами есть существенные различия определяем наименьшую существенную разность (НСР).

7. Для оценки существенности частных различий (взаимодействие АВ) определяем:

а) ошибку разности средних:

$$s_d = \sqrt{\frac{2s_z^2}{n}} \sqrt{\frac{2 \cdot 4,5}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{2,25} = 1,5$$

в) наименьшую существенную разность для взаимодействия АВ на 5% уровне значимости:

$$НСР_{05} = t_{05} \cdot s_d = 2,13 \cdot 1,5 = 3,2$$

Значение критерия t_{05} берут из статистической таблицы для числа степеней свободы ошибки. При $v_z=15$ $t_{05}=2.13$

7. Для оценки существенности главных эффектов вычисляем:

а) ошибку разности средних для фактора А:

$$s_d^A = \sqrt{\frac{2s_z^2}{n \cdot lb}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,5}{4 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{9}{12}} = \sqrt{0,75} = 0,9$$

б) ошибку разности средних для фактора В:

$$s_d^B = \sqrt{\frac{2s_z^2}{n \cdot la}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,5}{4 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = \sqrt{1,12} = 1,1$$

в) наименьшую существенную разность для фактора А:

$$НСР_{05}^A = t_{05} \cdot s_d^A = 2,13 \cdot 0,9 = 1,9$$

с) наименьшую существенную разность для фактора В:

$$HCP_{05}^B = t_{05} \cdot s_d^B = 2,13 \cdot 1,1 = 2,3$$

8. Составляем итоговую таблицу. В таблицу заносим средние значения признака по вариантам из первой вспомогательной таблицы (графа «Средние, \bar{x} »). Затем находим средние значения из средних.

**Влияние способов возделывания на урожайность
сортов капусты (т/га).**

Способ возделывания (фактор А)	Сорт капусты (фактор В)			Средние по фактору А
	Волна	Арривист	Вестри	
Рассадный	65,2	75,0*	87,2*	75,8
Безрассадный	50,0	62,5	68,4	60,3
Средние по фактору В	57,6	68,8	77,8	-

$$HCP_{05}^A = 1.9$$

$$HCP_{05}^B = 2.3$$

$$HCP_{05} = 3,2$$

1. С помощью $HCP_{05}^A = 1.9$ сравниваем средние по фактору А, т.е. значения 75,8 и 60,3. Находим разность $d=75,8-60,3=15,5$. Разность между средними больше НСР, следовательно, между вариантами есть существенные различия.

2. С помощью $HCP_{05}^B = 2.3$ сравниваем средние по фактору В, т.е. значения 57,6; 68,8 и 77,8. Разность по урожайности между сортами Волна и Арравист $68,8-57,6=11,2$, она больше НСР, следовательно, по урожайности сорт Арравист существенно превосходит сорт Волна; разность по урожайности между сортами Арравист и Вестри $77,8-68,8=11,0$, она больше НСР, следовательно, сорт Вестри по урожайности существенно превосходит сорта Волна и Арравист.

3. С помощью $HCP_{05} = 3,2$ сравниваем средние значения признака, взятые из вспомогательной таблицы. Нецелесообразно сравнивать попарно 6 значений признака, поэтому выбираем самые высокие значения и сравниваем их между собой. Отмечаем самые высокие значения звездочками, находи между ними разность: $87,2-75,0=12,2$. Разность больше НСР, следовательно, она существенна.

