Лабораторная работа

Определение показателей надёжности для статистической совокупности графическим методом при заданном законе её распределения

Недостатком аналитических методов обработки информации является значительная трудоемкость расчетных работ. К достоинствам графических методов обработки информации относится возможность обработки всех видов информации: полной, усеченной и многократно усеченной.

Кривая накопленных опытных вероятностей или интегральная кривая теоретического закона распределения носит естественно криволинейных характер. По внешнему виду этой кривой трудно определить, какому закону подчиняется рассеивание показателя надежности, и невозможно определить параметры этого закона. Кроме того, в случае усеченной информации и известного закона распределения на такой график удается нанести только лишь начальные точки информации.

Функциональную сетку графика составляют так, чтобы нанесенная на него интегральная функция распределения была представлена прямой линией (интегральная прямая).

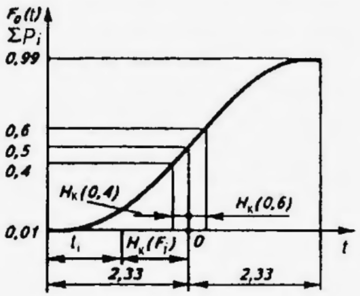

Рис.4.8. Схема определения координаты y_i при законе нормального распределения

Для выпрямления интегральной кривой используют два метода. *При первом методе* значения функции по оси ординат, например, 0,01; 0,05; 0,10; 0,20 и т.д. наносят не на равных расстояниях одно относительно другого, а пропорционально указанным квантилям.

При втором методе для выпрямления кривой функции распределения применяют логарифмическую ось координат.

Методика обработки информации графическим методом при законе нормального распределения. Выпрямление кривой функции распределения отказности при ЗНР выполняют первым методом. Для получения расчетных формул рассмотрим график центрированной и нормированной интегральной функции (рис.4.8). При этом минимальное значение функции примем $F_0(t) = 0{,}01$, максимальное $F_0(t) = 0{,}99$, так как при 0 и 1 значения функции уходят в $\pm\infty$. Нанесем эти точки на ось ординат. В таблице 11 приложения значения квантилей приведены для функций от 0,5 до 0,99, так как верхняя часть этой таблицы – зеркальное отображение ее нижней части. Квантиль $H_к(0{,}5) = 0$. Для симметрично расположенных относительно $F(t) = 0{,}5$ точки на оси ординат квантили равны между собой. Так, квантили $H_к(0{,}4) = H_к(0{,}6) = 0{,}253$, $H_к(0{,}01) = H_к(0{,}99) = 2{,}326 \approx 2{,}33$.

Для определения положения точки t_i на оси абсцисс необходимо из отрезка 2,33 вычесть или прибавить (в зависимости от положения точки относительно $H_к(0{,}5) = 0$) квантиль интегральной функции или накопленной опытной вероятности $\sum_1^i P_i$, соответствующий этой точке. Тогда координату точки по оси ординат, мм, находят так:

$$y_i = 50\left[2{,}33 \pm H_к\left(\sum_1^i P_i\right)\right], \qquad (4.24)$$

где 50 – масштаб построения оси ординат, мм/квантиль;

$\sum_1^i P_i$ – накопленная опытная вероятность i-го отказавшего объекта.

При $\sum_1^i P_i < 0{,}5 H_к\left(\sum_1^i P_i\right)$ принимают с минусом, а при $\sum_1^i P_i > 0{,}5 H_к\left(\sum_1^i P_i\right)$ – с плюсом.

Накопленная опытная вероятность:

$$\sum_1^i P_i = \frac{N_i^0}{N+1}, \qquad (4.25)$$

где N_i^0 – порядковый номер i-й точки в таблице исходной информации;

N – общее число точек в информации.

Координату точки по оси абсцисс (мм) определяют по уравнению:

$$x_i = M_x t_i, \qquad (4.26)$$

где M_x – масштаб оси абсцисс;
t_i – значение i-го показателя надежности.

Определив y_i и x_i для 6…7 точек, равномерно расположенных в таблице исходной информации, наносят эти точки на график с прямоугольными координатами (рис.4.9). Не рекомендуется за расчетные точки принимать первые и последние точки информации, так как они могут быть выпадающими. Обычно за первую расчетную точку принимают точку, накопленная опытная вероятность которой $\sum_1^i P_i = 0{,}10...0{,}15$, за последнюю – $\sum_1^i P_i = 0{,}85...0{,}95$.

