Тема: АНАЛИЗ ПРОСТЕЙШИХ ОДНОЕМКОСТНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Анализ входных воздействий в одноемкостном процессе.
2. Передаточная функция статического одноемкостного объекта.
3. Переходная характеристика статического одноемкостного объекта.
4. Анализ процессов с астатическими объектами управления.
5. Анализ процессов с неустойчивыми и безынерционными объектами управления.

1. АНАЛИЗ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ОДНОЕМКОСТНОМ ПРОЦЕССЕ

Изменение во времени выходной координаты одноемкостного процесса, характеризуется обобщенным уравнением:

$$\frac{L \cdot dy}{dt} = x \qquad (1)$$

Очевидно, условием постоянства выходной координаты объекта (y = $const$) является равенство результирующего входного воздействия x нулю:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{L} x = 0 \qquad (2)$$

Это условие характеризует установившийся (на определенном уровне) режим объекта — индекс «нуль».

В общем случае входное воздействие объектов представляет результирующий мгновенный поток вещества или энергии, состоящий из разницы между суммарным притоком $x_П = \sum_1^m x_{Пi}$ и суммарным расходом $x_P = \sum_1^m x_{Pj}$:

$$x = x_П - x_P = \sum_1^m x_{Пi} - \sum_1^m x_{Pj} \qquad (3)$$

Следовательно, при установившемся режиме объекта, то есть при $y= y_0=const$ получим:

$$x_{П(0)} - x_{P(0)} = 0 \qquad (4)$$

или

$$x_{П(0)} = x_{P(0)} = x_0 \qquad (5)$$

Предположим, что к моменту начала исследования приток численно равен расходу и объект находится в установившемся режиме при значении выходной координаты y_0. В этот момент, как на стороне притока, так и на стороне расхода может быть приложено дополнительное регулирующее или возмущающее воздействие Δx, которое должно вывести объект из установившегося состояния. Если воздействие приложено на стороне притока, то параметр должен возрастать, и наоборот.

При этом необходимо иметь в виду, что как возмущение, так и регулирующее воздействие может выполнять функции притока или расхода.

Допустим, что дополнительное воздействие на объект внесено на стороне притока. Тогда приток соответственно увеличится на какую-то величину $\Delta x_П$, и в результате получим:

$$x_П = x_{П(0)} + \Delta x_П \qquad (6)$$

При этом расход останется прежним:

$$x_P = x_{P(0)} \qquad (7)$$

С течением времени под воздействием дополнительного притока выходная координата будет возрастать. Это может вызвать изменение значений входных воздействий, если они находятся в функциональной зависимости от выходной координаты:

$$x_П = f_1(y) \qquad \text{и (или)} \qquad x_P = f_2(y)$$

Например, с увеличением температуры воздуха в помещении (выходной координаты) соответственно будет уменьшаться приток теплоты от отопительных радиаторов, и увеличиваться расход теплоты через окна и ограждения (входные величины).

Эти зависимости могут быть линейными или различной степени нелинейности.

2. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ СТАТИЧЕСКОГО ОДНОЕМКОСТНОГО ОБЪЕКТА

Передаточная функция это уравнение динамики, описывающее поведение объекта автоматизации.

Уравнение динамики, описывающее поведение простого одноемкостного объекта во времени при наличии некомпенсированного входного воздействия имеет вид:

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} + \delta \cdot \varphi = \mu \tag{8}$$

В этом уравнении коэффициент при входной координате μ равен единице. Данная форма впервые была предложена известным словацким инженером А. Стодолой, по имени которого названо это уравнение.

В уравнении Стодолы величина φ представляет выходной относительный безразмерный параметр:

$$\varphi = \frac{\Delta y}{y_0} \tag{9}$$

где Δy — отклонение выходной координаты от исходного установившегося (нулевого) значения.

Величина μ - это относительное дополнительное воздействие в начальный момент времени $t=0$:

$$\mu = \frac{\Delta x_П}{x_0} \tag{10}$$

Коэффициент T_a это время астатического разгона объекта (с, мин, ч), необходимое для заполнения емкости при полной нагрузке:

$$T_a = \frac{L \cdot y_0}{x_0} \tag{11}$$

Если нагрузка меньше полной, то соответственно скорость разгона будет меньше, а время разгона будет соответственно больше.

Коэффициент δ называют *коэффициентом статизма* или *самовыравнивания объекта* (процесса):

$$\frac{y_0}{x_0} \cdot \left[\left(\frac{dx_P}{dy} \right)_0 - \left(\frac{dx_П}{dy} \right)_0 \right] = \delta \tag{12}$$

Этот коэффициент характеризует зависимость входных воздействий объекта от выходной координаты.