Вывод:

- 1. При возделывании капусты рассадным способом урожайность существенно выше, чем при возделывании безрассадным способом.**
- 2. Сорт Вестри по урожайности существенно превосходит сорта Арравист и Волна; урожайность сорта Арравист существенно выше, чем у сорта Волна.**
- 3. Максимальная доказуемая урожайность отмечена при выращивании сорта Вестри рассадным способом.**

Задание. Согласно примера и N задания провести дисперсионный анализ данных двухфакторного полевого опыта, проведенного методом рендомизированных повторений

Шифр задания к работе

N задания	Фактор		Повторение	N задания	Фактор		Повторение
	А	В			А	В	
1	0 1 2	0 1	1 2 3 4	21	01	01 2	1 2 3 4
2	0 1 2	0 1	2 3 4 5	22	01	01 2	2 3 4 5
3	0 1 2	0 1	3 4 5 6	23	01	01 2	3 4 5 6
4	0 1 2	0 1	1 3 5 6	24	01	01 2	1 3 5 6
5	0 1 2	0 1	2 4 5 6	25	01	01 2	2 4 5 6
6	0 1 2	0 1	1 4 5 6	26	01	01 2	1 4 5 6
7	0 1 2	0 1	1 2 4 6	27	01	01 2	1 2 4 6
8	0 1 2	0 1	1 3 4 5	28	01	01 2	1 3 4 5
9	0 1 2	0 1	2 3 4 6	29	01	01 2	2 3 4 6
10	0 1 2	0 1	2 3 5 6	30	01	01 2	2 3 5 6
11	0 1 2	1 2	1 2 3 4	31	1 2	0 1 2	1 2 3 4
12	0 1 2	1 2	2 3 4 5	32	1 2	0 1 2	2 3 4 5
13	0 1 2	1 2	3 4 5 6	33	1 2	0 1 2	3 4 5 6
14	0 1 2	1 2	1 3 5 6	34	1 2	0 1 2	1 3 5 6
15	0 1 2	1 2	2 4 5 6	35	1 2	0 1 2	2 4 5 6
16	0 1 2	1 2	1 4 5 6	36	1 2	0 1 2	1 4 5 6
17	0 1 2	1 2	1 2 4 6	37	1 2	0 1 2	1 2 4 6
18	0 1 2	1 2	1 3 4 5	38	1 2	0 1 2	1 3 4 5
19	0 1 2	1 2	2 3 4 6	39	1 2	0 1 2	2 3 4 6
20	0 1 2	1 2	2 3 5 6	40	1 2	0 1 2	2 3 5 6

Пример 1. Влияние различных видов удобрений и норм орошения на лежкость плодов томата сорта Марьюшка (% стандартных плодов после хранения)

Фактор А (ороше- ние)	Фактор В (удобре- ния)	Повторения, X					
		1	2	3	4	5	6
0	0	79	82	71	78	84	73
	1	77	83	80	70	72	74
	2	70	68	74	78	62	65
1	0	84	89	81	79	80	77
	1	79	81	75	84	72	83
	2	92	88	97	91	87	95
2	0	92	98	87	91	89	97
	1	83	88	79	75	90	85
	2	86	81	92	89	79	87

Фактор А: 0 - без орошения;

1 – поливная норма 470 м³/га;

2 – поливная норма 640 м³/га.

Фактор В: 0 – без удобрений;

1 – минеральные удобрения вразброс;

2 – минеральные удобрения локально.

Пример 2. Влияние регуляторов роста на урожайность сортов томата (т/га)

Фактор А (сорт)	Фактор В (регулятор роста)	Повторения, X					
		1	2	3	4	5	6
0	0	82,9	78,4	85,2	83,4	80,2	77,8
	1	89,6	92,4	87,9	86,7	91,7	93,5
	2	95,6	98,2	94,8	93,2	97,1	96,6
1	0	66,6	62,9	65,1	68,2	69,1	67,2
	1	73,3	73,9	70,1	76,8	75,2	77,1
	2	75,6	79,2	75,3	74,8	79,0	76,3
2	0	78,1	80,2	79,4	83,1	82,9	79,1
	1	89,7	94,5	85,1	87,2	88,4	93,7
	2	97,1	95,2	94,1	98,0	92,4	91,9

Фактор А: 0 - Факел;

1 – Баллада;

2 – Дар.

Фактор В: 0 – без обработки;

1 – Завязь;

2 – Циркон.

