Практическое занятие

Определение доверительных границ рассеивания и относительной ошибки для заданных условий

2.9. Доверительная граница рассеивания и относительная ошибка

Количественные характеристики показателей надежности (среднее значение, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации), полученные в результате обработки опытной информации, должны быть перенесены на другие совокупности машин, работающие в других условиях.

Изменение числа машин в совокупности и условий их эксплуатации вызовет изменение количественных характеристик показателя надежности. Однако, несмотря на случайный характер, характеристики показателя надежности рассеиваются в определенных границах. Так, одиночное значение показателя надежности конкретной машины может отличаться в 997 случаях из 1000 от $\bar{t}$ на величину $\pm 3\sigma$ при законе нормального распределения и на величину от $0,1a$ до $2,5a$ при законе распределения Вейбулла (где a – параметр закона распределения Вейбулла).

Такая высокая степень доверия расчета, охватывающего 99,7 % всех случаев, при расчете показателей надежности машин считается излишней. Поэтому степень доверия расчета обычно принимают меньше 99,7 % и тем самым сближают границы рассеивания одиночного показателя надежности.

Степень доверия расчета (рис.2.17) оценивают площадью под дифференциальной кривой, ограниченной осью абсцисс и доверительными границами $t_\beta^{н}$ и $t_\beta^{в}$. Площадь β характеризует степень доверия расчета и гарантирует заданную вероятность попадания показателя надежности в соответствующий интервал его значений. Поэтому ее называют доверительной вероятностью β.

При расчете доверительных границ рассеивания показателей надежности рекомендуется принимать следующие значения доверительных вероятностей β: 0,80; 0,90; 0,95; 0,99.

Интервал, в который при заданной доверительной вероятности β попадает 100β % общего числа объектов совокупности N, называют *доверительным интервалом* I_β.

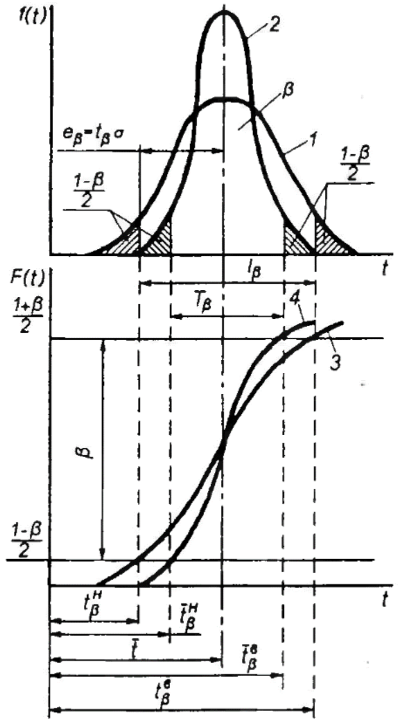

Рис.2.17. Доверительные границы одиночного и среднего значений показателя надежности:
***1* и *3* – дифференциальная и интегральная функции одиночного значения;**
***2* и *4* – дифференциальная и интегральная функции среднего значения**

Границы, в которых может колебаться значение одиночного показателя надежности при заданной β, называют *нижней* $t_\beta^{н}$ и *верхней* $t_\beta^{в}$ доверительными границами.

Положение доверительных границ и доверительный интервал зависят от доверительной вероятности и закона распределения одиночного или среднего значения показателя надежности.

Определение доверительных границ рассеивания при законе нормального распределения. Для определения доверительных границ рассеивания одиночного значения показателя надежности при законе нормального распределения вначале находят абсолютную ошибку e_β (см. рис.2.17):

$$e_\beta = t_\beta \cdot \sigma, \qquad (2.68)$$

где t_β – коэффициент Стьюдента (принимается по данным таблицы 12 приложения).

Нижняя доверительная граница:

$$t_\beta^{н} = \bar{t} - t_\beta \sigma, \qquad (2.69)$$

где $\bar{t}$ – среднее значение показателя надежности.

Верхняя доверительная граница:

$$t_\beta^{в} = \bar{t} + t_\beta \sigma. \qquad (2.70)$$

Доверительный интервал:

$$I_\beta = t_\beta^{в} - t_\beta^{н}. \qquad (2.71)$$

Расчетная схема и физический смысл доверительных границ среднего значения показателя надежности те же, что и для одиночного показателя. Разница заключается в значении среднего квадратического отклонения.

Среднее квадратическое отклонение рассеивания среднего значения показателя надежности:

$$\sigma_{\bar{t}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \qquad (2.72)$$

где N – число точек информации, по которому определено среднее значение показателя надежности.

Нижняя доверительная граница среднего значения показателя надежности:

$$\bar{t}_\beta^{н} = \bar{t} - t_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \qquad (2.73)$$

Верхняя доверительная граница среднего значения показателя надежности:

$$\bar{t}_\beta^{\text{в}} = \bar{t} + t_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \tag{2.74}$$

Доверительный интервал среднего значения показателя надежности:

$$\bar{I}_\beta = \bar{t}_\beta^{\text{в}} - \bar{t}_\beta^{\text{н}}. \tag{2.75}$$

Пример 2.21. Эксплуатационное предприятие имеет 30 однотипных тракторов. Требуется определить, в каком диапазоне наработок будут ремонтировать их двигатели, если известно, что их количественные показатели надежности подчиняются закону нормального распределения и равны $\bar{t} = 4050$ ч, $\sigma = 925$ ч.