Величина, обратная времени T_a называется скоростью разгона ξ при полной нагрузке и характеризует скорость относительного изменения выходной координаты процесса «y» при
$x_П = x_{П(0)} - x_0$:

$$\xi = \frac{1}{T_a} = \frac{x_0}{L \cdot y_0} \tag{13}$$

Часто пользуются другой, канонической формой уравнения динамики процесса, когда коэффициент при φ равен единице:

$$\frac{T_a}{|\delta|} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \pm \varphi = \frac{1}{|\delta|} \cdot \mu \tag{14}$$

где знак « + » для $\delta > 0$ и знак «—» для $\delta < 0$.

Каждый объект регулирования характеризуется постоянной времени Т, которая является показателем инерционности объекта и подразумевает время от начала изменения выходной регулируемой величины до момента достижения некоторого установившегося значения регулируемого параметра.

Поскольку | δ| — величина безразмерная, то при делении времени разгона T_a на δ получим *постоянную времени объекта* (процесса):

$$T = \frac{T_a}{\delta} = \frac{L}{\left(\frac{dx_P}{dy}\right)_0 - \left(\frac{dx_П}{dy}\right)_0} \tag{15}$$

В отличие от времени разгона постоянная времени не зависит непосредственно от начальных условий x_0 и y_0. С уменьшением самовыравнивания до нуля постоянная времени должна возрастать до бесконечности при конечном емкостном коэффициенте *L*.

Безразмерную положительную величину, обратную по значению коэффициенту самовыравнивания 1/|δ|, называют коэффициентом передачи объекта:

$$k = \frac{1}{|\delta|} \tag{16}$$

При наличии самовыравнивания объекта ($\delta \neq 0$) каноническая форма уравнения (14) примет вид:

$$T\frac{d\varphi}{dt} \pm \varphi = k \cdot \mu \tag{17}$$

Выполнив преобразование уравнения (17) по Лапласу, получим передаточную функцию в операторной форме для одноемкостного статического объекта:

$$W(p)_{О.У} = \frac{k}{T \cdot p + 1} \tag{18}$$

где *p* — оператор Лапласа.

3. ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СТАТИЧЕСКОГО ОДНОЕМКОСТНОГО ОБЪЕКТА

Общим решением линейного дифференциального уравнения первого порядка (уравнения Стодолы) в случае свободного движения объекта будет интеграл от φ_I при равенстве «нулю» правой части следующего уравнения:

$$T_a\frac{d\varphi}{dt} + \delta \cdot \varphi = 0 \tag{19}$$

В случае вынужденного движения объекта при наличии нескомпенсированного возмущения x_B может быть любое частное решение φ_{II} исходного уравнения.

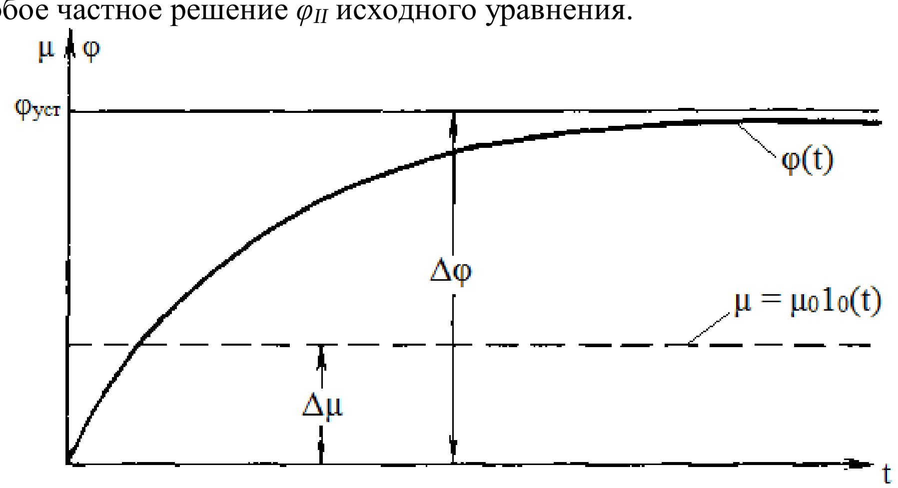

Рис. 1. Переходный процесс статического объекта

Рассмотрим важнейший случай, когда приложенное скачком внешнее воздействие сохраняется постоянным во времени (рис. 1):

$$\mu = \mu_0 1_0(t) = const \tag{20}$$

Соответствующая этому условию кривая изменения выходной координаты процесса, то есть функция $y = f(t)$ или φ = $f(t)$, называется *кривой разгона объекта.*

В начальный момент времени ($t = 0$) имеет место: $y = y_0$, $\Delta y = 0$ и $\varphi = 0$.

Тогда решение уравнения (19) примет вид:

$$\varphi = \frac{\mu_0}{\delta}\left(1 - e^{-\frac{\delta}{T}t}\right) \tag{21}$$

Уравнение (21) характеризует относительное отклонение выходной координаты процесса во времени в зависимости от внешних воздействий μ и от собственных свойств объекта, определяющихся параметрами δ и T_a.