Выполнение работы

1. Составляем вспомогательную таблицу.

Фактор А	Фактор В	Повторения, X				Суммы, V	Средние, \bar{x}
		1	2	3	4		
Суммы P						$\sum X =$	-

2. Вычисляем суммы квадратов отклонений:

Общее число наблюдений: $N = la \cdot lb \cdot n =$

Корректирующий фактор: $C = (\sum X)^2 : N$

Суммы квадратов отклонений:

общая $C_y = \sum X^2 - C =$

вариантов $C_v = \sum V^2 \div n - C =$

повторений $C_p = \sum P^2 \div (la \cdot lb) - C =$

остатка $C_z = C_y - C_v - C_p =$

Степени свободы:

общее число $\nu_y = N - 1 =$

для вариантов $\nu_v = la \cdot lb - 1 =$

для повторений $\nu_p = n - 1 =$

остатка $\nu_z = \nu_y - \nu_v - \nu_p =$

3. Составляем таблицу дисперсионного анализа:

Виды варьирования	Сумма квадратов	Степени свободы	Дисперсия	Fфакт	F ₀₅
Общая			-	-	-
Вариантов					
Повторений			-	-	-
Остаток				-	-

4. Вычисляем суммы квадратов отклонений для факторов А, В и взаимодействия АВ.

Таблица для определения главных эффектов и взаимодействий

А	В			Суммы А
Суммы В				$\sum X =$

Суммы квадратов отклонений:

фактора А $C_A = \sum A^2 \div (lb \cdot n) - C =$

фактора В $C_B = \sum B^2 \div (la \cdot n) - C =$

взаимодействия АВ $C_{AB} = C_V - C_A - C_B$

Степени свободы:

для фактора А $\nu_A = la - 1$

для фактора В $\nu_B = lb - 1$

для взаимодействия АВ $\nu_{AB} = (la - 1) \cdot (lb - 1)$

5. Составляем таблицу дисперсионного анализа

Виды варьирования	Сумма квадратов	Степени свободы	Дисперсия	Fфакт	F ₀₅
Фактора А					
Фактора В					
Взаимодействия АВ					
Остаток				-	-

Значение F₀₅ берем из статистической таблицы, исходя из степеней свободы для дисперсии главных эффектов А, В и взаимодействия АВ и остатка.

6. Для оценки существенности частных различий определяем:

а) ошибку разности средних:

$$s_d = \sqrt{\frac{2s_z^2}{n}}$$

в) наименьшую существенную разность для 5% уровня значимости:

$$HCP_{05} = t_{05} \cdot S_d$$

7. Для оценки существенности главных эффектов и взаимодействия вычисляем:

а) ошибку разности средних для фактора А:

$$s_d^A = \sqrt{\frac{2s_z^2}{n \cdot lb}}$$

б) ошибку разности средних для фактора В:

$$s_d^B = \sqrt{\frac{2s_z^2}{n \cdot la}}$$

в) наименьшую существенную разность для фактора А:

$$HCP_{05}^A = t_{05} \cdot s_d^A$$

с) наименьшую существенную разность для фактора В:

$$HCP_{05}^B = t_{05} \cdot s_d^B$$

8. Составляем итоговую таблицу (записываем название таблицы согласно примера):

Фактор	фактор В			Средние по фактору А
Средние по фактору В				-

$$HCP_{05} =$$

$$HCP_{05}^A =$$

$$HCP_{05}^B =$$

Вывод:

Контрольные вопросы к работе:

1. В чем преимущество многофакторных опытов перед однофакторными?
2. Во сколько этапов проводится дисперсионный анализ многофакторных опытов?
3. В каком случае переходят ко второму этапу?
4. От чего зависит схема второго этапа?
5. Сколько значений НСР рассчитывается при проведении ДА двухфакторного опыта, заложенного методом рандомизированных повторений? Для оценки влияния каких факторов они используются?