Через опытные точки проводят прямую линию с таким расчетом, чтобы с каждой ее стороны располагалось одинаковое число точек, а их расстояния от прямой были примерно одинаковыми. Через точку на оси ординат $\sum_1^i P_i = 0{,}5$ (находится на расстоянии 116,5 мм от начала координат) проводят горизонтальную линию до пересечения с интегральной прямой. Из точки пересечения на ось абсцисс опускают перпендикуляр. Отрезок A на оси абсцисс соответствует в заданном масштабе среднему значению показателя надежности $\bar{t} = A$, мм / M_x.

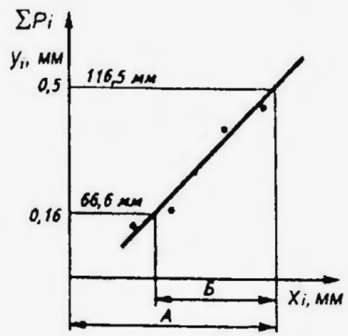

Рис.4.9. Схема определения $\bar{t}$ и σ по интегральной прямой отказности закона нормального распределения

Среднее квадратическое отклонение σ определяют графическим методом на основании уравнения:

$$\sigma = (\bar{t} - t_i) / H_{\text{к}}(F_i). \qquad (4.27)$$

При $H_{\text{к}}(F_i) = 1{,}0$ $\sigma = (\bar{t} - t_i)$. Из таблицы 11 приложения находим $H_{\text{к}}(F_i) \approx 1{,}0$ при F_i = 0,16 или F_i = 0,84. Следовательно, значение σ равно длине отрезка $Б$ (разность абсциссы A и абсциссы точки пересечения горизонтали $\sum_1^i P_i = 0{,}16$, проведенной на расстоянии 66,6 мм от начала координат). Среднее квадратическое отклонение $\sigma = Б$, мм / M_x.

Пример 4.1. Определить средний доремонтный ресурс двигателя и среднее квадратическое отклонение, если во время испытаний до наработки каждого двигателя 4200 ч из общего количества N = 69 отказали N_0 = 36 двигателей.

Решение. Решение осуществляется в следующей последовательности.

1. Составляют сводную таблицу ресурсов $T_{\text{др}}$ отказавших двигателей в порядке их возрастания (табл.4.9).

Таблица.4.9

Информация о доремонтных ресурсах двигателя $T_{\text{др}}$ (ч)

Номер отказавшего двигателя	$T_{\text{др}}$	Номер отказавшего двигателя	$T_{\text{др}}$	Номер отказавшего двигателя	$T_{\text{др}}$
1	1600	7	3060	...	...
2	2100	8	3060	24	3700
3	2100	...	....	...	...
4	2720	12	3210	30	3970
5	2900	...	...	...	...
6	2900	18	3420	36	4180

2. Выбирают из сводной таблицы информации шесть равномерно расположенных точек: 6, 12, 18, 24, 30 и 36.

3. Определяют координату выбранных точек x_i, приняв масштаб M_x = 0,05 мм/ч. Например, координата x_i для шестого двигателя $x_6 = 0{,}05 \cdot 2900 = 145$ мм.

4. Определяют накопленные опытные вероятности выбранных двигателей. Например, накопленная опытная вероятность шестого двигателя

$$\sum_1^6 P_6 = 6/(69+1) = 0{,}09.$$

5. Находят координату выбранных точек y_i по уравнению (4.24) или по таблице 12 приложения. Например, координата y_i для шестого двигателя

$$y_6 = 50\left[2{,}33 - H_к(0{,}09)\right] = 50\left[2{,}33 - 1{,}34\right] = 49{,}3 \text{ мм}.$$

Квантиль $H_к(0{,}09)$ определяют по таблице 11 приложения. Выполненные расчеты сводят в таблицу 4.10.