Переходная функция, приведенная на рис. 1 при $\mu = \mu_0 1_0(t)$, будет иметь выражение:

$$h(t) = \frac{1}{\delta}\left(1 - e^{-\frac{\delta}{T}t}\right) \tag{22}$$

Исследуя уравнение (21), можно сделать вывод, что при положительном самовыравнивании ($\delta > 0$) переходный процесс идет по экспоненте и стремится к следующему пределу:

$$\varphi_{(\infty)\delta\succ 0} = \frac{\mu_0}{\delta} = k \cdot \mu_0 \tag{23}$$

Значение этого предела не зависит от постоянной времени объекта, которая влияет лишь на режим и длительность переходного процесса.

Таким образом, при $\delta < 0$, $\mu < 0$ выходная величина φ не возрастает безгранично, а уже через промежуток времени $t = \frac{T_a}{\delta} = T$ (T — постоянная времени) достигает 0,632 от будущего предельного отклонения, а при $t = 3T$ достигает 95% нового установившегося значения (рис. 2):

$$\varphi = \frac{\mu_0}{\delta}\left(1 - e^{-\frac{\delta}{T}t}\right)_{t=3T} = \frac{\mu_0}{\delta}\left(1 - e^{-3}\right) \approx 0{,}95\frac{\mu_0}{\delta} \tag{24}$$

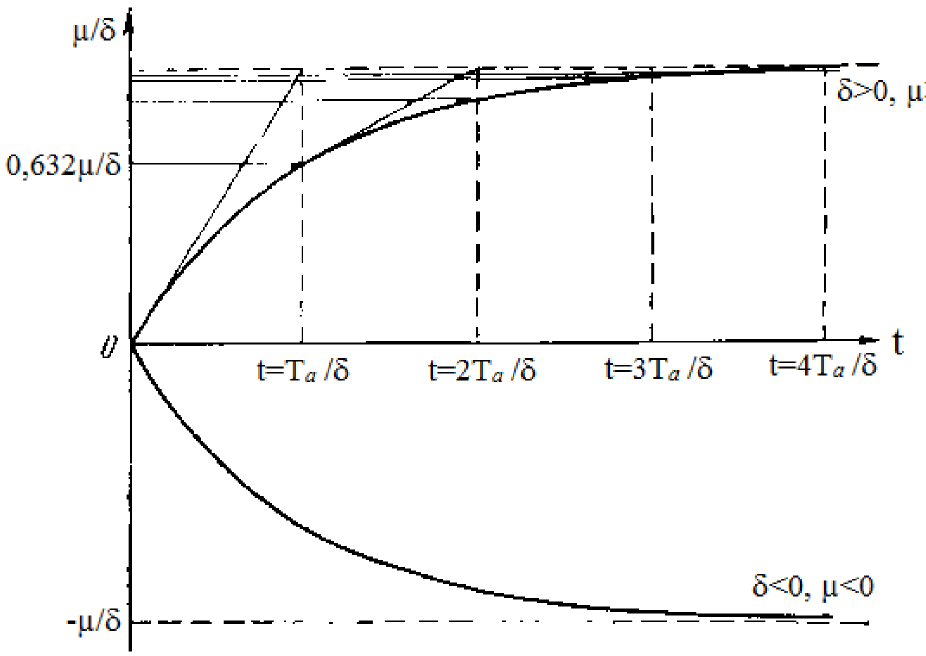

Рис. 2. Графический анализ динамических характеристик статического объекта

То обстоятельство, что при $\delta > 0$ выходная величина неизбежно приходит к новому установившемуся значению, позволяет назвать такие объекты *статическими.*

4. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ С АСТАТИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ УПРАВЛЕНИЯ

В отличие от статических объектов ($\delta > 0$) самовыравнивание астатических объектов может принимать нулевое, и даже отрицательное значение.

При отсутствии самовыравнивания объект называют нейтральным или астатическим.

Согласно уравнению (12) нулевое самовыравнивание ($\delta = 0$) теоретически возможно в двух случаях:

1) когда оба дифференциала в скобках равны нулю (входные воздействия не зависят от значения параметра);

2) при равенстве и одинаковых знаках самовыравнивания со стороны поступления $(dx_П/dy)_0$ и со стороны расхода $(dx_p/dy)_0$ вещества или энергии.

Второй случай маловероятен, поэтому практически считается, что объект имеет нулевое самовыравнивание при отсутствии зависимости от значения регулируемого параметра всех приложенных воздействий на стороне поступления и расхода, включая возмущающие и регулирующие воздействия. В формулах математического выражения таких воздействий обычно отсутствует выходная величина объекта — регулируемый параметр.