Решение. Задаемся доверительной вероятностью $\beta = 0{,}90$. При $N = 30$ и $\beta = 0{,}90$ по таблице 12 приложения определяем коэффициент Стьюдента $t_\beta = 1{,}70$.

Нижняя и верхняя доверительные границы по формулам (2.69) и (2.70) будут составлять:

$$t_{0,90}^{\text{н}} = 4050 - 1{,}70 \cdot 925 = 2478 \text{ ч};$$

$$t_{0,90}^{\text{в}} = 4050 + 1{,}70 \cdot 925 = 5623 \text{ ч}.$$

Доверительный интервал (см. формулу 2.71):

$$I_{0,90} = 5623 - 2478 = 3145 \text{ ч}.$$

Пример 2.22. Для примера 2.21 определить нижнюю и верхнюю доверительные границы среднего значения показателя надежности, а также доверительный интервал.

Решение. По формулам (2.73), (2.74) и (2.75) будем иметь:

$$t_{0,90}^{\text{н}} = 4050 - 1{,}70 \frac{925}{\sqrt{30}} = 3763 \text{ ч};$$

$$t_{0,90}^{\text{в}} = 4050 + 1{,}70 \frac{925}{\sqrt{30}} = 4337 \text{ ч};$$

$$I_{0,90} = 4337 - 3763 = 574 \text{ ч}.$$

Определение доверительных границ при законе распределения Вейбулла. Доверительные границы рассеивания одиночного значения показателя надежности при законе распределения Вейбулла определяют по уравнениям (см. рис.2.17):

$$t_\beta^{\text{н}} = H_{\text{к}}^{\text{в}}\left(\frac{1-\beta}{2}\right) a + C; \tag{2.76}$$

$$t_\beta^{\text{в}} = H_{\text{к}}^{\text{в}}\left(\frac{1+\beta}{2}\right) a + C, \tag{2.77}$$

где $H_{\text{к}}^{\text{в}}$ – квантиль закона распределения Вейбулла (принимается по данным таблицы 13 приложения);

a – параметр закона Вейбулла (см. формулу 2.52 и табл.5 приложения);

C – смещение рассеивания (см. формулы 2.53 и 2.54).

Доверительный интервал:

$$I_\beta = t_\beta^{\text{в}} - t_\beta^{\text{н}}. \tag{2.78}$$

Доверительные границы рассеивания среднего значения показателя надежности при законе распределения Вейбулла определяют по уравнениям:

$$\bar{t}_\beta^{\text{н}} = (\bar{t} - C)\sqrt[b]{r_3} + C; \tag{2.79}$$

$$\bar{t}_\beta^{\text{в}} = (\bar{t} - C)\sqrt[b]{r_1} + C; \tag{2.80}$$

$$\bar{I}_\beta = \bar{t}_\beta^{\text{в}} - \bar{t}_\beta^{\text{н}}. \tag{2.81}$$

где r_1 и r_3 – коэффициенты распределения Вейбулла (см. табл.12 приложения), зависящие от доверительной вероятности β и повторности информации N;

b – параметр закона распределения Вейбулла (см. формулу 2.51 и табл.5 приложения).

Пример 2.23. В результате испытаний 50 двигателей грузового автомобиля установили, что его количественные показатели подчиняются закону распределения Вейбулла и равны $\bar{t}$ = 76,5 тыс. км, σ = 27,2 тыс. км, V = 0,35. Определить доверительные границы рассеивания и доверительный интервал при C = 0.

Решение. По величине коэффициента вариации V определяем параметр Вейбулла b = 3,10 (см. табл.5 приложения). Приняв доверительную вероятность β = 0,90, определяем при N = 50, что r_1 = 1,28, r_3 = 0,80 (см. табл.12 приложения). Тогда по формулам (2.79), (2.80) и (2.81) имеем:

$$\bar{t}^{\,н}_{0,90} = 76{,}5\sqrt[3{,}1]{0{,}80} = 71{,}4 \text{ тыс. км};$$

$$\bar{t}^{\,в}_{0,90} = 76{,}5\sqrt[3{,}1]{1{,}28} = 82{,}6 \text{ тыс. км};$$

$$\bar{I}_{0,90} = 82{,}6 - 71{,}4 = 11{,}2 \text{ тыс. км}.$$

Наибольшая абсолютная ошибка переноса опытных характеристик показателя надежности при заданной доверительной вероятности равна по значению e_β в обе стороны от среднего значения показателя надежности.

Относительная предельная ошибка δ_β (%) характеризует степень точности определения среднего значения:

$$\delta_\beta = \frac{\bar{t}^{\,в}_\beta - \bar{t}}{\bar{t} - C} \cdot 100. \qquad (2.82)$$

Аналогично можно определить δ_β с учетом нижнего значения доверительной границы $\bar{t}^{\,н}_\beta$:

$$\delta_\beta = \frac{\left|\bar{t}^{\,н}_\beta - \bar{t}\right|}{\bar{t} - C} \cdot 100. \qquad (2.83)$$

Для примера 2.23 определим относительную предельную ошибку с учетом нижнего и верхнего значений доверительной границы:

$$\delta_{0,90} = \frac{82{,}6 - 76{,}5}{76{,}5} \cdot 100\% = 7{,}97\%;$$

$$\delta_{0,90} = \frac{\left|71{,}4 - 76{,}5\right|}{76{,}5} \cdot 100\% = 6{,}67\%.$$

Следует иметь в виду, что относительная ошибка не должна превышать 20%. В противном случае необходимо увеличить объем информации (выборки).