Таблица 4.10

Координаты опытных точек при ЗНР

Порядковый номер отказавшего двигателя N_i^0	$T_{др}$, ч	x_i, мм	$\sum_1^i P_i$	y_i, мм
6	2900	145	0,09	49,3
12	3210	160,5	0,17	68,6
18	3420	171	0,26	84,1
24	3700	185	0,34	95,7
30	3970	198,5	0,43	107,5
36	4180	209	0,52	118,8

6. Наносят опытные точки на график с прямоугольными координатами (рис.4.10) и проводят по ним интегральную прямую.

7. Рассчитывают средний доремонтный ресурс и среднее квадратическое отклонение:

$$\overline{T}_{др} = 208/0{,}05 = 4160 \text{ ч};$$

$$\sigma = 51/0{,}05 = 1020 \text{ ч}.$$

Ответ: $\overline{T}_{др} = 4160$ ч, $\sigma = 1020$ ч.

Методика обработки информации графическим методом при законе распределения Вейбулла. Интегральную кривую отказности закона распределения Вейбулла выпрямляют в интегральную прямую посредством логарифмических осей координат. Координаты опытных точек (мм) определяют по следующим уравнениям:

$$x_i = M_x \lg(t_i - C); \qquad (4.28)$$

$$y_i = M_y\left[2{,}37 + \lg\lg\frac{1}{1-\sum_1^i P_i}\right], \qquad (4.29)$$

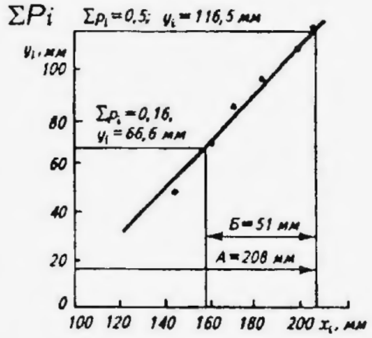

Рис.4.10. Графическая часть обработки усеченной информации по закону нормального распределения

где M_x и M_y – масштабы построения осей абсцисс и ординат;

t_i – значение показателя надежности;

C – смещение начала рассеивания показателя надежности;

$\sum_1^i P_i$ – накопленная опытная вероятность.

Уравнение (4.29) получено двойным логарифмированием интегральной функции отказности закона распределения Вейбулла

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}.$$

Накопленную опытную вероятность находят по уравнению

$$\sum_1^i P_i = N_i^0/(N+1). \qquad (4.30)$$

На график с прямоугольными осями координат (рис.4.11) наносят опытные точки, по которым проводят интегральную прямую. Через точку оси ординат, соответствующей $\sum_1^i P_i = 0{,}63$ (находится на расстоянии 100,3 мм от начала координат), проводят горизонталь до пересечения с интегральной прямой. Точку пересечения проектируют на ось абсцисс. Отрезок x_a соответствует параметру a закона распределения Вейбулла.

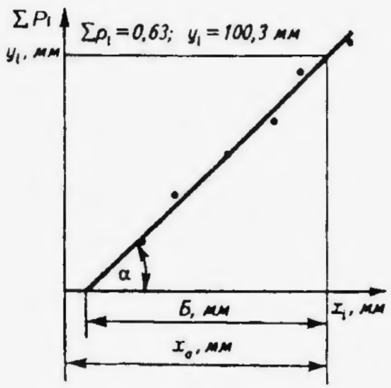

Рис.4.11. Схема определения параметров *a* и *b* закона Вейбулла

Горизонталь проводят через $\sum_1^i P_i = 0{,}63$, потому что $F(t)$, или $\sum_1^i P_i = 0{,}63$ при $(t_i - C) / a = 1$. Отсюда можно заключить, что при этом условии $t_i - C = a$.

Параметр a находят по длине отрезка x_a, используя уравнение:

$$a = \text{анти}\lg\frac{x_a}{100}. \qquad (4.31)$$

Далее интегральную прямую продляют до пересечения с осью абсцисс и получают отрезок *Б*, по длине которого вычисляют параметр b.

Параметр b можно определить как

$$tg\alpha = b = \frac{100{,}3 \cdot 2}{Б} \approx \frac{200}{Б}. \qquad (4.32)$$

Катет 100,3 мм умножаем на 2 для приведения катетов треугольника к одному масштабу.