При нулевом самовыравнивании уравнение Стодолы (8) принимает вид:

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} = \mu \tag{25}$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt} = k_a \cdot \mu \tag{26}$$

где $k_a = \dfrac{1}{T_a}$ — коэффициент передачи или усиления астатического объекта, с$^{-1}$.

Передаточная функция в операторной форме для астатического объекта имеет вид:

$$W(p)_{О.У} = \frac{1}{T_a \cdot p} = \frac{k_a}{p} \tag{27}$$

При $\delta = 0$ выходная координата φ процесса безгранично возрастает во времени по линейному закону с угловым коэффициентом, равным μ_0 / T_a. За время $t = T_a$ относительное отклонение выходной координаты достигает значения соответствующего ему относительного возмущения μ_0, то есть $\varphi = \mu_0$.

Выражение переходной функции (22) в обычной форме для астатического объекта примет вид:

$$h(t) = \frac{1}{T_a} t = k_a \cdot t \tag{28}$$

Решение уравнения (8) (А. Стодолы) можно записать так:

$$\varphi = \frac{1}{T_a} \int \mu \cdot dt = k_a \int \mu \cdot dt \tag{29}$$

Последнее выражение справедливо для любого вида входных воздействий μ, в то время как функция $h(t)$ определима только при $\mu = \mu_0 1_0 / t = const$.

Таким образом, если объект нейтрален, то с внесением возмущения на его вход выходная координата будет изменяться (возрастать или убывать) по линейному закону (рис. 3). Скорость этого изменения зависит от свойств объекта, характеризуемых величиной T_a, а также от величины входного воздействия μ. Если воздействие на входе прекращается, то выходная величина останавливается на новом уровне.

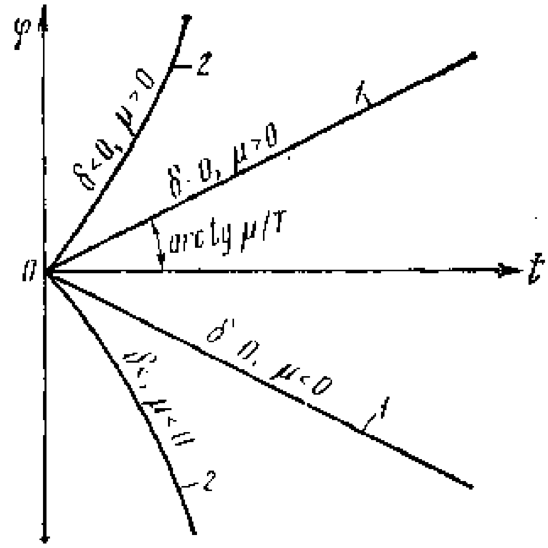

Рис. 3. Графическое выражение характеристик нейтрального *1* и неустойчивого *2* объектов

5. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ С НЕУСТОЙЧИВЫМИ И БЕЗЫНЕРЦИОННЫМИ ОБЪЕКТАМИ УПРАВЛЕНИЯ

5.1. Неустойчивые объекты управления

В неустойчивых объектах (при $\delta < 0$) изменение выходной координаты приводит не к ослаблению, а, наоборот, к усилению некоторых входных воздействий объекта, в результате чего отклонение параметра φ (кривая *2*, рис. 3) начнет неограниченно возрастать даже при устранении породившего его возмущения (по принципу цепной реакции). Такие объекты получили название неустойчивых. В сельскохозяйственном производстве такими свойствами обладают некоторые биологические процессы, как например, развитие патогенной микрофлоры или вегетация клубней картофеля.

При отрицательном коэффициенте самовыравнивания второй член левой части уравнения (14) в канонической форме имеет отрицательный знак «—»:

$$\frac{T_a}{|\delta|}\cdot\frac{d\varphi}{dt}-\varphi=\frac{1}{|\delta|}\cdot\mu \qquad (30)$$

Передаточная функция в операторной форме примет вид:

$$W(p)_{О.У}=\frac{k}{T\cdot p-1} \qquad (31)$$

5.2. Безынерционные объекты управления

Время разгона объектов T_a является характеристикой инерционности объектов. Чем больше T_a, тем медленнее изменяется выходная координата при том же входном воздействии.

При $T_а \to 0$ объект приближается к безынерционному, а дифференциальное уравнение Стодолы (8) вырождается в алгебраическое:

$$\delta\cdot\varphi=\mu \qquad \text{или} \qquad \varphi=\frac{1}{|\delta|}\cdot\mu=k\cdot\mu \qquad (32)$$

При этом выходная координата пропорциональна входной как в переходном, так и в установившемся режимах. Передаточная функция такого объекта управления выражается уравнением:

$$W(p)_{О.У}=k=\frac{\varphi}{\mu}=\frac{1}{|\delta|} \qquad (33)$$