Среднее значение показателя надежности и среднее квадратическое отклонение вычисляют по уравнениям

$$\bar{t} = a \cdot K_в + C; \qquad (4.33)$$

$$\sigma = a \cdot C_в, \qquad (4.34)$$

где $K_в$ и $C_в$ – коэффициенты, определяемые по таблице 5 приложения и значению b.

Пример 4.2. Определить средний доремонтный ресурс двигателя и среднее квадратическое отклонение по информации,

представленной в таблице 4.9, если предположить, что рассеивание ресурса подчиняется закону распределения Вейбулла.

Решение. Решение осуществляется в следующей последовательности.

1. Находят смещение рассеивания ресурса по уравнению (2.53):

$$C = T_{др1} - \frac{T_{др3} - T_{др1}}{2} = 1600 - (2100 - 1600) : 2 = 1350\,ч.$$

2. Из сводной таблицы информации выбирают шесть равномерно расположенных точек: 6, 12, 18, 24, 30 и 36.

3. Определяют координату выбранных точек x_i по уравнению (4.28). Например, для шестого двигателя

$$x_6 = 100\lg(2900 - 1350)\,ч = 100\lg 1550\,ч.$$

Для удобства построения графика примем за единицу измерения ресурса 1000 ч. Тогда

$$x_6 = 100\lg 1{,}55\,тыс.\,ч = 19{,}03\,мм.$$

4. Рассчитывают накопленные опытные вероятности по уравнению (4.30). Например, накопленная опытная вероятность шестого двигателя $\sum_1^6 P_6 = 6 / (69 + 1) = 0{,}09$.

5. Находят координату выбранных точек y_i по уравнению (4.29). Например, координата шестого двигателя

$$y_6 = 50\left(2{,}37 + \lg\lg\frac{1}{1 - 0{,}09}\right) = 50(2{,}37 + \lg\lg 1{,}10) =$$

$$= 50(2{,}37 - 1{,}376)\,мм = 49{,}7мм.$$

Координату y_i можно определить также по таблице 13 приложения.

Выполненные расчеты по всем опытным точкам сводят в таблицу 4.11.

Таблица 4.11

Координаты опытных точек при ЗРВ

Порядковый номер отказавшего двигателя N_i^0	Доремонтный ресурс $T_{\text{др}}$, ч	x_i, мм	$\sum_1^i P_i$	y_i, мм
6	2900	19,03	0,09	49,7
12	3210	27,0	0,17	64,0
18	3420	31,6	0,26	74,3
24	3700	37,1	0,34	81,3
30	3970	41,8	0,43	87,9
36	4180	45,2	0,52	93,7

6. Наносят опытные точки на график (рис.4.12) с прямоугольными координатами и проводят по ним интегральную прямую.

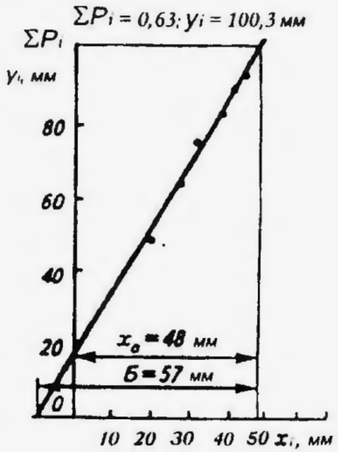

Рис.4.12. Графическая часть обработки усеченной информации по закону распределения Вейбулла

7. По длине отрезка x_a = 48 мм и формуле (4.31) определяют:

$$a = \text{анти}\lg\frac{48}{100} = 3020 \text{ ч.}$$

8. По длине отрезка $Б$ = 57 мм и формуле (4.32) находят:

$$b = 200/57 = 3{,}5.$$

9. По значению b и таблице 5 приложения определяют коэффициенты $K_{\text{в}}$ = 0,90 и $C_{\text{в}}$ = 0,29.

10. По формулам (4.33) и (4.34) вычисляют:

$$\overline{T}_{\text{др}} = 3020 \cdot 0{,}90 + 1350 = 4070 \text{ ч;}$$

$$\sigma = 3020 \cdot 0{,}29 = 876 \text{ ч.}$$

Ответ: $\overline{T}_{\text{др}}$ = 4070 ч; σ = 876 ч.